Topological **M**ethods in **N**onlinear **A**nalysis
Journal of the Juliusz Schauder Center
Volume 18, 2001, 89–102

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE RAFLE ET APPLICATION À UN PROBLÈME DE FROTTEMENT

Mohamed Chraibi Kaadoud

Abstract. In this paper we study the sweeping processes by convex sets depending on time and the solution. We do some application to a dry friction's problem.

Résumé. Dans ce travail, nous étudions des problèmes de rafle par des multifonctions qui dépendent du temps et de la solution. Nous donnons une application à un problème de frottement.

1. Introduction

Soit q une application à variation bornée de $I = [0,T]$ dans un hilbertien réel H, sa mesure différentielle définie au sens de Stieltjes est dq. Si q est absolument continue, cette mesure admet une densité q' par rapport à la mesure de Lebesgue dt. Cette densité coïncide presque partout avec la dérivée de q. On désignera par h la distance de Hausdorff et par $J(H)$, respectivement $I(H)$, l'ensemble de tous les convexes fermés non vides de H, respectivement d'intérieur non vide. Etant donnée une multifonction F de $I \times H$ dans $I(H)$, le cône normal $N_{F(t,q(t))}(q(t))$ à $F(t,q(t))$ au point $q(t)$, $q(t)$ appartenant à $F(t,q(t))$, est défini par

$$N_{F(t,q(t))} = \{p \in H^*,\ \langle p, s - q(t)\rangle \leq 0,\ \text{pour tout } s \in F(t,q(t))\}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 34A60, 34A37.

Key words and phrases. Inclusion différentielle-multifonction-cône normal.

Une application à variation bornée q de I dans H est dite solution du problème de rafle (Q_F) pour la position initiale q_0 appartenant à $F(0,q_0)$, s'il existe une mesure positive $d\mu$ sur I et une application $q' \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{Loc}}(d\mu, H)$ vérifiant $dq = q'd\mu$ et

$$(\mathrm{Q}_F) \qquad \begin{cases} q(0) = q_0, & \\ q(t) \in F(t, q(t)) & \text{pour tout } t \in I, \\ -\dfrac{dq}{d\mu}(t) \in N_{F(t,q(t))}q(t) & d\mu \text{ p.p.} \end{cases}$$

Nous étudierons ce problème au paragraphe 2 pour $H = \mathbb{R}$, respectivement au paragraphe 3 pour H de dimension finie.

Dans le cas de la dimension 1, nous montrons dans un premier temps que s'il existe $K \in [0,1[$, tel que

$$h(F(t,\omega), F(t,\varepsilon)) \leq K|\omega - \varepsilon|, \quad \text{pour tout } t \in I \text{ et pour tout } \omega,\ \varepsilon \in \mathbb{R},$$

et si pour tout ω de $\mathbb{R}$, l'application $\widetilde{F_\omega} = F(\,\cdot\,,\omega)$ de I dans $I(\mathbb{R})$, est continue respectivement semi-continue inférieurement à droite (on dira que $\widetilde{F_\omega}$ est s.c.i. à droite) sur I alors le problème (Q_F) admet une solution unique à variation bornée, continue respectivement continue à droite.

Ensuite, et toujours pour $H = \mathbb{R}$ soit F à valeurs dans $J(\mathbb{R})$ vérifiant

$$h(F(t,u), F(s,v)) \leq \delta(a(t), a(s)) + N|u - v|,$$

pour tout $t, s \in I$, et pour tout $u, v \in H$, avec a une application absolument continue de I dans un espace métrique (Y, δ) et $N \in [0,1[$. Nous établissons que le problème (Q_F) admet une solution unique absolument continue sur I.

Au paragraphe 3, nous reprenons le cas précédent avec H de dimension finie. Nous montrons que si a est absolument continue, respectivement continue et à variation bornée, alors le problème (Q_F) admet une solution absolument continue respectivement continue et à variation bornée. De même si a est continue à droite et à variation bornée sur I, alors (Q_F) possède une solution continue à droite et à variation bornée sur I.

Le cas où $\widetilde{F_\omega}$ est absolument continue a été étudié dans [2] pour un problème de frottement. Pour H un hilbertien réel et F vérifiant

$$h(F(t,u), F(s,v)) \leq L_1|t - s| + L_2||u - v||,$$

pour tout $t, s \in I$ et pour tout $u, v \in H$, avec $L_1 \geq 0$ et $L_2 < 1$, le Théorème 3.3 de [3] affirme l'existance d'une solution absolument continue sur I de (Q_F).

Dans [4], si la multifonction F est de I à valeurs dans $I(H)$, continue respectivement s.c.i. à droite, alors le problème de rafle admet une solution unique à variation bornée continue, respectivement continue à droite. Dans [5], si la multifonction F est de I à valeurs dans $J(H)$ est absolument continue alors on obtient une solution unique absolument continue.

Enfin nous donnons une application du problème de rafle dans le cas d'un frottement sec de type Coulomb et selon la formulation de J. J. Moreau [6].

