

FAMILLES SÉLECTANTES

PAUL DEGUIRE — MARC LASSONDE

Dédié à Ky Fan, en témoignage de notre profonde admiration

Les théorèmes de sélection constituent un outil de base pour aborder les problèmes décrits par une application multivoque : inclusions différentielles, contrôle optimal, théorie du point fixe, ... Essentiellement, les sélections permettent de ramener le problème multivoque à un problème univoque plus facile à traiter.

Dans cette note, nous proposons une extension de la notion de sélection, appelée *famille sélectante*, afin de pouvoir aborder de la même façon les problèmes décrits par une *famille* d'applications multivoques : systèmes d'inclusions différentielles, systèmes d'inégalités minimax, théorie de l'équilibre économique. Nous montrons que cette notion est bien adaptée, en particulier, au traitement des familles d'applications à valeurs convexes et à fibres ouvertes. Comme illustration, nous présentons des généralisations à des systèmes éventuellement infinis du théorème de point fixe de Ky Fan–Browder, de l'inégalité minimax de Ky Fan et de l'égalité minimax de von Neumann–Sion.

1. Familles sélectantes

Dans la suite, le terme *espace* signifie espace topologique non vide et le terme *espace convexe* signifie sous-espace convexe non vide d'un espace vectoriel réel topologique séparé.

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 54C65, 54H25, 47H19; Secondary 54C60, 47H10.

Le travail du premier auteur a été subventionné en partie par le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada et par la Faculté des études supérieures et de la recherche de l'Université de Moncton.

©1995 Juliusz Schauder Center for Nonlinear Studies

Soit $A : X \rightarrow Y$ une application multivoque entre deux espaces X et Y . On appelle *valeurs* de A les ensembles $A(x)$, $x \in X$, et *fibres* de A les ensembles $A^{-1}(y) = \{x \in X \mid y \in A(x)\}$, $y \in Y$. Si $X_0 \subset X$ et $Y_0 \subset Y$ sont deux sous-espaces, on note $\tilde{A} : X_0 \rightarrow Y_0$ l'application définie par $\tilde{A}(x) = A(x) \cap Y_0$ pour tout $x \in X_0$. Les applications multivoques sont notées par des lettres majuscules et les applications univoques par des lettres minuscules.

DÉFINITION 1. Soient X un espace et $\{Y_i \mid i \in I\}$ une famille d'espaces, où I est un ensemble d'indices arbitraire. Une *famille sélectante* pour une famille d'applications multivoques $\{A_i : X \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$ est une famille d'applications univoques continues $\{f_i : X \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$ vérifiant : pour tout $x \in X$ il existe $i \in I$ tel que $f_i(x) \in A_i(x)$.

Lorsque I est un singleton, la notion de famille sélectante se réduit à celle de sélection (univoque) continue. La classe la plus simple de famille d'applications admettant une famille sélectante est la classe des familles *de type KF* :

DÉFINITION 2. Soient X un espace et $\{Y_i \mid i \in I\}$ une famille d'espaces convexes. On dit que la famille d'applications $\{A_i : X \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$ est *de type KF* (pour Ky Fan) si chaque A_i est à valeurs convexes et à fibres ouvertes, et si pour tout $x \in X$ il existe $i \in I$ tel que $A_i(x) \neq \emptyset$.

Lorsque I est un singleton, une notion similaire a été considérée par Borglin et Keiding [2] et Ben El Mechaïekh *et al.* [1]. Le théorème de base sur l'existence de familles sélectantes pour les familles de type KF généralise un théorème de sélection bien connu (voir Michael [13, Lemma 4.1], Browder [3, Theorem 1], Ben El Mechaïekh *et al.* [1, Lemme]) :

THÉORÈME 1. Soient X un espace paracompact et $\{Y_i \mid i \in I\}$ une famille d'espaces convexes. Toute famille $\{A_i : X \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$ de type KF possède une famille sélectante.

