Topological **M**ethods in **N**onlinear **A**nalysis
Journal of the Juliusz Schauder Center
Volume 8, 1996, 95–135

THÉORIE DE LA DUALITÉ ET ORBITES HOMOCLINES DE SYSTÈMES GYROSCOPIQUES

Mourad Benabas

1. Introduction et position du problème

Dans cet article, on se propose d'étudier l'existence *d'orbites homoclines* d'une certaine classe de systèmes hamiltoniens qualifiés de *gyroscopiques*. La démonstration est basée sur la dualité de Clarke–Ekeland, la méthode du col, la condition de compacité de Palais–Smale–Séré et la théorie de Lyusternik–Shnirel'man. Cette approche, variationnelle, est à l'heure actuelle, moyennant une hypothèse de convexité, la meilleure méthode pour étudier ce type de problème.

L'étude des orbites homoclines de systèmes hamiltoniens remonte à Henri Poincaré (voir [13], Ch. XXXIII). Celui-ci obtient l'existence d'une infinité de ces orbites lorsque les variétés stable et instable se coupent transversalement. Notons que ces résultats ont été améliorés par G. D. Birkhoff, S. Smale, V. M. Alexeev et d'autres. L'inconvénient de cette méthode est qu'il est difficile de vérifier en pratique l'hypothèse de transversalité et on ne peut le faire que dans certains cas particuliers.

L'étude des orbites homoclines par les méthodes variationnelles a fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années, où en introduisant directement les fonctionnelles de Maupertuis et de Clarke on retrouve des résultats d'existence et de multiplicité (voir [9], [15], [16] et [17]), moyennant des hypothèses globales portant sur l'hamiltonien sans l'hypothèse de transversalité. Notons que le problème variationnel en question présente un défaut de compacité qui complique

1991 *Mathematics Subject Classification.* 34C37.

©1996 Juliusz Schauder Center for Nonlinear Studies

la recherche de ces orbites. C'est une des raisons qui a fait que les orbites périodiques, plus facile à approcher, ont été beaucoup plus étudiées (voir [6] et [10]), notamment après le fameux résultat de Rabinowitz (1978) (voir [14]), qui donne l'existence d'une de ces orbites.

Les systèmes gyroscopiques qu'on étudie sont régis par une équation du type

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha J\dot{x}(t) + V'(t, x(t)) = f(t) \tag{e_α}$$

définie sur l'espace $\mathbb{R}^{2N}$ de dimension paire, où α est un réel, V un potentiel de classe C^2 par rapport à x, V' le gradient $(\partial V/\partial x_i)_i$, f un terme de force extérieure et J la matrice antisymétrique et symplectique standard définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose de plus que V et f dépendent T-périodiquement du temps t, $T > 0$ étant donné.

Résumons très brièvement les résultats obtenus dans [4] et [5] concernant les orbites périodiques du système (e_α). Lorsque V est strictement convexe et sur-quadratique, le système (e_α) admet deux solutions T-périodiques; l'une correspond à un point critique de type col de la fonctionnelle de Clarke, l'autre correspond à un minimum local de la même fonctionnelle. Une théorie de l'index de Morse est élaborée qui nous a permis d'avoir la minimalité de la période des solutions trouvées ainsi que les sous-harmoniques géométriquement distinctes, i.e. les solutions kT-périodiques, $k \in \mathbb{N}^*$, qui ne se ramènent pas l'une à l'autre par changement de phase. Dans le cas où le potentiel V est strictement convexe et sous-quadratique, on montre que le système (e_α) admet une solution de période minimale T correspondant au minimum global de la fonctionnelle de Clarke.

Dans ce travail, on s'intéresse à la dynamique du système (e_α) au voisinage d'une solution T-périodique x_0 qui existe d'après [4] et [5]. Plus précisément, on s'intéresse aux solutions x qui sont telles que $|x(t) - x_0(t)| \to 0$ et $|\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)| \to 0$ quand $t \to \pm\infty$. De telles solutions sont appelées *orbites homoclines à* x_0.

On linéarise le système (e_α) autour de la solution x_0 pour isoler la partie linéaire du problème en posant $y = x - x_0$. On obtient

$$\mathcal{A}_\alpha y = -V''(t, x_0)y - K'(t, y) \tag{l_α}$$

où

$$\mathcal{A}_\alpha = \frac{d^2}{dt^2} + 2\alpha J \frac{d}{dt}$$

et

$$K(t, y) = V(t, x_0 + y) - (V'(t, x_0), y) - \tfrac{1}{2}(V''(t, x_0(t))y, y).$$

Chercher les solutions x de (e_α) homoclines à x_0 revient à la recherche des y solutions de (l_α) homoclines à 0.

Dans la suite on s'intéressera au problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}_\alpha x(t) = Ax(t) + R'(t, x(t)), \\ x(\pm\infty) = 0, \end{cases}$$

et notre travail reposera essentiellement sur celui de [9] où l'existence de deux orbites du système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = JEx(t) + JK'(t, x(t)), \\ x(\pm\infty) = 0, \end{cases}$$

a été prouvée sous des hypothèses de convexité et de sur-quadraticité sur K. Les systèmes du type $(\mathcal{P})$ sont un cas particulier de systèmes hamiltoniens, i.e. s'écrivent sous la forme $\dot{z}(t) = JH'(t, z(t))$ avec $z = (x, y)$, $y = \alpha Jx + \dot{x}$ et

$$H(t, x(t), y(t)) = \tfrac{1}{2}y^2(t) + \tfrac{\alpha^2}{2}x^2(t) + (\alpha Jy(t), x(t)) - R(t, x(t)) - \tfrac{1}{2}(Ax(t), x(t)),$$

(voir [2]). Il apparaît que la partie de H correspondant à K n'est pas sur-quadratique et on ne peut donc satisfaire les hypothèses de [9] pour affirmer l'existence de deux orbites de $(\mathcal{P})$. Comme on veut ramener l'étude de $(\mathcal{P})$ à celle faite dans [9], i.e. on veut exploiter les techniques récentes mises en oeuvre dans [9], ceci nous amène à étudier la partie linéaire du problème et à formuler des hypothèses sur A et R. L'étude de la partie linéaire consiste surtout à démontrer son inversibilité pour pouvoir, plus tard au Chapitre 3, l'introduire dans la fonctionnelle duale, chose qu'on obtient pour α suffisamment petit. Dans la partie non linéaire, on transportera les hypothèses de [9] sur K à R, ce qui nous permet en particulier de vérifier les hypothèses géométriques du théorème du col pour la fonctionnelle duale. Par suite, on déduit du principe variationnel d'Ekeland l'existence d'un point critique différent de 0 qui est un minimum local. En introduisant une condition de compacité et un lemme de déformation, on démontre par l'absurde l'existence d'un autre point critique. La formule de réciprocité de Legendre et l'inversibilité de la partie linéaire nous conduisent finalement au théorème suivant qui est le résultat principal de ce travail

Théorème 1.1. *Pour α suffisamment petit le problème $(\mathcal{P})$ admet dans $W^{2,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$, $p \in\,]1, 2[$, au moins deux solutions x_1 et x_2 vérifiant $x_1(t+kT) \neq x_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$.*

En ce qui concerne la partie non linéaire du problème, on suppose:

(R-0) $\quad R$ dépend T-périodiquement du temps t,

(R-1) $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ R(t, \cdot)$ est de classe C^1 et est strictement convexe

et il existe $q > 2$, k_1, k_2 et $k_3 > 0$, tels que

$$\text{(R-2)} \qquad R(t,x) \leq \frac{1}{q}(R'(t,x),x), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^{2N},$$

$$\text{(R-3)} \qquad k_1|x|^q \leq R(t,x) \leq k_2|x|^q,$$

$$\text{(R-4)} \qquad k_3|x|^{q-1} \leq |R'(t,x)| \leq k_4|x|^{q-1}.$$

(R-2) est l'hypothèse de sur-quadraticité introduite pour la première fois par Ambrosetti et Rabinowitz dans [1]. Elle est, dans le cas convexe, équivalente à

$$\forall(t,x),\ \forall\lambda \geq 1, \quad R(t,\lambda x) \geq \lambda^q R(t,x)$$

et implique en particulier que $R(t,x)/|x|^2 \to 0$ quand $|x| \to 0$. On l'utilisera à partir du Lemme 4.3 du Chapitre 4.

On cherchera les solutions dans $W^{2,p}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})$ où $p = q^* \in \,]1,2[$ est défini par $1/p + 1/q = 1$, q étant la constante de sur-quadraticité de R. Si x est une solution dans $W^{2,p}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})$ du système $\mathcal{A}_\alpha x = Ax + R'(t,x)$ alors $x \to 0$ quand $t \to \pm\infty$. Reste donc le problème d'existence de ces solutions.

2. Étude de la partie linéaire du problème

On commence par étudier la partie linéaire du problème $(\mathcal{P})$. On suppose

(A-1) A est une matrice $2N \times 2N$ symétrique

(A-2) $\operatorname{Spec}(A)$, réel d'après (A-1), est borné inférieurement par une constante $m > 0$.

Posons $y = \dot{x} + \alpha J x$; alors le système

$$\text{(1)} \qquad \mathcal{A}_\alpha x = Ax$$

devient

$$\text{(2)} \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha J & I_{2N} \\ A - \alpha^2 I_{2N} & -\alpha J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \widetilde{J}\begin{pmatrix} \alpha^2 I_{2N} - A & \alpha J \\ -\alpha J & I_{2N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} 0_{2N} & I_{2N} \\ -I_{2N} & 0_{2N} \end{pmatrix}.$$

On posera

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha J & I_{2N} \\ A - \alpha^2 I_{2N} & -\alpha J \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widetilde{M} = \begin{pmatrix} \alpha^2 I_{2N} - A & \alpha J \\ -\alpha J & I_{2N} \end{pmatrix}.$$

La matrice $\widetilde{M}$ est symétrique et (2) est alors un système hamiltonien linéaire.

Lemme 2.1. *Sous les hypothèses* (A-1) *et* (A-2)*, le flot induit par le système* (2) *est, pour α suffisamment petit, hyperbolique, i.e.* $\operatorname{Spec}(M) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Démonstration. Si λ est valeur propre de M alors il existe $v = \binom{v_1}{v_2} \neq 0$, $Mv = \lambda v$, i.e.

$$\begin{cases} -\alpha J v_1 + v_2 = \lambda v_1, \\ A v_1 - \alpha^2 v_1 - \alpha J v_2 = \lambda v_2, \end{cases}$$

donc

$$Av_1 = \lambda^2 v_1 + 2\lambda\alpha J v_1. \tag{a}$$

Cas 1: $\alpha = 0$. Alors on a $Av_1 = \lambda^2 v_1$ avec $v_1 \neq 0$ car sinon v serait nul. Donc λ^2 est une valeur propre de A. Par suite, on a d'après (A-1), $\mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{Im}(\lambda) = 0$. Et (A-2) entraîne que $\mathrm{Im}(\lambda) = 0$ et $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$. D'où $\mathrm{Spec}(M) \subset \mathbb{R}^*$, i.e. $\mathrm{Spec}(M) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Cas 2: $\alpha \neq 0$. De la relation (a), on déduit que pour α tendant vers 0, le carré de chacune des valeurs propres λ^2 de M tend vers une valeur propre μ de A qui est dans $\mathbb{R}_+^*$ d'après (A-2), c'est-à-dire

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\lambda)^2 - \mathrm{Im}(\lambda)^2 \to \mu \geq m > 0, \\ \mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{Im}(\lambda) \to 0, \end{cases}$$

ce qui signifie que $\mathrm{Im}(\lambda) \to 0$ et $\mathrm{Re}(\lambda)^2 \to \mu > 0$. Donc pour α suffisamment petit on peut conclure que $\mathrm{Spec}(M) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Avoir une estimation sur la petitesse de α me paraît difficile. $\square$

Remarque 2.2. A étant une matrice symétrique, alors $\widetilde{M}$ l'est aussi et si μ est valeur propre de $M = J\widetilde{M}$, $-\mu$, $\overline{\mu}$ et $-\overline{\mu}$ le sont aussi. Par suite, si λ est valeur propre de e^{Mt} alors λ^{-1}, $\overline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}^{-1}$ sont valeurs propres de e^{Mt}. Notons que lorsque $\alpha = 0$, $\mathrm{Spec}(M) \subset \mathbb{R}^*$ et il n'y a donc pas lieu de parler de $\overline{\mu}$, $-\overline{\mu}$, $\overline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}^{-1}$.

L'hyperbolicité du flot induit par (2), i.e. le fait que les valeurs propres de e^{Mt} soient à l'extérieur du cercle unité, entraîne que $\mathbb{R}^{4N} = E_{\mathrm{s}} \oplus E_{\mathrm{u}}$, décomposition unique en sous-espaces non nécéssairement propres mais qui sont invariants sous l'action de M.

- $E_{\mathrm{s}} = \{x \in \mathbb{R}^{4N} : ke^{-bt} \leq |e^{Mt}x| \leq Ke^{-bt}\}$, sous-espace stable associé aux valeurs propres de module < 1, i.e. le flot induit sur E_{s} est une contraction.
- $E_{\mathrm{u}} = \{x \in \mathbb{R}^{4N} : ke^{bt} \leq |e^{Mt}x| \leq Ke^{bt}\}$, sous-espace instable associé aux valeurs propres réelles de module > 1, i.e. le flot induit sur E_{u} est une dilatation.

k, K et b sont des constantes dans $\mathbb{R}_+^*$ indépendantes de t. De plus, vu la disposition particulière des valeurs propres de e^{Mt}, E_{s} et E_{u} ont même dimension $2N$.

Les propriétés de la partie linéaire du problème $(\mathcal{P})$ sont données dans la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Sous les hypothèses* (A-1) *et* (A-2)*, l'opérateur*

$$D : W^{2,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N}) \cap L^r(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N}) \to L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$$

défini pour $r \geq p$ par $Dx = \mathcal{A}_\alpha x - Ax$ est bijectif pour α suffisamment petit. De plus, son inverse L est bicontinu et auto-adjoint de $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$ dans $L^r(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$.

Dans la suite on écrira $W^{2,p}, W^{1,p}$ et L^r au lieu de $W^{2,p}(\mathbb{R})$, $W^{1,p}(\mathbb{R})$ et $L^r(\mathbb{R})$. On notera aussi $\| \cdot \|_r$ la norme dans L^r et $\| \cdot \|_{2,p}$ la norme dans $W^{2,p}$.

DÉMONSTRATION. On considère l'équation

$$u = Dx = \mathcal{A}_\alpha x - Ax, \tag{3}$$

ce qui signifie que

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} \tag{4}$$

avec $y = \dot{x} + \alpha J x$, ou encore

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{Mt}\xi + \int_0^t e^{M(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ u(s) \end{pmatrix} ds. \tag{5}$$

D'après la remarque précédente, le vecteur ξ de $\mathbb{R}^{4N}$ s'écrit $\xi = P_{\mathrm{s}}\xi + P_{\mathrm{u}}\xi$ où P_{s} et P_{u} sont les projections sur les sous-espaces E_{s} et E_{u}. De la même manière,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{s}}u(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{u}}u(s) \end{pmatrix}$$

et (5) devient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =& e^{Mt}(P_{\mathrm{s}}\xi + P_{\mathrm{u}}\xi) \\ &+ \int_0^t e^{M(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{s}}u(s) \end{pmatrix} ds + \int_0^t e^{M(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{u}}u(s) \end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

On choisit maintenant ξ tel que

$$P_{\mathrm{s}}\xi = \int_{-\infty}^0 e^{-Mt} \begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{s}}u(s) \end{pmatrix} ds \quad \text{et} \quad P_{\mathrm{u}}\xi = -\int_0^\infty e^{-Mt} \begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{u}}u(s) \end{pmatrix} ds.$$

$P_{\mathrm{u}}\xi$ est bien défini. En effet,

$$\begin{aligned} |P_{\mathrm{u}}\xi| &= \left| -\int_0^\infty e^{-Mt} \begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{u}}u(s) \end{pmatrix} ds \right| \leq \int_0^\infty \left| e^{-Ms} \begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{u}}u(s) \end{pmatrix} \right| ds \\ &\leq K \int_0^\infty e^{-bs}|u(s)|\, ds \leq K \left(\int_0^\infty -e^{-bqs}\, ds \right)^{1/q} \|u\|_p \\ &= K \left(\frac{1}{bq} \right)^{1/q} \|u\|_p < \infty. \end{aligned}$$

De la même manière, on montre que $P_{\mathrm{s}}\xi$ est bien défini (voir une démonstration similaire dans [9]).