2. Cas de la dimension 1

Théorème 1. *Soient F une multifonction de $I \times \mathbb{R}$ dans $I(\mathbb{R})$ et $K \in [0,1[$ telles que F_ω soit Hausdorff continue et*

$$h(F(t,\omega),F(t,\varepsilon)) \leq K|\omega-\varepsilon|,$$

pour tout $t \in I$ et pour tout $\omega,\varepsilon \in \mathbb{R}$. Alors pour tout q_0 dans $F(0,q_0)$, il existe une application unique continue à variation bornée q de I dans $\mathbb{R}$ qui est solution du problème (Q_F) avec $d\mu = |dq|$.

La démonstration de ce théorème nécessite les deux lemmes suivants.

Lemme 2. *Soient r une application continue de I dans $\mathbb{R}$, F_r la multifonction définie sur I par $F_r(t) = F(t, r(t))$, et q_0 dans $F_r(0)$. Le problème de rafle (P_r) suivant:*

$$(\mathrm{P}_r) \qquad \begin{cases} q(0) = q_0, & \\ q(t) \in F_r(t) & \textit{pour tout } t \in I, \\ -\dfrac{dq}{d\mu}(t) \in N_{F_{r(t)}} q(t) & |dq| \ \textit{p.p.} \end{cases}$$

avec $d\mu = |dq|$ admet une solution unique continue et à variation bornée de I dans $\mathbb{R}$.

Preuve. Le lecteur peut vérifier facilement que F_r est continue. Par [4] Théorème 3.1, (P_r) admet une solution unique continue et à variation bornée de I dans $\mathbb{R}$. $\square$

Lemme 3. *Soient I, J deux intervalles fermés de $\mathbb{R}\times\{0\}$, X et Y étant deux points de $\mathbb{R}^2$, alors*

$$|\mathrm{proj}(X,I) - \mathrm{proj}(Y,J)| \leq \max(|X-Y|, h(I,J)).$$

Preuve. Soient X' la projection de X et Y' celle de Y sur $\mathbb{R}\times\{0\}$. Posons $D = |\mathrm{proj}(X',I) - \mathrm{proj}(Y',J)|$. On voit que

$$D = |\mathrm{proj}(X,I) - \mathrm{proj}(Y,J)|.$$

Dans cette démonstration, nous traitons le cas $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$. Nous avons $h(I, J) = \max(|a - c|, |b - d|)$ et

$$\operatorname{proj}(X', I) = \begin{cases} a \text{ si } X' \leq a, & (1) \\ b \text{ si } X' \geq b, & (2) \\ X' \text{ si } X' \in I, & (3) \end{cases} \qquad \operatorname{proj}(X', I) = \begin{cases} c \text{ si } Y' \leq c, & (1') \\ d \text{ si } Y' \geq d, & (2') \\ Y' \text{ si } X' \in J. & (3') \end{cases}$$

La symétrie des couples (X, I) et (Y, J) dans l'inégalité cherchée, nous ramène à discuter seulement les six situations (1)–(1'), (1)–(2'),...,(2)–(3'). Supposons dans la suite que $a \leq c$, quitte à changer les rôles de I et J. Si on a (1)–(1'), (2)–(2') ou (3)–(3') le résultat est immédiat.

Si on a (1)–(2') alors $D = |a - d| \leq |X' - Y'|$.

Pour (1)–(3'), nous avons $D = |a - Y'| \leq |X' - Y'|$.

Dans le cas de (2)-(3') on a $D = |b - Y'| \leq \max(|b - d|, |X' - Y'|)$.

Soit C un convexe fermé d'un hilbertien, la projection $\operatorname{proj}(\,\cdot\,, C)$ est lipschitzienne de rapport 1, d'où le résultat. □

Le lemme précédent n'est plus valable si on n'est pas en dimension un. En effet, si $H = \mathbb{R}^2$, $Y = (1, 1)$, $I = [(0, 0), (1, 0)]$ et $J = [(0, 0), (0, 1)]$ alors

$$|\operatorname{proj}(X, I) - \operatorname{proj}(Y, J)| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \max(|X - Y|, h(I, J)) = 1.$$

Démonstration du Théorème 1. Soit E l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{R}$ prenant la valeur q_0 en $t = 0$. On munit E de la distance de la convergence uniforme notée d. On a (E, d) un espace métrique complet. Soient la partition de I suivante:

$$\begin{aligned} t_{n,i} &= \frac{i}{n} T, & 0 \leq i \leq n, \\ I_{n,i} &= [t_{n,i}, t_{n,i+1}[\,, & 0 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

et les $n + 1$ éléments de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} q_{(n,r),0} &= q_0, \\ q_{(n,r),i} &= \operatorname{proj}(q_{(n,r),i-1}, F_r(t_{n,i})). \end{aligned}$$

On définit la suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ par

$$q_{n,r}(t) = q_{(n,r),i} \quad \text{si } t \in I_{n,i}, 0 \leq i \leq n.$$

Par le Théorème 3.1 dans [4]), $(q_{n,r})_n$ converge uniformément vers une solution q_r du problème de rafle (P_r) qui est continue et à variation bornée sur I.

