Topological Methods in Nonlinear Analysis
Journal of the Juliusz Schauder Center
Volume 4, 1994, 197–208

RÉSULTATS DU TYPE DE LERAY-SCHAUDER POUR DES CONTRACTIONS MULTIVOQUES

MARLÈNE FRIGON — ANDRZEJ GRANAS

A Monsieur Jean Leray, en hommage respectueux

1. Introduction

En 1969, S. Nadler [14] a établi une généralisation du principe de contraction de Banach pour des contractions multivoques, i.e. des contractions d'un espace métrique complet à valeurs dans l'espace de tous les sous-ensembles fermés, bornés, non-vides de cet espace, muni de la métrique de Hausdorff. Dans cette note, nous développons la théorie de la transversalité topologique pour des contractions multivoques. Les notions principales de cette théorie sont celles d'applications "essentielles" et "d'homotopie". Il s'avère que, pour des contractions multivoques, la propriété d'être essentielle est invariante par homotopie. Ce résultat, appelé le théorème de la transversalité topologique et que nous établirons à l'aide du lemme de Kuratowski-Zorn, nous permettra de déduire plusieurs théorèmes de point fixe, notamment des théorèmes du type de Leray-Schauder. L'approche présentée ici possède des similitudes avec celles développées pour les opérateurs compacts [8], les contractions univoques [10] et les applications condensantes [12]. Mentionnons que les résultats obtenus ici sont nouveaux, contrairement à ceux du cas univoque qui peuvent être déduits de la théorie plus générale concernant les applications condensantes. Ils sont reliés à ceux de nos récentes notes [6, 9 et 10].

Cette recherche a été réalisée en partie grâce à des contributions de FCAR-Québec et CRSNG-Canada.

Nous incluons aussi quelques exemples d'applications de cette théorie aux équations et inclusions différentielles dans les espaces de Banach. Dans le cas particulier où l'espace est de dimension finie, ce résultat peut aussi être obtenu à l'aide de la théorie de la transversalité topologique pour les opérateurs compacts. Ce n'est cependant plus le cas en dimension infinie.

2. Préliminaires

Nous établissons d'abord les notions et notations qui seront utilisées ultérieurement. Nous appellerons *espace* un espace métrique et *application* une fonction multivoque $T : X \to Y$ à valeurs $Tx \subset Y$ fermées, bornées, non-vides. Lorsque $X \subset Y$ et $T : X \to Y$ est une application, nous disons que x est un *point fixe de* T si $x \in Tx$. Si (Y,d) est un espace, nous posons:

$$K(x_0,r) = \{x \in Y \,:\, d(x,x_0) \le r\}, \text{ où } x_0 \in Y \text{ et } r > 0;$$
$$2^Y = \{A \subset Y \,:\, A \text{ est fermé, borné, non-vide}\};$$
$$N(A,\varepsilon) = \{x \in Y \,:\, d(x,y) < \varepsilon \text{ pour un certain } y \in A\}, \text{ où } A \in 2^Y \text{ et } \varepsilon > 0;$$
$$D(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 \,:\, A \subset N(B,\varepsilon),\ B \subset N(A,\varepsilon)\}, \text{ où } A, B \in 2^Y.$$

La fonction D, appelée *distance de Hausdorff,* est une métrique sur 2^Y. Puisque la fonction $i : Y \to 2^Y$ définie par $i(x) = \{x\}$ est une isométrie, nous avons l'égalité $d(x,y) = D(\{x\},\{y\})$ pour tout $x, y \in Y$. Il pourra parfois être utile de considérer l'application $T : X \to Y$ comme une fonction univoque $T : X \to 2^Y$.

Soient (X,d_1), (Y,d_2) deux espaces et $T : X \to Y$ une application. Nous dirons que T est une *contraction* s'il existe une constante $k \in [0,1)$ telle que $D(Tx,Ty) \le kd(x,y)$ pour tous $x, y \in X$. La plus petite constante k pour laquelle l'inégalité précédente est satisfaite est appelée *constante de contraction.*

Nous dirons qu'une famille de contractions $\{H_t : X \to Y\}$ dépendant d'un paramètre $t \in [0,1]$ est une *famille de k-contractions*, si:

(i) $D(H_t(x), H_t(y)) \le kd(x,y)$ pour tous $t \in [0,1]$ et $x, y \in X$;
(ii) $D(H_t(x), H_s(x)) \le |\phi(t) - \phi(s)|$ pour tous $t, s \in [0,1]$ et $x \in X$, où $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement croissante.