Avec ce choix de ξ, la solution de (4) devient

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= e^{Mt}\int_{-\infty}^{0} e^{-Ms}\begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{s}}u(s)\end{pmatrix} ds - e^{Mt}\int_{0}^{\infty} e^{-Ms}\begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{u}}u(s)\end{pmatrix} ds \\ &\quad + \int_{0}^{t} e^{M(t-s)}\begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{s}}u(s)\end{pmatrix} ds + \int_{0}^{t} e^{M(t-s)}\begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{u}}u(s)\end{pmatrix} ds,\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{t} e^{M(t-s)}\begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{s}}u(s)\end{pmatrix} ds - \int_{t}^{\infty} e^{M(t-s)}\begin{pmatrix} 0 \\ P_{u}u(s)\end{pmatrix} ds,$$

i.e.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \int_{\mathbb{R}} e^{M(t-s)}\chi^{+}(t-s)\begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{s}}u(s)\end{pmatrix} ds \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} e^{M(t-s)}\chi^{-}(t-s)\begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{u}}u(s)\end{pmatrix} ds\end{aligned} \tag{6}$$

où

$$\chi^{+}(t) = \chi^{-}(-t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z_1(t) - z_2(t)$ avec

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{M(t-s)}\chi^{+}(t-s)\begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{s}}u(s)\end{pmatrix} ds, \\ z_2(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{M(t-s)}\chi^{-}(t-s)\begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{u}}u(s)\end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

On montre que les z_i, $i = 1, 2$, sont bien dans $W^{1,p} \cap L^r$, $r \geq p$. En effet,

$$\begin{aligned} |z_2(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{M(t-s)}\chi^{-}(t-s) + \begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{u}}u(s)\end{pmatrix} ds \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| e^{M(t-s)}\chi^{-}(t-s)\begin{pmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{u}}u(s)\end{pmatrix} \right| ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} K e^{b(t-s)}\chi^{-}(t-s)|u(s)|\, ds = K(g * |u(\,\cdot\,)|)(t) \end{aligned}$$

où $g(x) = e^{bx}\chi^{-}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. D'où

$$\|z_2\|_r^r \leq K^r \int_{\mathbb{R}} (g * |u(\,\cdot\,)|)^r(t)\, dt = K^r \|g * |u(\,\cdot\,)|\,\|_r^r.$$

D'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^r\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{rbx}\chi^{-}(x) dx = \frac{1}{rb} < \infty \quad \text{pour tout } r \geq 1,$$

i.e. $g \in L^r$ pour tout $r \geq 1$. L'inégalité de Young sur la convolution, $\|f_1 * f_2\|_\alpha \leq \|f_1\|_\beta \|f_2\|_\gamma$ pour tous $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$ vérifiant $1/\alpha = 1/\beta + 1/\gamma - 1$, nous donne dans notre cas pour $u \in L^p$, $\|g * |u(\cdot)|\|_r \leq \|g\|_s \|u\|_p$ pour tous $r, s \geq 1$ tels que $1/r = 1/s + 1/p - 1$, i.e. $r \geq p$. Par suite,

$$\|z_2\|_r^r \leq K^r \|g\|_s^r \|u\|_p^r = K^r \left(\frac{1}{sb}\right)^{r/s} \|u\|_p^r < \infty \quad \text{pour tous } s \geq 1,\ r \geq p.$$

On refait le même raisonnement pour z_1 et on montre que

$$\|z_1\|_r \leq K \left(\frac{1}{sb}\right)^{1/\mu} \|u\|_p < \infty \quad \text{pour tous } s \geq 1,\ r \geq p.$$

Ainsi $z_1, z_2 \in L^r$ pour tout $r \geq p$ et il en est de même de $\binom{x}{y}$. D'autre part, on a d'après (4), $\frac{d}{dt}\binom{x}{y} = M\binom{x}{y} + \binom{0}{u} \in L^p$ car $\binom{x}{y}$ et $\binom{0}{u}$ le sont. D'où $\binom{x}{y} \in W^{1,p} \cap L^r$ pour tout $r \geq p$.

Ainsi l'opérateur $D_1 : W^{1,p} \cap L^r \to \{0_{2N}\} \times L^p$ défini par

$$D_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est surjectif. D'autre part, $\binom{x}{y} = z_1 - z_2$ et

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_r &= \|z_1 - z_2\|_r \leq \|z_1\|_r + \|z_2\|_r \\ &\leq K \left(\frac{1}{sb}\right)^{1/s} \|u\|_p + K \left(\frac{1}{sb}\right)^{1/s} \|u\|_p = 2K \left(\frac{1}{sb}\right)^{1/s} \left\| D_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_p. \end{aligned}$$

D'où D_1 qui est linéaire est injectif, donc bijectif, et son inverse est un noyau de convolution L_1 défini par

$$L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}} e^{M(t-s)} (\chi^+(t-s) P_{\mathrm{s}} - \chi^-(t-s) P_{\mathrm{u}}) \begin{pmatrix} 0 \\ u(s) \end{pmatrix} ds = \left(\mathcal{L} * \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} \right)(t)$$

où

$$\mathcal{L}(t) = e^{Mt} (\chi^+(t) P_{\mathrm{s}} - \chi^-(t) P_{\mathrm{u}}).$$

On revient à l'opérateur D. On a $\binom{x}{y} \in W^{1,p}$, donc $y = \dot{x} + \alpha J x \in W^{1,p}$ et $x \in W^{2,p}$. De plus, $x \in W^{2,p} \cap L^r$ pour tout $r \geq p$. D'autre part, on a l'unicité de la solution de l'équation (3) dans $W^{2,p} \cap L^r$ car sinon on contredirait l'unicité de la solution de (4). D est donc bijectif et soit L son inverse. L est une application de L^p dans $W^{2,p} \cap L^r$, $r \geq p$ et on a pour $x = Lu$ solution de (3) et $y = \dot{x} + \alpha J x$,

$$\|Lu\|_r = \|x\|_r \leq \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_r \leq 2K \left(\frac{1}{sb}\right)^{1/s} \|u\|_p.$$

L étant linéaire est donc continu de L^p dans L^r, $r \geq p$. De plus, $D = L^{-1}$ est continu. De la même manière, on montre que L_1 et D_1 sont continus. Enfin, D est auto-adjoint de $L^r \cap W^{2,p}$ dans L^p. En effet,

$$\langle Dx, y\rangle = \langle \ddot{x} + 2\alpha J\dot{x} - Ax, y\rangle = \langle \ddot{x}, y\rangle + 2\alpha\langle J\dot{x}, y\rangle - \langle Ax, y\rangle,$$
$$\langle \ddot{x}, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} (\ddot{x}, y)\, dt = (\dot{x}, y)|_{-\infty}^{\infty} - (x, \dot{y})|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} (x, \ddot{y})\, dt = 0 - 0 + \langle x, \ddot{y}\rangle.$$

De la même manière, on a $2\alpha\langle J\dot{x}, y\rangle = 2\alpha\langle x, J\dot{y}\rangle$ car J est antisymétrique, et $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ car A est symétrique. D'où $\langle Dx, y\rangle = \langle x, Dy\rangle$, i.e. D est auto-adjoint et il en est donc de même de son inverse L. $\square$

Remarque 2.4 Expression explicite de la solution x de (3). On sait déjà que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{Mt}\xi + \int_0^t e^{M(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ u(s) \end{pmatrix} ds$$

est solution de (4). Donc pour avoir x il nous faudrait avoir le premier bloc ligne de e^{Mt}. Dans le cas $\alpha = 0$, $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et la solution x s'obtient facilement. En effet, A étant définie positive d'après (A-1)–(A-2), il existe une matrice B qui n'est pas nécessairement réelle mais qui est hermitienne telle que $B^2 = A$. Pour obtenir la matrice B on peut procéder comme suit: dans une base orthonormée convenable, A est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale (unitaire) V telle que

$$VAV^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{2N} \end{pmatrix}.$$

Soient $b_1, \ldots, b_{2N} \in \mathbb{C}$ tels que $b_i^2 = a_i$, $i = 1, \ldots, 2N$. Si parmi les nombres $a_1, \ldots, a_{2N}$, il y a k nombres non nuls, on peut choisir ces b_i de 2^k manières différentes. Fixons une fois pour toutes un tel choix et considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{2N} \end{pmatrix}.$$

Définissons $B = V^{-1}\widehat{B}V$; alors

$$B^2 = (V^{-1}\widehat{B}V)(V^{-1}\widehat{B}V) = V^{-1}\widehat{B}^2V = V^{-1}(VAV^{-1})V = A.$$

Comme V est une matrice orthogonale (unitaire), la matrice B est symétrique (hermitienne). D'où $\widehat{B} = VAV^{-1}$ et pour $B = V^{-1}\widehat{B}V$, $B^2 = A$. La matrice M s'écrit alors $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ B^2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et on a par récurrence

$$M^{2n} = \begin{pmatrix} B^{2n} & 0 \\ 0 & B^{2n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{2n} \\ B^{2n+2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
e^{Mt} &= \sum_{n\geq 0}\frac{M^n t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{M^{2n}t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n\geq 0}\frac{M^{2n+1}t^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= \begin{pmatrix} \sum_{n\geq 0}\frac{B^{2n}t^{2n}}{(2n)!} & 0\\ 0 & \sum_{n\geq 0}\frac{B^{2n}t^{2n}}{(2n)!}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sum_{n\geq 0}\frac{B^{2n}t^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ \sum_{n\geq 0}\frac{B^{2n+2}t^{2n+1}}{(2n+1)!} & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \operatorname{Ch} Bt & 0\\ 0 & \operatorname{Ch} Bt\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B^{-1}\operatorname{Sh} Bt\\ B\operatorname{Sh} Bt & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \operatorname{Ch} Bt & B^{-1}\operatorname{Sh} Bt\\ B\operatorname{Sh} Bt & \operatorname{Ch} Bt\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Quand A et donc B est diagonale, on obtient une formule explicite

$$
e^{Mt} = \begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} \operatorname{Ch}\sqrt{a_1}t & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \operatorname{Ch}\sqrt{a_{2N}}t\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{Sh}\sqrt{a_1}t}{\sqrt{a_1}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\operatorname{Sh}\sqrt{a_{2N}}t}{\sqrt{a_{2N}}}\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} \sqrt{a_1}\operatorname{Sh}\sqrt{a_1}t & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{a_{2N}}\operatorname{Sh}\sqrt{a_{2N}}t\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \operatorname{Ch}\sqrt{a_1}t & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \operatorname{Ch}\sqrt{a_{2N}}t\end{pmatrix}
\end{pmatrix}.
$$

Cosinus hyperbolique étant une fonction paire et sinus hyperbolique une fonction impaire, les éléments de la matrice e^{Mt} ci-dessus ne dépendent pas du choix des $a_i,\ i = 1,\ldots,2N$. Ainsi,

$$
e^{Mt} = \begin{pmatrix} \operatorname{Ch} Bt & B^{-1}\operatorname{Sh} Bt\\ B\operatorname{Sh} Bt & \operatorname{Ch} Bt\end{pmatrix}
$$

et de (5) on déduit que

$$
x(t) = \operatorname{Ch} Bt\; x(0) + B^{-1}\operatorname{Sh} Bt\,\dot{x}(0) + \int_0^t B^{-1}\operatorname{Sh}[B(t-s)]\,u(s)\,ds.
$$

D'autre part, de l'expression (6) obtenue pour un choix de $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ fait précédemment on déduit que

$$
x(t) = \int_{\mathbb{R}} B^{-1}\operatorname{Sh} B(t-s)(\chi^+(t-s)P_{\mathrm{s}} - \chi^-(t-s)P_{\mathrm{u}})\,u(s)\,ds = B^{-1}(\overline{\mathcal{L}} * u)(t)
$$

où $\overline{\mathcal{L}}(t) = \operatorname{Sh} Bt\ (\chi^+(t)P_{\mathrm{s}} - \chi^-(t)P_{\mathrm{u}})$.

3. Formulation variationnelle

On considère la *transformée de Fenchel* (*Legendre*) G de R définie par

$$
G(t,y) = \max_{x\in\mathbb{R}^{2N}}\{xy - R(t,x)\},\quad y\in\mathbb{R}^{2N}.
$$

Des hypothèses faites sur R, il s'ensuit que

(G-1) G dépend T-périodiquement du temps puisque R l'est, de classe C^1 par rapport à la deuxième composante puisque R est strictement convexe, et est strictement convexe par rapport à y puisque R est C^1.

$$\frac{1}{k_2}|y|^p \leq G(t,y) \leq \frac{1}{k_1}|y|^p. \tag{G-2}$$

$$\frac{1}{k_4}|y|^{p-1} \leq G'(t,y) \leq \frac{1}{k_3}|y|^{p-1}. \tag{G-3}$$

$$0 \leq (y, G'(t,y)) \leq pG(t,y) \leq p(y, G'(t,y)). \tag{G-4}$$

La dernière inégalité dans (G-4) est due au fait que $y=0$ est minimum local de G. Pour la démonstration des propriétés de G, voir [11].

La convexité de R nous amène à introduire la fonctionnelle d'action duale qui n'est autre que celle utilisée pour trouver les orbites périodiques adaptée au cas homocline.

La fonctionnelle est

$$\phi(y) = \int_{\mathbb{R}} \big\{ -\tfrac{1}{2}(Ly,y) + G(t,y)\big\}\, dt, \quad y \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N}).$$

Proposition 3.1. *ϕ est bien définie de $L^p(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})$ dans $\mathbb{R}$ et est de classe C^1. De plus, y est point critique de ϕ dans $L^p(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})$ si et seulement si $x = Ly$ est une solution classique de $(\mathcal{P})$ dans $W^{2,p}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N}) \cap L^r(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})$, $r \geq p$.*

Démonstration. $y \in L^p(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})$ alors $Ly \in L^q(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})$ et donc le terme quadratique $\int_{\mathbb{R}} -\frac{1}{2}(Ly,y)\,dt$ est bien défini et est C^∞. D'autre part, d'aprés (G-2),

$$\forall y \in L^p(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N}), \quad \int_{\mathbb{R}} |G(t,y)|\,dt \leq \frac{1}{k_1}\int_{\mathbb{R}} |y(t)|^p\,dt,$$

ce qui implique que le terme convexe de ϕ est bien défini. (G-3) et le fait que G soit de classe C^1 entraînent d'après un théorème de Krasnosel'skiĭ (voir [11]) que le terme convexe de ϕ est de classe C^1. La fonctionnelle ϕ est donc bien définie et est de classe C^1.

Soit y un point critique de ϕ dans L^p; alors puisque L est auto-adjoint on a $-Ly + G'(t,y) = 0$, p.p. $t \in \mathbb{R}$. Si $x = Ly$ alors $x = G'(t,y)$ et d'après la formule de réciprocité de Legendre (voir [11]) on a $y = R'(t,x)$. D'où

$$\begin{cases} y = R'(t, x(\cdot)), \\ y = Dx = \mathcal{A}_\alpha x - Ax, \end{cases} \quad \text{i.e. } \mathcal{A}_\alpha x = Ax + R'(t,x(\cdot)).$$

De plus, $x = Ly \in W^{2,p}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N}) \cap L^r(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})$, $r \geq p$, par définition de L et on a $x(\pm\infty) = 0$. La réciproque se démontre de la même manière en utilisant la formule de réciprocité de Legendre. □

Notons que notre fonctionnelle ϕ est définie pour α suffisamment petit, i.e. pour tout α, $|\alpha| < \alpha_0$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

REMARQUE 3.2. $y=0$ est minimum local de ϕ. En effet,

$$\phi(y) \geq -\frac{1}{2}\|L\|_{p,q}\|y\|_p^2 + \frac{1}{k_2}\|y\|_p^p > 0$$

pour $\|y\|_p$ assez petit car $p \in\ ]1,2[$. Comme $\phi(0)=0$, on déduit que 0 est minimum local de ϕ, donc point critique de ϕ; il lui correspond une solution triviale $x = L\,0 = 0$ d'après la proposition précédente. Donc $x=0$ est solution du problème $(\mathcal{P})$ et on cherche alors les orbites homoclines à cet équilibre.

4. Premières propriétés de compacité

DÉFINITION 4.1. Soit E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction de classe C^1. On dit que f vérifie *la condition de compacité de Palais–Smale* (en abrégé (PS)) si de toute suite (x_n) avec $(f(x_n))$ bornée et $f'(x_n) \to 0$ dans E^*, on peut extraire une sous-suite convergente.

