L'OPERA DI HUGH MACCOLL ALLE ORIGINI DELLE LOGICHE NON-CLASSICHE

FANIA CAVALIERE

Via Giusti, 3
20154 Milano
Italy

Abstract. The Scottish logician Hugh MacColl (1837 – 1909) received his B.A. at the University of London and taught mathematics in Boulogne for most of his life.

MacColl argued that the basic relation in logic is not class inclusion, but implication between propositions, and in two series papers, the first on "The Calculus of Equivalent Statements" published in the late 1870s in *Proceedings of the London Mathematical* Society, the second on "Symbolic Reasoning" published in *Mind* from 1897 to 1906 and collected in *Symbolic Reasoning and Its Applications* [*1906a*], he developed the details for this "pure [propositional] logic". Employing the operators τ, ι, ε, η, and θ to mean *true*, *false*, *certain*, *impossible*, and *variable* respectively, he defined 'p implies q' as 'p and not-q is impossible'. In carrying out this work he was instrumental in developing formal non-classical, particularly modal, logic, and his definition of 'p implies q' anticipated C. I. Lewis's definition of *strict implication*.

AMS (MOS) 1911 subject classifications: 03B45, 03B46; 01A55–01A60; modal logic; entailment.

1. Considerazioni introduttive.

Nel presente articolo prenderemo in considerazione l'indagine logica di H. MacColl cercando di dimostrare come essa scaturisca dall'analisi delle potenzialità espressive del linguaggio, dell'adeguatezza della forma logica della proposizione alla struttura della realtà e all'informazione che si vuole comunicare. (Sulla figura e l'opera di H. MacColl è quasi impossibile trovare letteratura critica. Tra le poche eccezioni devono citare C. Mangione e S. Bozzi [*1993*, 168–171]; e il paragrafo riguardante MacColl a cura di [*1972*]. MacColl (1837 – 1909), scozzese di nascita, si addottora all'Università di Londra e trascorre gran parte sua vita insegnando matematica a

Boulogne. Noi faremo diretto riferimento in queste pagine essenzialmente agli scritti pubblicati dall'Autore a partire dalla fine degli anni ottanta del secolo scorso, dalla serie dei "Symbolic Reasoning", all'unico vero e proprio libro, *Symbolic Logic and Its Applications*, del 1906, fino all'ultimo breve scritto su *Mind*, uscito postumo nel 1910. Oltre a queste opere, è però necessario ricordare almeno la serie dal titolo "The Calculus of Equivalent Statements (Seven Papers and a Note)", in *Proceedings London Mathematical Society* MacColl *1878–98*]. Anche tra i contemporanei la sua opera non fu mai molto considerata e in alcuni casi assolutamente fraintesa. La sua fama è legata principalmente alla polemica con Russell di cui tratteremo in seguito. Accenni corretti, citazioni e riconoscimenti alla sua opera si trovano invece in alcuni scritti di logici americani a lui contemporanei (*cfr.*, ad esempio C. Ladd-Franklin [*1892*, 527] e in C. I. Lewis [*1918*], cui faremo riferimento. Nella premessa storica al suo manuale sulle logiche polivalenti, Rescher [*1969*, 4] definisce MacColl "padre fondatore" delle logiche polivalenti insieme al logico russo N. A. Vasil'ev, per il quale la definizione é, a nostro avviso, altrettanto impropria Tale giudizio, come risulta evidente dalle ricostruzioni che proponiamo del pensiero dell'autore, ci sembra infondato, tanto dal punto di vista teoretico che storico.) La locuzione originale dell'Autore per indicare questa funzione essenziale del linguaggio logico di esprimere informazione, e che si dimostra a nostro avviso centrale nel contesto della ricerca di MacColl, è "to convey information", già utilizzata da Mill nel suo scritto contro Hamilton.

Come gli algebristi della logica, MacColl incentra la sue ricerca sul problema dell'inferenza della dimostrabilità di un certo stato di cose da un altro. Tuttavia, egli ritiene che sia più utile e più generale, e anche più rispondente alle esigenze del linguaggio matematico, ammettere una griglia concettuale di analisi più sottile, che non valuti solo la compatibilità o meno di due stati di cose, ma anche la loro relativa impossibilit\à o necessit\à, o che possa, quando serve, trasformarsi in strumento atto a rendere conto della valutazione del grado di probabilità della conclusione in relazione alle ipotesi. A tal fine, il logico scozzese propone una reforma del linguaggio simbolioc, che lo renda flessible alle molteplici esigenze del dire.

Ne deriva un calcolo in intensione che permette di approfondire nozioni come quelle di dimostrabilità, conseguenza logica, coerenza, ecc., considerandole non semplicemente relazioni contingenti e fattuali valide tra classi di individui attuali o proposizioni considerate estensionalmente, ma relazioni necessarie tra possibili o tra significati. L'intensione di una proposizione è il suo significato, inteso come l'insieme delle proposizioni compatibili con essa; dove "compatibili" significa "compossibili" in qualche stato di cose.

Ciò che MacColl sostiene nel proporre e difendere il suo calcolo è che esso è più generale, più duttile, ha un più vasto raggio di applicazione respetto agli altri sistemi logici. In particolare [MacColl *1903*, 356], questi ultimi

> make no distinction between the *true* and the *certain* between the *false* and the *impossible:* so that, in their system, every *uncertain* pro-

> position is *false*, and every *possible* proposition *true*. In other words, *variable* propositions — propositions that are possible, but uncertain, propositions whose chance of being true is some proper fraction between 0 and 1 — are excluded entirely from their universe. Many of their formulae are *not formal certainties*; they are only valid conditionally, and this defect, if it does not wholly destroy their utility, restricts within comparatively narrow limits their ranges of application.

(Qui e nelle citazioni successive delle opere di MacColl il corsivo è dell'autore, mentre le sottolineature sono nostre.)

In particolare, MacColl dichiare tre motivi principali che l'hanno spinto a creare un linguaggio logico diverso da quello usuale, prendendo in considerazione intensioni. Il primo, è la necessità di render conto del fatto che gli enunciati non sono eterni, nel senso che in momenti di tempo differenti esattamente la stessa espressione può comunicare informazioni con un diverso valore di verità. (Proprio su questo punto, come vedremo meglio in seguito, si incentra la polemica con B. Russell.) Il secondo motivo che l'Autore richiama direttamente è l'esigenza di rispecchiare la relatività della valutazione di un enunciato rispetto ai dati di partenza [MacColl *1906*, 515–516]:

> suppose we have no data but our definitions or symbolic and linguistic conventions. Let A, B, C respectively denote the three statements "7 is greater than 5", "6 is greater than 9", "x^2 is greater than x". Is it not clear that with these meanings of the symbols we may truly and confidently make the three factor compound statement A^{ε}; B^{ν}; C^{θ} [rispettivamentte "A è certo", "B è impossibile", "C è variabile"]? For, by our very definitions of the words certain, impossible, variable, respectively represented by the symbols, is not the first statement A certain, because it follows necessarily from our data, which are here limited to our definitions and linguistic conventions? Is not the second statement$B$ impossible, because it contradicts (or is inconsistent with) our data? And is not the third statement C a variable, because, though perfectly intelligible, it is neither certain nor impossible? To say that C is neither true nor false would be incorrect; for it may be either. It is true when x is greater than 1; it is false when x is not greater than 1.

Il terzo motivo per prendere in considerazione distinzioni intensionali è per MacColl la necessità di rendere conto del linguaggio delle probabilità. È un risultato ormai acquisito dalla teoria della probabilità alla fine dell'Ottocento che affermare che qualcosa è possibile, o può accadere, è equivalente ad asserire che esso è occasionalmente attuale, che ci sono circostanze, per quanto rare, in cui si verifica. Parallelamente, ciò, comporta che si debba distinguere tra qualcosa che è attualmente falso e qualcosa che lo è sempre, cioè è impossibile. MacColl, anzi, comincia ad occuparsi di logica proprio a partire dalle questioni connesse al calcolo delle probabilità, di cui si interessa in una serie di articoli sui *Proceedings of the London Mathematical Society* (la serie si intitola "The Calculus of Equivalent

Statements and Integration Limit". "The above title, scrive MacColl "seems to be the most suitable for an analytical method which I discovered a few months ago, and to which a short introduction was published in the 'Educational Times' for last July, under the name of 'Symbolical Language'. The chief use of the method, as far as I have yet carried it, is to determine the new limits of integration when we change the order of integration in questions relating to probability" [*1877-78a*, 9]), che definisce "one of the most difficult and perplexing parts of mathematics", rispetto al quale "symbolic logic (as already shown in my first paper in the *Proceedings of Mathematical Society*) rendered important assistence" [MacColl *1897c*, 504].

> En comparant les avantages des différentes méthodes, on trouve souvent qu'une méthode *A* résout facilement certains problèmes qu'une autre méthode *B* ne résout pas, ou résout difficilement; tandis que pour d'autres problèmes c'est la méthode *B* qui l'avantage. Mon but a été surtout d'adapter mes méthodes aux problèmes de probabilités et de limites, à cause de l'importance de ces problèmes dans beaucoup de recherches scientifiques. C'est, en effet, à un problème de ce genre qu'est due l'origine de mon système symbolique; et c'est encore dans son appliction à ces espèces de problèmes qu'on peut le mieux en vior l'utilité. [MacColl *1901*, 182–183]

Proprio il calcolo delle probabilità, dunque, dà a MacColl occasione di profonda riflessione logica e filosofica. Da questo punto di vista, il logico scozzese dimostra, come riteniamo risulterà anche dalle prossime pagine, la capacità di correlare risultati più propriamente matematici e questioni squisitamente filosofiche che è un tratto spciffico dei logici più significativi; ciò, anche se il suo pensiero si presenta spesso in forma asistematica e poco lineare (è caratteristico del suo modo di procedere, ad esempio, "gettare" ai colleghi dalle pagine di *Mind* (1900) la seguente, brevissima, questione: "I should be glad to have the opinions of logicians as to whether the implication, *If it is probable that A is certain, it is certain that A is probable*, is always true. My own final opinion (after a preliminary stumble over a treacherous paradox) is that it is not. The implication, of course, always holds good when the word*true* is put for *certain*, for then the antecedent and consequent are equivalent by definition; but from the probability unsubjective point of view, the words *true* and *certain* are not synonymous" [MacColl *1900b*, 144]).

