SCHRÖDERS ZWEITER BEWEIS FÜR DIE UNABHÄNGIGKEIT DER ZWEITEN SUBSUMTION DES DISTRIBUTIVGESETZES IM LOGISCHEN KALKÜL*

CHRISTIAN THIEL

Institut für Philosophie
der Universität Erlangen-Nürnberg
Bismarckstr. 1, D – 91054 Erlangen
e-mail: cnthiel@phil.uni-erlangen.de

Ernst Schröder hat dem § 12 des ersten Bandes seiner *Vorlesungen über die Algebra der Logik*[1] die Überschrift gegeben: „Nichtbeweisbarkeit der zweiten Subsumtion des Distributivgesetzes und Unentbehrlichkeit eines weiteren Prinzipes. Prinzip zur Vertretung des unbeweisbaren Satzes".[2] Über diese Thematik hat Volker Peckhaus bereits in seinem Vortrag „Wozu Algebra der Logik?"[3] berichtet. Ich erinnere zunächst daran, wie weit Schröder an dieser Stelle seiner Vorlesungen gekommen war. Er hatte auf S. 186 die beiden Prinzipien

$$\begin{array}{ll} \text{Prinzip I:} & A \preccurlyeq A \\ \text{Prinzip II:} & A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq C \prec A \preccurlyeq C \end{array}$$

aufgestellt („$\prec$" bezeichne die Implikation) sowie die folgenden Definitionen gegeben (Def. 1 auf S. 184, Def. 2 auf S. 188 und Def. 3 auf S. 196):

$$\begin{array}{ll} \text{Def. 1:} & A = B \succ\!\prec A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A \\ \text{Def.} 2_\times: & 0 \preccurlyeq A \\ \text{Def.} 2_+: & A \preccurlyeq 1 \\ \text{Def.} 3_\times: & X \preccurlyeq A \wedge X \preccurlyeq B \succ\!\prec X \preccurlyeq AB \\ \text{Def.} 3_+: & A \preccurlyeq X \wedge B \preccurlyeq X \succ\!\prec A + B \preccurlyeq X. \end{array}$$

Dabei habe ich in den beiden Definitionen $3_\times$ und 3_+ die Richtungen von links nach rechts („$\prec$") und von rechts nach links („$\succ$") zusammengezogen Schröders Buchstaben C durch den auch in der den beiden vorausgehenden Definitionen verwendeten Buchstaben X ersetzt. Diese Gesetze werden von Schröder auf den Seiten 624 bis 628

---

*Vortrag im Logikhistorischen Kolloquium der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg am 15. September 1993.

[1]Schröder, Ernst: *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*. Erster Band. B.G. Teubner: Leipzig 1890; repr. (Band I–III, als "second edition") Chelsea: Bronx, N.Y. 1966. Mit dem § 12 beginnt die sechste Vorlesung (nach der Zählung in den Bänden I und II; die Zählung der Vorlesungen in Band III beginnt wieder von vorn).

[2]*Op. cit.*, 282.

[3]Peckhaus, Volker: Wozu Algebra der Logik? Ernst Schröders Suche nach einer universalen Theorie der Verknüpfungen, *Modern Logic* 4 (1994), 357–381.

wiederholt und als im „identischen Kalkul“ der §§ 4–11 gültig behauptet; sie sind in heutiger Sprechweise die Axiome des negationsfreien Teils dieses Kalküls. Aus ihnen leitet Schröder Sätze oder Theoreme ab, deren Aufzählung ich mir hier schenke, um als für uns wichtigen Satz lediglich das Theorem $25_\times$ anzuführen und zu beweisen (wobei ich in den ersten Schritten dem von Schröder auf S. 280a angedeuteten „Beweis 2“ folge):

$$\text{Theorem } 25_\times : \quad ab + ac \preccurlyeq a(b+c).$$

Wie alle Theoreme der Algebra der Logik hat auch dieses ein zu ihm duales Theorem:

$$\text{Theorem } 25_+ : \quad a + bc \preccurlyeq (a+b)(a+c).$$

Man erhält dieses, wenn man in Theorem $25_\times$ Summen- und Produktzeichen und dann die beiden Seiten der Subsumtion miteinander vertauscht. Theorem $25_\times$ läßt sich z.B. wie folgt beweisen:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & ab \preccurlyeq ab & \text{(Prinzip I)} \\
(2) & ac \preccurlyeq ac & \text{(Prinzip I)} \\
(3) & ab \preccurlyeq a & ((1),\ \text{Def. } 3_\times{}'') \\
(4) & ac \preccurlyeq a & ((2),\ \text{Def. } 3_\times{}'') \\
(5) & ab + ac \preccurlyeq a & ((3), (4),\ \text{Def. } 3_+{}') \\
(6) & ab \preccurlyeq b & ((1),\ \text{Def. } 3_\times{}'') \\
(7) & ac \preccurlyeq c & ((2),\ \text{Def. } 3_\times{}'') \\
(8) & b + c \preccurlyeq b + c & \text{(Prinzip I)} \\
(9) & b \preccurlyeq b + c \wedge c \preccurlyeq b + c & ((7), (8),\ \text{Def. } 3_+{}'') \\
(10) & ab \preccurlyeq b + c & ((6), (9L),\ \text{Prinzip II}) \\
(11) & ac \preccurlyeq b + c & ((7), (9R),\ \text{Prinzip II}) \\
(12) & ab + ac \preccurlyeq b + c & ((10), (11),\ \text{Def. } 3_\times{}') \\
(13) & ab + ac \preccurlyeq a(b+c) & ((5), (12),\ \text{Def.} 3_\times{}').
\end{array}
$$

Den dualen Satz beweist man natürlich durch duale Überlegungen. Schröder widmet die Ausführungen des § 12 und die Anhänge 4–6 des ersten Bandes seiner *Vorlesungen* der Tatsache, daß sich die beiden folgenden Umkehrungen der beiden Theoreme 25 aus den angegeben Axiomen und Definitionen *nicht* beweisen lassen:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Theorem } 26_\times : & a(b+c) \preccurlyeq ab + ac \\
\text{Theorem } 26_+ : & (a+b)(a+c) \preccurlyeq a + bc.
\end{array}
$$

Die Vereinigung der beiden multiplikativen Theoreme $25_\times$ und $26_\times$ würde ebenso wie die der beiden additiven Theoreme 25_+ und 26_+ eine Gleichung ergeben. Anders als die letzteren sind die ersteren in der gewöhnlichen Arithmetik gültig; ihre zusammengezogene Form als Gleichung wird dort das „Distributivgesetz“ genannt. Schröder bezeichnet sie deshalb auch in der Algebra der Logik als „Distributionsgesetz“ und die Theoreme 26 als „duale Gegenstücke des Distributionsgesetzes“.[4] (Ich

[4] *Op. cit.*, 283 bzw. 285, als Theoreme $27_\times$ und 27_+.

erwähne dies eigens, weil damals, anders als heute, der Terminus „Distributivität" noch nicht fester Bestandteil der logischen Fachsprache war). Etwas informell läßt sich die Situation an dieser Stelle von Schröders Vorlesungen durch den Merksatz charakterisieren: „Ausklammern ist erlaubt, Ausmultiplizieren verboten".

Um letztere Norm zu begründen, muß Schröder ein Gegenbeispiel angeben, d. h. einen Fall, in dem die von ihm bis dahin akzeptierten Prinzipien und Definitionen gelten, das Theorem $26_\times$ und sein duales Gegenstück aber nicht. Dies gelingt ihm und veranlaßt ihn, am Schluß des § 12 von dem „identischen Kalkul mit Gebieten einer Mannigfaltigkeit", in dem nach Hinzunahme der Negation die Distributionsgesetze gelten, den „logischen Kalkul" oder „Kalkul mit Gruppen" abzutrennen, in dem nur das Ausklammern, nicht aber das Ausmultiplizieren allgemein möglich ist (also die Theoreme 26 nicht gelten). Schröder behandelt die Frage ausführlich in den über 80 Seiten der letzten drei seiner sechs Anhänge zu Band I der *Vorlesungen*. Über das in Anhang 4 und 5 konstruierte Gegenbeispiel zur 2. Subsumtion des Distributivgesetzes hat Volker Peckhaus in dem eingangs genannten Vortrag berichtet; es besteht aus 990 Funktionalgleichungen und ist entsprechend aufwendig. Herbert Mehrtens hatte es schon 1979 in seiner Arbeit über die Entstehung der Verbandstheorie skizziert;[5] eine ausführlichere Beschreibung findet sich m.W. aber erst in dem Vortrag von Volker Peckhaus. Schröder gibt nun aber in Anhang 6 des ersten Bandes der *Vorlesungen* noch ein anderes Gegenbeispiel, das ich jetzt vorstellen und erläutern möchte.