Il est clair que si $\{H_t\}$ est une famille de k-contractions, l'application $H : [0,1] \times X \to Y$ définie par $H(t,x) = H_t(x)$ est continue.

3. Un théorème de point fixe

Dans cette section, en utilisant la méthode des approximations successives adaptée aux applications multivoques, nous établissons l'existence d'un point fixe d'une contraction définie sur une boule et qui ne déplace "pas trop" le centre de cette boule. Ce résultat sera utilisé dans la preuve de notre théorème principal.

THÉORÈME 3.1. *Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : K(x_0,r) \to X$ une contraction avec constante de contraction $k < 1$ telle que*

$$\operatorname{dist}(x_0, Tx_0) < (1-k)r. \tag{3.1}$$

Alors T a un point fixe.

DÉMONSTRATION. Nous définissons par induction une suite de points $\{x_n\}$ dans $K(x_0,r)$ satisfaisant les conditions suivantes:

$(\mathrm{a})_n$ $x_n \in T(x_{n-1})$;
$(\mathrm{b})_n$ $d(x_n, x_{n-1}) < k^{n-1}(1-k)r$.

L'inégalité (3.1) implique l'existence d'un point $x_1 \in T(x_0)$ tel que $d(x_1,x_0) < (1-k)r$. Maintenant, en supposant l'existence de points x_i vérifiant $(\mathrm{a})_i$, $(\mathrm{b})_i$ pour $1 \le i \le n$, nous trouverons un point x_{n+1} satisfaisant $(\mathrm{a})_{n+1}$ et $(\mathrm{b})_{n+1}$. En effet, puisque

$$D(Tx_n, Tx_{n-1}) \le kd(x_n, x_{n-1}) < k^n(1-k)r,$$

il existe $x_{n+1} \in T(x_n)$ tel que $d(x_{n+1}, x_n) < k^n(1-k)r$. Ainsi, l'existence d'une suite x_n satisfaisant $(\mathrm{a})_n$, $(\mathrm{b})_n$ est établie.

L'estimé

$$d(x_{n+p}, x_n) < (1 + k + \ldots + k^{p-1})k^n(1-k)r$$

implique que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy, et donc, converge vers un certain $x \in K(x_0,r)$. D'autre part, vu que Tx est fermé et que $D(Tx_n, Tx) \le kd(x_n, x)$, on déduit que $x \in Tx$ et la preuve est complète. □

Comme corollaire, nous obtenons le théorème de point fixe de Nadler pour des contractions [14].

THÉORÈME 3.2. *Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une contraction. Alors T a un point fixe.*

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in X$. Choississons $r > 0$ tel que $\operatorname{dist}(x_0, Tx_0) < (1-k)r$, où $k < 1$ est la constante de contraction. Le théorème 3.1 implique l'existence d'un point fixe x de T tel que $d(x, x_0) \le r$. □

4. Transversalité topologique

Dorénavant, par U, nous désignons un domaine (ouvert, connexe) fixé d'un espace métrique complet (X,d). Nous notons $\mathcal{K}(\overline{U}, X)$ l'ensemble de toutes les contractions $T : \overline{U} \to X$ et

$$\mathcal{K}_0(\overline{U}, X) = \{T \in \mathcal{K}(\overline{U}, X) \;:\; x \notin Tx \text{ pour tout } x \in \partial U\}.$$

DÉFINITION 4.1. Nous disons que $T \in \mathcal{K}_0(\overline{U}, X)$ est *essentielle* si T a un point fixe. Autrement, nous disons que T est *inessentielle*.

DÉFINITION 4.2. Une *homotopie de contractions* est une famille de k-contractions $\{H_t\}$, pour un certain $k < 1$, telle que tous les H_t appartiennent à $\mathcal{K}_0(\overline{U}, X)$. Deux fonctions S et T sont dites *homotopes* dans $\mathcal{K}_0(\overline{U}, X)$ s'il existe une homotopie de contractions $\{H_t\}$ telle que $H_0 = S$ et $H_1 = T$.