Più in generale, MacColl ritiene che il suo calcolo sia l'unico adatto a dar voce alla nuova logica, la logica simbolica, intesa come struttura astratta, non come solo calcolo, ma come sistema di regole generali con una pluralità di campi di applicazione, di interpretazioni possibili. Essa,

> unlike the venerable logic of the schools, is a progressive science; it can lay claim to no finality or perfection. But, in the form which I have given it, it has now one great merit which never possessed before; it has become a *practical* science; it can actually be applied as an instrument of research. As regards utility, logic used to be contrasted,

> much to its disadvantage, with mathematics; but now that the mathematician is obliged to hand over to the logician the disentanglement of some of his most difficult problems, he can no longer with justice or consistency look down upon the science of the latter and call it useless and inapplicable. [MacColl *1902*, 368]

La logica è il mezzo, non il fine, è uno strumento, e in quanto tale deve essere duttile e capace di adeguarsi di volta in volta alle esigenze di chi se ne serve; non ha senso porre dei limiti, definire in astratto un calcolo logico.

> Let me here say a few words in reply to the logicians who maintain that statements can only be classed as *true* and *false*, and that my introduction of such classes as *certainties, impossibilities*, and *variables*, and of any others that may concern our argument or researches, is wrong or at any rate, outside the proper domain of logic, and especially of symbolic logic. This is very much as if one argued that since animals are only divisible into two classes, males and females, it is no business of true zoology to consider the respective characteristics of such creatures as lions, tigers, and leopards, to say nothing of others still more objectionable. All such attempts to surround symbolic logic by Chinese wall of exclusion are futile. [MacColl *1906*, 515]

Per tutti questi argomenti è necessaria una logica che tratti quelle che MacColl definisce implicazioni del "secondo ordine", implicazioni formali, caratteristiche del ragionamento deduttivo ed astratto, che si applicano a proposizioni e all'informazione che esse comunicano, ossia è necessario "a calculus of Pure Statements", come egli stesso lo definisce. La distinzione tra logica estensionale e intensionale diviene nella terminologia di MacColl una distinzione tra "Applied Logic" e "Pure Logic", rispettivamente [MacColl *1899*, 111–112]:

> in Pure Logic the symbol A^B, or any arbitrary equivalent, asserts that the *statement* A belongs to the class of statements denoted by B. In Applied Logic also the symbol A^B may be used to assert that the concrete and material*thing* denoted by A belongs to the class of concrete and material *things* denoted by B. So far there is symbolic coincidence. But now take the symbol A^{BC}, which is short for $(A^B)^C$ and asserts that the statement A^B belongs to the class of statements denoted by C. Here, from the standpoint of Pure Logic, A is a statement, B is a statement, C is a statement, A^B is a statement, and A^{BC} is a statement, so that we have homogeneity throughout. But we cannot get this homogeneity in Applied Logic. In Applied Logic A and B may both denote concrete things or classes but farther we cannot go. By virtue of our definitions, *must* denote statements, and *cannot possibly denote anything else*. Similarly for A^{BCD} and for statements of still higher degree. Thus, as soon as we pass the limits of *primary* statements and get into statements of the secondary, tertiary, etc., degrees, we enter an abstract region of thought (including many important problems in probability) to which none of the Boolian systems can be applied. Any statement, no matter what its degree, can be spoken of as true or false,

> certain or uncertain, possible or impossible, probable or improbable, within more or less exact limits according to our data; but none of these epithets can be applied to any portion of space or time or to any concrete subject whatever; nor can we find any concrete homogeneous substitutes, so far analogous to these abstractions as to be interpretable in the same formulæ or symbolic operations.

Prima di offrire un panorama degli aspetti a nostro avviso più significativi del "sistema" intensionale e modale di MacColl, bisogna comunque premettere alcune osservazioni generali sul suo simbolismo. Come risulterà piuttosto evidente da quanto segue, infatti, la notazione di MacColl è alquanto ostica; egli utilizza spesso tre o anche quattro forme equivalenti per indicare lo stesso concetto. Ne risulta un'esposizione complessa e in varie occasioni ambigua che sicuramente ha contribuito a rendere problematica la comprensione e la diffusione della sua logica.

Il senso di ambiguità è dovuto principalmente alla strategia, che MacColl adotta in modo esplicito, di cambiare il significato liberamente di simboli noti o già diveresamente utilizzati da lui stesso in altri contesti, semplicemente premettendo una nuova defizione [MacColl *1902*, 364]:

> As regards the introduction of absolutely new symbols, [. . .], I think it should be avoided as much as possible. Generally speaking, it is better to put fresh uses the familiar symbols of old acquaintance than have recourse to strangers. This may be a conservative prejudice on my part, but it is a fact that I have myself introduced no new symbol, though I have freely exercised my right of definition and interpretation as regards some of the symbols and combinations of symbols already in common use among mathematicians. [*1897c*, 505]

In più di un'occasione, tuttavia, egli teorizza, l'efficacia del proprio sistema notazionale, anche in contrapposizione con quello di Peano. Nell'articolo del 1902, afferma [MacColl *1902*, 364]:

> we may (as usually I do) borrow some familiar and, if possible, suggestive symbol (or combination of symbols), divest it of its old meaning, and, by the aid of a fresh definition, supply it with a new. [. . .] No other logician or mathematician, so far as I know, has as yet insisted upon, and acted upon, this principle of absolute liberty to vary not only the meanings of our separate symbols, but also of their combinations or collocations, whenever clearness, brevity, or other convenience demands it. Prof. Peano [. . .] appears to go on the very opposite principle. He holds (if rightly understand him) that each separate idea should be represented by its own special symbol, which we should never, if we can by any possibility avoid it, employ in any other sense.

E conclude [MacColl *1902*, 364]: "For these Prof. Peano's notation is much too complicated."

Bisogna comunque ammettere, a posteriori, che talvolta alla variazione del simbolismo corrisponde non solo un'esigenza, disattesa, di "semplificazione", o di stringatezza, ma anche l'intenzione di sottolineare una diversa sfumatura di significato che un certo termine assume in contesti differenti, o una modificazione concettuale intercorsa nel frattempo. (Bisogna ricordare, d'altra parte, che, per esempio, tra il primo e il secondo articolo della serie dei "Symbolic Reasoning" trascorrono diciassette anni.)

Nel corso dei "Symbolic Reasoning" per esempio, la precisazione notazionale del concetto di implicazione è funzionale ad un'esigenza di maggior rigore espressivo. Nel 1880, MacColl usa il simbolo $A{:}B$ per indicare tanto l'implicazione come relazione tra due termini, nel senso di De Morgan, quanto l'implicazione formale tra asserti; negli interventi successivi, dal 1897, esprime quest'ultima in forma predicativa, utilizzando la notazione esponenziale A^B.

Per rendere più agile la lettura delle prossime pagine, anticipiamo fin d'ora alcuni caratteri principali, tra quelli che compaiono nelle citazioni riportate. In primo luogo, notiamo che egli usa tanto 'a', quanto '$-A$'; e 'A_0' per indicare la classe complemento di A, sebbene questi due simboli possano più spesso significare la negazione della proposizione A. Per la negazione dell'implicazione $a{:}b$ in "Symbolic Reasoning (I)" [MacColl *1880b*] è possibile trovare $(a{:}b)'$, ma anche una notazione speciale, $a\%b$, usata pure in alcuni scritti precedenti (il simbolo % è introdotto per la prima volta da MacColl in [*1877-78b*, 177–186]); in seguito, parallelamente al caso dell'affermazione, si trova anche A^{-B}.

I concetti modali vengono anch'essi per lo più espressi con notazione esponenziale, in funzione predicativa: a^{ε} significa solitamento "a è certo", a^{η}, "a è impossibile", e a^{θ}, "a è variabile", anche se quest'ultima appare anche ad indicare "a è probabile". Gli stessi significati possono essere espressi anche con $a = \varepsilon$, $a = \eta$ e $a = \theta$, rispettivamente. Il caso di "vero" e "falso" è discusso più avanti. La combinazione di negazione e modalità, inoltre, assume nel testo originale dell'Autore svariate configurazioni; nelle parti da noi citate, tuttavia, incontriamo solo quella ottenuta con l'applicazione del "falso", ι, dopo l'occorrenza del predicato modale.

2. La logica pura.

La logica pura di MacColl è una logica intensionale, la cui parte più organicamente formulata in sistema dà luogo ad un calcolo strettamente analogo a quello proposto da C. I. Lewis nel 1918 ([Lewis *1918*]).

Nel 1880, nel primo articolo di "Symbolic Reasoning" MacColl presenta un sistema logico fortemente innovativo, a carettere proposizionale e intensionale, riprendendo e approfondendo la versione già proposta nei *Proceedings of the London Mathematical Society* [MacColl *1880b*, 49]:

> In my system of symbolical reasoning I have found it convenient to make my *temporary* symbols denote *statements*, while *permanent* symbols, such as +, :, usually denote the various relations in which these statements stand with respect to each other. That each individual temporary symbol, as well as every combination of such symbols,

always denotes a statement, is one of the leading characteristics of my logical system.

Alcuni anni più tardi, in una recensione ad un libro di Whitehead, ribadiva [MacColl *1899*, 109]:

> Alone, or nearly so among logicians, I have always held the opinion, and my recent studies have confirmed it, that the simplest and the most effective system of Symbolic Logic is that whose elementary constituent symbols denote æ not classes, not properties, not numbers, ratios, regions, or magnitudes, not*things* of any kind æ but *complete statements*. By a "statement" I mean any sound or symbol, or any combination of sounds or symbols, *employed to convey information.*

Questa impostazione veniva matenuta in *Symbolic Logic and its Applications* publicato da MacColl nel 1906 ("The complete statement or proposition is the real *unit* of all reasoning" [MacColl *1906a*, 2]), tanto che B. Russell [Russell *1906*, 255], recensendo il volume su *Mind* riconosce:

> He is primarily concerned with *implication*, not with *inclusion* his formulae state that one statement implies another, not (directly) that one class is contained in another. The relation of inclusion between classes is for him derivative, being in fact the relation of implication between the statement that a thing belongs to the one class, and the statement that it belongs to the other. He was, I believe, the first to found symbolic logic on propositions and implication, and in this respect he seems to me to have made an important advance upon his predecessors.