DÉMONSTRATION. Il résulte de la définition de famille de type KF que les ensembles $\text{dom}(A_i) = \{x \in X \mid A_i(x) \neq \emptyset\}$ sont ouverts et forment un recouvrement de X . Comme X est paracompact, il existe une famille $\{F_i \mid i \in I\}$ de sous-ensembles fermés recouvrant X telle que $F_i \subset \text{dom}(A_i)$ pour tout $i \in I$ (voir par exemple Engelking [4, p. 374]). Pour chaque $i \in I$ l'application $B_i : X \rightarrow Y_i$, définie par $B_i(x) = A_i(x)$ si $x \in F_i$ et $B_i(x) = Y_i$ si $x \notin F_i$, est à valeurs convexes non vides et à fibres ouvertes, donc possède une sélection continue $f_i : X \rightarrow Y_i$ d'après le résultat classique. Puisque pour tout $x \in X$ il existe $i \in I$ tel que $x \in F_i$, ce qui entraîne $f_i(x) \in B_i(x) = A_i(x)$, on voit que $\{f_i : X \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$ est famille sélectante de $\{A_i : X \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$. \square

Il est clair que le même argument permet d'obtenir une version "famille sélectante" du théorème de sélection de Michael [13, Theorem 3.2"] :

THÉORÈME 2. Soient X un espace paracompact, $\{Y_i \mid i \in I\}$ une famille de sous-ensembles convexes fermés d'espaces localement convexes métrisables complets et $\{A_i : X \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$ une famille d'applications multivoques semi-continue inférieurement à valeurs convexes fermées vérifiant la propriété : pour tout $x \in X$ il existe $i \in I$ tel que $A_i(x) \neq \emptyset$. Alors la famille $\{A_i : X \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$ possède une famille sélectante.

Dans le reste de cette note, nous présentons uniquement quelques applications du théorème 1.

2. Quelques applications

Le théorème de point fixe de Ky Fan–Browder et le théorème de coïncidence de Ky Fan, versions géométriques respectives de l'inégalité minimax de Ky Fan et de l'inégalité minimax de von Neumann–Sion–Liu, peuvent se démontrer simplement en combinant théorème de sélection et théorème de point fixe de Brouwer. L'objet de cette section est de montrer que si l'on remplace *sélection* par *famille sélectante*, on obtient tout aussi simplement une généralisation de ces résultats à des systèmes quelconques.

L'utilisation du théorème de Brouwer nécessite une réduction des problèmes à la dimension finie : le premier paragraphe décrit un moyen de réaliser cette réduction. Le second paragraphe traite des systèmes d'inégalités minimax de type point fixe, le troisième des systèmes d'inégalités minimax de type coïncidence dans le cadre compact. Le dernier paragraphe indique comment relaxer les hypothèses de compacité.

2.1. Réduction à la dimension finie. Soient X un espace, $\{Y_i \mid i \in I\}$ une famille d'espaces convexes et $\{A_i : X \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$ une famille d'applications de type KF. On appelle *polytope* l'enveloppe convexe d'une famille finie de points dans un espace vectoriel. La proposition suivante dit que si X est compact, on peut supposer que les Y_i sont des polytopes et que leur produit Y est homéomorphe à un convexe compact de dimension finie :

PROPOSITION 1. *Supposons X compact. Alors il existe des polytopes $P_i \subset Y_i$, tous réduits à un point sauf un nombre fini d'entre eux, tels que la famille d'applications $\{\tilde{A}_i : X \rightarrow P_i \mid i \in I\}$ soit de type KF.*

DÉMONSTRATION. Les ensembles $A_i^{-1}(y_i)$, $i \in I$, $y_i \in Y_i$, forment un recouvrement ouvert du compact X . Par suite, il existe une partie finie $J \subset I$ et, pour chaque $j \in J$, un ensemble fini $\{y_j^1, \dots, y_j^{n_j}\} \subset Y_j$ tels que

$$X = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{k=1}^{n_j} A_j^{-1}(y_j^k).$$

Pour $j \in J$, notons P_j l'enveloppe convexe des points $y_j^1, \dots, y_j^{n_j}$, et pour $i \notin J$, notons P_i un singleton arbitraire dans Y_i . On vérifie aisément que la famille d'applications $\{\tilde{A}_i : X \rightarrow P_i \mid i \in I\}$ est de type KF. \square

2.2. Points fixes. Dans ce paragraphe, $\{X_i \mid i \in I\}$ désigne une famille d'espaces convexes compacts et $X = \prod\{X_i \mid i \in I\}$ l'espace produit. Lorsque I est un singleton, le théorème suivant est le théorème de point fixe de Ky Fan–Browder [5, 3] :

THÉORÈME 3a. *Soit $\{A_i : X \rightarrow X_i \mid i \in I\}$ une famille d'applications de type KF. Alors il existe $x \in X$ et $i \in I$ tels que $x_i \in A_i(x)$.*