Soient r et v deux éléments de E et $(q_{(n,r)})_n$, $(q_{(n,v)})_n$ les suites de fonctions associées à r et à v définies comme précédemment. D'après le Lemme 3, on a

$$|q_{(n,r),i} - q_{(n,v),i}| \leq \max(|q_{(n,r),i_{-1}} - q_{(n,v),i_{-1}}|, h(F_r(t_{n,i}), F_v(t_{n,i}))).$$

Par itération, les hypothèses sur F et vu que $q_{(n,r),0} = q_{(n,v),0} = q_0$, nous avons

$$|q_{(n,r),i} - q_{(n,v),i}| \leq Kd(r,v).$$

Pour tout t de I, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un $i \in \mathbb{N}^*$, $i \leq n$ tel que:

$$(q_{(n,r)} - q_{(n,v)})(t) = q_{(n,r),i} - q_{(n,v),i}.$$

Par suite

$$d(q_r, q_v) \leq Kd(r,v).$$

D'après le théorème classique du point fixe dans un espace métrique complet, il existe dans E une application unique q qui est la solution du problème (P_q). Donc q est aussi solution du problème (Q_F). Comme la solution du problème (P_q) est à variation bornée alors q l'est aussi. □

Proposition 4. *Sous les hypothèses du Théorème* 1 *et s' il existe* $\alpha > 0$ *tel que l'intervalle* $[a-\alpha, a+\alpha]$ *soit contenu dans* $F(t,\omega)$ *pour tout* (t,ω) *de* $I \times \mathbb{R}$, *alors*

$$\mathrm{var}(q, I) \leq \max(0, |q_0 - a| - \alpha),$$

où $\mathrm{var}(q,I)$ *est la variation de* q *sur* I.

Preuve. Soit q la solution continue du problème (Q_F). Elle est aussi solution du problème (P_q). Or $[a-\alpha, a+\alpha] \subset F_q(t)$ pour tout $t \in [0,T]$. Par [10] et le Lemme 3.5 de [4], on peut conclure qu'on a l'inégalité cherchée. □

Proposition 5. *Soient* F *et* F' *deux multifonctions de* $I\ \times\mathbb{R}$ *dans* $I(\mathbb{R})$ *telles que:*

- $\widetilde{F}_\omega$ *et* $\widetilde{F}'_\omega$ *soient continues,*
- $h(\widetilde{F}_\omega(t), \widetilde{F}_\varepsilon(t)) \leq K|\omega - \varepsilon|$ *et* $h(\widetilde{F}'_\omega(t), \widetilde{F}'_\varepsilon(t)) \leq K'|\omega - \varepsilon|$,
- $[a-\alpha, a+\alpha] \subset \widetilde{F}_\omega(t)$ *et* $[b-\beta, b+\beta] \subset \widetilde{F}'_\omega(t)$,

ceci pour tout ω *et* ε *dans* $\mathbb{R}$ *et tout* t *dans* I, *avec* K, K', a, b, α *et* β *des constantes réelles donneés qui verifient* $K, K' \in [0,1[$, $\alpha, \beta \in]0,\infty[$. *Si* q, *respectivement* $\overline{q}$, *est la solution du problème* (Q_F), *respectivement de* ($Q_{F'}$), *pour la valeur initiale* q_0, *respectivement* $\overline{q}_0$, *alors pour tout* t *dans* I *on a*

$$|(q - \overline{q})(t)|^2 \leq |q_0 - \overline{q}_0|^2 + \mu(t)\left[\frac{1}{\alpha}|q_0 - a|^2 + \frac{1}{\beta}|\overline{q}_0 - b|^2\right],$$

où $\mu(t) = \sup_{0<s\leq t} h(F(s,q(s)), F'(s,\overline{q}(s)))$.

Preuve. Les multifonctions F_q et $F'_{\overline{q}}$ sont continues et à valeurs dans $I(\mathbb{R})$. Pour tout t de I nous avons $[a-\alpha, a+\alpha] \subset F_q(t)$ et $[b-\beta, b+\beta] \subset F'_{\overline{q}}(t)$. Comme q et $\overline{q}$ sont les solutions respectives des problèmes (P_q) et ($\mathrm{P}_{\overline{q}}$) alors par le Théorème 3.7 de [4], nous avons l'inégalité cherchée. □

Nous reprenons le problème de rafle traité dans le théorème précédent en modifiant les conditions imposées sur la multifonction F.

Définition 6 ([1]). Une multifonction F de I dans $I(\mathbb{R})$ est dite s.c.i. à droite en $t_0 \in I$ si pour tout $y \in F(t_0)$ et pour tout $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers t_0, $t_n \geq t_0$ il existe $z_n \in F(t_n)$ telle que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y.

Théoréme 7. *Soient F une multifonction de $I \times\mathbb{R}$ dans $I(\mathbb{R})$ et $K \in [0,1[$ telles que $\widetilde{F}_\omega$ soit s.c.i. à droite et*

- *$h(F(t,\omega), F(t,\varepsilon)) \leq K|\omega - \varepsilon|$, pour tout $t \in I$ et pour tout ω, $\varepsilon \in \mathbb{R}$,*
- *il existe $\alpha \in]0,\infty[$ et $a \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in I$ et pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $]a-\alpha, a+\alpha[\subset F(t,\omega)$.*

Alors pour tout q_0 dans $F(0,q_0)$, il existe une application q unique continue à droite, à variation bornée de I dans $\mathbb{R}$ qui est solution du problème de rafle (Q_F) pour la position initiale q_0 et $d\mu = |dq|$. De plus

$$\mathrm{var}(q,I) \leq \max\{0, |q_0 - a| - \alpha\}.$$

Preuve. Soit G l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$, bornées, continues à droite et prenant la valeur q_0 à l'instant $t=0$.