In realtà, gli elementi semplici e fondamentali del sistema di MacColl, che egli considera proposizioni a tutti gli effetti, corrispondono comunque a quelle che nel linguaggio di Russell sono funzioni proposizionali. Già nel 1880, infatti, MacColl spiega che:

> Every verbal statement, as we all know, may be divided into two distinct parts, which are technically called *subject* and *predicate*. But if we examine very closely the meanings of these terms, we shall find that the relation in which they stand to each other is strikingly analogous to that connecting the terms *antecedent* and *consequent* in any implication $a{:}b$. Take for example the statement "Man is mortal". Let a denote the statement "He is a man", and let b denote the statement "He is mortal". Then the implication $a{:}b$ is an exact equivalent for the statement "Man is mortal". [*1880b*, 51–52]

Vedremo peraltro come MacColl utilizzi questa impostazione proposizionale per reinterpretare la sillogistica e distingua con chiarezza tra implicazione e struttura ipotetica, che considera di un grado diverso e che riconosce essere vera per qualsiasi valore delle proposizioni che la constituiscono.

La logica proposizionale, o logica pura, coincide, secondo l'Autore, con la logica del ragionamento simbolico, astratto, e costituise il tratto distintivo dei processi mentali umani. Anche il bruto è, infatti, capace di inferire dai singoli eventi concreti A e B l'evento concreto C e persino di communicare ad altri individui della sua specie la sua conoscenza di questi eventi. Solo l'uomo, tuttavia, può

> from two *implicational* premisses $A{:}B$ and $B{:}C$ draw *implicational* conclusion $A{:}C$. That is to say, the brute is capable of the concrete inductive reasoning
>
> $$AB{:}C$$
>
> but not of the abstract, deductive and formal reasoning
>
> $$(A{:}B)(B{:}C){:}(A{:}C).$$
>
> It is evident that the latter is not only more difficult, but also that it is on a higher and totally different plane. In the former, the two premisses and the conclusion are all three *elementary statements*, while the whole reasoning constitutes a*simple implication*. In the latter the two premisses and the conclusion are all three *implications*, while the whole reasoning is an *implication of the second order*, the premisses A and B the former are*precepts* supplied *directly by the senses*; the premisses $A{:}B$ and $B{:}C$ of the latter are *hypothetical concepts of the mind* — concepts which may be true or false (as may also the conclusion), without in the least invalidating the formula.
>
> [...]. No language but the human has as yet reached this propositional stage; and, therefore, no terrestrial animal except man is capable of syllogistic or other abstract reasoning [*1880b*, 51–52]

Questa impostazione del problema ha anche permesso a MacColl di sottrarsi alla confusione, abituale nei manuali di logica del periodo, tra implicazione e struttura ipotetica del sillogismo. Non è corretto, infatti, esprimere Barbara come "Tutti gli A sono B, Tutti i B sono C, *dunque* Tutti gli A sono C":

> the syllogism, or any other argument, thus worded *is not a formal certainty*, it is false, whatever the conclusion may be; and it is also false when the conclusion is false, whatever the premisses may be. Barbara should be worded as follows:"*If* all A is B, and all B is C: *then* all A is C". In this form the syllogism is true whether premisses or conclusion be true or false, and must, therefore, be classed amongst the *formal certainties*. Now a statement is called a formal certainty when it follows necessarily from our formally stated conventions as to the meanings of the words or symbols which express it; and until a language has entered upon the propositional stage those conventions (or definitions) cannot be formally expressed and classified. [*102*, 368]

È peraltro chiaro che MacColl non era interessato ad alcuna interpretazione psicologista del proprio calcolo e che, al contrario, il frequente richiamo al rapporto tra evoluzione della forma linguistica e funzionamento della ragione ha come solo scopo la giustificazione teorica dell'adozione del calcolo delle proposizioni come "the simplest, the most general, and the most easily applicable kind of logic", cui solo "can we correctly give the name of *pure logic*" e che

> unlike all other kinds, has the immense advantage of being independent of the accidental conventions of language. How dependent other systems are on linguistic conventions is shown by the importance they attach to the grammatical distinction between subject and predicate. In pure logic (as I understand it) "*A* struck *B*" and *B* was struck by *A*" are exact equivalents, and any symbol we choose to represent the one may also be employed to represent the other. So in mathematics [*1902*. 352]

La *logica pura* che MacColl delinea vuole, in effetti, essere un calcolo perfettamente astratto e generale delle relazioni logiche:

> pour rendre notre raisonnement parfaitement général, et nos formules universellement applicables, nous devons prendre la classification des différentes espèces de propositions et les rapports entre elles comme le premier but de notre recherche, et appeler se travail la Logique *pure*. Par "proposition", je veux dire tout son ou symbole (ou combinaison de sons ou de symboles) qu'on emploie pour donner quelque information, ou pour se rappeler quelque information déja reçue. Le "Cröa" poussé par un corbeau en sentinelle, pour avertir ses camarades qu'ol vient de voir un homme avec un fusil, est, dans ce sens, une proposition. Le pavillon qui indique la nationalité d'un vaisseau qui passe, est aussi une propositions simples et indivisibles, sans sujet et sans prédicat, furent probablement les sources primitives des langues humaines. Mais, quoi qu'il en soit, il est certain que les propositions, qu'elles souent simples et indivisibles, oucomplexes et divisibles, sont les*unités* sur lesquelles nous basons, et avec lesquelles nous exprimons, tous nos raisonnements. [*1901*, 135–136]

Le proposizioni in questo senso esprimono intensioni, "denote *classifying statements*, referring to some one originally unclassed individual as their common subject" [*1880b*, 60].

3. Proposizioni e funzioni proposizionali: la polemica con B. Russell.

La seconda fondamentale novità del sistema di MacColl, oltre al carattere proposizionale, è che egli definisce 0 e 1 non come "falso" e "vero", ma come "impossibile" et "certo" rispettivamente. Già nel 1880, infatti, l'Autore nota che:

> statements represented by letters or any other arbitrary symbols, which we adopt for the convenience of the moment and to which we attach only*temporary* meaning, are usually statements whose truth or falsehood may be considered an open question, like the statements of witnesses in a court of justice. It is convenient therefore to have an invariable symbol which shall be applicable to any statement whose truth is admitted and unquestioned, and to such a statement only. The conventional symbol used for this purpose is the symbol 1. For a like reason it is convenient to have an invariable symbol to represent any statement whose *falsehood* is admitted and unquestioned. The symbol used for this purpose is 0. [*1880b*, 53]

Nel 1897, MacColl presenta con maggiore ampiezza questo aspetto del suo calcolo, introducendo anche nuovi simboli notazionali. Un calcolo "a due dimensioni," 0 e 1, falso e vero, è adeguato, secondo MacColl, solo al primo livello di complessità del nostro ragionamento simbolico, cioè alla valutazione dell'enunciato che attribuisce un soggetto singolare ad una certa classe, o un certo attributo ad un certo soggetto singolare.

Abbiamo visto che MacColl, invece, considera le proposizioni come formate da una classe di implicazioni base. Egli, cioè, considera le funzioni proposizionali come proposizioni a tutti gli effetti. In questo caso, tuttavia, nella valutazione dobbiamo tener conto del contesto di variabilità in cui ci troviamo. Un asserto come, per esempio, $x = 4$, dove x varia nell'insieme $\{2, 4, 6\}$, non sarebbe sempre vero o sempre falso. Gli enunciati che possono modificare il proprio valore di verità in relazione agli oggetti di cui sono predicati o al tempo di emissione, non sono veri o falsi, né certi o impossibili, sono invece variabili, cioè veri in alcuni casi e falsi in altri. In questo caso, è dunque necessaria una "terza dimensione" di valutazione. ("[...] in dealing with implications of the higher degrees (i.e. implications of implications) a calculus of two dimensions (unity and zero) is too limited, and that for such cases we must adopt a three-divisional classification of our statements [*1897b*, 496].)

Proprio su questo punto essenziale MacColl entra in polemica con Russell, il quale nella recensione già citata gli contesta di non operare due distinzioni: "(1) that between a verbal or symbolic expression and what it means (2) that between a proposition and a propositional function".

Per quanto riguarda la prima, "He distinguishes," scrive Russell [*1906*, 257],

> five classes of statements: true, false, certain, impossible, and variable [...]. A variable is defined as follows (p.19): "When I say '*A* is sometimes true and sometimes false', or '*A* is variable', I merely mean that the symbol, word, or collection of words, denoted by *A*, sometimes represents a truth and sometimes an untruth." As an instance he gives "Mrs. Brown is not at home". Here it is plain that what is variable primarily is the meaning of the form of words. What is expressed by the form of words at any given instant is not itself variable; but at another instant something else, itself equally invariable, is expressed by the same form of words. [...] ordinary language employs, for the sake of convenience, many words whose meaning varies with the

> context or with the time when they are employed; thus statement using such words must be supplemented by further data added before they become unambiguous. It is such forms of words that constitue Mr. MacColl's "variables". But is not this importing into logic the defects of common speech?

Dunque, prosegue Russell [*1906*, 257], "a variable statement is merely one whose meaning is ambiguous".

Per quanto riguarda, invece, la confusione tra proposizione e variabile proposizionale, Russell [*1906*, 257] afferma che quest'ultima non è altro che "a general form into which many propositions fit, namely all those resulting from giving values to *x*". Allora "we shall say that *true* and *false* are alone applicable to propositions, while *certain*, *variable* and *impossible* are applicable to ambiguous forms of words or to propositional functions."

Ma in realà MacColl non è vittima della confusione che Russell gli attribuisce. Semplicemente, anche in questo caso vi è un problema di diversa valutazione della natura e del significato della proposizione.

Una forma proposizionale, infatti, diviene proposizione nel senso di Russell quando è relativizzata all'universo attuale e ai suoi individui, perdendo così ogni ambiguità; questa per MacColl è invece una proposizione elementare, un'implicazione del primo ordine, concerne le cose; di questo tipo sono le proposizioni singolari o quantificate, esistenzialmente o universalmente, che hanno tra loro tutte lo stesso *status* per MacColl: sono stringhe di disguiunzioni o congiunzioni, vere o false.

Per il logico scozzese, invece, le proposizioni vanno considerate dal punto di vista del loro contenuto, dell'informazione che ese comunicano, "*any sound or symbol* (or collection of sounds or symbols) *employed to give* information" [MacColl, *1902*, 35], e in questo senso esse sono relative ad un contesto o al tempo di emissione, ai dati di partenza. La logica formale è tale perché parla di simboli che passano un'informazione, il calcolo di MacColl concerne la relazione di tale contenuto con i contesti di valutazione, non riguarda cose, né asserti sulle cose, ma asserti sulle proposizioni.