DÉMONSTRATION. Comme X est compact, d'après la proposition 1 il existe des polytopes $P_i \subset X_i$ dont le produit P est homéomorphe à un convexe compact de dimension finie et tels que la famille $\{\tilde{A}_i : P \rightarrow P_i \mid i \in I\}$ soit de type KF. En vertu du théorème 1, la famille $\{\tilde{A}_i : P \rightarrow P_i \mid i \in I\}$ possède une famille sélectante $\{f_i : P \rightarrow P_i \mid i \in I\}$. D'après le théorème de point fixe de Brouwer, il existe $x \in P$ tel que $f_i(x) = x_i$ pour tout $i \in I$, et par définition de famille sélectante il existe $i \in I$ tel que $x_i = f_i(x) \in \tilde{A}_i(x) \subset A_i(x)$. Le théorème est démontré. \square

REMARQUE. Le théorème 3a est un cas particulier d'un résultat de Toussaint [16, Theorem 2.4] obtenu par une autre méthode. Lorsque I est fini, le premier théorème de ce type est dû à Gale et Mas-Colell [8].

Rappelons qu'une fonction numérique $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un espace convexe C est dite *quasi-concave* (respectivement *semi-continue inférieurement*) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x \in C \mid f(x) > \lambda\}$ est convexe (respectivement ouvert); f est dite *quasi-convexe* (respectivement *semi-continue supérieurement*) si la fonction $-f$ est quasi-concave (respectivement semi-continue inférieurement). Comme dans le cas classique, le théorème 3a admet une formulation analytique équivalente, qui se réduit à l'inégalité minimax de Ky Fan [7] lorsque I est un singleton :

THÉORÈME 3b. *Soit $\{f_i : X \times X_i \rightarrow \mathbb{R} \mid i \in I\}$ une famille de fonctions numériques possédant les propriétés suivantes :*

- (1) *pour tout $x \in X$, $y_i \mapsto f_i(x, y_i)$ est quasi-concave,*
- (2) *pour tout $y_i \in X_i$, $x \mapsto f_i(x, y_i)$ est semi-continue inférieurement.*

Il existe alors $\tilde{x} \in X$ vérifiant le système d'inégalités

$$\sup_{y_i \in X_i} f_i(\tilde{x}, y_i) \leq \sup_{x \in X} f_i(x, x_i) \quad \text{pour tout } i \in I.$$

DÉMONSTRATION. Pour chaque $i \in I$, posons $\lambda_i = \sup_{x \in X} f_i(x, x_i)$. Les applications $A_i : X \rightarrow X_i$, définies par

$$A_i(x) = \{y_i \in X_i \mid f_i(x, y_i) > \lambda_i\} \quad \text{pour } x \in X,$$

sont à valeurs convexes et à fibres ouvertes, mais la famille $\{A_i : X \rightarrow X_i \mid i \in I\}$ ne satisfait pas à la conclusion du théorème 3a vu le choix des λ_i . Il existe donc nécessairement $\tilde{x} \in X$ vérifiant $A_i(\tilde{x}) = \emptyset$ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire vérifiant le système d'inégalités à démontrer. \square

REMARQUE. Lorsque I est fini, le théorème 3b a été démontré par Marchi et Martínez-Legaz [12] dans un contexte plus abstrait.

Pour $x \in X$, $i \in I$ et $y_i \in X_i$, on note (x^i, y_i) le point de X ayant les mêmes composantes que x sauf la i -ème qui est remplacée par y_i . Le théorème sur les équilibres de Nash (voir Nash [14] et Ma [11]) est une conséquence directe du théorème 3b :

COROLLAIRE. Soit $\{g_i : X \rightarrow \mathbb{R} \mid i \in I\}$ une famille de fonctions continues telles que, pour tout $x \in X$, $y_i \mapsto g_i(x^i, y_i)$ est quasi-concave. Il existe alors $\tilde{x} \in X$ vérifiant

$$g_i(\tilde{x}) = \sup_{y_i \in X_i} g_i(\tilde{x}^i, y_i) \quad \text{pour tout } i \in I.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le théorème 3b à la famille de fonctions $\{f_i : X \times X_i \rightarrow \mathbb{R} \mid i \in I\}$ définie par $f_i(x, y_i) = g_i(x^i, y_i) - g_i(x)$ pour tout $x \in X$ et $y_i \in X_i$. \square

2.3. Coïncidences. Soient $\{X_i \mid i \in I\}$ et $\{Y_j \mid j \in J\}$ deux familles d'espaces convexes compacts, X et Y leurs produits respectifs. Lorsque I et J sont des singletons, le théorème suivant est le théorème de coïncidence de Ky Fan [6] :

THÉORÈME 4a. Soient $\{A_j : X \rightarrow Y_j \mid j \in J\}$ et $\{B_i : Y \rightarrow X_i \mid i \in I\}$ deux familles d'applications de type KF. Alors il existe $(x, y) \in X \times Y$ et $(i, j) \in I \times J$ tels que $y_j \in A_j(x)$ et $x_i \in B_i(y)$.