On a (G,d) un espace métrique complet. Considérons une subdivision P de I où

$$P = \{t_{P,i},\ 0 \leq i \leq n(P)\} \quad \text{avec } t_{P,0} = 0 < t_{P,1} < \ldots < t_{P,n(P)} = T,$$

et Π l'ensemble de toutes les partitions de I, muni de la lois d'ordre $P \geq P'$ si et seulement si $P \supset P'$. Pour chaque (P,r) dans $\Pi \times G$ on associe une suite d'éléments de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} q_{(P,r),0} &= q_0, \\ q_{(P,r),i} &= \mathrm{proj}(q_{(P,r),i-1}, F_r(t_{P,i})), \quad 1 \leq i \leq n(P), \end{aligned}$$

et une suite de fonctions continues à droite de I dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} q_{P,r}(t) &= q_{(P,r),i} \quad \text{si } t \in [t_{P,i}, t_{P,i+1}[\,,\ (0 \leq i < n(P)), \\ q_{P,r}(T) &= q_{(P,r),n(P)}. \end{aligned}$$

La multifonction F_r est s.c.i. à droite sur I. Par le Théorème 4.1 de [4], le problème (P_r) ayant pour condition initiale q_0 admet une solution unique q_r continue à droite et à variation bornée sur I.

La convergence uniforme de la suite des fonctions $(q_{P,r})_{P\in\Pi}$ vers q_r s'obtient grâce au Théorème 4.11 de [4]. Comme précédemment, nous avons

$$d(q_r, q_v) \leq K d(r,v),$$

et il existe une application q unique et continue à droite q de G qui est solution de (P_q). Donc q est solution de (Q_F). Comme la solution de (P_q) est à variation bornée alors q l'est aussi. L'inégalité suivante: $\mathrm{var}(q, I) \leq \max\{0, |q_0 - a| - \alpha\}$, s'obtient par [10] et le Théorème 4.1 de [4]. $\square$

Proposition 8. *La Proposition* 5 *reste valable si on suppose que* F *et* F' *sont seulement s.c.i. à droite.*

Preuve. Soit q, respectivement $\overline{q}$, la solution de (Q_F), respectivement de $(\mathrm{Q}_{F'})$, alors q, respectivement $\overline{q}$, est solution de (P_q), respectivement de $(\mathrm{P}_{\overline{q}})$. D'après le Théorème 4.12 de [4], on a l'inégalitée cherchée. $\square$

Nous reprenons le problème traité dans les théorèmes précédents en faisant des modifications sur la multifonction F.

Théorèm 9. *Soient* F *une multifonction de* $I \times \mathbb{R}$ *dans* $J(\mathbb{R})$, $N \in [0,1[$ *et* a *une application absolument continue de* I *à valeurs dans un espace métrique* (Y, δ) *vérifiant*

$$h(F(t,u), F(s,v)) \leq \delta(a(t), a(s)) + N|u - v|,$$

pour tout $t, s \in I$ *et* $u, v \in \mathbb{R}$. *Alors pour tout* q_0 *dans* $F(0, q_0)$, *il existe une application* q *unique absolument continue de* I *dans* $\mathbb{R}$ *qui est solution du problème de rafle* (Q_F).

Preuve. Pour chaque application r absolument continue de I dans $\mathbb{R}$ telle que q_0 soit dans $F_r(0)$, on définit une suite de fonctions $q_{r,P}$ sur I de la même manière que dans la démonstration du théorème précédent. La multifonction F_r est absolument continue et par la Proposition 3c de [5], le problème de rafle (P_r) admet une solution unique q_r qui est absolument continue sur I. La suite des fonctions $(q_{P,r})_{P\in\Pi}$ converge uniformément vers q_r. Nous avons comme avant

$$d(q_r, q_v) \leq N d(r, v).$$

Définissons $r_1(t) = q_0$ pour tout t dans I et $r_{i+1} = q_{ri}$, $i \geq 1$. Les fonctions r_i de I dans $\mathbb{R}$ sont absolument continues et valent q_0 en 0. Le calcul fait classiquement pour établir le théorème du point fixe dans un espace métrique complet montre que (r_i) est une suite de Cauchy dans (E, d). Montrons que sa limite S dans (E, d) est absolument continue. Pour tout σ, τ dans I, nous avons

$$h(F_{r_n}, \sigma, \tau) = h(F(\sigma, r_n(\sigma)), F(\tau, r_n(\tau))) \leq |a(\sigma) - a(\tau)| + N|r_n(\sigma) - r_n(\tau)|.$$