Dans le cas des solutions T-périodiques, l'opérateur L est compact de $L^p(0,T)$ dans $L^q(0,T;\mathbb{R}^{2N})$ grâce à une injection compacte du type Rellich–Kondrashov due au fait que $[0,T]$ est borné. D'autre part, on montre que toute suite (y_n) telle que $(\phi(y_n))$ est bornée et $\phi'(y_n) \to 0$, est bornée, donc admet une sous-suite faiblement convergente dans l'espace réflexif L^p. On suppose $y_n \rightharpoonup \overline{y}$; alors $Ly_n \to L\overline{y}$ puisque L est compact et on montre que $y_n \to \overline{y}$. D'où ϕ vérifie la condition de compacité de Palais–Smale. Si de plus les hypothèses géométriques du théorème du col sont vérifiées alors d'après ce même théorème, ϕ admet un point critique, donc $(\mathcal{P})$ admet une solution d'après la Proposition 3.1. Malheureusement, l'opérateur L n'est pas compact, mais on montre qu'il possède la propriété de compacité suivante:

LEMME 4.2. *Soit (y_n) une suite de $L^p(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})$ telle que*

(i) $\|y_n\|_p = \lambda$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0,\ \forall n,\ \lambda - \varepsilon \leq \int_{-R}^{R} |y_n(t)|^p\, dt \leq \lambda$.

Alors il existe une sous-suite (y_{n_p}) telle que $Ly_{n_p} \to y$ dans $L^q(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})$.

DÉMONSTRATION. On prend $(y_n) \subset L^p(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})$ vérifiant les conditions (i) et (ii) du lemme. Montrons d'abord qu'on peut extraire une sous-suite (y_{n_p}) telle que

$$L_1\begin{pmatrix} 0 \\ y_{n_p} \end{pmatrix} \to L_1\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = z \in L^q.$$

Pour cela il suffit de montrer que la suite $L_1\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y_n \end{smallmatrix}\right)$ est relativement compacte dans L^q, i.e. vérifie le critère de compacité dans L^q qui est l'analogue du théorème d'Ascoli dans $C(K)$, K espace métrique compact (voir [7]).

Pour $h \in \mathbb{R}$, on pose $\tau_h u(t) = u(t+h)$ et on montrera donc que $L_1\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y_n \end{smallmatrix}\right)$ est bornée et que

(1) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall \omega \Subset \mathbb{R}$ (i.e. $\overline{\omega}$ est compact dans $\mathbb{R}$),

$$\exists \delta > 0,\ \forall n,\ |h| < \delta \Rightarrow \left\| \tau_h L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} - L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_{L^q(\omega)} < \varepsilon$$

et

(2) $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \omega \Subset \mathbb{R},\ \forall n,\quad \left\| L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_{L^q(\mathbb{R}\setminus\omega)} < \varepsilon.$$

$L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}$ est bornée car (y_n) l'est et car L_1 est continu.

Prouvons (1):

$$L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} = \mathcal{L} * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} = (\mathcal{L}_{\mathrm{s}} - \mathcal{L}_{\mathrm{u}}) * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= e^{Mt}(\chi^+(t)P_{\mathrm{s}} - \chi^-(t)P_{\mathrm{u}}), \\ \mathcal{L}_{\mathrm{s}}(t) &= e^{Mt}\chi^+(t)P_{\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{\mathrm{u}}(t) = e^{Mt}\chi^-(t)P_{\mathrm{u}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\tau_h L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} - L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} = \tau_h \left(\mathcal{L} * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right) - \mathcal{L} * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} = (\tau_h \mathcal{L} - \mathcal{L}) * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Comme $\omega \Subset \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} &\left\| \tau_h L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} - L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_{L^q(\omega)} \\ &\qquad \le \left\| \tau_h L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} - L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_{L^q(\mathbb{R})} \\ &\qquad = \left\| (\tau_h \mathcal{L}_{\mathrm{s}} - \mathcal{L}_{\mathrm{s}}) * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_q + \left\| (\tau_h \mathcal{L}_{\mathrm{u}} - \mathcal{L}_{\mathrm{u}}) * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_q \\ &\qquad \le \lambda(\|(\tau_h \mathcal{L}_{\mathrm{s}} - \mathcal{L}_{\mathrm{s}})\|_{q/2} + \|(\tau_h \mathcal{L}_{\mathrm{u}} - \mathcal{L}_{\mathrm{u}})\|_{q/2}) \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Young sur la convolution utilisée dans la démonstration de la Proposition 2.1.

$\mathcal{L}_{\mathrm{s}}$ et $\mathcal{L}_{\mathrm{u}}$ sont dans $L^{q/2}(\mathbb{R})$. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{L}_{\mathrm{s}}(t)|^{q/2}\,dt = \int_0^\infty |e^{Mt}P_{\mathrm{s}}|^{q/2}\,dt \le \int_0^\infty (Ke^{-bt}|P_{\mathrm{s}}|)^{q/2}\,dt < \infty.$$

De la même manière, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{L}_{\mathrm{u}}(t)|^{q/2}\,dt \le \int_{-\infty}^0 (Ke^{bt}|P_{\mathrm{u}}|)^{q/2}\,dt < \infty.$$

Par suite, $\|\tau_h \mathcal{L}_{\mathrm{s}} - \mathcal{L}_{\mathrm{s}}\|_{q/2} \to 0$ et $\|\tau_h \mathcal{L}_{\mathrm{u}} - \mathcal{L}_{\mathrm{u}}\|_{q/2} \to 0$ quand $h \to 0$ et on a (1).

Montrons (2). Pour f et $y \geq 0$ on a (voir [9])

$$(3)\quad \left\{ \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t) y(t) dt \right)^q dx \right\}^{1/q} \\ \leq \|f\|_{q/2}{}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |y(t)|^p \left(\int_\Omega f(x-t)^{q/2}\, dx \right)^{p/q} dt \right\}^{1/p}.$$

On prend $\Omega = \mathbb{R} \setminus \omega$, $\omega \Subset \mathbb{R}$. Alors

$$\left\| L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_{L^q(\Omega)} \leq \left\| \mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_{L^q(\Omega)} + \left\| \mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_{L^q(\Omega)}$$

et de la même manière que dans [9], on montre qu'on peut majorer l'expression ci-dessus par ε. En effet,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}} e^{M(t-s)} \chi^-(t-s) P_{\mathrm{u}} \begin{pmatrix} 0 \\ y_n(s) \end{pmatrix} ds$$

et

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_{L^q(\Omega)} &= \left(\int_\Omega \left| \int_{\mathbb{R}} e^{M(t-s)} \chi^-(t-s) P_u \begin{pmatrix} 0 \\ y_n(s) \end{pmatrix} ds \right|^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}} K e^{b(t-s)} \chi^-(t-s) \left| P_u \begin{pmatrix} 0 \\ y_n(s) \end{pmatrix} \right| ds \right)^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq K \| e^{b(t-s)} \chi^-(t-s) \|_q^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}} |y_n(s)|^p \left(\int_\Omega e^{qb(t-s)/2} \chi^-(t-s)\, dt \right)^{p/q} ds \right)^{1/p} \\ &= K_1 \left\{ \int_{\mathbb{R}} |y_n(s)|^p \left(\int_\Omega e^{qb(t-s)/2} \chi^-(t-s)\, dt \right)^{p/q} ds \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

On pose $\widetilde{g}(s) = \int_\Omega e^{qb(t-s)/2} \chi^-(t-s)\, dt$ avec Ω du type $]-\infty, -A] \cup [A, \infty[$; alors

$$\widetilde{g}(s) = \begin{cases} \frac{2}{qb}(1-e)^{-qb(s-A)/2} + e^{-qb(s+A)/2} & \text{si } s \geq A, \\ \frac{2}{qb} & \text{si } s \in]-\infty, A], \end{cases}$$

et on a dans tous les cas $\widetilde{g}(s) \leq 2/(qb)$. D'autre part, pour $R \in]0, A[$ et $s \in]-R, R[$ on a

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(s) &= \int_\Omega e^{qb(t-s)/2} \chi^-(t-s)\, dt = \int_{\Omega \cap]-\infty, s]} e^{qb(t-s)/2}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{-A} e^{qb(t-s)/2}\, dt = \frac{2}{qb} e^{-qb(s+A)/2} \leq \frac{2}{qb} e^{-qb(A-R)/2}. \end{aligned}$$

On revient à $\mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \binom{0}{y_n}$:

$$\begin{aligned}
\Big\|\mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}\Big\|^p_{L^q(\Omega)} &\le K_1\Big(\int_{-\infty}^{-R} |y_n(s)|^p \widetilde{g}(s)^{p/q}\,ds + \int_R^{\infty} |y_n(s)|^p \widetilde{g}(s)^{p/q}\,ds \\
&\quad + \int_{-R}^{R} |y_n(s)|^p \widetilde{g}(s)^{p/q}\,ds\Big) \\
&\le K_1\Big(\frac{2}{qb}\Big)^{p/q}\Big(\int_{-\infty}^{-R} |y_n(s)|^p\,ds + \int_R^{\infty} |y_n(s)|^p\,ds\Big) \\
&\quad + K_1 \int_{-R}^{R} |y_n(s)|^p \widetilde{g}(s)^{p/q}\,ds \\
&\le K_1\Big(\frac{2}{qb}\Big)^{p/q} \int_{]-\infty,-R]\cup[R,\infty[} |y_n(s)|^p\,ds \\
&\quad + \Big(\frac{2}{qb}\Big)^{p/q} e^{-pb(A-R)/2} \int_{-R}^{R} |y_n(s)|^p\,ds.
\end{aligned}$$

Notons la dernière inégalité par (4). D'après les hypothèses du lemme on peut trouver $R > 0$ tel que

$$\int_{[-R,R]^c} |y_n(s)|^p\,ds \le \frac{1}{K_1(2/qb)^{p/q}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^p,$$

donc le premier terme de (4) est inférieur à $(\varepsilon/2)^p/2$. D'après ces mêmes hypothèses et pour A bien choisi, le deuxième terme de (4) est inférieur à $(\varepsilon/2)^p/2$. D'où on a $\big\|\mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \binom{0}{y_n}\big\|_{L^q(\Omega)} \le \varepsilon/2$ et de la même manière on montre que $\big\|\mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \binom{0}{y_n}\big\|_{L^q(\Omega)} \le \varepsilon/2$. Par suite,

$$\Big\|L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}\Big\|_{L^q(\Omega)} \le \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $L_1 \binom{0}{y_n}$ vérifie le critère de compacité dans L^q; elle est donc relativement compacte dans L^q et

$$\exists \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in L^q, \quad L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \text{dans } L^q.$$

Si on pose $Ly_n = z_n$ alors

$$L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ \dot{z}_n + \alpha J z_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \text{dans } L^q.$$

Ceci implique que $z_n \to z_1$ dans L^q , i.e. $Ly_n \to z_1$ dans L^q. D'où le lemme. □

Dans la suite, on appellera *suite de Palais–Smale* dans L^p (en abrégé suite de (PS)) toute suite (y_n) telle que $\phi(y_n) \to c$ et $\phi'(y_n) \to 0$. Le lemme précédent nous a fourni la propriété de compacité de la partie linéaire du problème. On arrive aux propriétés de compacité de ϕ et on établit d'abord le résultat préliminaire suivant sur les suites de Palais–Smale.

LEMME 4.3. *Toute suite (y_n) de L^p telle que $\phi(y_n) \to c$ et $\phi'(y_n) \to 0$ (i.e. suite de Palais–Smale) est bornée dans L^p. De plus, $c \geq 0$ et* $\inf\{\|y\| : y \neq 0$ *et* $\phi'(y) = 0\} > 0$.

DÉMONSTRATION. Soit $(y_n) \subset L^p$ avec $\phi(y_n) \to c$ et $\phi'(y_n) \to 0$ dans L^q. Montrons que (y_n) est bornée. $(\phi(y_n))$ est bornée puisqu'elle converge. Donc

$$\int_{\mathbb{R}} \big\{ -\tfrac{1}{2}(Ly_n, y_n) + G(t, y_n)\big\}\, dt \leq K_2, \quad \text{pour un certain } K_2 \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

D'autre part,

$$(\phi'(y_n), y_n) = -\int_{\mathbb{R}} [(Ly_n, y_n) + (G'(t, y_n), y_n)]\, dt$$

et en éliminant (Ly_n, y_n) dans (5), on obtient

$$\phi(y_n) = \int_{\mathbb{R}} G(t, y_n)\, dt - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (G'(t, y_n), y_n)\, dt + \frac{1}{2}(\phi'(y_n), y_n) \leq K_2. \tag{6}$$

D'autre part, (G-4) donne

$$\begin{aligned}\phi(y_n) &\geq \int_{\mathbb{R}} G(t, y_n)\, dt - \frac{1}{2}p\int_{\mathbb{R}} G(t, y_n)\, dt + \frac{1}{2}(\phi'(y_n), y_n)\\ &= \left(1 - \frac{p}{2}\right)\int_{\mathbb{R}} G(t, y_n)\, dt + \frac{1}{2}(\phi'(y_n), y_n).\end{aligned}$$

En revenant à (6), on obtient

$$\left(1 - \frac{p}{2}\right)\int_{\mathbb{R}} G(t, y_n)\, dt + \frac{1}{2}(\phi'(y_n), y_n) \leq K_2.$$

D'autre part, (G-2) et l'inégalité de Hölder donnent

$$\frac{1}{k_2}\left(1 - \frac{p}{2}\right)\int_{\mathbb{R}} |y_n(t)|^p\, dt \leq K_2 + \frac{1}{2}\|\phi'(y_n)\|_q \|y_n\|_p,$$

i.e.

$$\|y_n\|_p \left(\frac{1}{k_2}\left(1 - \frac{p}{2}\right)\|y_n\|_p^{p-1} - \frac{1}{2}\|\phi'(y_n)\|_q\right) \leq K_2,$$

ce qui implique que (y_n) est bornée.

On sait que

$$\phi(y_n) \geq \left(1 - \frac{p}{2}\right)\int_{\mathbb{R}} G(t, y_n)\, dt + \frac{1}{2}(\phi'(y_n), y_n) \geq -\frac{1}{2}\|\phi'(y_n)\|_q \|y_n\|_p \to 0$$

car $\phi'(y_n) \to 0$ et (y_n) est bornée. D'où

$$c = \lim_n \phi(y_n) \geq 0.$$

$\phi'(y) = 0$ avec $y \in L^p$ implique que $-\int_{\mathbb{R}}(Ly, y)\,dt + \int_{\mathbb{R}}(G'(t, y), y)\,dt = 0$. De plus, d'après (G-4),

$$\int_{\mathbb{R}} G(t, y)\,dt \le \int_{\mathbb{R}} (Ly, y)\,dt$$

et d'après (G-2),

$$\frac{1}{k_2}\int_{\mathbb{R}} |y_n(t)|^p\,dt = \frac{1}{k_2}\|y_n\|_p^p \le \int_{\mathbb{R}} (Ly, y)\,dt.$$

Comme l'opérateur L est continu, on a

$$\frac{1}{k_2}\|y_n\|_p^p \le \|L\|_{p,q}\|y\|_p^2 \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{k_2}\frac{1}{\|L\|_{p,q}} \le \|y\|_p^{2-p} \quad \text{avec } 2-p>0,$$

ce qui implique que $\inf\{\|y\| : y \ne 0 \text{ et } \phi'(y) = 0\} > 0$ et on a bien le lemme. □

On a aussi

Lemme 4.4. *Si (y_n) est une suite de L^p telle que $\phi(y_n) \to c > 0$ et $\phi'(y_n) \to 0$ dans L^q alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout n, $\|y_n\|_p > \delta$.*

Démonstration. Sinon, on peut construire une sous-suite (y_{n_k}) telle que $\|y_{n_k}\|_p \to 0$ et par (G-2),

$$0 \le \int_{\mathbb{R}} G(t, y_{n_k})\,dt \le \frac{1}{k_1}\|y_{n_k}\|_p^p \to 0.$$

D'autre part, L étant un opérateur continu, alors

$$\left| -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (Ly_{n_k}, y_{n_k})\,dt \right| \le \|L\|_{p,q}\|y_{n_k}\|_p^2 \to 0,$$

ce qui implique $-(1/2)\int_{\mathbb{R}}(Ly_{n_k}, y_{n_k})\,dt \to 0$. Par suite,

$$\phi(y_n) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (Ly_{n_k}, y_{n_k})\,dt + \int_{\mathbb{R}} G(t, y_{n_k})\,dt \to 0$$

en contradiction avec le fait que $\phi(y_n) \to c > 0$. En d'autres termes, on a le résultat puisque $c = \lim_n \phi(y_n) > 0$.