DÉMONSTRATION. En procédant comme dans le théorème 3a, on se ramène au cas où les espaces X_i et Y_j sont des polytopes et X et Y sont homéomorphes à des convexes compacts de dimension finie. On considère alors $\{f_j : X \rightarrow Y_j \mid j \in J\}$ et $\{g_i : Y \rightarrow X_i \mid i \in I\}$, familles sélectantes de $\{A_j : X \rightarrow Y_j \mid j \in J\}$ et $\{B_i : Y \rightarrow X_i \mid i \in I\}$ respectivement. L'application $h : X \times Y \rightarrow X \times Y$, définie par

$$h(x, y) = (g_i(y))_{i \in I} \times (f_j(x))_{j \in J} \quad \text{pour } (x, y) \in X \times Y,$$

étant continue, elle admet un point fixe d'après le théorème de Brouwer. Ainsi, il existe $(x, y) \in X \times Y$ tel que $x_i = g_i(y)$ et $y_j = f_j(x)$ pour tout $(i, j) \in I \times J$,

et, par définition de famille sélectante, il existe $(i, j) \in I \times J$ tel que $y_j = f_j(x) \in A_j(x)$ et $x_i = g_i(y) \in B_i(y)$. \square

Lorsque I et J sont des singletons, la formulation analytique du théorème 4a est l'inégalité minimax de Liu [10], généralisation de l'égalité minimax de von Neumann–Sion [15] :

THÉORÈME 4b. *Soient $\{f_j : X \times Y_j \rightarrow \mathbb{R} \mid j \in J\}$ et $\{g_i : X_i \times Y \rightarrow \mathbb{R} \mid i \in I\}$ deux familles de fonctions numériques possédant les propriétés suivantes :*

- (1) *pour tout $(x, y) \in X \times Y$, $\sup_{j \in J} f_j(x, y_j) \leq \inf_{i \in I} g_i(x_i, y)$,*
- (2) *pour tout $x \in X$, $y_j \mapsto f_j(x, y_j)$ est quasi-concave,*
- (3) *pour tout $y_j \in Y_j$, $x \mapsto f_j(x, y_j)$ est semi-continue inférieurement,*
- (4) *pour tout $y \in Y$, $x_i \mapsto g_i(x_i, y)$ est quasi-convexe,*
- (5) *pour tout $x_i \in X_i$, $y \mapsto g_i(x_i, y)$ est semi-continue supérieurement.*

Alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} \sup_{j \in J} f_j(x, y_j) \leq \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \inf_{i \in I} g_i(x_i, y).$$

DÉMONSTRATION. Supposons que cette assertion soit fausse, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\inf_{x \in X} \sup_{j \in J} \sup_{y_j \in Y_j} f_j(x, y_j) > \lambda > \sup_{y \in Y} \inf_{i \in I} \inf_{x_i \in X_i} g_i(x_i, y).$$

Les familles d'applications $\{A_j : X \rightarrow Y_j \mid j \in J\}$ et $\{B_i : Y \rightarrow X_i \mid i \in I\}$ définies par

$$A_j(x) = \{y_j \in Y_j \mid f_j(x, y_j) > \lambda\} \quad \text{et} \quad B_i(y) = \{x_i \in X_i \mid g_i(x_i, y) < \lambda\}$$

vérifient alors les hypothèses du théorème 4a. Par suite, il existe $(x, y) \in X \times Y$ et $(i, j) \in I \times J$ tels que $y_j \in A_j(x)$ et $x_i \in B_i(y)$, ce qui contredit l'hypothèse (1) et achève la démonstration. \square

REMARQUE. Compte tenu de la compacité des espaces X et Y et des hypothèses de semi-continuité (3) et (5), la conclusion du théorème 4b peut aussi s'écrire : *il existe $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ vérifiant le système d'inégalités*

$$\sup_{y_j \in Y_j} f_j(\tilde{x}, y_j) \leq \inf_{x_i \in X_i} g_i(x_i, \tilde{y}) \quad \text{pour tout } (i, j) \in I \times J.$$

2.4. Relaxation de la compacité. Dans ce dernier paragraphe, nous signalons que les hypothèses de compacité sur les espaces dans les théorèmes 3 et 4 peuvent être remplacées par des hypothèses plus faibles de *coercivité* sur les familles d'applications.