Donc $\mathrm{var}(F_{r_n}, \sigma, \tau) \leq \mathrm{var}(a, \sigma, \tau) + N\mathrm{var}(r_n, \sigma, \tau)$, par la Proposition 2c de [5], nous avons $\mathrm{var}(r_{n+1}, \sigma, \tau) \leq \mathrm{var}(F_{r_n}, \sigma, \tau)$. Par suite

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(r_{n+1}, \sigma, \tau) &\leq \mathrm{var}(a, \sigma, \tau) + N\mathrm{var}(r_n, \sigma, \tau) \\ &\leq \mathrm{var}(a, \sigma, \tau) + N[\mathrm{var}(a, \sigma, \tau) + N\mathrm{var}(r_{n-1}, \sigma, \tau)] \\ &\leq \frac{1}{1-N}\mathrm{var}(a, \sigma, \tau) + N\mathrm{var}(r_1, \sigma, \tau). \end{aligned}$$

Alors

$$\operatorname{var}(r_{n+1},\sigma,\tau) \le \frac{1}{1-N}\operatorname{var}(a,\sigma,\tau),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\sigma,\tau \in I$, de plus les r_n convergent uniformément vers S. La fonction $\operatorname{var}(a,0,\cdot\,)$ est absolument continue sur I, on peut vérifier facilement que l'application S l'est aussi. La fonction S est solution de (Q_F) puisque

$$d(q_S,S) \le N \lim d(S-r_n) = 0.$$

En fait, S est l'unique solution, car si S_1 en est une autre, on a $q_S = S$ et $q_{S_1} = S_1$. Nous aurons

$$d(q_S,q_{S_1}) \le N d(S_1,S).$$

D'où l'unicité de la solution. □

Exemple 10. Dans l'Exemple 3.6 de [3], nous avons $F(t,\omega) = [t+\omega,\infty[$, $t \in I$. Dans ce cas, on a $N = 1$ et pour $t \in I$, $q(t)$ n'est pas dans $F(t,q(t))$, d'où (Q_F) n'a pas de solution. Considérons l'exemple où $H = \mathbb{R}$, $F(t,\omega) = [1+\alpha|\omega|,\infty[$, $t \in I$, $\omega \in \mathbb{R}$, $q_0 = 0$ et $\alpha \ge 1$. Nous avons ici $N = \alpha \ge 1$ et a est l'application constante 1. Pour $t \in I$, $q(t)$ n'est pas dans $F(t,q(t))$. Ceci montre que pour $N \ge 1$, le problème (Q_F) n'a pas forcément de solution.

3. Cas de la dimension finie

Nous reprenons le dérnier théorème en supposant que H est un espace de Hilbert de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et que l'applicaton a est absolument continue, respectivement continue et à variation bornée sur I. En dérnier lieu, nous supposons a continue à droite et à variation bornée sur $[0,T[$. La résolution du problème de rafle que nous obtenons est une généralisation du Théorème 3.3 de [3]. Nous donnons des propriétés qualitatives des dites solutions.

On désigne par K_{a,q_0} l'ensemble des applications r de I dans H prenant la valeure q_0 en $t = 0$ et vérifiant:

$$(*) \qquad \|r(t)-r(s)\| \le \frac{1}{1-N}\operatorname{var}(a,t,s) \quad \text{pour tout } t,s \in I.$$

Définition 11. Pour deux parties fermées A, B de H, *l'excés ou l'écart de* A et B est

$$e(A,B) = \sup_{X\in A}\inf_{Y\in B}\|X-Y\|.$$

Le supremum est pris dans $[0,+\infty]$. Etant donné une multifonction F de I dans les parties non vides de H. On rappelle *la rétraction* de F dénotée par $retF$ l'application qui à tout t de I associe le supremum de $\sum_{i=1}^{n} e(F(t_i),F(t_{i+1}))$ qui est pris sur toutes les suites finies (t_i) de la forme $0 = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n = t$.

Théorème 12. *Soient F une multifonction de $I \times H$ dans $J(H)$, N dans $[0,1[$, q_0 dans $F(0,q_0)$ et a une application de I à valeurs dans un espace métrique (Y,δ) vérifiant*

$$(**)\qquad h(F(t,u),F(s,v)) \leq \delta(a(t),a(s)) + N||u-v||,$$

pour tout $t,s \in I$ et $u,v \in H$. Si a est absolument continue, respectivement continue et à variation bornée sur I alors le problème de rafle (Q_F) *admet une solution q absolument continue avec $d\mu$ la mesure de Lebesgue sur I, respectivement continue et à variation bornée avec $d\mu = d(\operatorname{ret} F_q)$. Si plutôt, a est continue à droite sur $[0,T[$ et à variation bornée sur I, alors* (Q_F) *admet une solution q qui est continue à droite sur $[0,T[$ et à variation bornée sur I avec $d\mu = d(\operatorname{ret} F_q)$. Dans tous ces cas et pour $0 \leq t \leq s \leq T$, nous avons*