Gli operatori modali nel calcolo dell'implicazione stretta di MacColl, applicati a funzioni proposizionali, "predicano" (e di qui anche il senso del simbolismo adottato in questo caso da MacColl) la relazione che vi è tra un contenuto informativo e l'insieme dei contesti in cui è valutabile. In particolare, in tal modo la logica di MacColl può occuparsi anche di enunciati eterni, di regole necessarie, quali per esempio le leggi matematiche, che, tuttavia, sono tali non perché indipendenti da qualsiasi relativizzazione ad un contesto, ma in quanto in ogni contesto, attuale o possibile, sono proposizioni vere. Come scrive alcuni anni più tardi C. I. Lewis, con una chiarezza concettuale ed espositiva indubbiamente superiore a quella di MacColl,

> "It is impossible that '*x* is a man but not mortal'" is a proposition although it contains a variable. So is "Nothing can be both *A* and not-*A*", which predicates the impossibility of "*x* is *A* and*x* is not-*A*". It

> would be an error to suppose that *all* the propositions which contain variables are such because they involve the idea of impossibility, or necessity, but the most notable examples, the laws of mathematics, are propositions, and not propositional functions, for precisely this reason. When stated in the accurate hypothetical form — i.e., as implications of certain — they are necessary truths. [Lewis, *1918*, 320]

Gli asserti variabili nel sistema di MacColl sono quelli che non sono né certi, né impossibili, ma possono indifferentemente comunicare informazioni false o vere a seconda delle circostanze. In risposta alle critiche di Russell, MacColl, ribadendo la peculiarità del proprio concetto di proposizione, scrive [*1906*, 515]:

> Another argument against my system is that *variable* statements, statements which are sometimes true and sometimes false, have no real existence; that statement if once true is true always, and if once false is false always. But surely this is a mere play upon words, and it does not seem to me very accurate even as that. A servant, in reply to an inquiry at the street door in the morning, says, and says truly, that "Mrs. Brown is not at home". That same servant, *in reply to the same inquiry* in the afternoon, says again, and this time, in obedience to instructions, says falsely, that "Mrs. Brown is not at home". She makes exactly the same statement as in the morning, because *she uses exactly the same form of words*; but this statement, this form of words, which was true in the morning, because in the morning *it conveyed true information*, is false in the afternoon, because in the afternoon *it conveyed false information.*

4. L'implicazione nel sistema di MacColl.

Abbiamo già più volte sottolineato le analogie tra la logica di MacColl e quella di C. I. Lewis. Quello esposto nei "Symbolic Reasoning" è in realtà un calcolo che nei suoi aspetti sostanziali, traducendo "certo" con "necessario" e definendo "a^θ" (a è variabile) come $a\sim^{\varepsilon}a\sim^{\eta}$ (a non è certo e a non è impossibile), approssima fortemente i sistemi della implicazione stretta di Lewis [cfr. a questo proposito lo stesso Lewis [*1918*, 108 e 29], e in particolare *S3*).

In effetti, l'implicazione (:) di MacColl [*1880b*, 51; *cfr. 1897*, 495, *1900a*, 81] è un'implicazione stretta: "Def. 3. – The symbol :, which may be read "implies", asserts that the statement following it must be true, provided the statement preceeding it be true".

Ancora più chiaramente, poche pagine dopo, spiega il motivo per cui nel suo sistema non vale l'equivalenza $(a{:}b) = a' + b$:

> The formula $(a{:}b) = a' + b$ deserves some consideration. Let a denote the statement "He will persist in his extravagance", and let b denote the statement "He will be ruined". Then the implication $a{:}b$ may be read "If he persists in his extravagance he will be ruined", while the disjunctive

statement $a'+b$ may be read "He will either discontinue his extravagance, or he will be ruined". To some readers these two statements may seem logically equivalent, so that they should be connected by =, the symbol of equivalence, and not by :, the symbol of inference or implication. We will therefore subject the statements to a closer analysis. If they are really equivalent, their denials will also be equivalent. Let us see if this is the case. The denial of $a{:}b$ is $(a{:}b)'$, and this denial may be read "He may persist in his extravagance without necessarily being ruined".

The denial of $a' + b$ is $(a' + b)'$ or ab', which may be read "He will persist in his extravagance, and he will not be ruined". Now it is quite evident that the second denial is a much stronger and more positive statement than the first.

The first only asserts the *possibility* of the combination ab'; the second asserts the *certainty* of the same combination. The denials of the statements $a{:}b$ and $a' + b$ having thus been proved to be not equivalent, it follows that the statements $a{:}b$ and $a' + b$ are themselves not equivalent, and that, though $a'{:}b$ is a necessary consequence of $a{:}b$, yet $a{:}b$ is not a necessary consequence of $a' + b$. [*1880b*, 54]

Come si è detto, MacColl definisce 0 e 1 come "impossibile" e "certo" rispettivamente, nel suo sistema, dunque, le due formule valide $a{:}1 = 1$ e $0{:}a = 1$ non rappresentano i cosiddetti paradossi dell'implicazione materiale, ma quelli dell'implicazione stretta, che per l'Autore non sono realmente veri paradossi:

Symbolic Logic too has its paradoxes, that is to say, formulae which appear paradoxical till they are explained, and then cease to be paradoxes. Such is the formula $\eta{:}\varepsilon$, which asserts that "an impossibility implies a certainty". As soon as we define the implication $A{:}B$, by which we symbolise the statement that "A implies B", to mean simply $(AB')^{\eta}$, which asserts that the affirmation A coupled with the denial B' contradicts our data or definitions, the paradox vanishes. For then $\eta{:}\varepsilon$ is seen simply mean $\eta{:}\varepsilon^{\varepsilon}$, which is a clear truism. [*1906*, 513]

Tuttavia, nel suo *paper* del 1897, propone di adottare anche un ulteriore senso di "implicazione causale", che indica appunto una connessione causale tra i fattori dell'implicazione. Essa è definita come una normale implicazione stretta, nella quale tuttavia il conseguente non puo' mai essere certo. Il senso è che "A implica strettamente B", e B non è sempre vero quando A non è vero.

Nel 1903, inoltre, introduce l'implicazione materiale e dimostra che il sistema classico è incluso nel suo. Riguardo alle formule valide, scrive infatti MacColl [*1903*, 360–361], other systems are implied in mine; while mine, on the other hand, can work out problems and evolve new and fruitful ideas which their systems are inable to express. First, as regards their logic of propositions. In my sixth paper on the "Calculus of Equivalent Statements", in the *Proceedings of the Mathematical Society* I use a symbol dx in the following sense. When x denotes a statement A^{ε}, then dx denotes A. Hence, when x denotes a statement A^{η}, dx must denote A', for A^{η} is synonymous with A^{ε}. Also, when x denotes $A:B$, dx must denote their statement $A®B$; for $A:B$ means $(A + B)^{\varepsilon}$, and $A®B$ means $(A' + B)$. Thus my symbol $d(A:B)$ corresponds to their $A®B$; and my symbol $A:B$ *would* correspond to their symbol $(A®B)^{\varepsilon}$ if they adopted my notation of exponents with my signification of the symbol ε. On this understanding all the valid formulæ of their logic of propositions would be transferred from their systems into mine. Also, on the understanding that all *variable* propositions should be left out of account, my A^{ε} would be equivalent to my (and to theirs) A; my A^{η} to my A' and to the corresponding symbol in their notation; and my symbol A:B to their symbol $A®B$; while my interpretation of the symbol = would then be the same of theirs. But this arbitrary and unnecessary restriction of our universe of admissible statements would rob logic of nearly all its utility, whether as a practical instrument of scientific research (as in my *Calculus of Limits*), or as an educational instrument of mental training and culture.

[...]. It remains to show that my system also includes all valid formulæ of their logic of *class inclusion*. Their symbol $A®B$ asserts that every individual of the class A belongs also to the class B. This may be expressed by my symbol $A:B$ on the understanding that the two statements A and B *have the same subject* P, an individual taken at random out of our universe, P_1, P_2, P_3, etc. $A:B$ becomes a mere abbreviation for $P^A:P^B$, which asserts that P cannot belong to the class A without also belonging to the class B, an assertion equivalent to the traditional *All A is B* and to their statement $A®B$ [*1903*, 360–361]

Questa citazione di MacColl è interessante anche perché in essa viene ribadito il suo concetto di logica come sistema astratto, migliore perché più ricco, capace di contenere in sé gli altri calcoli e di "esprimere" anche concetti, "new and fruitful", che questi calcoli non possono rendere.

5. Le relazioni semantiche.

Il calcolo di MacColl è dunque un calcolo intensionale, nel quale, come si è accennato, vengono distinti più valori di verità, nel senso che ogni proposizione deve appartenere ad almeno una tra più possibili classi di proposizioni. In questo senso, MacColl anticipa di fatto il concetto di Lewis della logica come sistema di leggi, nella quale il punto di partenza è la scelta di una classificazione delle proposizioni, tra le molte possibili; una stipulazione a priori, non l'unica valida, a partire dalle quale è possibile enucleare un insieme di leggi tautologiche rispetto alla nostra assunzione di partenza. Esiste, quindi, per MacColl, ed è espressamente teo rizzata, la possibilità di una pluralità di logiche alternative, di volta in volta adeguate al contesto di indagine, all'approccio teoretico a tale contesto e al sistema di classificazione che, conseguentemente, viene adottato.

Spiegando le differenze tra i sistemi usuali e il proprio, nel *V* dei "Symbolic Reasoning" (1903), MacColl scrive:

> They divide propositions into two classes, and two only, true and false. I divide propositions not only into true and false but into various other classes according to the necessities of the problem treated; as, for examples, into *certain*, *impossible*, *variable*; or into *know to be true*, *know to be false*, *neither know to be true, nor know to be false*; or into *formal certainties*, formal *impossibilities*, *formal variables* (i.e., those which are *neither*); or into *probable*, *improbable*, *even* (i.e., with *chance even*); and so on *ad libitum* [*1903*, 356

MacColl non esprime, dunque, in modo univoco e lineare una classificazione definitiva delle proposizioni. Al contrario, coerentemente con la sua concezione della logica come strumento tanto più efficace e utile all'indagine, quanto più duttile e in grado a rapportarsi all'oggetto cui si applica, l'Autore offre uno schema di calcoli, una sorta di metalinguaggio adatto ad una pluralità (*ad libitum*, dice l'Autore) di specificazioni.