Les Lemmes 4.1, 4.2 et 4.3 nous donnent le comportement compact des suites de Palais–Smale.

Proposition 4.5. *Soit $(y_n) \subset L^p$ telle que $\phi(y_n) \to c > 0$ et $\phi'(y_n) \to 0$ dans L^q. Alors, on peut en extraire une sous-suite (y_{n_k}) et il existe m points critiques $y^1, \dots, y^m$ non nuls ainsi que m suites réelles $(v_k^1), \dots, (v_k^m)$ telles que $|v_k^i - v_k^j| \to \infty$ quand $k \to \infty$ et $i \ne j$ de telle sorte que*

$$\|y_{n_k} - (\,y^1(\,\cdot\, + v_k^1) + \dots + y^m(\,\cdot\, + v_k^m)\,)\|_p \to 0$$

quand $k \to \infty$. *De plus,* $\phi(y_{n_k}) \to \sum_{j=1}^{m} \phi(y^j)$ *et les* v_k^j *peuvent être des multiples de* T.

La preuve de cette proposition est basée sur le critère de concentration-compacité de P. L. Lions (voir [12]). Le lemme suivant, utilisé dans [9], en est une version adaptée à notre situation.

Lemme 4.6 (critère de concentration-compacité). *Soit* $(\varrho_n) \subset L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *telle que* $\varrho_n \geq 0$ *et* $\int_{-\infty}^{\infty} \varrho_n = 1$. *Alors il existe une sous-suite, notée toujours* (ϱ_n), *telle qu'on ait un des cas suivants:*

(i) *Evanescence:* $\sup_{v\in\mathbb{R}} \int_{v-R}^{v+R} \varrho_n \to 0$ *quand* $n \to \infty$, *pour tout* $R > 0$.

(ii) *Concentration:* $\exists v_n \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0,\ \forall n,\ \int_{v_n-R}^{v_n+R} \varrho_n \geq 1 - \varepsilon$.

(iii) *Dichotomie:* $\exists v_n \in \mathbb{R},\ \exists \lambda \in\,]0,1[\,,\ \exists R_n^{(1)},\ R_n^{(2)} \in \mathbb{R}$ *tels que*

(a) $R_n^{(1)}, R_n^{(2)} \to \infty,\ R_n^{(1)}/R_n^{(2)} \to 0$,

(b) $\int_{v_n-R_n^{(1)}}^{v_n+R_n^{(1)}} \varrho_n \to \lambda$,

(c) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0,\ \forall n,\ \int_{v_n-R}^{v_n+R} \varrho_n \geq \lambda - \varepsilon$,

(d) $\int_{v_n-R_n^{(2)}}^{v_n+R_n^{(2)}} \varrho_n \to \lambda$ *quand* $n \to \infty$.

Avant de démontrer la proposition, on montrera d'abord trois lemmes.

Lemme 4.7. *La suite* (ϱ_n) *définie par* $\varrho_n(t) = |y_n(t)|^p/\|y_n\|_p^p$ *où* (y_n) *satisfait les hypothèses de la Proposition* 4.5 *ne vérifie pas* (i) *du critère de concentration-compacité.*

Démonstration. Sinon, on a pour tout $R > 0$,

$$\sup_{v\in\mathbb{R}} \int_{v-R}^{v+R} \varrho_n \to 0 \quad \text{i.e.} \quad \sup_{v\in\mathbb{R}} \int_{v-R}^{v+R} \frac{|y_n(t)|^p}{\|y_n\|_p^p}\, dt \to 0$$

quand $n \to \infty$, ce qui implique que pour $R = 1$,

$$\exists\, \varepsilon_n \to 0,\ \forall v \in \mathbb{R} \qquad \int_{v-1}^{v+1} |y_n(t)|^p\, dt \leq \varepsilon_n \|y_n\|_p^p.$$

On connaît l'expression de $L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}$:

$$L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}(t) = \mathcal{L} * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}(t) = \left(\mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}\right)(t) - \left(\mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}\right)(t).$$

Alors

$$\left| L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}(t) \right| \leq \left| \left(\mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}\right)(t) \right| + \left| \left(\mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}\right)(t) \right|.$$

On a $\left|\mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \binom{0}{y_n}(t)\right| \to 0$ quand $n \to \infty$. En effet,

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}(t)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} e^{M(t-s)}\chi^-(t-s)P_{\mathrm{u}}\begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}(s)\,ds\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} Ke^{b(t-s)}\chi^-(t-s)|y_n(s)|\,ds \\ &= Ke^{bt}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t+k}^{t+k+1} e^{-bs}|y_n(s)|\,ds \\ &\leq K\left(\frac{1-e^{-qb}}{qb}\right)^{1/q}\varepsilon_n^{1/p}\|y_n\|_p\frac{1}{1-e^{-b}}\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, et le dernier membre ci-dessus tend vers 0 car $\varepsilon_n \to 0$ et (y_n) est bornée. De la même manière on montre que pour tout t, $\left\|\mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \binom{0}{y_n}(t)\right\| \to 0$. D'où $\left\|L_1\binom{0}{y_n}\right\|_\infty$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Posons $L_1\binom{0}{y_n} = \binom{z_{1,n}}{z_{2,n}} \in L^r \cap W^{1,p}$. Alors

$$D_1\begin{pmatrix} z_{1,n} \\ z_{2,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_{1,n} \\ z_{2,n} \end{pmatrix} - M\begin{pmatrix} z_{1,n} \\ z_{2,n} \end{pmatrix},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} y_n &= \dot{z}_{2,n} - Az_{1,n} + \alpha^2 z_{1,n} + \alpha J z_{2,n}, \\ \dot{z}_{1,n} &= -\alpha J z_{1,n} + z_{2,n}, \end{aligned}$$

donc $y_n = \mathcal{A}_\alpha z_{1,n} - Az_{1,n} = Dz_{1,n}$ i.e. $Ly_n = z_{1,n}$. Ainsi, on a

$$\|Ly_n\|_\infty \to 0. \tag{7}$$

La suite (y_n) étant dans L^p alors (Ly_n) est dans L^q et

$$\begin{aligned}\|Ly_n\|_q^q &= \int_{\mathbb{R}} |Ly_n(t)|^{q-p}|Ly_n(t)|^p\,dt \leq \|Ly_n\|_\infty^{q-p}\int_{\mathbb{R}} |Ly_n(t)|^p\,dt \\ &\leq \|Ly_n\|_\infty^{q-p}\|L\|_{p,q}\|y_n\|_p^p.\end{aligned}$$

Sachant que L est continu donc est bornée de L^p dans L^q, (y_n) est bornée car de Palais–Smale, et $\|Ly_n\|_\infty \to 0$ d'après (7) et $q-p > 0$, on en déduit que $Ly_n \to 0$ dans L^q. Comme $\phi'(y_n) \to 0$ par hypothèse, on a $G'(t, y_n) = \phi'(y_n) + Ly_n \to 0$ dans L^q. Par suite,

$$\begin{aligned}\|y_n\|_p^p &\leq k_2\int_{\mathbb{R}} G(t, y_n(t))\,dt && \text{d'après (G-2)} \\ &\leq k_2\int_{\mathbb{R}} (y_n(t), G'(t, y_n(t)))\,dt && \text{d'après (G-4)} \\ &\leq k_2\|y_n\|_p\|G'(t, y_n(\cdot))\|_q && \text{d'après l'inégalité de Hölder} \\ &\to 0 && \text{car } G'(t, y_n(\cdot)) \to 0 \text{ dans } L^q \text{ et } (y_n) \text{ est bornée.}\end{aligned}$$

Comme $p > 1$, on en deduit que $\|y_n\|_p \to 0$, en contradiction avec le Lemme 4.4 et donc on ne peut avoir (i) du critère de concentration-compacité. $\square$

Lemme 4.8. *Notons toujours* $\varrho_n = |y_n(t)|^p/\|y_n\|_p^p$ *où* (y_n) *est la suite de la Proposition* 4.5; *alors si* (ϱ_n) *vérifie* (ii) *du critère de concentration-compacité, on a le résultat de la proposition avec* $m = 1$.

Démonstration. Posons $z_n(t) = y_n(t + v_n)$ et $x_n(t) = z_n(t)/\|z_n\|_p$. Alors (x_n) vérifie les hypothèses du Lemme 4.2 avec $\lambda = 1$ puisque (ϱ_n) vérifie la propriété de concentration du Lemme 4.6. Il existe alors une sous-suite notée toujours (x_n) et il existe $x \in L^q \setminus \{0\}$ tels que $Lx_n \to x$ dans L^q. D'après le Lemme 4.3, (y_n) est bornée dans L^p et sachant le Lemme 4.4 on déduit qu'il existe $\overline{z} \in L^q \setminus \{0\}$ tel que $Lz_n \to \overline{z}$ dans L^q. On peut toujours supposer que $v_n = l_n T$ avec $l_n \in \mathbb{N}$, car sinon, on prendrait $[v_n/T]T$. En effet, si $v_n \notin T\mathbb{N}$ alors la suite (ϱ_n) vérifie la propriété de concentration avec $[v_n/T]T \in T\mathbb{N}$ et $R + 1$ au lieu de R. Par suite, pour $v_n \in T\mathbb{N}$, puisque G est T-périodique, on a $\phi(y_n) = \phi(z_n)$ et $\phi'(z_n)(\,\cdot\,) = \phi'(y_n)(\,\cdot\, + v_n)$. Ainsi,

$$\phi(z_n) \to c \quad \text{et} \quad \phi'(z_n) \to 0 \quad \text{dans } L^q, \tag{8}$$

i.e. (z_n) est une suite de Palais–Smale. Posons

$$w_n(\,\cdot\,) := G'(\,\cdot\,, z_n(\,\cdot\,));$$

alors

$$w_n(\,\cdot\,) = \phi'(z_n)(\,\cdot\,) + Lz_n(\,\cdot\,) \to 0 + \overline{z}(\,\cdot\,) = \overline{z}(\,\cdot\,) \quad \text{dans } L^q.$$

D'après les hypothèses (R-0), (R-4) et un théorème de Krasnosel'skiĭ, l'application $z \mapsto R'(\,\cdot\,, z(\,\cdot\,))$ est continue de L^q dans L^p. Par suite,

$$R'(\,\cdot\,, w_n(\,\cdot\,)) \to R'(\,\cdot\,, \overline{z}(\,\cdot\,)) =: y^1(\,\cdot\,) \quad \text{dans } L^p.$$

Mais $R'(t, w_n(\,\cdot\,))$ n'est autre que $z_n(\,\cdot\,)$ d'après la formule de réciprocité de Legendre. D'où finalement, on a $z_n(\,\cdot\,) \to y^1(\,\cdot\,)$ dans L^p. Comme ϕ est C^1 sur L^p, alors $\phi'(z_n) \to \phi'(y^1)$ et d'après (8), on conclut que $\phi'(y^1) = 0$.

Ainsi, $y^1(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t+v_n)$ est point critique de ϕ et $\|y_n(\,\cdot\,) - y^1(\,\cdot\, - v_n)\|$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. Comme ϕ est C^1, $\phi(y_n) = \phi(z_n) \to c = \phi(y^1)$ quand $n \to \infty$. On vient donc de montrer que si (ϱ_n) vérifie la propriété de concentration (ii) alors la suite de Palais–Smale (y_n) vérifie une propriété de compacité, i.e. admet une sous-suite convergeant vers un point critique de ϕ. $\square$

Lemme 4.9. *Si la suite* (ϱ_n) *du lemme précédent vérifie* (iii) *du critère de concentration-compacité alors on a le résultat de la Proposition* 4.5 *avec* m *fini.*

Démonstration. Supposons que (ϱ_n) vérifie la propriété de la dichotomie et posons

$$z_n(t) = y_n(t + v_n)$$

où d'après la démonstration du Lemme 4.8 on peut supposer que $v_n \in T\mathbb{N}$. Posons aussi

$$\begin{aligned} z_n^{(1)} &= z_n(t)\chi_{B(R_n^{(1)})}(t), \\ z_n^{(2)} &= z_n(t)(1-\chi_{B(R_n^{(2)})}(t)) = z_n(t)\chi_{B(R_n^{(2)})^c}(t), \\ z_n^{(3)} &= z_n(t) - z_n^{(1)} - z_n^{(2)} = z_n(t)\chi_{B(R_n^{(1)})^c \cap B(R_n^{(2)})}. \end{aligned}$$

On a donc $z_n(t) = z_n^{(1)}(t) + z_n^{(2)}(t) + z_n^{(3)}(t)$. Si $y_n^{(1)} = z_n^{(1)}/\|z_n^{(1)}\|_p$ alors $(y_n^{(1)})$ satisfait les hypothèses du Lemme 4.2; on en déduit que $z_n^{(1)} \to y^1$ dans L^p. En effet, le Lemme 4.2 entraîne qu'on peut en extraire une sous-suite notée toujours $y_n^{(1)}$ telle que $Ly_n^{(1)} \to y$ dans L^q. D'autre part, on montre $\|z_n^{(1)}\|_p \le \|z_n\|_p$ et $\|z_n^{(1)}\|_p^p \ge (\lambda-\varepsilon)\|z_n\|_p^p$ à partir d'un certain rang. De là et comme au Lemme 4.8 on en déduit que

$$Lz_n^{(1)} \to \overline{z} \text{ dans } L^q \quad \text{et} \quad z_n^{(1)} \to y^1 \text{ dans } L^p.$$

On montre que

$$\phi(z_n) = \phi(z_n^{(1)}) + \phi(z_n^{(2)}) + s(n) \tag{9}$$

où $s(n) \to 0$ quand $n \to \infty$. En effet, des propriétés de L on déduit que

$$\begin{aligned} \phi(z_n) = {} & \phi(z_n^{(1)}) + \phi(z_n^{(2)}) + \phi(z_n^{(3)}) \\ & - \int_{\mathbb{R}} (z_n^{(1)}, Lz_n^{(2)})\,dt - \int_{\mathbb{R}} (z_n^{(3)}, L(z_n^{(1)} + z_n^{(2)}))\,dt. \end{aligned} \tag{9-1}$$

D'après la définition des $z_n^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$,

$$\int_{\mathbb{R}} |z_n^{(3)}(t)|^p\,dt = \int_{\mathbb{R}} |z_n(t)|^p\,dt - \int_{\mathbb{R}} |z_n^{(1)}(t)|^p\,dt - \int_{\mathbb{R}} |z_n^{(2)}(t)|^p\,dt$$

tend vers 0 quand $n \to \infty$. Ceci implique que

$$\phi(z_n^{(3)}) \to 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} (z_n^{(3)}, L(z_n^{(1)} + z_n^{(2)}))\,dt \to 0. \tag{9-2}$$

En effet,

$$\begin{aligned} |\phi(z_n^{(3)})| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \left\{ -\frac{1}{2}(Lz_n^{(3)}, z_n^{(3)}) + G(t, z_n^{(3)}(t)) \right\} dt \right| \\ &\le \|L\|_{p,q}\|z_n^{(3)}\|_p^2 + \frac{1}{k_1}\|z_n^{(3)}\|_p{}^p \to 0 \end{aligned}$$

et

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (z_n^{(3)}, L(z_n^{(1)} + z_n^{(2)}))\,dt \right| \le \|L\|_{p,q}(\|z_n^{(1)}\|_p + \|z_n^{(2)}\|_p \|z_n^{(3)}\|_p) \to 0.$$

Reste à étudier le terme $\int_{\mathbb{R}}(z_n^{(1)}, Lz_n^{(2)})\,dt$. Pour cela considérons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\left(L_1\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_n^{(1)}\\ 0\end{pmatrix}\right)dt &= \int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{L}_{\mathrm{s}}*\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_n^{(1)}\\ 0\end{pmatrix}\right)dt\\ &\quad-\int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{L}_{\mathrm{u}}*\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_n^{(1)}\\ 0\end{pmatrix}\right)dt\end{aligned}$$

et considérons le deuxième terme du second membre:

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{L}_{\mathrm{u}}*\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix}(t),\begin{pmatrix}z_n^{(1)}\\ 0\end{pmatrix}\right)dt\right| \le \int_{\mathbb{R}}\left|\mathcal{L}_{\mathrm{u}}*\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix}(t)\right|\cdot|z_n^{(1)}(t)|\,dt$$

et

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{L}_{\mathrm{u}}*\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix}(t)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}}e^{M(t-s)}\chi^-(t-s)P_{\mathrm{u}}\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix}(s)\,ds\right|\\ &\le \int_{\mathbb{R}}\left|e^{M(t-s)}\chi^-(t-s)P_{\mathrm{u}}\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix}(s)\right|ds.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\left|e^{M(t-s)}\chi^-(t-s)P_{\mathrm{u}}\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix}(s)\right| &\le \begin{cases}0 & \text{si } s\le t,\\ Ke^{b(t-s)}|z_n^{(2)}(s)| & \text{si } s\ge t,\end{cases}\\ &\le Ke^{-b|t-s|}|z_n^{(2)}(s)|.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{L}_{\mathrm{u}}*\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix}(t)\right| &\le \int_{\mathbb{R}}Ke^{-b|t-s|}|z_n^{(2)}(s)|\,ds\\ &= \int_{-\infty}^{-R_n^{(2)}}e^{-b|t-s|}|z_n(s)|\,ds+\int_{R_n^{(2)}}^{\infty}e^{-b|t-s|}|z_n(s)|\,ds.\end{aligned}$$

On considère la première intégrale du second membre ci-dessus:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{-R_n^{(2)}}e^{-b|t-s|}|z_n(s)|\,ds &\le e^{-bt}\left(\int_{-\infty}^{-R_n^{(2)}}e^{bqs}\,ds\right)^{1/q}\left(\int_{-\infty}^{-R_n^{(2)}}|z_n(s)|^p\,ds\right)^{1/p}\\ &= \frac{e^{-bR_n^{(2)}}}{(bq)^{1/q}}e^{-bt}|z_n^{(2)}|_p.\end{aligned}$$

De la même manière, pour la seconde intégrale on a

$$\int_{R_n^{(2)}}^{\infty}e^{-b|t-s|}|z_n(s)|\,ds \le \frac{e^{-bR_n^{(2)}}}{(bq)^{1/q}}e^{bt}\|z_n^{(2)}\|_p.$$

D'où

$$\left|\mathcal{L}_{\mathrm{u}}*\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix}(t)\right| \le \frac{e^{-bR_n^{(2)}}}{(bq)^{1/q}}\|z_n^{(2)}\|_p(e^{bt}+e^{-bt})$$

et

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{L}_{\mathrm{u}}*\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix}(t),\begin{pmatrix}z_n^{(1)}\\ 0\end{pmatrix}\right)dt\right| \le K\frac{e^{-bR_n^{(2)}}}{(bq)^{1/q}}\|z_n^{(2)}\|_p\int_{\mathbb{R}}(e^{bt}+e^{-bt})|z_n^{(1)}(t)|\,dt.$$

D'autre part, on a

$$\int_{-R_n^{(1)}}^{R_n^{(1)}} e^{bt}|z_n(t)|\,dt \le \left(\int_{-R_n^{(1)}}^{R_n^{(1)}} e^{bqt}\,dt\right)^{1/q}\left(\int_{-R_n^{(1)}}^{R_n^{(1)}} |z_n(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$
$$= \frac{1}{(bq)^{1/q}}(e^{bqR_n^{(1)}} - e^{-bqR_n^{(1)}})^{1/q}\|z_n^{(1)}\|_p.$$

De la même manière, on a

$$\int_{-R_n^{(1)}}^{R_n^{(1)}} e^{-bt}|z_n(t)|\,dt \le \frac{1}{(bq)^{1/q}}(e^{bqR_n^{(1)}} - e^{-bqR_n^{(1)}})^{1/q}\|z_n^{(1)}\|_p.$$

Par suite,

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix}z_n^{(1)}\\ 0\end{pmatrix}\right)dt\right|$$
$$\le \frac{2K}{(bq)^{1/q}}\|z_n^{(1)}\|_p\|z_n^{(2)}\|_p\,(e^{bq(R_n^{(1)}-R_n^{(2)})} - e^{-bq(R_n^{(1)}+R_n^{(2)})})^{1/q},$$

qui tend vers 0. De la même manière, on montre que

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix}z_n^{(1)}\\ 0\end{pmatrix}\right)dt \to 0.$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}}\left(L_1\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix}z_n^{(1)}\\ 0\end{pmatrix}(t)\right)dt \to 0.$$

Cela implique que

$$\int_{\mathbb{R}}(Lz_n^{(2)}(t), z_n^{(1)}(t))\,dt \to 0. \tag{9-3}$$

En effet, $L_1\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix}a_n(t)\\ b_n(t)\end{pmatrix} \in L^r \cap W^{1,p}$ implique que

$$D_1\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} - M\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix},$$

donc $\mathcal{A}_\alpha a_n - Aa_n = z_n^{(2)}$, i.e. $a_n = Lz_n^{(2)}$. Par suite,

$$\left(L_1\begin{pmatrix}0\\ z_n^{(2)}\end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix}z_n^{(1)}\\ 0\end{pmatrix}(t)\right) = \left(\begin{pmatrix}a_n(t)\\ b_n(t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}z_n^{(1)}\\ 0\end{pmatrix}(t)\right)$$
$$= (a_n(t), z_n^{(1)}(t)) = (Lz_n^{(2)}(t), z_n^{(1)}(t)).$$

Les relations (9-1)–(9-3) nous donnent bien (9).

On montre que

$$\phi'(z_n^{(1)}) \to 0 \quad \text{dans } L^q. \tag{10}$$

En effet, on peut écrire pour tout n,

$$L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N}) = L^p(B(R_n^{(1)}), \mathbb{R}^{2N}) \oplus L^p(B(R_n^{(2)})^c, \mathbb{R}^{2N})$$
$$\oplus\, L^p(\mathbb{R} \setminus [B(R_n^{(1)}) \cup B(R_n^{(2)})^c], \mathbb{R}^{2N}),$$

i.e. pour tout $y \in L^p$, y s'écrit de manière unique comme $y^{(1)} + y^{(2)} + y^{(3)}$ avec

$$y^{(1)} = \begin{cases} y & \text{sur } B(R_n^{(1)}), \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$
$$y^{(2)} = \begin{cases} y & \text{sur } B(R_n^{(2)})^c, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$
$$y^{(3)} = \begin{cases} y & \text{sur } \mathbb{R} \setminus [B(R_n^{(1)}) \cup B(R_n^{(2)})^c], \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et

$$(\phi'(z_n^{(1)}), y) = (\phi'(z_n^{(1)}), y^{(1)}) + (\phi'(z_n^{(1)}), y^{(2)}) + (\phi'(z_n^{(1)}), y^{(3)}). \tag{10-1}$$

On a $(\phi'(z_n), y^{(1)}) = -\int_{\mathbb{R}} (Lz_n(t), y^{(1)}(t))\, dt + \int_{\mathbb{R}} (G'(t, z_n(t)), y^{(1)}(t))\, dt$ dont le deuxième terme est tel que

$$\int_{\mathbb{R}} (G'(t, z_n(t)), y^{(1)}(t))\, dt = \int_{\mathbb{R}} (G'(t, z_n^{(1)}(t)), y^{(1)}(t))\, dt. \tag{10-2}$$

En ce qui concerne le premier terme, on a

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}} (Lz_n, y^{(1)})\, dt = &-\int_{\mathbb{R}} (Lz_n^{(1)}, y^{(1)})\, dt - \int_{\mathbb{R}} (Lz_n^{(2)}, y^{(1)})\, dt \\ &- \int_{\mathbb{R}} (Lz_n^{(3)}, y^{(1)})\, dt \end{aligned} \tag{10-3}$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}} (Lz_n^{(2)}(t), y^{(1)}(t))\, dt \to 0, \tag{10-4}$$

calcul déjà fait avec $z_n^{(1)}$ au lieu de $y^{(1)}$ (voir (9-3)), et

$$\int_{\mathbb{R}} (Lz_n^{(3)}(t), y^{(1)}(t))\, dt \to 0. \tag{10-5}$$

En effet, $\int_{\mathbb{R}} (Lz_n^{(3)}(t), y^{(1)}(t))\, dt \le \|L\|_{p,q} \|z_n^{(3)}\|_p \|y^{(1)}\|_p \to 0$. De (10-3)–(10-5) on déduit que

$$-\int_{\mathbb{R}} (Lz_n(t), y^{(1)}(t))\, dt = -\int_{\mathbb{R}} (Lz_n^{(1)}(t), y^{(1)}(t))\, dt + s(n)$$

avec $s(n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Comme on a aussi (10-2), on déduit que $(\phi'(z_n), y^{(1)}) = (\phi'(z_n^{(1)}), y^{(1)}) + s(n)$. D'autre part, $\phi'(z_n) \to 0$ (car v_n est un multiple de T) alors le premier terme dans (10-1) tend vers 0 quand $n \to \infty$.

On considère maintenant le second terme dans (10-1):

$$\begin{aligned} (\phi'(z_n^{(1)}), y^{(2)}) &= \int_{\mathbb{R}} (G'(t, z_n^{(1)}(t)), y^{(2)}(t))\, dt - \int_{\mathbb{R}} (Lz_n^{(1)}(t), y^{(2)}(t))\, dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} (Lz_n^{(1)}(t), y^{(2)}(t))\, dt. \end{aligned}$$

On montrera que

$$\int_{\mathbb{R}} (Lz_n^{(1)}(t), y^{(2)}(t))\, dt \to 0.$$

Considérons pour cela

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix} y^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}(t) \right) dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{L} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix} y^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}(t) \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix} y^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}(t) \right) dt \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix} y^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}(t) \right) dt
\end{aligned}$$

et considérons le premier terme ci-dessus:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix} y^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}(t) \right) dt \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t) \right| |y^{(2)}(t)|\, dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{-R_n^{(2)}} \left| \mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t) \right| |y(t)|\, dt \\
&\quad + \int_{R_n^{(2)}}^{\infty} \left| \mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t) \right| |y(t)|\, dt.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\left| \mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{M(t-s)} \chi^{+}(t-s) P_{\mathrm{s}} \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(s)\, ds \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left| e^{M(t-s)} \chi^{+}(t-s) P_{\mathrm{s}} \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(s) \right| ds \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} K e^{-b|t-s|} |z_n^{(1)}(s)|\, ds = \int_{-R_n^{(1)}}^{R_n^{(1)}} K e^{-b|t-s|} |z_n(s)|\, ds.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\tag{10-6} \begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \right) dt \right| \\
&\quad \leq \int_{-\infty}^{-R_n^{(2)}} \left(\int_{-R_n^{(1)}}^{R_n^{(1)}} K e^{-b(s-t)} |z_n(s)|\, ds \right) |y(t)|\, dt \\
&\quad\quad + \int_{R_n^{(2)}}^{\infty} \left(\int_{-R_n^{(1)}}^{R_n^{(1)}} K e^{-b(t-s)} |z_n(s)|\, ds \right) |y(t)|\, dt.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne le premier terme ci-dessus, on a

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-R_n^{(2)}} K e^{bt} \left(\int_{-R_n^{(1)}}^{R_n^{(1)}} e^{-bs} |z_n(s)|\, ds \right) |y(t)|\, dt$$

et d'après l'inégalité de Hölder,

$$\int_{-R_n^{(1)}}^{R_n^{(1)}} e^{-bs} |z_n(s)|\, ds \leq \frac{(e^{-bqR_n^{(1)}} - e^{bqR_n^{(1)}})^{1/q}}{(bq)^{1/q}} \|z_n^{(1)}\|_p.$$

D'où

$$I_1 \leq \frac{K}{(bq)^{1/q}}(e^{-bqR_n^{(1)}} - e^{bqR_n^{(2)}})^{1/q}\|z_n^{(1)}\|_p \int_{-\infty}^{-R_n^{(2)}} e^{bt}|y(t)|\,dt.$$

En utilisant de nouveau l'inégalité de Hölder on obtient aussi

$$\int_{-\infty}^{-R_n^{(2)}} e^{bt}|y(t)|\,dt \leq \frac{1}{(bq)^{1/q}} e^{-bR_n^{(2)}}\|y^{(2)}\|_p.$$

D'où

$$0 \leq I_1 \leq \frac{K}{(bq)^{2/q}}\|z_n^{(1)}\|_p\|y^{(2)}\|_p(e^{-bq(R_n^{(1)}+R_n^{(2)})} - e^{bq(R_n^{(1)}-R_n^{(2)})})^{1/q} \to 0.$$

De la même manière on montre que le second terme dans (10-6) tend vers 0 quand $n \to \infty$. D'où

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix} y^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}(t)\right) dt \to 0.$$

Un raisonnement analogue donne

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix} y^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}(t)\right) dt \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}} \left(L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix} y^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}(t)\right) dt \to 0,$$

ce qui implique que $\int_{\mathbb{R}}(Lz_n^{(1)}(t), y^{(2)}(t))\,dt \to 0$ et le second terme de (10-1) tend donc vers 0.

Examinons le troisième terme dans (10-1)

$$\begin{aligned}(\phi'(z_n^{(1)}), y^{(3)}) = &- \int_{\mathbb{R}}(Lz_n^{(1)}(t), y^{(3)}(t))\,dt + \int_{\mathbb{R}}(G'(t, z_n^{(1)}(t)), y^{(3)}(t))\,dt \\ &- \int_{\mathbb{R}}(Lz_n^{(1)}(t), y^{(3)}(t))\,dt.\end{aligned}$$

On montrera que $\int_{\mathbb{R}}(Lz_n^{(1)}(t), y^{(3)}(t))\,dt \to 0$ ou encore que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix} y^{(3)} \\ 0 \end{pmatrix}(t)\right) dt = 0.$$

On sait que

$$L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t) = \mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t) - \mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t)$$

et que

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}}\Big(\mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix} y^{(3)} \\ 0 \end{pmatrix}(t)\Big)\,dt\Big| \\ &\le \int_{R_n^{(1)}\le|t|\le R_n^{(2)}} \Big|\mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t)\Big|\,|y(t)|\,dt \\ &\le \int_{R_n^{(1)}\le|t|\le R_n^{(2)}} \Big(\int_{-R_n^{(1)}}^{R_n^{(1)}} Ke^{-b|t-s|}|z_n(s)|\,ds\Big)|y(t)|\,dt = J.\end{aligned}$$

En utilisant (c) puis (b) de la dichotomie on a

$$\frac{1}{\|z_n\|_p^p}\int_{R\le|t|\le R_n^{(1)}} |z_n(s)|^p\,ds \le 2\varepsilon, \tag{10-7}$$

ce qui nous amène à considérer $J = J_1 + J_2$ avec

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{R_n^{(1)}\le|t|\le R_n^{(2)}} \Big(\int_{R\le|t|\le R_n^{(1)}} Ke^{-b|t-s|}|z_n(s)|\,ds\Big)\,|y(t)|\,dt,\\ J_2 &= \int_{R_n^{(1)}\le|t|\le R_n^{(2)}} \Big(\int_{|t|\le R} Ke^{-b|t-s|}|z_n(s)|\,ds\Big)\,|y(t)|\,dt.\end{aligned}$$

On s'intéresse à J_2:

$$\int_{|t|\le R} Ke^{-b|t-s|}|z_n(s)|\,ds \le Ke^{bR}e^{-b|t|}\|z_n^{(1)}\|_p(2R)^{1/q} \le \widetilde{K}e^{-b|t|}$$

car la suite $(z_n^{(1)})$ converge, donc est bornée dans L^p. Par suite, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} 0 \le J_2 &\le \int_{-R_n^{(2)}}^{-R_n^{(1)}} \widetilde{K}e^{bt}|y(t)|\,dt + \int_{R_n^{(1)}}^{R_n^{(2)}} \widetilde{K}e^{-bt}|y(t)|\,dt \\ &\le 2\widetilde{K}_1\|y^{(3)}\|_p(e^{-bqR_n^{(1)}} - e^{-bqR_n^{(2)}})^{1/q}.\end{aligned}$$

D'où $J_2 \to 0$ quand $n \to \infty$.

En ce qui concerne J_1, on a

$$\begin{aligned} J_1 = K&\int_{-R_n^{(2)}}^{-R_n^{(1)}} e^{bt}|y(t)|\,dt\Big\{\int_{-R_n^{(1)}}^{-R} e^{-bs}|z_n(s)|\,ds + \int_R^{R_n^{(1)}} e^{-bs}|z_n(s)|\,ds\Big\} \\ &+ \int_{R_n^{(1)}}^{R_n^{(2)}} e^{-bt}|y(t)|\,dt\Big\{\int_{-R_n^{(1)}}^{-R} e^{bs}|z_n(s)|\,ds + \int_R^{R_n^{(1)}} e^{bs}|z_n(s)|\,ds\Big\},\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à chacune des intégrales, on obtient

$$J_1 \le \frac{2K}{(bq)^{2/q}}\|y^{(3)}\|_p\Big(\int_{R\le|t|\le R_n^{(1)}} |z_n(s)|^p\,ds\Big)^{1/p} g(n)$$

avec $g(n)$ qui tend vers 1 quand $n \to \infty$, donc qui est borné par une constante indépendante de n. En utilisant (10-7), on obtient

$$J_1 \leq \frac{2K}{(bq)^{2/q}} \|y^{(3)}\|_p (2\varepsilon)^{1/p} \|z_n\|_p g(n) \leq \tilde{\tilde{K}}(2\varepsilon)^{1/p}$$

où $\tilde{\tilde{K}}$ est une constante puisque (z_n) est bornée, étant une suite de Palais–Smale.