$$\|q(t) - q(s)\| \leq \frac{1}{1-N} \operatorname{var}(a,t,s).$$

Preuve. Dans cette démonstration, nous allons utiliser le théorème de Leray Schauder [8]. On va traiter d'abord le cas où a est absolument continue, respectivement continue et à variation bornée sur I. L'ensemble K_{a,q_0} est clairement non vide, convexe et fermé pour la topologie uniforme. Comme $\|r(t)\| \leq |q_0| + \operatorname{var}(a,0,T)$ alors pour tout t de I, l'ensemble $K(t) = \{r(t), r \in K_{a,q_0}\}$ est borné. Il suit de $(*)$ que K_{a,q_0} est équi-continue. Par Ascoli–Arzela, voir [9, Théorème (T. 2, XX, 4; 1)], K_{a,q_0} est un sous ensemble compact de l'ensemble des fonctions continues de I dans H. Pour chaque r de K_{a,q_0}, l'application F_r est évidement à rétraction absolument continue, respectivement continue sur I. Le problème (P_r) admet par [5, Proposition 3c], une solution unique $\emptyset(r)$ qui est absolument continue avec $d\mu$ la mesure de Lebesgue, respectivement (P_r) admet par [5, Proposition 3b et Corollaire 2c] au moins une solution continue pour $d\mu = d(\operatorname{ret} F_r)$. Montrons que l'application $\emptyset$ de K_{a,q_0} dans lui même est bien définie, c'est à dire que

$$(***)\qquad \|\emptyset(r)(s) - \emptyset(r)(t)\| \leq \frac{1}{1-N} \operatorname{var}(a,t,s).$$

En effet, d'après [5, Proposition 2.c], nous avons

$$\begin{aligned}\|\emptyset(r)(s) - \emptyset(r)(t)\| &\leq \operatorname{ret}(F_r,s,t)\\ &\leq \operatorname{var}(a,s,t) + \frac{N}{1-N}\operatorname{var}(a,r,s) \leq \frac{1}{1-N}\operatorname{var}(a,t,s).\end{aligned}$$

Montrons que $\emptyset$ est continue. Soit (r_n) une suite d'éléments de K_{a,q_0} convergente vers un r de K_{a,q_0}. Posons

$$\mu(t) = \sup_{\theta\in[0,t]} h(F_{r_n}(\theta), F_r(\theta)).$$

D'après [5, Proposition 2.g], on a

$$\begin{aligned}\|\emptyset(r_n)(t)-\emptyset(r)(t)\|^2 &\leq 2\mu(t)[\mathrm{ret}(F_{r_n},0,t)+\mathrm{ret}(F_r,0,t)]\\ &\leq \frac{4\mu(t)}{1-N}\mathrm{var}(a,0,T)\leq \frac{4N}{1-N}\mathrm{var}(a,0,T)\|r_n-r\|_\infty.\end{aligned}$$

Donc $\emptyset(r_n)$ converge vers $\emptyset(r)$ uniformément sur I. Par le théorème de Leray-Schauder, il existe dans K_{a,q_0}une application q telle $\emptyset(q)=q$ qui est évidement solution de (Q_F). L'inégalité qui reste à démontrer s'obtient par $(***)$ et du fait que $q=\emptyset(q)$.

Maintenant, si a est continue à droite sur $[0,T[$ et à variation bornée sur I, on munit I de la topologie droite induite par celle de $\mathbb{R}$. Pour cette topologie, a est continue sur I et K_{a,q_0} est équi-continue pour tout $t\in I$. Par Ascoli–Arzela cité précédemment, K_{a,q_0} est compact dans l'espace des fonctions continues pour la topologie droite sur I. Le raisonnement précédent fait pour le cas où a était continue reste valable pour cette situation où a est continue sur I pour la topologie à droite. □

Proposition 13. *Soit F, respectivement $\overline{F}$, une multifonction de $I\times H$ dans $J(H)$ vérifiant les conditions du Théorème 12 pour la condition initiale q_0, respectivement $\overline{q}_0$. Soient q et $\overline{q}$ les solutions respectives des problèmes de rafles (Q_F) et $(\mathrm{Q}_{\overline{F}})$. Nous avons*

$$\|q(t)-\overline{q}(t)\|^2-\|q_0-\overline{q}_0\|^2\leq 4S(t)\mathrm{var}(a,0,t),$$

avec $S(t)=\sup_{\theta\in[0,t]}h(F_q(\theta),\overline{F}_{\overline{q}}(\theta))$, ceci pour tout t de I.

Preuve. D'aprés [5, Proposition 2.g], pour r et r' dans K_{a,q_0}, nous avons

$$\|\emptyset(r)(t)-\emptyset(r')(t)\|^2-\|q_0-\overline{q}_0\|^2\leq 2S'(t)[\mathrm{ret}(F_r,0,t)+\mathrm{ret}\overline{(F}_{r'},0,t)],$$

où $S'(t)=\sup_{\theta\in[0,t]}h(F_r(\theta),\overline{F}_{r'}(\theta))$. On a

$$\begin{aligned}e(F(t,r(t)),F(s,r(s)))&\leq \mathrm{var}(a,t,s)\quad \text{et } q=\emptyset(q),\\ e(F(t,r'(t)),F(s,r(s)))&\leq \mathrm{var}(a,t,s)\quad \text{et } \overline{q}=\emptyset(\overline{q}).\end{aligned}$$