Ciò rende naturalmente più complesso il compito di chi voglia recensire adeguatamente la posizione del logico scozzese. In linea di massima, tuttavia, nell'interpretazione privilegiata, è possibile distinguere cinque classi di proposizioni: certe, vere, variabili, false, impossibili, che non sono mutuamente esclusive; infatti, l'appartenenza di una proposizione alla classe degli enunciati variabili è data nei termini del suo essere talvolta vera e talaltra falsa. Una proposizione, dunque, *sulla base delle ipotesi date*, può essere *certa*, *impossibile* o *variable* (nel caso sia talvolta vera e talvolta falsa):

> We have often to consider not merely whether a statement is true or false, but whether it is a *certainty*, like 2 + 3 = 5, an *impossibility*, like 2 + 3 = 8; or a *variable* (neither always true not always false), like x = 4. To illustrate the meaning of a *variable* statement, we may suppose x in the last statement to be taken at random out of three possible and equally probable values 2, 4, 6. If this experiment be repeated often enough, the statement ($x = 4$) will be sometimes true and sometimes false; its chance of being true will, in fact, be one-third. [*1897c*, 496]

(E poco oltre: "This necessity for a three-divisional classification of statements naturally suggested the adoption of some corresponding modification in notation; so I chose the symbol ε (as in my *fourth* paper in the *Proceedings of the Mathematical Society*) to replace *unity* as the symbol of *certainty*, η (instead of zero) as the symbol for an *impossibility*, and θ as a suitable symbol to denote a statement which is neither a *certainty* nor an *impossibility*, whose chance of being true is neither *unity* nor *zero*, and which, therefore, may fitly be called a *variable*. For distinguishing these three classes of statements the notation of indices is most convenient. The three equational symbols ($\alpha = \varepsilon$), ($\beta = \eta$), and ($\gamma = \theta$) will very well express that α is a *certainty*, β is an *impossibility*, and γ a *variable*; but in complicated cases [...] still simpler symbol were desirable. I therefore chose indices to denote *classes* of statements, so that, for example, the symbol α^u asserts that *the statement a belongs to the class of statements denoted by the symbol u*. On this interpretation, the three symbols α^ε, β^η, γ^θ respectively assert that α is a certainty, β an *impossibility*, andγ a *variable*, and therefore synonimous with the three longer symbols ($\alpha = \varepsilon$), ($\beta = \eta$) and ($\gamma = \theta$)". Sul problema della scelta del simbolismo in MacColl, abbiamo già discusso nel paragrafo introduttivo.)

Le ipotesi di partenza, possono anche semplicemente essere quelle del calcolo, senza ulteriori specificazioni. In questo caso, "certo" e "analitico" finiscono per sovrapporsi; ma per MacColl i due concetti non coincidono necessariamente: un enunciato può essere "certo" sulla base dei dati di partenza, senza per questo essere analiticamente vero.

La semantica del sistema di MacColl è nelle sue linee essenziali analoga a quella di Lewis: bivalente, ma non vero-funzionale. Un enunciato vero a partire da un certo stato di cose (mi riferisco all'interpretazione in termini di probabilità, che è quella da cui la ricerca di MacColl he avuto origine) può di fatto risultare falso quando mutano i dati di partenza, essere dunque sia variabile che certo; un enunciato falso può risultare variabile o impossibile quando si prendano in considerazione stati di cose diversi dall'attuale. Come accennato, questa analogia viene riconosciuta anche da Lewis, in *A Survey of Symbolic Logic:* "the fundamental ideas of the system are similar to those of MacColl's *Symbolic Logic and its Applications*"; anche se MacColl "uses a single symbol for –~*p*", "*p* is possibly true" and –~–*p*, "*p* is possibly false" [Lewis *1918*, 292]. (Lewis definisce "–*p*" "*p* è falso", "~*p*" "*p* è impossibile", "–~*p*" "*p* è possibile" (nel senso di "è falso che *p* è impossibile") e "~–*p*" "*p* è necessario" (nel senso di "è impossibile che *p* sia falso").

Il "vero" (τ) e il "falso" (ι), sono poco oltre definiti rispetti vamente come "non necessariamente certo" e "non nessariamente impossibile": "puttingτ for a *true* statement (not necessarily a *certainty* andι for a *false* statement (not necessarily *impossibility*) a^τ will assert that a is true, and a^ι that a is false" [MacColl *1897c*, 49]. Sembra quindi di poter in linea di massima distinguere tre classi principali di enunciati: "certi", nel senso di "necessariamente veri", "impossibili" nel senso di "necessariamente veri", "impossibili" nel senso di "necessariamente falsi" e variabili, nel senso di "non necessariamente certi", e "non necessariamente impossibili". Un enunciato perfettamente intellegibile è dunque "variabile" quando non è né impossibile, ma non perché non è né vero né falso, bensì "for it may be either":

> whatever be the degree of A, and however complex the relations of its constituents, the conclusion A^{θ} (that A is a variable) is perfectly consistent with the statement A^{τ} (that A is true), and also perfectly consistent with the statement A^{ι} (that A is false); but it is not consistent with A^{ε} (that A is a certain), nor yet with A^{η} (that A is impossibible). [*1906*, 516]

Sembra, dunque, di poter evincere che, in relazione a questa classificazione delle proposizioni, valgano per MacColl le seguenti relazioni semantiche:

$$(A^{\varepsilon} + A^{\theta} + A^{\eta})^{\varepsilon},$$

$$A^{\varepsilon\iota}A^{\theta\iota} = A^{\eta}, A^{\varepsilon\iota}A^{\eta\,\iota} = A^{\theta} \text{ e } A^{\theta\iota}A^{\eta\iota} = A^{\varepsilon},$$

$$A^{\tau\theta} = A^{\iota\theta}.$$

Questa impostazione viene confermata da uno dei passi di MacColl più espliciti argomento:

> Thus we get the four modals of the traditional logic. For A^{ε} asserts that A is *necessarily* true; i.e., the supposition of its falsehood is inconsistent with our data.
>
> $AA^{\varepsilon\iota}$ asserts that A is true *in a particular case*, but uncertain *as a general law*. That is, it might, *without contradicting our data,* turn out false.
>
> $A^{\iota}A^{\iota\eta}$ asserts that A is false *in a particular case*, but possible *as a general law*. That is, it might, *without contradicting our data* turn out true.
>
> A^{η} asserts that A is *necessarily* false; i.e., the supposition of its truth is inconsistent with our data [*1900a*, 80]

Come si è visto, dunque, MacColl introduce nel suo sistema con due simboli appositi il falso e il vero e, soprattutto negli ultimi *paper* e nel libro del 1906, è piuttosto esplicito nel distinguerli dall'enunciato cui si riferiscono e dalla sua negazione. Mentre ancora nel secondo "Symbolic Reasoning" (1897), infatti, A^{τ} è assimilata ad A e A^{ι} alla negazione standard (che individua la classe complemento di A, e può essere espressa anche con $-A$ o con A_0, nel 1906, l'Autore scrive [*1906*, 514]:

> The statements A and A (like A^{B} and its denial A^{-B}) are *of the same degree*, whereas A^{x} (whether x stands for τ or ι or ε or η or θ, or any other class of statements) is *one degree higher*, and may therefore be called *the revision of the judgement* A. Two contradictory judgments, A and $-A$, are placed before us, and we have to decide which is true. If we decide in favour of the affirmative A, we say that "A is true" and write A^{τ}; if we decide in favour of the negative, $-A$, we say that "A is false" and

> write A^{ι}. But the question to be decided may be not merely to decide whether A is true or false, but whether A follows necessarily from, or is inconsistent with, our definitions or admitted and unquestioned data. In that case we write A^{ε} when we decide that A does follow necessarily from our data; we write A^{η} when we decide that A is inconsistent with our data. Similarly, A^{xy}, or its synonym $(A^{x})^{y}$, is a revision of the judgement A^{x}; and so on. [...]. The statements A and A_x are of the same degree; the statement $A = x$ is of a degree higher. The statement A^{xyz}, since it may means $(A^{xy})^{z}$, is of the *first* degree as regards its subject A^{xy}; but since it also means $(A^{x})^{yz}$, it is of the *second* degree as regards A^{x}, and of the *third* degree for regards the *root-statement* A.

Vengono in questo senso distinte operazioni sintattiche e semantiche, asserzioni che riguardano i fatti descriti dalle proposizioni e asserzioni in merito alle proposizioni stesse e alle classi di proposizioni, riconoscendo l'ammissibilità di un numero potenzialmente infinito di gradi del giudizio. Ogni predicazione modale che si aggiunge di applica al giudizio precedente e lo classifica. Ciò corrisponde nei sistemi di Lewis alla presenza di modalità irriducibili.

Si può forse affermare che l'interesse preferenziale che ha indirizzato MacColl nelle sue scelte logiche sia rappresentato dalla teoria delle probabilità, che infatti fornisce il principale terreno di riferimento della logica che l'Autore approfondisce maggiormente, a tre (cinque, se si considerano vero e falso separatamente) dimensioni (l'espressione è di MacColl stesso). Il problema che spesso l'Autore pone riguarda infatti la probabilità che un certo enunciato sia vero in relazione a tutte le ipotesi possibili date. In quest'ambito, a^{ε}, a^{η}, e a^{θ} asseriscono rispettivamente "that the chance of a being true is *unity*, that it is *zero*, that it is *less than unity and greater than zero*. On this understanding, the symbol $a{:}b$, being synonymous with $(a \wedge b')^{\eta}$, asserts that the chance of the truth of the compound statement that affirms a while denying b is *zero*" [MacColl *1897c*, 508].

In qualche occasione, definisce anche "probabile" come la classe degli enunciati la cui probabilità è maggiore di un mezzo e minore di uno. [MaColl *1900a*, 83–84].