Nous pouvons maintenant formuler et démontrer notre résultat principal.

THÉORÈME 4.3 (Transversalité topologique). *Supposons que S et T sont homotopes dans $\mathcal{K}_0(\overline{U}, X)$. Si S est essentielle alors T l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{H_t\}$ une homotopie de contractions joignant S et T. Considérons l'ensemble

$$Q = \{(t, x) \in [0, 1] \times U \ : \ x \text{ est un point fixe de } H_t\}.$$

Remarquons que Q est non-vide car S est essentielle par hypothèse. Afin de prouver le théorème, nous allons d'abord introduire une relation d'ordre sur Q, nous appliquerons ensuite le lemme de Kuratowski-Zorn et finalement, nous montrerons que l'élément maximal de Q, (t_0, x_0), est en fait $(1, x_0)$.

Nous munissons Q d'un ordre partiel

$$(t, x) \leq (s, y) \quad \text{si et seulement si} \quad t \leq s \text{ et } d(x, y) \leq \frac{2\,(\phi(s) - \phi(t))}{1 - k},$$

où ϕ est la fonction associée à la famille de k-contractions $\{H_t\}$.

Nous allons montrer que Q est inductif. En effet, soit $P \subset Q$ un sous-ensemble totalement ordonné. Définissons $t^* = \sup\{t \ : \ (t, x) \in P\}$. Nous disons qu'une suite $\{(t_n, x_n)\}$ est admissible si $(t_n, x_n) \leq (t_{n+1}, x_{n+1})$ et $t_n \to t^*$. Etant donnée une telle suite et vu la définition d'ordre sur Q, nous avons l'inégalité

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{2\,(\phi(t_m) - \phi(t_n))}{1 - k} \qquad \text{pour tout } m > n.$$

Conséquemment, $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy et donc converge vers un certain $x^* \in \overline{U}$. Il est clair qu'une sous-suite d'une suite admissible est admissible, de même que la "réunion" (dans un sens évident) de deux suites admissibles l'est aussi. De cette remarque, on conclut que pour toute suite admissible $\{(s_n, y_n)\}$, on a $y_n \to x^*$. Or, H est continue et $H_{t^*} \in \mathcal{K}_0(\overline{U}, X)$, d'où $(t^*, x^*) \in Q$. Le point (t^*, x^*) est donc un majorant de P.

Par le lemme de Kuratowski-Zorn, l'ensemble Q admet un élément maximal $(t_0, x_0) \in Q$ et donc, $x_0 \in H_{t_0}(x_0)$.

La preuve sera complète si nous montrons que $t_0 = 1$. Supposons que ceci soit faux. Alors, il existe $t_1 \in (t_0, 1]$ tel que $0 < 2\,(\phi(t_1) - \phi(t_0))\,/(1 - k) = r$ et $K(x_0, r) \subset U$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x_0, H_{t_1}(x_0)) &\leq \operatorname{dist}(x_0, H_{t_0}(x_0)) + D(H_{t_0}(x_0), H_{t_1}(x_0)) \\ &\leq \phi(t_1) - \phi(t_0) < (1 - k)r. \end{aligned}$$

D'après le théorème 3.1, il existe un point fixe x_1 de H_{t_1} tel que $d(x_0, x_1) \leq r$. Par conséquent, $(t_1, x_1) \in Q$ et $(t_0, x_0) < (t_1, x_1)$, ce qui contredit la maximalité de (t_0, x_0). Nous avons donc obtenu l'existence d'un point fixe de T, ce qui termine la preuve. $\square$

REMARQUE 4.4. Tous les résultats obtenus jusqu'à présent restent vrais pour des contractions à valeurs fermées, non-vides. En effet, il suffit d'utiliser la distance de Hausdorff généralisée, voir par exemple [2].

5. Alternative non-linéaire

Nous supposons maintenant que $X = E$ est un espace de Banach et que $U \subset E$ est un domaine borné. En tirant parti de la structure plus riche de E, nous pourrons déduire quelques conséquences du théorème 4.3.