Ainsi, $J = J_1 + J_2$ avec $J_1 \to 0$ quand $n \to \infty$ et $J_2 \leq \tilde{\tilde{K}}(2\varepsilon)^{1/p}$ pour tout $\varepsilon > 0$. D'où $J \to 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{L}_{\mathrm{s}} * \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{smallmatrix}\right)(t), \left(\begin{smallmatrix} y_n^{(3)} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) dt \to 0$. De la même manière on montre que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{L}_{\mathrm{u}} * \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix} y^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}(t)\right) dt \to 0.$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}} \left(L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ z_n^{(1)} \end{pmatrix}(t), \begin{pmatrix} y^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}(t)\right) dt \to 0.$$

Les trois termes dans (10-1) tendent vers 0 quel que soit $y \in L^p$, et on a bien (10).

ϕ étant C^1 et $\lim_{n\to\infty} z_n^{(1)} = y^1$ alors $\phi'(z_n^{(1)}) \to \phi'(y^1)$ dans L^q. Comme $\phi'(z_n^{(1)}) \to 0$ dans L^q, on a $\phi'(y^1) = 0$ i.e. y^1 est point critique de ϕ.

On considère maintenant la suite $z_{1,n}(t) = z_n(t) - z_n^{(1)}(t)$. On a

$$\|z_{1,n}\|_p^p \geq \overline{k} > 0, \quad \phi(z_{1,n}) \to c - \phi(y^1) \quad \text{et} \quad \phi'(z_{1,n}) \to 0.$$

Avant de montrer ces trois propriétés, notons que d'après les deux dernières et le Lemme 4.2 on a $c - \phi(y^1) \geq 0$. Pour ce qui est de la première propriété, on a

$$\begin{aligned} \|z_{1,n}\|_p^p &= \|z_n - z_n^{(1)}\|_p^p = \int_{|t|\geq R_n^{(1)}} |z_n(t)|^p \, dt \\ &= \|z_n\|_p^p \left(1 - \frac{1}{\|z_n\|_p^p} \int_{|t|\leq R_n^{(1)}} |z_n(t)|^p \, dt\right). \end{aligned}$$

D'après (b) de la dichotomie, à partir d'un certain rang on a

$$1 - \frac{1}{\|z_n\|_p^p} \int_{|t|\leq R_n^{(1)}} |z_n(t)|^p \, dt \geq \frac{1-\lambda}{2}.$$

On en déduit d'après le Lemme 4.3 que $\|z_{1,n}\|_p^p \geq \delta^p(1-\lambda)/2 = \overline{k} > 0$. D'où le résultat.

Enfin, pour la seconde et la troisième propriétés on a

$$\phi(z_{1,n}) = \phi(z_n) - \phi(z_n^{(1)}) + o(n) \to c - \phi(y^1)$$

et

$$\phi'(z_{1,n}) = \phi'(z_n) - \phi'(z_n^{(1)}) \to 0 - 0 = 0.$$

On applique maintenant à la suite $(z_{1,n})$ le même raisonnement déjà fait à la suite (y_n). Comme $\|z_{1,n}\|_p > \overline{k}^{1/p} > 0$, on n'a pas évanescence et on a concentration ou dichotomie. En réitérant ce procédé et en posant $z_{k,n} =$

$z_{k-1,n} - z^{(1)}_{k-1,n}$, $k \in \mathbb{N}$, avec $z_{0,n} = z_n$, on obtient k points critiques $y^1, \dots, y^k$ de ϕ tels que

$$\lim_{n\to\infty} \phi(z_n) = \phi(y^1) + \ldots + \phi(y^k).$$

En effet, on montre que

$$\|z_n\|_p^p \to \|y^1\|_p^p + \|y^2\|_p^p + \ldots + \|y^k\|_p^p + \ldots.$$

Comme d'après le Lemme 4.2, les y^i sont bornés inférieurement par une constante strictement positive et la suite (z_n) est borné alors k est fini. On a

$$\phi(z_n) = \phi(z_{k,n}) + \sum_{l=0}^{k-1} \phi(z^{(1)}_{l,n}) + s(n) \to \sum_{l=1}^{k} \phi(y^l).$$

En effet, $z_{k,n} \to 0$ car sinon on aurait pu construire un autre point critique y^{k+1}, contradiction avec le fait qu'on en a que k. Par suite, $\phi(z_{k,n}) \to 0$.

Les $(v^i_p)_{p\in\mathbb{N}}, i = 1, \dots, m$, sont tels que $|v^i_p - v^j_p| \to \infty$ car les y^i sont définis dans des boules dont la différence des rayons tend vers ∞. D'autre part, les $y^i, i = 1, \dots, m$, sont non nuls d'après le Lemme 4.2. □

Démonstration de la Proposition 4.5. Si (y_n) est une suite de Palais–Smale de la Proposition 4.5 alors la suite (ϱ_n) définie par $\varrho_n(t) = |y_n(t)|^p / \|y_n\|_p^p$ vérifie le critère de concentration-compacité et on a (i), (ii) ou (iii) du Lemme 4.6. D'après le Lemme 4.7, la suite (ϱ_n) a ou bien la propriété de concentration, auquel cas on a d'après le Lemme 4.8, la Proposition 4.5 avec $m = 1$, ou bien la suite (ϱ_n) possède la propriété de la dichotomie, auquel cas on a d'après le Lemme 4.9 la Proposition 4.5 avec m fini. □

5. Existence d'une solution

Pour établir l'existence d'un point critique de la fonctionnelle ϕ on montrera que cette dernière vérifie les hypothèses géométriques du théorème du col formulé par Ambrosetti et Rabinowitz en 1973 (voir [1]).

Lemme 5.1. (a) *Il existe $r > 0$, $\delta > 0$ tels que $\|y\|_p = r$ implique $\phi(y) \geq \delta$. De plus, $\phi(0) = 0$ et $\phi(y) \geq 0$ pour $\|y\|_p \leq r$.*

(b) *Il existe $y_0 \in L^p$ tel que $\|y_0\|_p > r$ et $\phi(y_0) < 0$.*

Démonstration. (a) Comme

$$\phi(y) = -\frac{1}{2}\langle Ly, y\rangle_{q,p} + \int_{\mathbb{R}} G(t, y(t))\, dt \geq -\frac{1}{2}\|L\|_{p,q}\|y\|_p^2 + \frac{1}{k_2}\|y\|_p^p$$

et $p < 2$, le (a) du lemme est vrai pour $\|y\|_p$ assez petit, i.e. il existe une boule $B(0, r)$ sur laquelle ϕ est positive, nulle à l'origine et telle que $\inf \phi(\partial B(0, r)) > 0$.

(b) Il existe $y_1 \in L^p$ tel que $\langle Ly_1, y_1\rangle > 0$. En effet, posons

$$z_1 = Ly_1, \quad \text{i.e.} \quad y_1 = Dz_1 = \mathcal{A}_\alpha z_1 - Az_1 = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\alpha J\frac{d}{dt} - A\right) z_1,$$

et prenons

$$z_1(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathrm{Ch}(kt) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } t \in [-a, a], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|z_1(t)| \le \mathrm{Ch}(ka)$ et $\|z_1\|_r \le \mathrm{Ch}(ka)(2a)^{1/r}$, $r \ge p$. De plus,

$$\dot{z}_1(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} k\,\mathrm{Sh}(kt) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } t \in [-a, a], \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\dot{z}_1(t)| \le k\,\mathrm{Sh}(ka)$ et $\|\dot{z}_1\|_p \le (2a)^{1/p} k\,\mathrm{Sh}(ka)$. Enfin,

$$\ddot{z}_1(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} k^2\,\mathrm{Ch}(kt) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } t \in [-a, a], \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\ddot{z}_1(t)| \le k^2\,\mathrm{Ch}(ka)$ et $\|\ddot{z}_1\|_p \le k^2\,\mathrm{Ch}(ka)(2a)^{1/p}$.

Ainsi, $z_1 \in W^{2,p} \cap L^r$, $r \ge p$, et $y_1 = Dz_1 \in L^p$. On a

$$\begin{aligned} (z_1, \ddot{z}_1) &= \int_{\mathbb{R}} (z_1(t), \ddot{z}_1(t))\,dt = k^2 \int_{-a}^{a} \mathrm{Ch}^2(kt)\,dt \\ &= k^2 \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{Ch}\,(2kt) + 1}{2}\,dt = \frac{k\,\mathrm{Sh}\,(2ka)}{2} + ak^2, \\ J\dot{z}_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -k\,\mathrm{Sh}(kt) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (z_1, 2\alpha J\dot{z}_1) = 0. \end{aligned}$$

Enfin,

$$(z_1, -Az_1) \ge -2a\|A\| \cdot |z_1(t)|^2 \ge -2a\|A\|\,\mathrm{Ch}^2(ka).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} (Ly_1, y_1) &= (z_1, \ddot{z}_1) + 2\alpha(z_1, J\dot{z}_1) - (z_1, Az_1) \\ &\ge \frac{k}{2}\,\mathrm{Sh}(2ka) + ak^2 - 2a\|A\|\,\mathrm{Ch}^2(ka) = N(k). \end{aligned}$$

On montre qu'on peut choisir k et a de tel sorte que $N(k) > 0$. En effet,

$$\begin{aligned} N(k) &= \frac{k}{2} \cdot \frac{e^{2ka} - e^{-2ka}}{2} + ak^2 - 2a\,\|A\|\,\frac{(e^{ka} + e^{-ka})^2}{4} \\ &= \frac{1}{e^{2ka}}\left(\frac{k}{2} \cdot \frac{e^{4ka} - 1}{2} + ak^2 e^{2ka} - 2a\|A\|\frac{e^{4ka} + 1 + 2e^{2ka}}{4}\right) = \frac{1}{e^{2ka}}\widetilde{N}(k) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{N}(k) &= \left(\frac{k}{4} - \frac{a\|A\|}{2}\right)e^{4ka} + (ak^2 - a\|A\|)e^{2ka} - \frac{k}{4} - \frac{1}{2}a\|A\| \\ &= \left(\frac{k}{4} - \frac{1}{2}a\|A\|\right)e^{4ka} + (ak^2 - k - 2a\|A\|)e^{2ka} \\ &\quad + \left((k + a\|A\|)e^{2ka} - \left(\frac{k}{4} + \frac{1}{2}a\|A\|\right)\right). \end{aligned}$$

On peut choisir k et a de telle sorte que les trois termes de la somme ci-dessus soient strictement positifs. Pour le premier il suffit de prendre $k > 2a\|A\|$. Considérons l'équation $ak^2 - k - 2a\|A\| = 0$ de discriminant $\Delta = 1 + 8a^2\|A\| > 0$; alors on peut choisir $k > (1 + \sqrt{1 + 8a^2\|A\|})/2$ de telle sorte que le deuxième terme soit positif. Le troisième terme est toujours positif. D'où pour

$$k > \sup\left\{\frac{1 + \sqrt{1 + 8a^2\|A\|}}{2}, 2a\|A\|\right\},$$

$\widetilde{N}(k) > 0$, donc $N(k) > 0$ et $\langle Ly_1, y_1\rangle > 0$. De plus, $y_1 \in L^p$ implique que λy_1, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, est aussi dans L^p et on a

$$\begin{aligned} \phi(\lambda y_1) &= -\frac{1}{2}\langle L\lambda y_1, \lambda y_1\rangle + \int_{\mathbb{R}} G(t, \lambda y_1(t))\,dt \\ &\leq -\frac{\lambda^2}{2}\langle Ly_1, y_1\rangle + \frac{\lambda^p}{k_1}\|y_1\|_p^p, \quad \text{d'après (G-2).} \end{aligned}$$

Comme $\langle Ly_1, y_1\rangle > 0$ et $p < 2$, pour λ assez grand on a $\phi(\lambda y_1) < 0$. Il suffit donc de prendre $y_0 = \lambda y_1$ avec λ assez grand dans $\mathbb{R}^+$, et λ assez grand signifie $\|y_0\|_p > r$. □

Du Lemme 5.1 et de la Proposition 4.5, on déduit

Théorème 5.2. *Sous les hypothèses* (A-1), (A-2) *et* (H-0) *à* (H-4), *le problème* $(\mathcal{P})$ *a, pour* α *suffisamment petit, une solution* $\overline{x} \neq 0$.

Démonstration. On considère $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], L^p) : \gamma(0) = 0 \text{ et } \gamma(1) = y_0\}$, ensemble des chemins (applications continues) reliant 0 et y_0. Pour $\gamma \in \Gamma$, $\|\gamma\| = \sup_{t\in[0,1]} \|\gamma(t)\|_p$ est une norme sur Γ. Γ muni de cette norme est un espace métrique complet qui n'est pas compact.

On considère $F : \Gamma \to \mathbb{R}$ définie pour $\gamma \in \Gamma$ par $F(\gamma) = \max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma(t))$. On a

$$F(\gamma) = \sup_{t\in[0,1]} F_t(\gamma) \quad \text{avec } F_t(\gamma) = \phi(\gamma(t))$$

et F_t est continue puisque ϕ l'est et F est s.c.i. puisqu'elle est le sup de fonctions continues.

$\gamma \in \Gamma$, étant un chemin continu de 0 à y_0, intersecte la sphère de rayon r au moins en un point noté t_r et

$$F(\gamma) = \max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma(t)) \geq \phi(\gamma(t_r)) \geq \delta > 0$$

d'après le Lemme 5.1. D'où

$$\inf_{\gamma\in\Gamma} F(\gamma) \geq \delta > 0.$$

Ainsi, Γ est un espace métrique complet et F est s.c.i. sur Γ avec $\inf_\Gamma F > -\infty$. Le principe variationnel d'Ekeland (voir [3]), implique alors l'existence d'une suite de Palais–Smale, i.e. d'une suite (x_n) telle que

$$\phi(x_n) \to \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma(t)) \geq \delta > 0$$

et $\phi'(x_n) \to 0$ dans L^q. Il s'ensuit, d'après la Proposition 4.5, l'existence d'au moins un point critique non nul $\overline{y}$ de ϕ, donc, d'après la Proposition 3.1, l'existence d'une solution non nulle $\overline{x}$ de $(\mathcal{P})$, ce qui prouve le théorème. $\square$

REMARQUE 5.3. Ce point critique $\overline{y}$ provient d'une suite (x_n) telle que $\phi(x_n) \to c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma(t))$ et $\phi'(x_n) \to 0$. On a $\phi(\overline{y}) \leq c$. L'égalité a lieu dans le cas de la concentration. Sinon, $c - \phi(\overline{y})$ serait valeur limite d'une suite de Palais–Smale donc ≥ 0 d'après le Lemme 4.3. D'autre part, $\phi(\overline{y}) = c > 0$, dans le cas de concentration. Sinon, $\phi(\overline{y}) \geq 0$ car serait aussi valeur limite d'une suite de Palais–Smale. De plus, $\phi(\overline{y}) > 0$ car $c = \sum_{i=1}^m \phi(y^i) > 0$ avec $\phi(y^i) \geq 0$, $i = 1, \dots, m$. Donc on a au moins un y^i tel que $\phi(y^i) > 0$; on le notera $\overline{y}$.

6. Autre propriété de compacité

L'opérateur L n'est pas compact et ϕ est invariante sous l'action du groupe non compact $\mathbb{Z}$; alors ϕ ne satisfait pas la condition de compacité de Palais–Smale. En effet, si y est point critique de ϕ alors la suite $(n * y)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $n * y(t) = y(t + nT)$ est de Palais–Smale car $\phi(n * y) = \phi(y)$ puisque G est T-périodique et $\phi'(n * y) = 0$, pourtant on ne peut pas en extraire une sous-suite convergente.

Comme $\mathbb{Z}$ est discret, ceci nous amène à utiliser une condition de compacité légèrement plus faible que la condition (PS), appelée *condition de Palais–Smale–Séré*, qu'on notera $(\overline{\text{PS}})$ et qui a été introduite pour la première fois dans [9].