D'où l'inégalité cherchée. □

4. Application à un problème de frottement

Dans ce paragraphe, on étudie le mouvement d'un point matériel $q\in\mathbb{R}^2$ dans le repère $(0,\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2)$ pendant un intervalle de temps $I=[0,T]$. Le point q est rappelé vers un point mobile a de mouvement donné, par une force $\overrightarrow{F}$ vérifiant

$$\overrightarrow{F}(t)=-k'(q(t)-a(t)).$$

La fonction $a(t) = (a_1(t), a_2(t))$, $t \in I$, est supposée continue, respectivement continue à droite. De plus, le point q est confiné dans la région permise $x_2 \leq 0$ par une paroi régide fixe P d'équation $x_2 = 0$. On suppose que pour tout t dans I, $a_2(t) > 0$, (ce qui signifie qu'on a un contact persistant), et que le frottement de q avec P est sec de type Coulomb. On néglige l'inertie de q, c'est à dire l'évolution est traitée comme quasi-statique. Alors

$$\overrightarrow{F}(t) + \overrightarrow{R(t)} = \overrightarrow{0}, \quad \text{pour tout } t \in I,$$

où $\overrightarrow{R}(t)$ est la réaction exercée par P sur q. Soient $\upsilon_+(\varepsilon, 0)$ et $\upsilon_-(\varepsilon, 0)$ les coéfficients de frottement respectifs au point $(\varepsilon, 0)$ de P, pour les vitesses de glissement positives et négatives. Les fonctions $\varepsilon \to \upsilon_+(\varepsilon, 0)$ et $\varepsilon \to \upsilon_-(\varepsilon, 0)$ sont supposées majorées par une constante M, Lipschitziènnes de constantes de Lipschitz réspectives K_1 et K_2 et pour tout $[t, \varepsilon]$ dans $I \times \mathbb{R}$, $[-a_2(t)\upsilon_+(\omega),\ a_2(t)\upsilon_-(\omega)]$ est d'intérieur non vide. On travaille dans le cas d'un frottement non nécessairement isotrope ($\upsilon_+ \neq \upsilon_-$) ni homogène. Le frottement sec de type Coulomb nous permet d'avoir:

(1) la vitesse $dq/|dq|$ est dans la paroi P,
(2) la composante normale R_N de la réaction est dirigée selon la normale rentrante dans la région permise, i.e. $R_N \leq 0$,
(3) il existe dans l'espace $\mathbb{R}^2$ un cône convexe fermé C contenant le vecteur unité normal N dirigé vers la région permise, dit cône de frottement au point de contact considéré. Une formulation de la loi de Coulomb [6] est
$$-\frac{dq}{|dq|} \in N_D(R_T),$$
où D est la projection orthogonale sur P de la section plane du cône C, à distance R_N de P. Cette formulation d'après J. J. Moreau [6] est équivalente à
$$-\frac{dq}{|dq|}(t) \in \mathrm{Proj}_P N_{C(q(t))} R(t),$$
où $N_{C(q(t))}R(t)$ est le cône normal sortant à C au point R.

Pour simplifier l'inclusion différentielle précédente nous citons le lemme suivant:

Lemme 14. *Soient P le plan de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ d'équation $X_2 = 0$, u et v deux fonctions de I dans P. Soit C une multifonction définie sur $I \times \mathbb{R}$ à valeurs dans les convexes fermés non vides de $\mathbb{R}^2$. Alors pour tout t de I,*

$$u(t) \in \mathrm{Proj}_P N_{C(t,u(t))} v(t) \Leftrightarrow u(t) \in N_{P \cap C} v(t).$$

Preuve. Soit G le sous-espace orthogonal à P dans $\mathbb{R}^2$. Alors le terme à gauche de l'équivalence cherchée équivaut à

$$u(t) \in G + N_{C(t,u(t))}v(t).$$

Puisque $v(t) \in P$, on a $N_P v(t) = G$, d'où la forme équivalente

$$u(t) \in N_P v(t) + N_{C(t,u(t))}v(t).$$

Une règle d'addition des sous-différentiels fournit alors $N_P + N_C = N_{P\cap C}$, voir [7, Théorème 32.8]. D'où l'équivalence cherchée. □

Le lemme précédent nous permet de dire que la solution q du problème quasi-statique vérifie

$$-\frac{dq}{|dq|}(t) \in N_{F(t,q(t))}q(t) \quad |dq| \text{ p.p.}$$

où pour tout (t,ω) dans $I \times \mathbb{R}$, $F(t,\omega)$ est définie par

$$F(t,\omega) = [a_1(t) - a_2(t)\upsilon_+(\omega), a_1(t) + a_2(t)\upsilon_-(\omega)].$$

Pour q_0 dans $\mathbb{R}$ la fonction à variation bornée q de I dans $\mathbb{R}$ continue repectivement continue à droite est solution du problème quasi-statique si

$$\begin{cases} q(0) = q_0, & \\ q(t) \in F(t,q(t)) & \text{pour tout } t \in I, \\ -\dfrac{dq}{|dq|}(t) \in \operatorname{Proj}_P N_{C(q(t))}R(t) & |dq| \text{ p.p.} \end{cases}$$

Le lemme suivant nous permet de prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème quasi-statique dans différentes situations.