Remarquons d'abord que la propriété d'être essentielle pour une contraction T dépend seulement de la définition de T sur la frontière ∂U de U. En effet, si S et T sont deux contractions dans $\mathcal{K}_0(\overline{U}, E)$ telles que $S|_{\partial U} = T|_{\partial U}$, alors T est essentielle si S l'est aussi.

THÉORÈME 5.1 (Alternative non-linéaire). *Soit $T : \overline{U} \to E$ une contraction et supposons que l'origine 0 appartienne à U. Alors au moins l'un des énoncés suivants est vérifié:*

(i) *il existe $x \in \overline{U}$ tel que $x \in Tx$;*
(ii) *il existe $y \in \partial U$ et $\lambda \in (0, 1)$ tels que $y \in \lambda Ty$.*

DÉMONSTRATION. Examinons la famille de k-contractions $\{H_t : \overline{U} \to E\}$ définies par $H_t(x) = tTx$. Si $\{H_t\}$ est une homotopie dans $\mathcal{K}_0(\overline{U}, E)$, alors, vu le théorème 4.3 et le fait que $H_0 \equiv 0$ est essentielle, l'application T a un point fixe. Sinon, H_t a un point fixe sur la frontière pour un certain $t \in (0, 1]$. Si $t = 1$, l'énoncé (i) est vérifié; autrement, (ii) l'est. $\square$

Le théorème précédent implique que l'ensemble des applications $T : E \to E$ telles que pour tout $r > 0$, $T|_{K(0,r)}$ est une contraction, est contenu dans la classe des opérateurs du type de Leray-Schauder introduite dans [9]. L'alternative de Leray-Schauder est par conséquent vérifiée pour ces applications.

THÉORÈME 5.2 (Alternative de Leray-Schauder). *Soit $T : E \to E$ telle que pour tout $r > 0$, l'application $T|_{K(0,r)}$ est une contraction. Soit*

$$\mathcal{E}_T = \{x \in E \,:\, x \in \lambda Tx \text{ pour un certain } \lambda \in (0, 1)\}.$$

Alors, au moins l'un des énoncés suivants est vérifié:

(i) *l'ensemble $\mathcal{E}_T$ est non-borné;*
(ii) *l'application T a un point fixe.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $\mathcal{E}_T$ est borné et soit $K(0,r)$ une boule contenant $\mathcal{E}_T$ dans son intérieur. Le théorème 5.1 implique l'existence d'un point fixe de T. □

De l'alternative non-linéaire 5.1 découlent des théorèmes de point fixe originaux, dont le suivant.

THÉORÈME 5.3. *Soit $T : \overline{U} \to E$ une contraction. Supposons que pour tout $x \in \partial U$, une des conditions suivantes est satisfaite:*

(i) $\|T(x)\| = D(0, T(x)) \le \|x\|$;
(ii) $\|T(x)\| \le \operatorname{dist}(x, T(x))$;
(iii) $\|T(x)\| \le \left(\operatorname{dist}(x, T(x))^2 + \|x\|^2\right)^{1/2}$;
(iv) $\|T(x)\| \le \max\{\|x\|, \operatorname{dist}(x, T(x))\}$.

Alors T a un point fixe.

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que λT est sans point fixe sur ∂U pour tout $\lambda \in (0,1)$ et d'appliquer le théorème 5.1. □

6. Applications

Nous présentons maintenant des exemples d'applications de l'alternative non-linéaire pour des contractions nous permettant d'obtenir l'existence d'une solution à des équations et inclusions différentielles dans un espace de Banach. Lorsque cet espace est de dimension finie, l'alternative non-linéaire pour des opérateurs compacts peut être utilisée; ce qui n'est pas le cas pour un espace de dimension infinie.

Comme précédemment, E désigne un espace de Banach. Nous notons par $C^k([a,b], E)$ l'espace de Banach des fonctions $x : [a,b] \to E$ telles que $x^{(k)}$ est continue. Il est muni de la norme

$$\|x\|_k = \max\{\|x\|_0, \|x'\|_0, \dots, \|x^{(k)}\|_0\},$$

où $\|x\|_0 = \max\{\|x(t)\| : t \in [a,b]\}$. Aussi, $C^0([a,b], E) = C([a,b], E)$.