Définition 6.1. Soit E un espace de Banach. On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ satisfait la condition $(\overline{\mathrm{PS}})$ si toute suite $(x_n) \subset E$ telle que $f(x_n) \to c > 0$, $f'(x_n) \to 0$ dans E^* et $\|x_{n+1} - x_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$, est convergente.

Cette condition de compacité permet d'avoir ce qu'on appelle le lemme de déformation:

Lemme 6.2. *Soient E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 qui satisfait la condition* $(\overline{\mathrm{PS}})$. *Soient $\varepsilon > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a - \varepsilon < a < b$ et*

$$f^{-1}([a-\varepsilon, b+\varepsilon]) \cap \{x \in E : f'(x) = 0\} = \emptyset,$$

alors il existe $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tel que

(i) $\eta(0,x) = x$, $\forall x \in E$,
(ii) $f(x) \leq a - \varepsilon$ *ou* $f(x) \geq b + \varepsilon \Rightarrow \eta(s,x) = x$, $\forall s \in [0,1]$,
(iii) $f(x) \leq b \Rightarrow f(\eta(1,x)) \leq a$.

De plus, si f est invariante par rapport à la représentation isométrique T d'un groupe G (i.e. $\forall g \in G,\ f = f \circ T(g)$) telle que toute orbite $G_x = \{T(g)x : g \in G\}$ soit discrète dans E, i.e.

$$\forall x \in E, \quad \varrho_x = \inf\{\|x - T(g)x\| : g \in G,\ x \neq T(g)x\} > 0,$$

alors on peut choisir η telle que

(iv) $\forall (g,t,x) \in G \times [0,1] \times E,\ T(g)\eta(t,x) = \eta(t, T(g)x)$.

Pour la preuve, voir [9].

Proposition 6.3. *Sous les hypothèses* (A-1), (A-2) *et* (R-0)–(R-4), *si les points critiques de ϕ sont tous de la forme $\overline{y}(\,\cdot\, + kT)$, $k \in \mathbb{Z}$, où $\overline{y}$ est le point critique donné par le Théorème* 5.2, *alors ϕ vérifie la condition* $(\overline{\mathrm{PS}})$ *sur L^p.*

Démonstration. Soit $(y_n) \subset L^p$ telle que $\phi(y_n) \to c > 0$, $\phi'(y_n) \to 0$ dans L^q et $\|y_{n+1} - y_n\|_p \to 0$. D'après la Proposition 4.5, $c = \sum_{k=1}^m \phi(y^{(k)})$, $m \in \mathbb{N}^*$ avec $y^{(k)} = \overline{y}(\cdot + kT)$. Plus précisément, $c = \sum_{k=1}^m \phi(\overline{y}(\cdot + kT)) = m\phi(\overline{y})$. D'après la même proposition, on peut extraire une sous-suite qu'on notera toujours (y_n) telle que

$$(\overline{*}) \qquad \Big\| y_n - \sum_{k=1}^{m} \overline{y}(\,\cdot\, + v_n^{(k)}) \Big\|_p \to 0$$

où $|v_n^{(i)} - v_n^{(j)}| \to \infty$ quand $n \to \infty$ et $i \neq j$ et $v_n^{(i)}$ est un multiple de T, $i = 1, \dots, m$. Si $m = 1$ alors

$$\begin{aligned}\|y_{n+1} - y_n\| &= \|y_{n+1} - \overline{y}(\cdot + v_{n+1}) + \overline{y}(\cdot + v_{n+1}) - \overline{y}(\cdot + v_n) + \overline{y}(\cdot + v_n) - y_n\| \\ &\geq \|\overline{y}(\cdot + v_{n+1}) - \overline{y}(\cdot + v_n)\| - \|y_{n+1} - \overline{y}(\cdot + v_{n+1})\| \\ &\quad - \|\overline{y}(\cdot + v_n) - y_n\|,\end{aligned}$$

donc

$$\|\overline{y}(\cdot + v_{n+1}) - \overline{y}(\cdot + v_n)\| \leq \|y_{n+1} - y_n\| + \|y_{n+1} - \overline{y}(\cdot + v_{n+1})\| + \|\overline{y}(\cdot + v_n) - y_n\|$$

tend vers 0 car (y_n) vérifie les hypothèses de la condition $(\overline{\mathrm{PS}})$ et car on a $(\overline{*})$ avec $m = 1$. Cela implique que $p_n = \xi$ à partir d'un certain rang. En revenant à $(\overline{*})$, i.e. $\|y_n - \overline{y}(\,\cdot\, + v_n)\| \to 0$, on en déduit que $y_n \to \overline{y}(\,\cdot\, + \xi)$ et on a ainsi la propriété $(\overline{\mathrm{PS}})$.

Si $m > 1$, on procède de la même manière:

$$\begin{aligned}\|y_{n+1} - y_n\| &= \Big\| y_{n+1} - \sum_{k=1}^{m} \overline{y}(\,\cdot\, + v_{n+1}^{(k)}) + \sum_{k=1}^{m} \overline{y}(\,\cdot\, + v_n^{(k)}) - y_n \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{m} (\overline{y}(\,\cdot\, + v_{n+1}^{(k)}) - \overline{y}(\,\cdot\, + v_n^{(k)})) \Big\| \\ &\geq \Big\| \sum_{k=1}^{m} (\overline{y}(\,\cdot\, + v_{n+1}^{(k)}) - \overline{y}(\,\cdot\, + v_n^{(k)})) \Big\| - \Big\| \sum_{k=1}^{m} \overline{y}(\,\cdot\, + v_n^{(k)}) - y_n \Big\| \\ &\qquad - \Big\| y_{n+1} - \sum_{k=1}^{m} \overline{y}(\,\cdot\, + v_{n+1}^{(k)}) \Big\|.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{k=1}^{m} (\overline{y}(\cdot + v_{n+1}^{(k)}) - \overline{y}(\cdot + v_n^{(k)})) \Big\| &\leq \Big\| y_n - \sum_{k=1}^{m} \overline{y}(\cdot + v_n^{(k)}) \Big\| \\ &\quad + \Big\| y_{n+1} - \sum_{k=1}^{m} \overline{y}(\cdot + v_{n+1}^{(k)}) \Big\| + \|y_{n+1} - y_n\|\end{aligned}$$

tend vers 0 quand $n \to \infty$. On démontre maintenant que pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$,

$$\|\overline{y}(\cdot + v_{n+1}^{(k)}) - \overline{y}(\cdot + v_n^{(k)})\| \to 0.$$

En effet, $|v_n^{(k)} - v_n^{(k')}| \to \infty$ quand $n \to \infty$ et $k \neq k'$ implique que pour tout $\varepsilon > 0$ à partir d'un certain rang on a

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} (\overline{y}(\,\cdot\, + v_{n+1}^{(k)}) - \overline{y}(\,\cdot\, + v_n^{(k)})) \Big\| \geq \sum_{k=1}^{m} \|\overline{y}(\,\cdot\, + v_{n+1}^{(k)}) - \overline{y}(\,\cdot\, + v_n^{(k)})\| - \varepsilon.$$

D'où pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang on a

$$0 \le \sum_{k=1}^{m} \|\overline{y}(\,\cdot\, + v_{n+1}^{(k)}) - \overline{y}(\,\cdot\, + v_n^{(k)})\| \le \left\| \sum_{k=1}^{m} (\overline{y}(\,\cdot\, + v_{n+1}^{(k)}) - \overline{y}(\,\cdot\, + v_n^{(k)})) \right\| + \varepsilon.$$

Comme $\| \sum_{k=1}^{m} (\overline{y}(\,\cdot\, + v_{n+1}^{(k)}) - \overline{y}(\,\cdot\, + v_n^{(k)}))\| \to 0$, on a bien ce qu'on voulait.

Mais $\|\overline{y}(\,\cdot\, + v_{n+1}^{(k)}) - \overline{y}(\,\cdot\, + v_n^{(k)})\| \to 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$ contredit le fait que $\|v_n^{(k)} - v_n^{(k')}\|$ tend vers ∞. D'où nécessairement $m = 1$ et (y_n) converge, i.e. ϕ vérifie bien la propriété $(\overline{\mathrm{PS}})$. $\square$

Remarque 6.4. De la démonstration ci-dessus, on déduit aussi que sous les hypothèses (A-1), (A-2) et (R-0)–(R-4) et lorsque les points critiques de ϕ sont uniques à une translation près alors pour toute suite (y_n) de Palais–Smale telle que $\|y_{n+1} - y_n\|_p \to 0$ on n'a ni évanescence ni dichotomie et (y_n) vérifie donc la propriété de concentration.

7. Existence d'une autre solution

Pour $y \in L^p$, on pose $s * y(t) = y(t + s)$; l'application de L^p dans L^p qui à y associe $s * y$ est une isométrie. La périodicité de R (voir (R-0)) nous donne $\phi(nT * y) = \phi(y)$ pour tout $y \in L^p,\ n \in \mathbb{Z}$.

Par la procédure classique de minimax on prouve

Théorème 7.1. *Sous les hypothèses* (A-1), (A-2) *et* (R-0)–(R-4) *et pour α suffisamment petit, le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins deux solutions $\overline{x}$ et $\overline{\overline{x}}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z},\ kT * \overline{x} \neq \overline{\overline{x}}$.*

Démonstration. La démonstration est la même que dans [9] car elle n'est pas spécifique à la fonctionnelle définie dans [9].

On sait que ϕ admet un point critique $\overline{y} \neq 0$. Supposons que tous les points critiques de ϕ sont uniques à une translation près, i.e. sont tous de la forme $kT * \overline{y},\ k \in \mathbb{Z}$. On montrera que ceci nous conduit à une contradiction. On sait que le point critique $\overline{y}$ vérifie

$$\phi(\overline{y}) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} \phi(\gamma(s)) = c$$

où

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], L^p) : \gamma(0) = 0,\ \phi(\gamma(1)) < 0\}.$$

Considérons les ensembles

$$\Gamma^{\mathrm{s}} = \{\gamma \in C^\infty([0,1], L^p) : \gamma(0) = 0,\ \phi(s * \gamma(1)) < 0,\ \forall s \in \mathbb{R}\}$$

et pour $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{s}}$,

$$\Sigma_\gamma^{\mathrm{s}} = \left\{ \sigma \in C^\infty([0,1], L^p) : \left\{ \begin{array}{ll} \sigma(0, s) = 0, & \sigma(1, s) = sT * \gamma(1), \\ \sigma(t, 0) = \gamma(t), & \sigma(t, 1) = T * \gamma(t) \end{array} \right. \right\}$$

où $s*\gamma(t)$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{2N}$ définie par $(s*\gamma(t))(r) = \gamma(t)(s+r)$. De la même manière on définit les ensembles

$$\Gamma^{\mathrm{c}} = \{\gamma \in C^0([0,1], L^p) : \gamma(0) = 0,\ \phi(s * \gamma(1)) < 0,\ \forall s \in \mathbb{R}\}$$

et pour $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{c}}$,

$$\Sigma^{\mathrm{c}}_\gamma = \left\{ \sigma \in C^0([0,1]^2, L^p) : \left\{ \begin{array}{ll} \sigma(0,s) = 0, & \sigma(1,s) = sT * \gamma(1), \\ \sigma(t,s) = \gamma(t), & \sigma(t,1) = T * \gamma(t) \end{array} \right\} \right\}.$$

Pour $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{s}}$ (resp. $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{c}}$), σ défini par $\sigma(t,s) = sT * \gamma(t)$ est un élément de $\Sigma^{\mathrm{s}}_\gamma$ (resp. $\Sigma^{\mathrm{c}}_\gamma$). Comme C^∞ est dense dans C^0, on a

$$\inf_{\gamma\in\Gamma^{\mathrm{s}}} \max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma(t)) = \inf_{\gamma\in\Gamma^{\mathrm{c}}} \max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma(t)) =: c_1$$

et

$$\inf_{\gamma\in\Gamma^{\mathrm{s}}} \inf_{\sigma\in\Sigma^{\mathrm{s}}_\gamma} \max_{(t,s)\in[0,1]^2} \phi(\sigma(t,s)) = \inf_{\gamma\in\Gamma^{\mathrm{c}}} \inf_{\sigma\in\Sigma^{\mathrm{c}}_\gamma} \max_{(t,s)\in[0,1]^2} \phi(\sigma(t,s)) =: c_2.$$

On montre facilement que $c_1 \le c_2$. En effet, si $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{c}}$ et $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{c}}_\gamma$ alors

$$\max_{(t,s)\in[0,1]^2} \phi(\sigma(t,s)) \ge \max_{t\in[0,1]} \phi(\sigma(t,0)) = \max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma(t)).$$

D'où

$$\inf_{\gamma\in\Gamma^{\mathrm{c}}} \inf_{\sigma\in\Sigma^{\mathrm{c}}_\gamma} \max_{(t,s)\in[0,1]^2} \phi(\sigma(t,s)) = c_2 \ge \inf_{\gamma\in\Gamma^{\mathrm{c}}} \max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma(t)) = c_1.$$

D'autre part, d'après le Lemme 5.1 on a $c_2 \ge c_1 \ge c \ge \delta > 0$.

Comme ϕ a uniquement des points critiques du type $kT * \overline{y}$, ϕ vérifie la condition $(\overline{\mathrm{PS}})$ et on a les hypothèses du Lemme 6.2 de déformation avec $G = \mathbb{Z}$ et $T(n)\cdot = nT * \cdot$ D'après ce lemme on a $c_1 = c = c_2$. En effet, la définition de c_1 implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\exists\gamma_\varepsilon \in \Gamma^{\mathrm{c}}$ tel que $\max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma_\varepsilon(t)) < c_1 + \varepsilon$. Prenons $a = c_1 - \varepsilon$ et $b = c_1 + \varepsilon$. Si

$$(*) \qquad \phi^{-1}([c_1 - 2\varepsilon, c_1 + 2\varepsilon]) \cap \{y \in L^p : \phi'(y) = 0\} = \emptyset,$$

alors il existe $\eta \in C([0,1] \times L^p, L^p)$ qui vérifie (i)–(iv) du lemme. On vérifie que η est dans Γ^{c}. En effet, $\eta(1, \gamma_\varepsilon(\,\cdot\,))$ est continue puisque γ_ε et η le sont. On a $\eta(1, \gamma_\varepsilon(0)) = \gamma_\varepsilon(0) = 0$ d'après (ii), et on montre que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\phi(s * \eta(1, \gamma_\varepsilon(1))) < 0$.

Ainsi, $\eta(1, \gamma_\varepsilon(\,\cdot\,)) \in \Gamma^{\mathrm{c}}$ et comme $\max_{t\in[0,1]} \phi(\gamma_\varepsilon(t)) < c_1+\varepsilon$ on a d'après (iii), $\max_{t\in[0,1]} \phi(\eta(1, \gamma_\varepsilon(t))) < c_1 - \varepsilon$, ce qui est en contradiction avec la définition de c_1. D'où $(*)$ est faux, i.e. $\{0, c\} \cap [c_1 - 2\varepsilon, c_1 + 2\varepsilon] \neq \emptyset$. Comme $c_1 - 2\varepsilon > 0$, ε étant suffisamment petit, on a $c \in [c_1 - 2\varepsilon, c_1 + 2\varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $c = c_1$. On procède de la même manière pour montrer que $c = c_2$.

La définition de c_2 et le fait que $c = c_2$ nous donnent

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\gamma_\varepsilon \in \Gamma^{\mathrm{s}} \text{ et } \sigma_\varepsilon \in \Sigma^{\mathrm{s}}_{\gamma_\varepsilon} \text{ tels que } \sup \phi \circ \sigma_\varepsilon < c + \varepsilon.$$

En utilisant ce γ_ε, on définit, pour $k \geq 0$, l'application ϕ_k de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\phi_k(s,s') = \|\gamma_\varepsilon(s) - kT * \gamma_\varepsilon(s')\| - \|\gamma_\varepsilon(s)\| - \|\gamma_\varepsilon(s')\|.$$

On montre que $(\phi_k)_{k\geq 0}$ est équicontinue (voir [9]). D'autre part, on voit que $\phi_k(s,s')$ tend vers $0 = \phi_k(0,0)$. D'où d'après le théorème d'Ascoli–Arzelà, (ϕ_k) est relativement compact et toute sous-suite de (ϕ_k) qui converge uniformément converge vers 0. Par conséquent, ϕ_k converge uniformément vers 0.