Tuttavia, come si è accennato, sono possibili per MacColl infinite classificazioni differenti, e dunque, coerentemente, anche infinite dimensioni di classificazione differenti. In particolare, in contesti diversi, può essere necessaria una logica a più di tre dimensioni: 3^3 dimensioni avrebbe, ad esempio, un calcolo che tenesse in considerazione, oltre alla oggettiva certezza, variabilità o impossibilità di un enunciato, la soggettiva competenza del soggeto conoscente su tale enunciato, che può sapere essere vero, sapere essere falso, non conoscere con certezza. E ancora,

> another three-divisional scheme would be the following: we might agree to $f^{a}(x, y)$ assert that the formula $f(x, y)$ is true for *all* values of x

> and y; $f^n(x, y)$ that is true for *no* values of x and y; and $f^s(x, y)$ that it is true for *some* value or values of x or y, or both, but not all. These three schemes might, in like manner, be united into a twenty-seven-divisional scheme of symbolic logic; and so on *ad libitum*. It is evident that a logic of 3^n dimensions, constructed on these lines, though complicated for high values of n, would be founded upon, and give results in accordance with, the daily and ordinary facts of our consciousness and experience. [*1897*c, 510]

6. La ricostruzione della sillogistica e l'universo del discorso.

Sulla base della sua logica proposizionale MacColl ricostruisce la sillogistica aristotelica, definendo le relazioni sillogistiche, fino a quel momento interpretate sempre in termini di inclusioni tra classi, come implicazioni e riuscendo a rappresentare l'intera serie di 19 sillogismi validi mediante le seguenti 4 implicazioni standard:

$$(a{:}b)(b{:}c){:}(a{:}c)\ \ldots\ (1)$$

$$(a{:}b)(b{:}c){:}(a\%c')\ \ldots\ (2)$$

$$(a{:}b)(a\%c){:}(b\%c)\ \ldots\ (3)$$

$$(a{:}b)(a{:}c){:}(b\%c')\ \ldots\ (4),$$

(come abbiamo già ricordato nel paragrafo introduttivo, il simbolo % è introdotto da MacColl come dell'implicazione stretta) dove in (2) e (4) a è (4) a è un enunciato coerente. In questo contesto, "All Y is Z è simbolizzato con ($y{:}z$), in cui x denota l'asserto che un certo individuo appartiene alla classe X,y che un certo individuo appartiene alla classe Y e "the number of individuals belonging to any class may be known or unknown, constant or varying, finite or infinite" [*1880b*, 57].

Inoltre, "Alcuni X sono Y" è espresso attraverso la non-implicazione "$x\%y'$", che asserisce che x e y sono tra loro coerenti.

MacColl giustifica la sue attenzione verso la formalizzazione e razionalizzazione della sillogistica aristotelica richiamandosi all'importanza e al ruolo assolutamente peculiare che questa ha avuto storicamente per lo sviluppo della logica, pur riconoscendo come vi siano altri e più importanti campi di applicazione della disciplina. (Malgrado si occupi a lungo nei suoi *paper* su *Mind* della traduzione della sillogistica, MacColl sottolinea come questo non sia l'unico e nemmeno il principale campo di applicazione della sua logica:

> Quite recently I have myself shown in my papers on "Symbolical Language" published in the "Educational Times", and much more fully in the first of my three papers on the *Calculus of Equivalent Statements*, published in the "Proceedings of the London Mathematical

> Society", that by the help of logic (treated symbolically) we may clear away with the greatest ease a complete jungle of difficulties which had vexatiously arrested the progress of mathematical science in a direction in which its cultivators were most eager to advance it. This jungle of difficulties presented itself in that part of the Integral Calculus which treats of the limits of multiple integrals, a subject which had occupied the attention of the most eminent mathematicians for the last fifty years or more, and which they had found extremely perplexing. In *the Calculus of Equivalent Statements* (as I have called my symbolical invention) logic presents the mathematicians with an instrument at whose all these difficulties vanish. (*cfr.* [*1889b*, 49])

E ancora, un ambito di applicazione della logica molto più importance della sillogistica "is the great and ever recurring problem of physical science — how to discover the general laws which regulate the various phenomena of the material universe. How logical symbolism may be systematically and advantageously employed even in those difficult researches and in cases quite beyond the reach of the ordinary mathematical symbolism has been briefly indicted in my third paper, published in the Proceedings of the Mathematical Society". Tuttavia, il fatto che "no part of logic has received so much attention and given rise to so much discussion as the syllogisms of Aristotle" (*id.* [*1899*, 108–109]) lo ha indotto a utilizzare proprio la sillogistica per illustrare l'applicazione del suo metodo simbolico.) Tuttavia la sua insistenza sul tema si giustifica anche per il fatto che la sillogistica si configura come un sistema deduttivo compiuto e strutturato, in grado si fornire un termine di paragone per le possibilità deductive di un sistema logico.

La principale difficoltà delle ricostruzioni della sillogistica aristotelica deriva dal fatto che mentre le proposizioni della logica sillogistica riguardano relazioni intensionali, l'interpretazione in termini di inclusioni tra classi permette solo la rappresentazione di relazioni estensionali. In particolare, alcuni problemi emergono nella trattazione della classe vuota, che nell'algebra della logica, in quanto classe che non ha elementi, risulta inclusa in ogni altra classe. Ciò, in realtà, invece, rende false le usuali relazioni sillogistiche tra giudizi stabilite dal quadrato degli opposti. In generale, le relazioni tradizionali del quadrato delle opposizioni valgono in algebra, quindi sul piano puramente estensionale, quando il soggetto delle quattro proposizioni denota una classe che ha membri. Quando il soggetto denota una classe nulla, vale solo la relazione tra contraddittori.

La strategia più usuale per affrontare questa difficoltà consiste nel restringere la validità delle proposizioni particolari, interpretate come relazioni estensionali tra classi non vuote, e accettare di conseguenza alcune modifiche delle relazioni tradizionalmente considerate vere tra I quattro giudizi della sillogistica aristotelica. (I prolemi che sorgono in relazione all'importo esistenziale delle proposizioni particolari sono stati notati in primo luogo da Venn, che, come risulta da *cit.*, p. 56, nota 1, ha suggerito a MacColl di tenerne conto nella sua ricostruzione della sillogistica. Nella sillogistica tradizionale, infatti, le proposizioni particolari erano considerate conseguenze delle corrispondenti universali e, quindi, contraddittorie rispetto alle universali di segno opposto. Ma, evidentemente, quest'ultima condizione imponeva che le proposizioni particolari fossero *false* nel caso in cui il soggetto fosse una classe che non ha membri. Infatti, se "Alcuni a sono b" fosse vera quando $a = 0$ (a parte l'evidente contraddizione con l'uso linguistico), non sarebbe più in contraddizione con "Nessun a è b" (Nessun a è b" può essere letta come $ab = 0$ e "Alcuni a sono b", con $a = 0$, come $ab = 0$). La soluzione generalmente accettata è quella di rinunciare alla derivabilitá delle proposizioni particolari dalle corrispondenti universali, cioè ad una delle relazioni tradizionalmente accettate del quadrato degli opposti, se non quando sia espressamente esclusa la possibilitá che il soggetto sia una classe vuota. Peraltro, il rapporto di subalternitá è solo uno dei tradizionali rapporti sillogistici che non tiene più sul piano algebrico.)

Si può ritenere che proprio l'impegno nella soluzione delle difficoltà legate all'espressione dei nessi sillogistici nel suo sistema abbia condotto MacColl a ripensare e approfondire la questione dell'universo del discorso, a partire dal quarto dei suoi "Symbolic Reasoning". Ciò che interessa al logico inglese è l'espressione corretta del legame inferenziale che egli ritiene riguardi significati, intensioni, non oggetti e valori di verità. A tal fine, MacColl ritiene che le variabili del suo sistema debbano variare tra tutti gli individui concepibili, non solo tra gli attuali. Ciò che risulta è un universo del discorso privo di classi vuote, nel quale è possibile distinguere gli individui attualmente inesistenti dai contraddittori.

Allora, se un individuo è inteso variare nel dominio tra gli *attuali*, abbiamo una relazione di implicazione tra estensioni, che significa semplicemente "La classe delle cose delle quali è vero A è contenuta nella classe delle cose per le quali è vero B" (anche se MacColl non adotta tra i suoi simboli esplicitamente i quantificatori, descrive la relazione esten-sionale "tutti gli A sono B" mediante la somma $A_1{}^B A_2{}^B \ldots A_n{}^B$). Val la pena di notare a questo proposito che le classi in gioco in questo caso sono piuttosto le "collezioni" di cui parla Russell nei *Principles* (*cfr.* [Russell *1903*; *1983*, 125 e seguenti]), ossia, classi definite estensionalmente dall'enumerazione dei termini che le compongono e, quindi, necessariamente finite.

Invece, se l'individuo varia sulla classe dei possibili, A^B (o analogamente $a{:}b$) significa invece "è impossibile che A sia vero e B falso". Le relazioni sillogistiche sono intese da MacColl in questo secondo senso. La proposizione sillogistica tradizionale ("Tutti gli A sono B") non è quindi interpretata come una proposizione quantificata universalmente, ma come $A^{B\varepsilon}$: la proposizione che afferma l'implicazione tra A e B è certa, è una regola; i due ambiti sono chiaramente distinti dall'Autore:

> let $A =$ animal, and let $B =$ brown; also let n be the total number of animals under consideration. Then the symbol $A_1{}^B, A_2{}^B \ldots A_n{}^B$ asserts that A_1 is brown, that A_2 is brown, etc.; that is to say, it asserts that *All the animals of our limited universe are brown.* The symbol $A_1{}^B + A_2{}^B + A_3{}^B + \ldots + A_n{}^B$ asserts that A_1 is brown, that A_2 is brown, etc.; that is to

say, it asserts on the other hand, asserts that *one at least* of the animals (either symbol A_1 or A_2 or A_3, etc.) is brown.