6.1. Applications aux équations différentielles.

THÉORÈME 6.1. *Soient $E = H$ un espace de Hilbert et $f : [0,\tau] \times H \to H$ une fonction continue telle que*

(i) *pour tout $r > 0$, il existe $l_r \ge 0$ tel que $\|f(t,x) - f(t,y)\| \le l_r\|x - y\|$ pour tous $t \in [0,\tau]$, et $x, y \in H$ satisfaisant $\|x\|, \|y\| \le r$;*
(ii) *il existe $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ une fonction continue telle que $\|f(t,x)\| \le \psi(\|x\|)$ pour tous $t \in [0,\tau]$ et $x \in H$.*

Si $\tau < \int_0^\infty ds/\psi(s)$ *alors le problème*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, \tau], \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

possède une solution $x \in C^1([0, \tau], H)$.

Démonstration. Considérons la famille de problèmes

$$(6.1_\lambda) \qquad \begin{cases} x'(t) = \lambda f(t, x(t)), & t \in [0, \tau], \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

pour $\lambda \in [0, 1]$.

Soit $M > 0$ tel que

$$\tau < \int_0^M \frac{ds}{\psi(s)}.$$

Toute solution x de (6.1_λ), pour un certain $\lambda \in [0, 1]$, satisfait $\|x(t)\| < M$ pour tout $t \in [0, \tau]$. En effet, supposons qu'il existe une solution x pour laquelle $\|x(t)\| \geq M$ pour un certain $t \in [0, \tau]$. Alors, il existe $0 \leq t_0 < t_1 \leq \tau$ tels que $\|x(t_0)\| = 0$, $\|x(t_1)\| = M$ et $0 < \|x(t)\| \leq M$ pour tout $t \in (t_0, t_1)$. La fonction $t \mapsto \|x(t)\|$ est différentiable sur (t_0, t_1) et

$$(6.2) \qquad |\,\|x(t)\|'\,| = \left| \left\langle \frac{x(t)}{\|x(t)\|}, x'(t) \right\rangle \right| \leq \|x'(t)\|.$$

Les inégalités (ii) et (6.2) impliquent que

$$\|x(t)\|' \leq \psi(\|x(t)\|) \qquad \text{pour tout } t \in (t_0, t_1).$$

En divisant par $\psi(\|x(t)\|)$, en intégrant de t_0 à t_1 et en utilisant le théorème de changement de variable dans une intégrale, nous obtenons

$$\int_{\|x(t_0)\|}^{\|x(t_1)\|} \frac{ds}{\psi(s)} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\|x(t)\|'}{\psi(\|x(t)\|)}\, dt \leq \tau < \int_0^M \frac{ds}{\psi(s)},$$

qui est une contradiction.

Soit L une constante qui sera fixée ultérieurement. Munissons $C([0, \tau], H)$ de la norme

$$\|x\|_L = \sup\{e^{-tL}\|x(t)\| \,:\, t \in [0, \tau]\}.$$

Posons

$$\overline{U} = \{x \in C([0, \tau], H) \,:\, \|x(t)\| \leq M \text{ pour tout } t \in [0, \tau]\}$$

et considérons l'application $G : \overline{U} \to C([0, \tau], H)$ définie par

$$G(x)(t) = \int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

On vérifie aisément que la fonction G est une contraction de $(\overline{U}, \|\cdot\|_L)$ dans $(C([0, \tau], H), \|\cdot\|_L)$, avec $L = l_M$, où l_M est la constante donnée dans (i).

D'autre part, il est clair qu'une solution de (6.1_λ) est un point fixe de λG. L'existence d'une solution découle du théorème 5.1 qui s'applique bien évidemment aux fonctions univoques. □

Nous donnons maintenant un exemple d'application à une équation différentielle du second ordre.