Lemme 15. *Supposons que les fonctions a_1 et a_2 sont continues respectivement continues à droite sur I, alors*

- *l'application $\widetilde{F}_\epsilon$ est continue (resp. s.c.i. à droite),*
- *$h(F(t,\omega), F(t,\varepsilon)) \le k''|\omega - \varepsilon|$, ceci pour tout $t \in [0,T]$, pour tout ω et $\varepsilon \in \mathbb{R}$ avec $k'' = \sup_{t\in I}|a_2(t)| \max(k_1,k_2)$.*

Preuve. Commençons par justifier la deuxième propriété. Pour tout $t \in [0,T]$, pour tout ω et $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$h(F(t,\omega), F(t,\varepsilon)) = |a_2(t)| \max(|\upsilon_+(\omega) - \upsilon_+(\varepsilon)|, |\upsilon_-(\omega) - \upsilon_-(\varepsilon)|) \le K''|\omega - \varepsilon|.$$

Supposons dans le premier cas que a_1 et a_2 sont continues et considérons une suite t_n d'éléments de I convergente vers un t de I, nous avons:

$$h(F(t,\omega), F(t,\varepsilon)) \le |a_1(t) - a_1(t_n)| + M|a_2(t_n) - a_2(t)|.$$

D'où la continuité de $\widetilde{F}_\varepsilon$. Supposons que a_1 et a_2 sont continues à droite. Soient $(t,\varepsilon) \in I \times \mathbb{R}$, V un voisinage de $F(t,\varepsilon)$, $y \in V$ et (t_n) suite convergente vers t, $t_n \geq t$, on pose $z_n = \mathrm{proj}(y, F(t_n,\varepsilon))$

$$|y - z_n| \leq h(F(t_n,\epsilon), F(t,\epsilon)) \leq |a_1(t) - a_1(t_n)| + M|a_2(t_n) - a_2(t)|.$$

D'où la semi-continuité inferieure à droite de $\widetilde{F}_\varepsilon$. □

THÉORÈME 16. *Si dans le problème quasi-statique on suppose que k'' est strictement inferieure à* 1 *et que a_1 et a_2 sont cntinues* (*respectivement continues à droite et il existe un intervalle I_0 de $I(\mathbb{R})$ inclus dans $F(t,\omega)$ pour tout (t,ω) dans $I \times \mathbb{R}$*) *alors pour tout q_0 dans $\mathbb{R}$, le problème quasi-statique admet une solution unique continue* (*respectivement continue à droite*) *à variation bornée admettant q_0 à l'instant $t = 0$.*

PREUVE. Il suffit d'utiliser le lemme [15] et les théorèmes [1] et [7]. □

REMARQUE 17. Si dans le problème quasi-statique on suppose les conditions suivantes:

- La constante k'' est dans $[0,1[$ et l'application a_2 est à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est à dire qu'on n'a pas forcément un contact persistant.
- Les applications a_1 et a_2 sont absolument continues et $[-a_2(t)\upsilon_+(\omega), a_2(t)\upsilon_-(\omega)] \in J(\mathbb{R})$ pour $t \in I$.
- A tout instant t où on n'a pas de contact, $q(t) = a(t)$ et $F(t, q(t)) = a(t)$.

Alors en se servant du Théorème 9 et de la technique utilisée pour démontrer le théorème précédent on peut démontrer facilement que le nouveau problème quasi-statique admet une solution unique absolument continue. Ce résultat est obtenu dans [2, Chapitre 2], mais avec une longue démonstration.

Remerciements. L'auteur remercie le professeur Monteiro D. P. Marques pour les discussions qu'il a eues avec lui.

RÉFÉRENCES

[1] J. P. AUBIN, *Viability Theory*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1991.

[2] M. CHRAIBI KAADOUD, *Etude théorique et numérique de problèmes d'evolution en présence de liaisons unilaterales et de frottement*, Thèse de 3ème Cycle, USTL, Montpellier, 1987.

[3] M. KUNZE ET M. D. P. MONTEIRO MARQUES, *On parabolic quasi-variational inequalities and state-dependent sweeping processe*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **12** (1998), 179–191.

[4] M. D. P. MONTEIRO MARQUES, *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems*, Basel, Boston, Berlin, 1993.

[5] J. J. MOREAU, *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Differential Equations **26** (1977), 346–374.

[6] ______, *Dynamique de systèmes à liaisons unilaterales avec frottement sec éventuel; essais numériques*, Note Technique, vol. 85, L.M.G.M.C., U.S.T.L., Montpellier, 1985, pp. 130.

[7] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton U. P., 1970.

[8] T. L. Saaty et J. Bram, *Non Linear Mathematics*, Mcgraw-Hill, 1964.

[9] L. Schwartz, *Analyse, Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle*, deuxième édition, Hermann, 1970.

[10] M. Valadier, *Quelques Résultats de Base Concernant le Processus de Rafle*, vol. 18, SAC, Montpellier, 1988.

Manuscript received January 24, 2000

Mohamed Chraibi Kaadoud
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département des Mathématiques
Marrakech, MAROC

E-mail address: chraibik@hotmail.com