DÉFINITION 3. Soient X un espace et $\{Y_i \mid i \in I\}$ une famille d'espaces convexes. On dit qu'une famille d'applications $\{A_i : X \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$ est *coercive* s'il existe un sous-ensemble compact $D \subset X$ et des sous-ensembles convexes compacts $C_i \subset Y_i$ tels que pour tout $x \notin D$ il existe $i \in I$ vérifiant $A_i(x) \cap C_i \neq \emptyset$.

Si X est compact ou si les Y_i sont compacts, toute famille $\{A_i : X \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$ de type KF est évidemment coercive. Inversement, la proposition suivante dit que si une famille de type KF est coercive, on peut supposer que les Y_i sont des espaces convexes compacts :

PROPOSITION 2. Soient X un espace, $\{Y_i \mid i \in I\}$ une famille d'espaces convexes et $\{A_i : X \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$ une famille d'applications de type KF coercive. Alors il existe des convexes compacts $K_i \subset Y_i$ tels que la famille $\{\tilde{A}_i : X \rightarrow K_i \mid i \in I\}$ soit de type KF.

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 1 et la définition de famille coercive, il existe un compact $D \subset X$, des polytopes $P_i \subset Y_i$ et des convexes compacts $C_i \subset Y_i$ tels que

- (1) pour tout $x \in D$ il existe $i \in I$ tel que $A_i(x) \cap P_i \neq \emptyset$,
- (2) pour tout $x \notin D$ il existe $i \in I$ tel que $A_i(x) \cap C_i \neq \emptyset$.

Pour chaque $i \in I$, notons alors K_i l'enveloppe convexe de $P_i \cup C_i$, qui est un espace convexe compact. Il est clair que chaque $\tilde{A}_i : X \rightarrow K_i$ est à valeurs convexes et à fibres ouvertes, et que, d'après (1) et (2), pour tout $x \in X$ il existe $i \in I$ tel que $\tilde{A}_i(x) \neq \emptyset$. \square

Compte tenu de cette proposition, les généralisations suivantes des théorèmes 3a et 4a se ramènent en fait à une application de ces mêmes théorèmes :

THÉORÈME 3a'. Soient $\{X_i \mid i \in I\}$ une famille d'espaces convexes, X leur produit et $\{A_i : X \rightarrow X_i \mid i \in I\}$ une famille d'applications de type KF coercive. Alors il existe $x \in X$ et $i \in I$ tels que $x_i \in A_i(x)$.

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2, il existe des convexes compacts $K_i \subset Y_i$ tels que la famille $\{\tilde{A}_i : X \rightarrow K_i \mid i \in I\}$ soit de type KF. Il suffit dès lors de poser $K = \prod\{K_i \mid i \in I\}$ et d'appliquer le théorème 3a à la famille $\{\tilde{A}_i : K \rightarrow K_i \mid i \in I\}$ pour conclure. \square

THÉORÈME 4a'. Soient $\{X_i \mid i \in I\}$ et $\{Y_j \mid j \in J\}$ deux familles d'espaces convexes, X et Y leurs produits respectifs, et $\{A_j : X \rightarrow Y_j \mid j \in J\}$ et $\{B_i : Y \rightarrow X_i \mid i \in I\}$ deux familles d'applications de type KF dont l'une est coercive. Alors il existe $(x, y) \in X \times Y$ et $(i, j) \in I \times J$ tels que $y_j \in A_j(x)$ et $x_i \in B_i(y)$.