THÉORÈME 6.2. *Soit H un espace de Hilbert, et soit $f : [0,1] \times H^2 \to H$ une fonction continue telle que*

(i) *pour tout $r > 0$, il existe $0 \leq l_r < 3.78$ tel que pour tout $t \in [0,1]$ et pour $x, x', y, y' \in H$ satisfaisant $\|x\|, \|x'\|, \|y\|, \|y'\| \leq r$, l'inégalité suivante est satisfaite:*

$$\|f(t,x,x') - f(t,y,y')\| \leq l_r \max\{\|x-y\|, \|x'-y'\|\};$$

(ii) *il existe $M > 0$ tel que*

$$\langle x, f(t,x,x')\rangle + \|x'\|^2 > 0$$

pour tous $t \in [0,1]$ et $x, x' \in H$ tels que $\|x\| \geq M$ et $\langle x, x'\rangle = 0$;

(iii) *il existe une fonction continue $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ telle que*

$$\int_0^\infty (1/\psi(s))\, ds > 1 \quad \text{et} \quad \|f(t,x,x')\| \leq \psi(\|x'\|)$$

pour tout $(t,x,x') \in [0,1] \times H^2$ tel que $\|x\| \leq M$.

Alors le problème

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), & t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \ \ x'(1) = 0, \end{cases}$$

possède une solution $x \in C^2([0,1], H)$.

DÉMONSTRATION. Considérons la famille de problèmes

$$(6.3_\lambda) \qquad \begin{cases} x''(t) = \lambda f(t, x(t), x'(t)), & t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \ \ x'(1) = 0 \end{cases}$$

pour $\lambda \in [0,1]$.

De façon usuelle (voir par exemple [7]), on montre qu'il existe une constante M_0 telle que toute solution x de (6.3_λ) satisfait $\|x(t)\| < M_0$ et $\|x'(t)\| < M_0$.

Posons

$$\overline{U} = \{x \in C^1([0,1], H) : \|x(t)\|, \|x'(t)\| \leq M_0 \text{ pour tout } t \in [0,1]\}$$

et considérons la fonction $G : \overline{U} \to C^1([0,1], H)$ définie par

$$G(x)(t) = -t \int_0^1 \int_0^s f(r, x(r), x'(r))\, dr + \int_0^t \int_0^s f(r, x(r), x'(r))\, dr.$$

De (i), on déduit que G est une contraction. Le théorème 5.1 implique l'existence d'une solution au problème (6.3_1) et la preuve est complète. □

6.2. Application aux inclusions différentielles. Avant de donner un exemple d'application aux inclusions différentielles, rappellons d'abord quelques définitions. Soit $x : [a,b] \to E$ une fonction mesurable. Par $\int_a^b x(t)\,dt$, nous désignons l'intégrale au sens de Bochner de x lorsqu'elle existe; nous disons alors que x est intégrable. Nous notons $W^{1,1}([a,b],E)$ l'ensemble des fonctions $x \in C([a,b],E)$ telles qu'il existe $v : [a,b] \to E$ une fonction intégrable satisfaisant $x(t) - x(a) = \int_a^t v(s)\,ds$ pour tout $t \in [a,b]$; il s'avère alors que la fonction x est dérivable presque partout sur $[a,b]$, et $x' = v$.

Soient deux espaces de Banach E_1 et E_2; nous dirons qu'une application multivoque $F : [a,b] \times E_1 \to E_2$ à valeurs compactes non-vides est de *Carathéodory au sens fort* si:

(i) $t \mapsto F(t,x)$ est mesurable pour tout $x \in E_1$, i.e.

$$\{t \in [a,b] : F(t,x) \cap B \neq \emptyset\}$$

est mesurable pour tout ensemble fermé $B \subset E_2$;

(ii) $x \mapsto F(t,x)$ est continue (comme fonction de E_1 dans 2^{E_2}) p.p. $t \in [a,b]$;

(iii) pour tout $r > 0$, il existe $h_r \in L^1[a,b]$ tel que $D(0, F(t,x)) \leq h_r(t)$ p.p. $t \in [a,b]$ et pour tout $x \in E_1$ satisfaisant $\|x\| \leq r$.