Let A_1, A_2, A_3, etc., be the individuals forming a class A; and let B_1, B_2, B_3, etc., be the individuals forming a class B. Out of the series A_1, A_2, etc., let an individual A be taken at random. The symbol A^B, on this hypothesis, asserts that A is also one of the individuals in the series B_1, B_2, etc. Hence, $A^{B\varepsilon}$, which is an abbreviation for $(A^B)^\varepsilon$, asserts that the statement A^B is a *certainty* (ε). Thus $A^{B\varepsilon}$ may be considered synonymous with the traditional "All A is B", or "Every A is a B". Similarly, $A^{B\eta}$, which asserts that A^B is *impossible* (η), is equivalent to the "No A is B" of the traditional logic; $A^{\beta\eta\iota}$ denies this, and asserts that "*Some* A is B". In like manner, $A^{B\varepsilon\iota}$ denies $A^{B\varepsilon}$ (that every A is B), and asserts that "Some A is not B". The symbol $A^{B\theta}$ is equivalent to the combination $A^{B\eta\iota}A^{B\varepsilon\iota}$, and asserts that A^B is possible but uncertain; that is, it asserts that one at least is B, but that every A is not B. [MacColl *1902*, 353]

Dal punto di vista filosofico, MacColl rende questa impostazione piuttosto comprensibile e naturale utilizzando il concetto di "universo simbolico", che contiene indifferentemente realtà, irrealtà e contraddizioni: la non-esistenza di un oggetto sul piano reale, non implica la sua non-esistenza sul piano simbolico. Tutto ciò che può essere concepito, che ha un senso, anche se non ha un riferimento (lo stesso oggetto complemento dell'universo simbolico è nell'universo stesso) [MacColl *1905*, 75–76], ne fa necessariamente parte.

Denotiamo come e_1, e_2, e_3, ecc. (fino a qualsiani numero di individui menzionati nel nostro argomento o indagine) il nostro universo di *esistenze reali*. Denotiamo con 0_1, 0_2, 0_3, ecc. il nostro universo di *non-esistestenti*, ovvero di irrealtà, come *centauri*, *nettare*, *ambrosia*, *fate*, con auto-contraddizioni come *quadrati rotondi*, *circoli quadrati*, *sfere piane*, ecc., comprendendovi, temo, la geometria non-Euclidea a quattro dimensioni e le altre geometrie iperspaziali. Infine S_1, S_2, S_3, ecc. denotano il nostro *Universo Symbolico*, o "Universo del Discorso", composto di tutte le cose reali o irreali che sono nominate o espresse da parole o da altri simboli nel nostro argomento o indagine. Conquesta definizione ammettiamo che il nostro Universo simbolico (o "Universo del Discourso") consiste nel nostro universo delle realtà e_1, e_2, e_3, ecc., insieme con il nostro universo di irrealtà, 0_1, 0_2, 0_3, ecc., *quando questi entrano ambedue nel nostro argomento.*

E, poco oltre,

Possiamo riassumere brevemente come segue: in primo luogo, quando ogni simbolo A denota un individuo, allora ogni enunciato intelligibile $\phi(A)$, contenente il simbolo A, implica che l'individuo rappresentato ha

> un'esistenza simbolica; ma dipende dal contesto se l'enunciatio $\phi(A)$ implichi o no che l'individuo rappresentato da A ha un'esistenza reale. In secondo luogo, quando ogni simbolo A denota una classe, allora ogni enunciato intelligibile $\phi(A)$ contenente il simbolo A implica che l'intera classe A è interamente reale, o interamente irreale, o in parte reale e in parte irreale. [MacColl *1905*, 75–76]

(I brani sono riportati nella traduzione italiana di E. Bona, inclusa in appendice a Bertrand Russell [*1976*, 274–275]).

La concezione di MacColl dell'esistenza logica viene criticata da Russell, in un breve articolo, piuttosto not, e da Shearman (*cfr.* B. Russell, "Il valore esistenziale delle proposizion", in [Russell *1976*, 88–91; l'articolo originale, dal titolo "The Existential Import of Propositions", compare su [Russell *1905*], seguito da una risposta di MacColl. Per quanto riguarda Shearman (*cfr.* [Shearman *1906*, 143–171]). Quest'ultimo fraintende gravemente l'opera di MacColl, al punto che lo pone esplicitamente tra i logici che assumono il punto di vista estensionale. Russell invece rimprovera a MacColl di confondere due sensi diversi di "esistenza", quello logico e quello filosofico. In senso logico, dire che A esiste significa unicamente affermare che A è una classe che ha almeno un membro. Vi è una sola classe che non esiste in questo senso: la classe vuota, che non è la classe dei non-esistenti, ma la classe che non ha membri. Nella sua risposta, MacColl sottolinea che ciò che veramente lo separa dagli altri logici è il ritenere "la classe 0, sia essa vuota o composta di'irrealtà, necessariamente *esclusa da ogni classe reale*; invece gli altri la pensano *contenuta in ogni classe, reale o non reale*" (MacColl, *op. cit.*, 284). Ciò che MacColl ritiene inaccettabile, cioè, è l'equazione $A0 = 0$, caratteristica dei sistemi estensionali.

7. Rilievi conclusivi: la nuova logica intensionale.

La continuità tra le ricerche di MacColl e quelle di Lewis non è certo una semplice ipotesi, anche se questa connessione è a lungo passata inosservata; al contrario, infatti, lo stesso Lewis è stato uno dei primi a riconoscere il carattere intensionale del sistema tratteggiato da MacColl a partire dal 1880 e ad evidenziare esplicitamente la sostanziale omogeneità di intenti tra la sua opera e quella del logico inglese. Recensendo il saggio di MacColl *Symbolic Logic and its Applications* nella parte dedicata alla rassegna storica del suo *A Survey of Symbolic Logic*, ad esempio, Lewis scrive [*1918*, 108] che si tratta di "a hight complex system, the fundamental ideas and procedures of which suggest somewhat the system of Strict Implication to be set forth in Chapter V [dello stesso *Survey*]".

Si tratta, in effetti, in entrambi i casi, di calcoli intensionali significativi e coerenti, oltre che proposti e indagati per la loro diversità rispetto al calcolo estensionale classico e per le differenti potenzialità che presentano come strumenti d'indagine.

Questa logica intensionale, dunque, non coincide più con la vecchia "teoria del ragionamento" (l'espressone è di H. Spencer, che appunto distingue la teoria del ragionamento dalla scienza della logica, affermando che quest'ultima formula le leggi generali delle relazioni tra esistenti considerati come oggettivi, mentre la prima formula le leggi generali della correlazione tra le idee corrispondenti a quella esistenzse (*cfr. ante*, Cap. II, par 3). È peraltro interessante notare come Venn riconosca in Mill, Bain e Spencer tre tra i pensatori che hanno maggiormente contribuito all'adozione del punto di vista estensionale (cfr. J. Venn, "The Difficulties of Material Logic", *cit.*)) o con un mero correlato di una logica estensionale sul piano del calcolo dei concetti, al punto che non di rado la sua natura reale è oggetto di fraintendimento. Ad esempio, i commenti e le obiezioni di Shearman all'opera di MacColl dimostrano la clamorosa incomprensione del carattere intensionale dei risultani che recensice (*cfr.* [Shearman *1906*, 143–172]).

In particolare, si rescinde quel legame immediato tra mondo possibile e determinazione concettuale, tra intensione di un concetto e insieme delle use note caratteristiche che era tipico della logica intesa come scienze formale del pensiero e delle leggi eterne che presiedono alla sua razionaità e coerenza interna.

La logica intensionale, cioè, riaffiora alla fine dell'Ottocento dalla necessità di ampliare la gamma delle distinzioni concettuali possibili, dal riconoscimento che contesti di discorso differenti richiedono spesso logiche differenti, ed ha come ambito di interesse privilegiato i problemi di teoria delle probabilità e l'esigenza di esprimere con chiarezza la relazioni metamatematiche.

La critica più recente ha già dimestrato che I calcoli modali di Lewis scaturiscono proprio dall'esigenza di dare forma ad una logica capace di esprimere sufficientemente i nessi semantici del discorso matematico [Shearman *1906*, 197–198], rovesciando in tal modo la concezione tradizionale secondo cui la logica modale rinasce nel XX secolo con Lewis a partire da problematiche di carattere linguistico che per lunghi anni è stata pacificamente accettata dalla grande maggioranza degli studiosi del settore. (L'idea che vi sia una connessione necessaria tra logica intensionale e filosofia del linguaggio, ha portato addirittura taluni interpreti a rileggere a partire da questa assunzione il pensiero dello stesso Frege. In effetti, possiamo affermare che le pagine più lucide a significative sul problema dell'intensione ed estensione (senso e denotazione nella sua terminologia) della logica contemporanea sono dovute, a nostro avviso, proprio all'impegno teorico del logico tedesco, che pone per la prima volta l'attenzione sulla questione dell'intensione della proposizione, evidenziando tanto il carattere strutturahmente differente delle relazioni intensionali ed estensionali, quanto le connessioni tra contesti modali e intensionali o opachi, come egli li definisce, nei quali la denotazione di un'espressione coincide con il suo senso proprio. Tuttavia, non deve essere dimenticato che l'analisi del linguaggio in Frege è strumentale alla creazione della sua ideografia e questa, a sua volta, alla "possibilità di condurre dimostrazioni senza 'lacune' e del tutto esplicite in ogni loro passo" (*cfr.* [Mangione e Bozzi *1993*, 341]) e, quindi, al suo più complessivo programma di fondazione della matematica.

"Dietro l'ideografia fregeana, scrivono poco dopo gli autori, quindi, sta tutta un'analisi di nozioni come quelle di giudizio, concetto, oggetto, modo di composizione dei pensieri, che rappresentano in sé veri e propri gioielli di indagine logica sul piano filosofico e che mostrano come una delle non ultime ragioni della novità dell'approccio di Frege sia stata quella di porre concretamente alla prova della formulazione matematica nozioni filosofiche tradizionali". [Mangione e Bozzi *1993*, 343]).

Seppur è vero, cioè, che la concezione fregeana del significato diviene un punto di partenza imprescindibile nella ricerca analitica del Novecento, non si deve dimenticare che essa non ha origine dai problemi di teoria del significato e filosofia del linguaggio.)