Si $\mu_1 := \|\overline{y}\|_p$ et $\mu_2 := \inf_{k\neq 0} \|\overline{y} - kT * \overline{y}\|_p$ alors

$$\mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0 \quad \text{et} \quad \mu_2 \leq 2\mu_1.$$

En effet, $\mu_1 > 0$ puisque $\overline{y} \neq 0$. D'autre part,

$$\lim_{k\to\infty} \|\overline{y} - kT * \overline{y}\|_p = 2\mu_1 \quad \text{et} \quad \overline{y}(\,\cdot\,) = \overline{y}(\,\cdot\, + kT) \Rightarrow \overline{y} = 0.$$

Donc $\mu_2 > 0$ et $\mu_2 \leq 2\mu_1$. On peut alors considérer μ tel que

$$(**) \qquad \mu < \min\left\{\tfrac{1}{2}\mu_2^2, \tfrac{2}{3}\mu_1, \mu_2\right\} \quad \text{et} \quad \|y\| \leq \mu \Rightarrow \phi(y) < c = \phi(\overline{y}).$$

Comme ϕ_k converge uniformément vers 0 alors il existe $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit $k \geq K_\varepsilon$,

$$\mu_\varepsilon(k) = \inf\{\|\gamma_\varepsilon(t) - kT * \gamma_\varepsilon(t')\| : \|\gamma_\varepsilon(t)\| \geq \mu \text{ et } \|\gamma_\varepsilon(t')\| \geq \mu\} \geq \tfrac{3}{2}\mu.$$

On définit sur $[0,1] \times [0, K_\varepsilon]$ les applications

$$\widetilde{\sigma}_\varepsilon(t,s) = [s]T * \sigma_\varepsilon(t, s - [s]) \quad \text{et} \quad d_k(t,s) = \|\widetilde{\sigma}_\varepsilon(t,s) - kT * \overline{y}\|^2, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$\widetilde{\sigma}_\varepsilon$ est un prolongement de σ_ε à $[0,1] \times [0, K_\varepsilon]$.

Les $d_k^{-1}(\mu/2)$, $k \in \mathbb{Z}$, sont ou bien vides ou bien des sous-variétés fermées de dimension un, i.e. des boucles dans le rectangle $[0,1] \times [0, K_\varepsilon]$ ou des arcs dont l'origine et l'extrémité sont sur le bord. Chacune de ces courbes ne s'intersecte pas. D'autre part, avec le choix de μ, on montre qu'elles sont deux à deux disjointes. En effet, supposons le contraire, soit

$$\exists (t_0, s_0) \in [0,1] \times [0, K_\varepsilon] \; : \; d_{k_0}(t_0,s_0) = d_{k_1}(t_0,s_0) = \mu/2,$$

soit encore $\|k_0T * \overline{y} - \widetilde{\sigma}_\varepsilon(t_0,s_0)\|^2 = \|k_1T * \overline{y} - \widetilde{\sigma}_\varepsilon(t_0,s_0)\|^2 = \mu/2$. Alors

$$\begin{aligned} \|k_0T * \overline{y} - k_1T * \overline{y}\|^2 &\leq (\|k_0T * \overline{y} - \widetilde{\sigma}_\varepsilon(t_0,s_0)\| + \|\widetilde{\sigma}_\varepsilon(t_0,s_0) - k_1T * \overline{y}\|)^2 \\ &= \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} + 2\sqrt{\frac{\mu}{2}}\sqrt{\frac{\mu}{2}} = 2\mu, \end{aligned}$$

ce qui implique $\|k_0T * \overline{y} - k_1T * \overline{y}\| \leq \sqrt{2\mu}$. En prenant μ tel que $\sqrt{2\mu} < \mu_2$, ce qui est possible avec notre choix dans $(**)$, on contredirait la définition de μ_2.

Avec ce choix de μ, on montre aussi (voir [9]), qu'il n'existe pas d'arcs reliant $s = 0$ et $s = K_\varepsilon$. Par suite, on peut construire un chemin C^∞, $\xi : [0,1] \to$

$[0,1]\times[0,K_\varepsilon]$, tel que $\xi(0)$ ait pour abscisse $t=0$, $\xi(1)$ ait pour abscisse $t=1$ et ξ n'intersecte aucun $d_k^{-1}(\mu/2)$, i.e.

$$\forall h\in[0,1],\ \forall k\in\mathbb{Z},\ k\neq\overline{k},\quad d_k(\xi(h))=\|\widetilde{\sigma}_\varepsilon(\xi(h))-kT*\overline{y}\|\neq\mu/2,$$

où $\overline{k}\in\mathbb{Z}$ est tel que $\{\xi(h):h\in[0,1]\}=d_{\overline{k}}^{-1}(\mu/2)$. De plus,

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ \forall h\in[0,1],\quad \|\widetilde{\sigma}_\varepsilon(\xi(h))-kT*\overline{y}\|\geq\mu/2.$$

En effet,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\sigma}_\varepsilon(\xi(h_0))-kT*\overline{y}\| &= \|\widetilde{\sigma}_\varepsilon(\xi(h_0))-\overline{k}T*\overline{y}+\overline{k}T*\overline{y}-kT*\overline{y}\|\\ &\geq \|\overline{k}T*\overline{y}-kT*\overline{y}\|-\|\widetilde{\sigma}_\varepsilon(\xi(h_0))-\overline{k}T*\overline{y}\|\\ &\geq \mu_2-\mu/2\geq\mu-\mu/2=\mu/2.\end{aligned}$$

D'où

$$\forall k\neq\overline{k},\quad \|\widetilde{\sigma}_\varepsilon(\xi(h))-kT*\overline{y}\|>\mu/2.$$

Si $\widetilde{\gamma}_\varepsilon(h)=\widetilde{\sigma}_\varepsilon(\xi(h))$ et $h\in[0,1]$, alors pour tout $\varepsilon>0$, $\widetilde{\gamma}_\varepsilon\in\Gamma$. De plus, par définition de σ_ε et $\widetilde{\sigma}_\varepsilon$, on a

$$\max\phi\circ\widetilde{\gamma}_\varepsilon\to\inf_{\gamma\in\Gamma}\max\phi\circ\gamma=c.$$

En posant $\varepsilon=1/n$ et en notant $\widetilde{\gamma}_n$ à la place de $\widetilde{\gamma}_{1/n}$, $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\forall h\in[0,1],\ \forall k\in\mathbb{Z},\quad \|\widetilde{\gamma}_n(h)-kT*\overline{y}\|\geq\mu/2$$

et

$$\max_{h\in[0,1]}\phi(\widetilde{\gamma}_n(h))<\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{h\in[0,1]}\phi(\gamma(h))+1/n.$$

D'autre part, d'après le principe variationnel d'Ekeland il existe pour tout n un $\widehat{\gamma}_n\in\Gamma$ (Γ étant un espace métrique complet) tel que

$$\begin{cases}\max\phi\circ\widehat{\gamma}_n<\inf_{\gamma\in\Gamma}\max\phi\circ\gamma+1/n,\\ \forall h\in[0,1],\ \|\widehat{\gamma}_n(h)-\widetilde{\gamma}_n(h)\|\leq1/\sqrt{n},\\ \forall\gamma\in\Gamma\setminus\{\widehat{\gamma}_n\},\ \max\phi\circ\gamma>\max\phi\circ\widehat{\gamma}_n-1/\sqrt{n}\max_h\|\gamma(h)-\widehat{\gamma}_n(h)\|.\end{cases}$$

Ceci implique (voir la démonstration du Théorème 5.2) que

$$(\top)\qquad\begin{cases}\exists(h_n)\subset[0,1]:\phi\circ\widehat{\gamma}_n(h_n)=\max_{h\in[0,1]}\phi\circ\widehat{\gamma}_n(h)<c+1/n,\\ \|\phi'(\widehat{\gamma}_n(h_n))\|\leq1/\sqrt{n}.\end{cases}$$

Posons $\widehat{\gamma}_n(h_n)=y_n$; alors on a

$$(\perp)\qquad\begin{cases}\phi(y_n)\to c,\ \phi'(y_n)\to0,\\ \forall k\in\mathbb{Z},\ \|y_n-kT*\overline{y}\|\geq\mu/4.\end{cases}$$

Les deux premières propriétés se déduisent de $(\top)$. Prouvons la troisième:

$$\begin{aligned}\|y_n - kT*\overline{y}\| &= \|y_n - \widetilde{\gamma}_n(h_n) + \widetilde{\gamma}_n(h_n) - kT*\overline{y}\| \\ &\geq \|\widetilde{\gamma}_n(h_n) - kT*\overline{y}\| - \|y_n - \widetilde{\gamma}_n(h_n)\| \geq \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{4} = \frac{\mu}{4}.\end{aligned}$$

$(\perp)$ constitue une contradiction avec le choix de μ. En effet,

$$\phi(y_n) \to c \quad \text{et} \quad \phi'(y_n) \to 0 \Rightarrow \phi(y_n) \to mc = m\phi(\overline{y}).$$

D'autre part, $\phi(y_n) \leq c$, donc $mc \leq c$ et alors $m = 1$. D'où par la Proposition 4.5 on déduit que $y_n \to \widetilde{k}T*\overline{y}$, $\widetilde{k} \in \mathbb{Z}$, ce qui contredit le fait que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\|y_n - kT*\overline{y}\| \geq \mu/4$.

Ainsi, l'hypothèse que tous les points critiques de ϕ sont de la forme $kT*\overline{y}$, $k \in \mathbb{Z}$, est fausse, ce qui prouve le théorème. □

8. Remarques

Remarque 8.1. Dans ce travail, on voulait étudier les orbites du système

$$(e_\alpha) \qquad \mathcal{A}_\alpha x(t) + V'(t, x(t)) = f(t)$$

homoclines à la solution T-périodique x_0 dont on connaît l'existence. On avait ramené ce problème à la recherche des solutions de

$$(l_\alpha) \qquad \mathcal{A}_\alpha y(t) = -V''(t, x_0(t))y(t) - K'(t, y(t))$$

homoclines à 0. Finalement, on a étudié le système

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}_\alpha x(t) = Ax + R'(t, x(t)), \\ x(\pm\infty) = 0, \end{cases}$$

dont 0 est un point d'équilibre en formulant des hypothèses sur A et R. Ceci est dû au fait que nous avons besoin d'une hypothèse d'hyperbolicité, $\mathrm{Spec}(M) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, qui ne peut être réalisée que lorsque la matrice $V''(t, x_0(t))$ est à coefficients constants, i.e. le système qu'on étudie ne provient pas de la linéarisation autour d'une orbite T-périodique non triviale. En effet, si $z_0 = (x_0, y_0)$ est une solution T-périodique du système $\dot{z} = JH'(z)$ avec

$$H(z) = H(x,y) = \tfrac{1}{2}y^2 + V(x) + \alpha(Jy, x) + \tfrac{1}{2}\alpha^2 x^2 - fx$$

comme hamiltonien correspondant au système (e_α) et $y = \dot{x} + \alpha J x$, alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}z_0(t)\right) &= \frac{d}{dt}(JH'(z_0(t))) = JH''(z_0(t))\frac{d}{dt}z_0(t), \\ &= \begin{pmatrix} 0_{2N} & I_{2N} \\ -I_{2N} & 0_{2N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 I + V''(t, x_0(t)) & \alpha J \\ -\alpha J & I \end{pmatrix} \frac{d}{dt}z(t),\end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{d}{dt}\widetilde{z}(t) = JH''(z_0(t))\widetilde{z}(t) \quad \text{où} \quad \widetilde{z}(t) = \frac{d}{dt}z_0(t).$$

D'autre part, $z_0(t+T) = z_0(t)$ pour tout t implique que $\frac{d}{dt}z_0(t+T) = \frac{d}{dt}z_0(t)$, i.e. $\widetilde{z}(t+T) = \widetilde{z}(t)$. D'où $\widetilde{z}(T) = \widetilde{z}(0)$ et $\widetilde{z}(t) = R(T)\widetilde{z}(0)$ où $R(t)$ est la résolvante associée au système $\dot{x}(t) = JH''(x_0(t))x(t)$.

Ainsi, $\widetilde{z}(0) = R(T)\widetilde{z}(0)$ et 1 est une valeur propre de $R(t)$, ce qui veut dire que dans le cas du système (l_α) on ne peut avoir l'hyperbolicité.

Remarque 8.2. Il serait aussi intéressant d'introduire pour ce type de système la fonctionnelle de Maupertuis (fonctionnelle intégrale) en opérant comme dans [15], ce qui nous permet d'omettre l'hypothèse de convexité. La fonctionnelle de Maupertuis est

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 - (\alpha J\dot{x}, x) + R(t,x) + \tfrac{1}{2}(Ax,x) \right\} dt$$

définie sur l'espace

$$W^{1,r}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N}) = \{x \in L^r(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N}) : \dot{x} \in L^r(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2N})\}, \quad 1 < r < \infty.$$

Cette fonctionnelle n'impose pas l'inversibilité de la partie linéaire, contrairement au cas dual, et donc l'hypothèse d'hyperbolicité n'apparaît pas. Pour α suffisamment petit, le second terme $\int_{\mathbb{R}} -\alpha(J\dot{x}, x)\,dt$ de la fonctionnelle devient négligeable devant le premier terme et moyennant des hypothèses sur A et R, on peut satisfaire les conditions géométriques du théorème du col. Rappelons que ces conditions nous permettent d'avoir dans certains cas l'existence de suites (x_n) dans $W^{1,r}$ telles que $\psi(x_n) \to c$ et $\psi'(x_n) \to 0$. Quand aux conditions de compacité, on fera appel au critère de concentration-compacité. Néanmoins, la méthode de la dualité était, dans le cas périodique, plus avantageuse au niveau de la théorie de l'index de Morse (voir [10]). En effet, les points critiques de la fonctionnelle de Clarke sont d'index 0 ou 1 alors que tout point critique de la fonctionnelle de Maupertuis est d'index infini. Rappelons que cette théorie de l'index nous a permis d'avoir la minimalité de la période des solutions et l'existence de sous-harmoniques géométriquement distinctes (voir [5]). Pour ce qui est de la théorie de l'index dans le cas homocline, on peut voir [8]. Notons que pour les systèmes du type $\dot{x}(t) = JH'(t, x(t))$ représentant une grande classe de systèmes hamiltoniens, il n'est pas possible de vérifier les hypothèses géométriques du théorème du col pour la fonctionnelle de Maupertuis associée

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ \tfrac{1}{2}(J\dot{x}, x) + H(t, x(t)) \right\} dt$$

à cause du terme $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(J\dot{x}, x)\,dt$. Pour les étudier avec cette fonctionnelle, on utilise les techniques d'enlacements (linking); voir pour cela [14] et [15].

Remerciements. L'auteur remercie chaleureusement les Professeurs I. Ekeland, H. Berestycki, E. Séré pour les discussions fructueuses et leurs remarques utiles. Il remercie aussi les Professeurs J.-M. Strelcyn, C. Dellacherie et

G. Grancher pour leur accueil chaleureux au Laboratoire d'Analyse et Modèles Stochastiques de Rouen.

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.

[2] V. I. Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Editions Mir, Moscou, 1976.

[3] J. P. Aubin and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, Wiley, 1984.

[4] M. Benabas, Thèse de magister, U.S.T.H.B., Alger, 1992.

[5] ———, *Étude d'un système différentiel non-linéaire régissant un phénomène gyroscopique forcé*, Colloq. Math. **70** (1996), 41–58.

[6] H. Berestycki, *Solutions périodiques de systèmes hamiltoniens*, Sém. Bourbaki, février 1983, exposé No. 603.

[7] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[8] J. Burdeau, *Éléments d'une théorie de l'index pour les orbites homoclines des systèmes hamiltoniens*, preprint CEREMADE No. 9359, Paris, 1993.

[9] V. Coti-Zelati, I. Ekeland and E. Séré, *A variational approach to homoclinic orbits in Hamiltonian systems*, Math. Ann. **288** (1990), 133–160.

[10] I. Ekeland, *Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics*, Springer-Verlag, 1989.

[11] I. Ekeland et R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod et Gauthier-Villars, 1972.

[12] P. L. Lions, *Solutions of Hartree–Fock equations for Coulomb systems*, Comm. Math. Phys. **109** (1987), 33–97.

[13] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1899.

[14] P. H. Rabinowitz, *Periodic solutions of Hamiltonian systems*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 157–184.

[15] ———, *Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **114** (1990), 33–38.

[16] E. Séré, *Existence of infinitely many homoclinic orbits in Hamiltonian systems*, Math. Z. **209** (1992), 27–42.

[17] ———, *Looking for the Bernoulli shift*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **10** (1993), 561–590.

Manuscript received March 8, 1995

Mourad Benabas
URA CNRS 1378
Département de Mathématiques
Université de Rouen
76821 Mont Saint-Aignan Cedex, FRANCE

E-mail address: Mourad.Benabas@univ-rouen.fr