A partir d'une fonction multivoque $F : [0,\tau] \times E_1 \to E_2$, nous introduisons la fonction

$$T : C([0,\tau],E_1) \to C([0,\tau],E_2)$$

définie par

$$T(x) = \Big\{ v \in C([0,\tau],E_2) \,:\, v(t) = \int_0^t w(s)\,ds \text{ pour un certain } w \in L^1([0,\tau],E_2) \text{ tel que } w(t) \in F(t,x(t)) \text{ p.p. } t \in [0,\tau] \Big\}.$$

LEMME 6.3. *Si E_1 et E_2 sont deux espaces de Banach séparables, E_2 est réflexif et si $F : [0,\tau] \times E_1 \to E_2$ est une fonction multivoque de Carathéodory au sens fort, à valeurs compactes, convexes, non-vides, alors l'application T définie précédemment est à valeurs fermées, convexes, non-vides, et telle que pour tous $x, y \in C([0,\tau],E_1)$ et $v \in T(x)$, il existe $u \in T(y)$ tel que*

$$\|v(t) - u(t)\| \leq \int_0^t D(\,F(s,x(s)), F(s,y(s))\,)\,ds \qquad \textit{pour tout } t \in [0,\tau].$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in C([0,\tau],E_1)$. En utilisant le fait que E_1 et E_2 sont des espaces de Banach séparables et que F est de Carathéodory, on vérifie aisément que $t \mapsto F(t,x(t))$ est mesurable. Le théorème de Kuratowski et Ryll-Nardzewski [13] implique qu'il existe une sélection mesurable $w(t) \in F(t,x(t))$ p.p. $t \in [0,\tau]$. Donc, puisque F est de Carathéodory, T est bien définie et à valeurs non-vides. D'un résultat de Datko [3], on déduit que les valeurs de T sont convexes et fermées. Finalement, soient $x,y \in C([0,\tau],E_1)$ et $v \in T(x)$, i.e. $v(t) = \int_0^t w(s)\,ds$, où $w(s) \in F(s,x(s))$ p.p. $s \in [0,\tau]$; en vertu d'un théorème de Filippov (voir par exemple [1]), il existe une fonction mesurable z telle que $z(s) \in F(s,y(s))$ p.p. $s \in [0,\tau]$ et

$$\|w(s) - z(s)\| = \operatorname{dist}(w(s), F(s,y(s))) \le D(\,F(s,x(s)), F(s,y(s))\,).$$

En conséquence, en posant $u(t) = \int_0^t z(s)\,ds$, il s'avère que $u \in T(y)$ et satisfait l'inégalité désirée. □

Nous donnons maintenant un résultat analogue au théorème 6.1 pour une inclusion différentielle dans un espace de Banach.

THÉORÈME 6.4. *Soit E un espace de Banach séparable réflexif et soit $F : [0,\tau] \times E \to E$ une fonction multivoque de Carathéodory au sens fort, à valeurs compactes, convexes, non-vides, et telle que*

(i) *pour tout $r > 0$, il existe une fonction $l_r \in L^1[0,\tau]$ telle que*

$$D(F(t,x),F(t,y)) \le l_r(t)\|x-y\| \qquad \text{p.p. } t \in [0,\tau]$$

et pour tous $x,y \in E$ satisfaisant $\|x\|,\|y\| \le r$;

(ii) *il existe $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ une fonction croissante, mesurable au sens de Borel, et telle que*

$$D(0,F(t,x)) \le \alpha(t)\psi(\|x\|) \qquad \text{p.p. } t \in [0,\tau]$$

et pour tout $x \in E$.

Si $\tau < \int_0^\infty ds/\psi(s)$ alors le problème

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t,x(t)), & \text{p.p. } t \in [0,\tau], \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

possède une solution $x \in W^{1,1}([0,\tau],E)$.

DÉMONSTRATION. Considérons la famille de problèmes

$$(6.4_\lambda) \qquad \begin{cases} x'(t) \in \lambda F(t,x(t)), & \text{p.p. } t \in [0,\tau], \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

pour $\lambda \in [0,1]$. Soit $M > 0$ tel que

$$\tau < \int_0^M \frac{ds}{\psi(s)}.$$

En procédant de façon similaire à ce qu'on a fait dans la preuve du théorème 6.1 (pour plus de précisions, voir [7, théorème 3.4]), on montre que toute solution x de (6.4_λ) satisfait $\|x(t)\| < M$ pour tout $t \in [0, \tau]$.