In realtà una lettura attenta del *Survey* di Lewis dimostra a nostro avviso che l'interesse per l'ambito linguistico del logico americano non è fine a se stesso, ma strumentale alla costruzione di un linguaggio logico in grado di dare risalto ad effettive distinzioni metamatematiche. In questo senso, la sua non è semplicemente una critica all'implicazione materiale, quanto piuttosto all'intera impostazione dei *Principia* di Russell e Whitehead, a favore di una nuova concezione della logica come teoria astratta, capace di riflettere le relazioni quali coerenza e deducibilità. Quando Lewis parla di "proper meaning" di "implica", infatti, intende "proper" nel senso di "adatto ad esprimere la nozione di inferenza in ambito metamatematico": "A symbolic logic, *logistically* developed — i.e., without assuming ordinary logic to validate its proofs —," scrive Lewis [*1918*, 324–325],

> is peculiar among mathematical systems in that its postulates and theorems have a double use. They are used not only as premises *from which* further theorems are deduced, but also as rules of inference *by which* the deductions are made. A system of geometry, for example, uses its postulates as premises only; it gets its rules of inference from logic. Suppose a postulate of geometry to be perfectly acceptable as an abstract mathematical assumption, but false of "our space". Then the theorems which spring from this assumption may be likewise false of "our space". But still the postulate will *truly imply* these theorems. However, if a postulate of symbolic logic, used as rule of inference, be false, then not only will some of the theorems be false, but some of the theorems will be *invalidly inferred*. The use of the false postulates as a *premise* will introduce false theorems; its use as a rule of inference will produce *invalid proof*. "Abstractness" in mathematics has always meant neglecting any question of truth or falsity in postulates or theorems; the peculiar case or symbolic logic has thus far overlooked. But we are hardly ready to speak of a "good" abstract mathematical system whose *proofs* are *arbitrarily invalid*. Until we are it is requisite that the meaning of "implies" in any system of symbolic logic shall be a "proper" one, and that the theorems — used as rules of inference — shall be *true* of this meaning.

In particolare, come abbiamo visto, la critica all'implicazione materiale e ai teoremi che la caratterizzano, che "do not admit of any application to valid inference" [Lewis *1918*, 326], è assolutamente analoga in Lewis e in MacColl, ed è, in primo luogo, l'obiezione secondo cui l'usuale relazione di implicazione materiale non piò "validly represent the logical nexus of proof and demonstration" [Lewis *1918*, 326] e dunque non permette l'analisi di fondamentali proprietà metamatematiche, quali coerenza e indipendenza.

In uno scritto di MacColl publicato ormai postumo, nel 1910, il legame tra l'impostazione logica dello studioso scozzese e i problemi originati dalla nozione di "deduzione" in matematica appare particolarmente evidente. Dope aver ancora una volta definito il senso in cui ritiene che le proposizioni possano essere distinte in certe, variabili e impossibili, si chiede:

> What is an axiom? No clear line of demarcation can be drawn between an axiom and any other general proposition or formula that is known and admitted to be true. So far as its formulæ and operations are concerned, symbolic logic ignores three distinction altogether. Indeed it could not very well take notice of the distinction without introducing psychological considerations, which are in general foreign to its purpose. A proposition that may appear axiomatic to one person may appear doubtful to another, until he has obtained a satisfactory proof of it; after which he treats it as an axiom in all subsequent researches. [MacColl *1910*, 193]

Dunque il problema centrale è proprio quello di stabilire cosa sia una una dimostrazione o un'inferenza.

> What is meant by such an assertion as that "*B* is an illegitimate inference from *A*" when *A* and *B* are known previously to be both true? To an omniscient mind would not all true propositions be equally axiomatic? Would it not be absurd to speak of such a mind as *inferring* *B* from *A*? This, of course, is an extreme case, but such cases are precisely those that most effectively test the validity of a principle. On the same principle, does it not seem absurd to speak of *inferring B* from *A*, whether "legitimately" or "illegitimately", when *A* and *B* are truths which have been arrived at independently, or when *B* is self evident apart from all consideration of *A*? [...] When is really meant by *inferring* (or) a proposition *B* from another proposition *A* (whether axiomatic or not) when *B* needs no proof, or is known to be true apart from all thought of *A*? The answer is not far to seek. It involves another meaning of the word "*implies*". The proposition *B* is said, in this sense, to be "inferred from", or "derived from", or "implied in", or "contained in" *A*, when it is either a particular case of *A*, or when all the statements made in the so-called "prof" *B* are particular cases of the axioms or propositions which constitute *A*. For the sake of clearness, it would be better to express this kind of implication by the word "contains" rather than the word "implies". Thus, when *A* contains *B*, it follows that *A* also "implies" *B*; but the converse does not necessarily hold. [MaColl *1910*, 193–194]

La relazione fondamentale che MacColl si preoccupa di specificare e definire nei suoi scritti è proprio questa, di inferenza o deduzione di una conclusione da un particolare insieme di dati di partenza. Se usiamo il termine "therefore" e il simbolo * per indicare tale significato di implica, e il simbolo ** per indicare "because", e se A denota le premesse e B la conclusione, allora:

> $A*B$ ("A is true, *therefore* B is true"), or its synonym $B**A$ ("B is true *because* A is true"), each of which synonyms is equivalent to $A(AB')^{\eta}$, denotes the argument. That is to say, the argument asserts, firstly, that the statement (or collection of statements) A is true, and secondly, that the affirmation of A coupled with the denial of B constitutes an *impossibility*, that is to say, a statement that is incompatible with our data or definitions. When the person to whom the argument is addressed believes in the truth of the statements A and $A(AB')^{\eta}$, he considers the argument valid; if he disbelieves either, he considers the argument invalid. This does not necessarily imply that he disbelieves either the premises A or the con-clusion B; he may be firmly convinced of the truth of both without accepting the validity of the argument. But the truth of A coupled with the truth of B does not necessarily imply the truth of the proposition $(AB')^{\eta}$, though it does that of $(AB')^{\iota}$. The statement $(AB')^{\iota}$, is *equivalent* to $(AB')'$ and therefore to $A' + B$. Hence we have
>
> $$A(AB')^{\iota} = A(A' + B) = AB = A^{\tau}B^{\tau}.$$
>
> But $A*B$, like its synonym $A(AB')^{\eta}$ asserts more than $A^{\tau}B^{\tau}$. Like $A(AB')^{\iota}$, it asserts that A is true, but unlike $A(AB')^{\iota}$, it asserts not only that AB' is *false*, but that it is *impossible* — that it is incompatible with our data or definitions. [MacColl *1906a*, 80–81]

L'opera di MacColl, considerata nella sue globalità, è indicativa della relazione profonda che connette indagine metamatematica, algebra della logica e sistemi intensionali. Essa rappresenta anzi, in questa direzione un tassello storico mancante. Ciò non tanto perché Lewis conosce gli scritti di MacColl e in qualche modo li presuppone nella sua indagine, quanto piuttosto perché in MacColl è più evidente la gestazione della logica intensionale dal complesso filosofico e teorico dell'algebra della logica. In entrambi questi autori, infatti, troviamo l'idea, portata alle sue più coerenti conclusioni da Lewis, che la logica sia una struttura astratta, una teoria che non riguarda direttamente gli oggetti del nostro linguaggio, né uno specifico linguaggio ma i discorsi: una metateoria.

REFERENCES

LADD-FRANKLIN, C. 1892. Dr. *Hillebrand's scheme*, Mind (ns.s) **1**, 527–530.

LEWIS, C. I. 1918. *A survey of symbolic logic*, Berkeley, University of California.

MACCOLL, H. 1877-78a. *The calculus of equivalent statements (first paper)*, Proceedings of the London Mathematical Society **9**, 9–20.

—. 1877-78b. *The calculus of equivalent statements (second paper)*, Proceedings of the London Mathematical Society **9**, 77–186.

—. 1878. *The calculus of equivalent statements (third paper)*, Proceedings of the London Mathematical Society **10**, 16–28.

—. 1880a. *The calculus of equivalent statements (fourth paper)*, Proceedings of the London Mathematical Society **11**, 113–121.

—. 1880b. *Symbolic reasoning (I)*, Mind **5**, 45–60.

—. 1896. *The calculus of equivalent statements (fifth paper)*, Proceedings of the London Mathematical Society **28**, 125–183.

—.1897a. *The calculus of equivalent statements (sixth paper)*, Proceedings of the London Mathematical Society **28**, 555–579.

—. 1897b. *The calculus of equivalent statements (seventh paper)*, Proceedings of the London Mathematical Society **29**, 98–109.

—. 1897c. *Symbolic reasoning (II)*, Mind (n.s.) **6**, 493–510.

—. 1898-99. *The calculus of equivalent statements. Explanatory note and correction*, Proceedings of the London Mathematical Society **30**, 330–332.

—. 1899. Review of A. N. Whitehead, *Universal algebra*, Mind (n.s.) **8**, 108–113.

—. 1900a. *Symbolic reasoning (III)*, Mind (n.s.) **9**, 75–84.

—. 1900b. *Question for logicians*, Mind (n.s.) **9**, 144.

—. 1901. *La logique symbolique et ses applications*, *Bibliothèque du Congrés International Philosophie vol. III: Logique et Histoire des Sciences* (Paris, Armand Colin), 135–183.

—. 1902. *Symbolic reasoning (IV)*, Mind (n.s.) **11**, 352–368.

—. 1903. *Symbolic reasoning (V)*, Mind (n.s.) **12**, 355–364.

—. 1905. *Symbolic reasoning (VI)*, Mind (n.s.) **14**, 74–81.

—. 1906. *Symbolic reasoning (VIII)*, Mind (n.s.) **15**, 504–518.

—. 1906a. *Symbolic logic and its applications*, London.

—. 1910. *Linguistic misunderstandings*, Mind (n.s.) **19**, 186–199, 337–355.

MANGIONE, C. & **BOZZI**, S. 1993. *Storia della logica. Da Boole ai giorni nostri,* Milano, Garzanti.

MCCALL, S. 1972. *Logic, History of,* in P. Edwards (ed.), *The encyclopedia of philosophy* (New York/London, Macmillan), voll. 3 e 4, alle pp. 545–546.

RESCHER, N. 1969. *Many-valued logic*, New York, McGraw-Hill, 1969; (cfr, p. 4; e Id., *Conspectus of recent work in many-valued logic*, in R. Klibanski (a cura di), *La philosophie Contemporaine*, vol. I, p. 75).

RUSSELL, B. 1903. *The principles of mathematics*, London, Cambridge University Press. Trad. it. di E. Carone e M. Destro, *I principi della matematica*, Roma, Newton Compton, 1983.

—. 1905. *The existential import of propositions*, Mind (n.s.) **14**, 398–401. Trad it. di E. Bona, *Il valore esistenziale delle proposizioni* [Russell *1976*], 88–91.

—. 1906. *Review of H. MacColl's "Symbolic Logic and its Applications"*, Mind (n.s.) **15** , 255–260.

—. 1976. *Saggi logico-filosofici*, Longanesi; trad, it. di E. Bona.

SHEARMAN, A. T. 1906. *The development of symbolic logic*, London, Williams and Norgate; repr. Dubuque, Wm. C. Brown, 1988.