DÉMONSTRATION. Supposons la famille $\{A_j : X \rightarrow Y_j \mid j \in J\}$ coercive. Grâce à la proposition 2 on trouve d'abord des convexes compacts $K_j \subset Y_j$ tels

que la famille $\{\tilde{A}_j : X \rightarrow K_j \mid j \in J\}$ soit de type KF. Puis en appliquant la proposition 1 à $\{\tilde{B}_i : K \rightarrow X_i \mid i \in I\}$, où $K = \prod\{K_j \mid j \in J\} \subset Y$, on trouve des polytopes $Q_i \subset X_i$ tels que la famille $\{\tilde{B}_i : K \rightarrow Q_i \mid i \in I\}$ soit de type KF. Il ne reste plus alors qu'à appliquer le théorème 4a aux familles $\{\tilde{A}_j : Q \rightarrow K_j \mid j \in J\}$, où $Q = \prod\{Q_i \mid i \in I\} \subset X$, et $\{\tilde{B}_i : K \rightarrow Q_i \mid i \in I\}$ pour obtenir le résultat. \square

Grâce aux théorèmes 3a' et 4a', on peut améliorer les théorèmes analytiques 3b et 4b. Rappelons qu'une fonction numérique $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un espace topologique X est dite *inf-compacte* si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$ est compact.

THÉORÈME 3b'. *Le théorème 3b reste vrai si l'hypothèse de compacité sur les X_i est remplacée par la condition de coercivité suivante :*

(C) *quel que soit $i \in I$ il existe un convexe compact $C_i \subset X_i$ tel que la fonction $x \mapsto \sup_{y_i \in C_i} f_i(x, y_i)$ est inf-compacte.*

THÉORÈME 4b'. *Le théorème 4b reste vrai si l'hypothèse de compacité sur les X_i et les Y_j est remplacée par la condition de coercivité suivante :*

(C) *quel que soit $j \in J$ il existe un convexe compact $C_j \subset Y_j$ tel que la fonction $x \mapsto \sup_{y_j \in C_j} f_j(x, y_j)$ est inf-compacte.*

REMARQUE. Lorsque les familles d'applications ne comportent qu'un seul élément, les théorèmes de ce paragraphe redonnent des résultats connus (voir par exemple Lassonde [9]).

RÉFÉRENCES

- [1] H. BEN EL MECHAÏEKH, P. DEGUIRE ET A. GRANAS, *Points fixes et coïncidences pour les applications multivoques (applications de Ky Fan)*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **295** (1982), 337–340.
- [2] A. BORGLIN AND H. KEIDING, *Existence of equilibrium actions and of equilibrium*, J. Math. Econom. **3** (1976), 313–316.
- [3] F. E. BROWDER, *The fixed-point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces*, Math. Ann. **177** (1968), 283–301.
- [4] R. ENGELKING, *General Topology*, Monografie Mat., vol. 60, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.
- [5] K. FAN, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Ann. **142** (1961), 305–310.
- [6] ———, *Applications of a theorem concerning sets with convex sections*, Math. Ann. **163** (1966), 189–203.
- [7] ———, *A minimax inequality and applications*, Inequalities III (O. Shisha, ed.), Academic Press, New York, 1972, pp. 103–113.
- [8] D. GALE AND A. MAS-COLELL, *An equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences*, J. Math. Econom. **2** (1975), 9–15; Erratum, ibid. **6** (1979), 297–298.

- [9] M. LASSONDE, *On the use of KKM multifunctions in fixed point theory and related topics*, J. Math. Anal. Appl. **97** (1983), 151–201.
- [10] F. C. LIU, *A note on the von Neumann–Sion minimax principle*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **6** (1978), 517–524.
- [11] T. W. MA, *On sets with convex sections*, J. Math. Anal. Appl. **27** (1969), 413–416.
- [12] E. MARCHI AND J.-E. MARTÍNEZ-LEGAZ, *A generalization of Fan–Browder’s fixed point theorem and its applications*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **2** (1993), 277–291.
- [13] E. MICHAEL, *Continuous selections. I*, Ann. of Math. **63** (1956), 361–382.
- [14] J. NASH, *Equilibrium points in N -person games*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **36** (1950), 48–49.
- [15] M. SION, *On general minimax theorems*, Pacific J. Math. **8** (1958), 171–176.
- [16] S. TOUSSAINT, *On the existence of equilibria in economies with infinitely many commodities and without ordered preferences*, J. Econom. Theory **33** (1984), 98–115.

Manuscript received May 26, 1995

PAUL DEGUIRE
Mathématiques et statistique
Université de Moncton
Moncton, E1A 3E9, CANADA
E-mail address: deguirp@umoncton.ca

MARC LASSONDE
Mathématiques
Université des Antilles et de la Guyane
97159 Pointe-à-Pitre Cedex, Guadeloupe, FRANCE
E-mail address: lassonde@univ-ag.fr