Maintenant, en posant U comme dans la preuve du théorème 6.1 et en munissant $C([0,\tau], H)$ de la norme

$$\|x\|_* = \sup\{e^{-\int_0^t l_M(s)\,ds}\|x(t)\| \,:\, t \in [0,\tau]\},$$

où l_M est la fonction donnée en (i), il s'avère que l'application T définie précédemment est une contraction de $(\overline{U}, \|\cdot\|_*)$ dans $(C([0,\tau], H), \|\cdot\|_*)$. En effet, le lemme 6.3 et (i) impliquent que T est à valeurs fermées, non-vides, et, pour tous x, $y \in \overline{U}$ et $v \in T(x)$, il existe $u \in T(y)$ tel que

$$\begin{aligned} e^{-\int_0^t l_M(s)\,ds}\|v(t)-u(t)\| &\le e^{-\int_0^t l_M(s)\,ds}\int_0^t l_M(s)\|x(s)-y(s)\|\,ds \\ &\le e^{-\int_0^t l_M(s)\,ds}\|x-y\|_*\int_0^t l_M(s)e^{\int_0^s l_M(r)\,dr}\,ds \\ &\le (1-e^{-\int_0^\tau l_M(s)\,ds})\|x-y\|_*. \end{aligned}$$

En conséquence, $D(T(x),T(y)) \le k\|x-y\|_*$, où $k = 1 - e^{-\int_0^\tau l_M(s)\,ds} < 1$.

D'autre part, il est clair qu'une solution de (6.4_λ) est un point fixe de λT. L'existence d'une solution découle du théorème 5.1. □

RÉFÉRENCES

[1] J.-P. AUBIN AND H. FRANKOWSKA, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[2] H. COVITZ AND S. B. NADLER JR., *Multi-valued contraction mappings in generalized metric spaces*, Israel J. Math. **8** (1970), 5–11.

[3] R. DATKO, *On the integration of set-valued mappings in a Banach space*, Fund. Math. **78** (1973), 205–208.

[4] M. FRIGON ET A. GRANAS, *Théorèmes d'existence pour des inclusions différentielles sans convexité*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **310** (1990), 819–822.

[5] M. FRIGON, A. GRANAS ET Z. GUENNOUN, *Sur l'intervalle maximal d'existence de solutions pour des inclusions différentielles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **306** (1988), 747–750.

[6] ———, *The nonlinear alternative for contractive maps*, Ann. Sc. Math. Québec (à paraître).

[7] M. FRIGON AND J. W. LEE, *Existence principles for Carathéodory differential equations in Banach spaces*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **1** (1993), 95–111.

[8] A. GRANAS, *Sur la méthode de continuité de Poincaré*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **282** (1976), 983–985.

[9] ———, *On the Leray-Schauder alternative*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **2** (1993), 225–231.

[10] ———, *Continuation method for contractive maps*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **3** (1994), 375–379.

[11] C. J. HIMMELBERG, *Measurable relations*, Fund. Math. **87** (1978), 53–72.

[12] W. KRAWCEWICZ, *Contribution à la théorie des équations non linéaires dans les espaces de Banach*, Dissertationes Math. **273** (1988).

[13] K. KURATOWSKI AND C. RYLL-NARDZEWSKI, *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **13** (1965), 397–403.

[14] S. B. NADLER JR., *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math. **30** (1969), 415–487.

Manuscript received February 28, 1994

MARLÈNE FRIGON
Département de Mathématiques et Statistique
Université de Montréal
c.p. 6128, succ. A
Montréal, H3C 3J7, CANADA

Adresse électronique: frigon@ere.umontreal.ca

ANDRZEJ GRANAS
Département de Mathématiques et Statistique
Université de Montréal
c.p. 6128, succ. A
Montréal, H3C 3J7, CANADA
et
Faculty of Mathematics
Nicholas Copernicus University
Chopina 12/18
87-100 Toruń, POLAND

Adresse électronique: granasa@ere.umontreal.ca et granas@mat.uni.torun.pl