Die Elemente dieses Gegenbeispiels sind „Gruppen" im Sinne Schröders, der auf S. 628*f*. betont, daß der Gruppenbegriff „neuerdings fast in der gesamten Mathematik eine rapid steigende Bedeutung und zunehmend verbreitete Anwendung gefunden" habe, diesen Begriff aber — soweit ich sehe — in einem etwas weiteren Sinne verwendet als die von ihm zitierten Gruppentheoretiker Dedekind, Dyck, Kronecker und Lie. Während diese nämlich (wie auch die heutige Gruppentheorie) in einer Gruppe nur eine einzige Verknüpfung annehmen, läßt Schröder auch mehrere Verknüpfungen bzw. Operationen zu. In unserem Falle sind dies Negation (Komplement- oder Inversenbildung), Addition und Multiplikation. Das Negat von a schreibe ich im folgenden nicht wie Schröder in Band I der *Vorlesungen* als „$a_|$", sondern (wie auch Schröder 1895 in Band III der *Vorlesungen*) als „$\bar{a}$". Eine Gruppe ist für Schröder eine Menge von Elementen, die aus endlich vielen von ihnen durch Anwendung der in der Gruppe zugelassenen Operationen erzeugt werden können; sie wird angegeben entweder durch explizite Nennung ihrer Elemente in geschweiften Klammern, oder aber durch Angabe der erzeugenden Elemente in den runden Klammern eines Ausdrucks „$G_i(\ldots)$", wobei der Index i in dem zweiten Schröderschen Gegenbeispiel die Anzahl der Gruppenelemente anzeigt. Zu beachten ist, daß verschiedene Elemente die gleiche Gruppe erzeugen können. Beispiele sind:

1. Die Nullgruppe $\{0, 1\}$.
   Hier ist $0 = \bar{1}$, $1 = \bar{0}$, $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1$, $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ und $1 \cdot 1 = 1$; die 0 und die 1 sind also die einzigen erzeugten Elemente.

[5] Mehrtens, Herbert: *Die Entstehung der Verbandstheorie*. Gerstenberg: Hildesheim 1979 (*arbor scientiarum*, Band VI); § 1.3.2: Der „logische Kalkul mit Gruppen", darin auf S. 54 das erste Schrödersche Gegenbeispiel.

2. Als „die Gruppe von a" bezeichnet Schröder die Gruppe $G(a) \leftrightharpoons \{0, 1, a, \bar{a}\}$. Diese Gruppe wird sowohl von a als auch von $\bar{a}$ erzeugt.
   Insbesondere ist die Nullgruppe sowohl die Gruppe von 0 als auch die Gruppe von 1.

3. $G(a, b) = \{0, 1, a, b, \bar{a}, \bar{b}, ab, \bar{a}b, a\bar{b}, \bar{a}\bar{b}, a + b, a + \bar{b}, \bar{a} + b, \bar{a} + \bar{b}, ab + \bar{a}\bar{b}, a\bar{b} + \bar{a}b\}$.

Die Anzahl einer von n unabhängigen Elementen erzeugten Gruppe ist 2^{2^n}.

Das zweite Gegenbeispiel Schröders zur 2. Subsumtion des Distributivgesetzes besteht aus den folgenden vier Gruppen:

$$\begin{aligned} A &= G_8(abc, ab + ac + bc) \\ B &= G_{16}(ab, bc) \\ C &= G_{16}(ac, bc) \\ D &= G_{32}(ab, ac, bc). \end{aligned}$$

Schröder zählt auf S. 685 diese Gruppen auch elementweise auf, was auf den ersten Blick ein ziemliches Durcheinander ergibt. Durchsichtiger werden die Verhältnisse, wenn man die Elemente wie in dem nachfolgenden Diagramm wie folgt anordnet. Schon an der Definition von B und C sieht man, daß die Formeln der einen dieser beiden Gruppen aus denen der anderen durch Vertauschung von b und c hervorgehen. Dabei gehen acht Formeln in solche über, die sich von der Ausgangsformel nur durch Buchstabenumstellung nach dem Kommutativgesetz unterscheiden und daher mit diesen als gleich behandelt werden; sie bilden den Durchschnitt von B und C. Die Definitionen zeigen auch, daß ab und bc gemeinsam B, und ac und bc gemeinsam C erzeugen. Alle drei — also ab, ac und bc — erzeugen zusammen D. Im Durchschnitt von B und C liegt abc, das zusammen mit $ab+ac+bc$ die Gruppe A erzeugt. Nur vier Elemente von D liegen weder in A noch in B noch in C. Natürlich muß gesichert werden, daß alle vier Gruppen „vollständig" angegeben sind, d. h. alle Elemente tatsächlich vorkommen; der Nachweis würde eine Menge elementarer Rechenarbeit erfordern, die wir uns ebenso wie Schröder hier schenken.

Der Durchschnitt aller vier Gruppen besteht aus den vier Elementen 0, 1, abc und $a + b + c$; sie bilden eine Gruppe E, die von abc allein erzeugt wird:

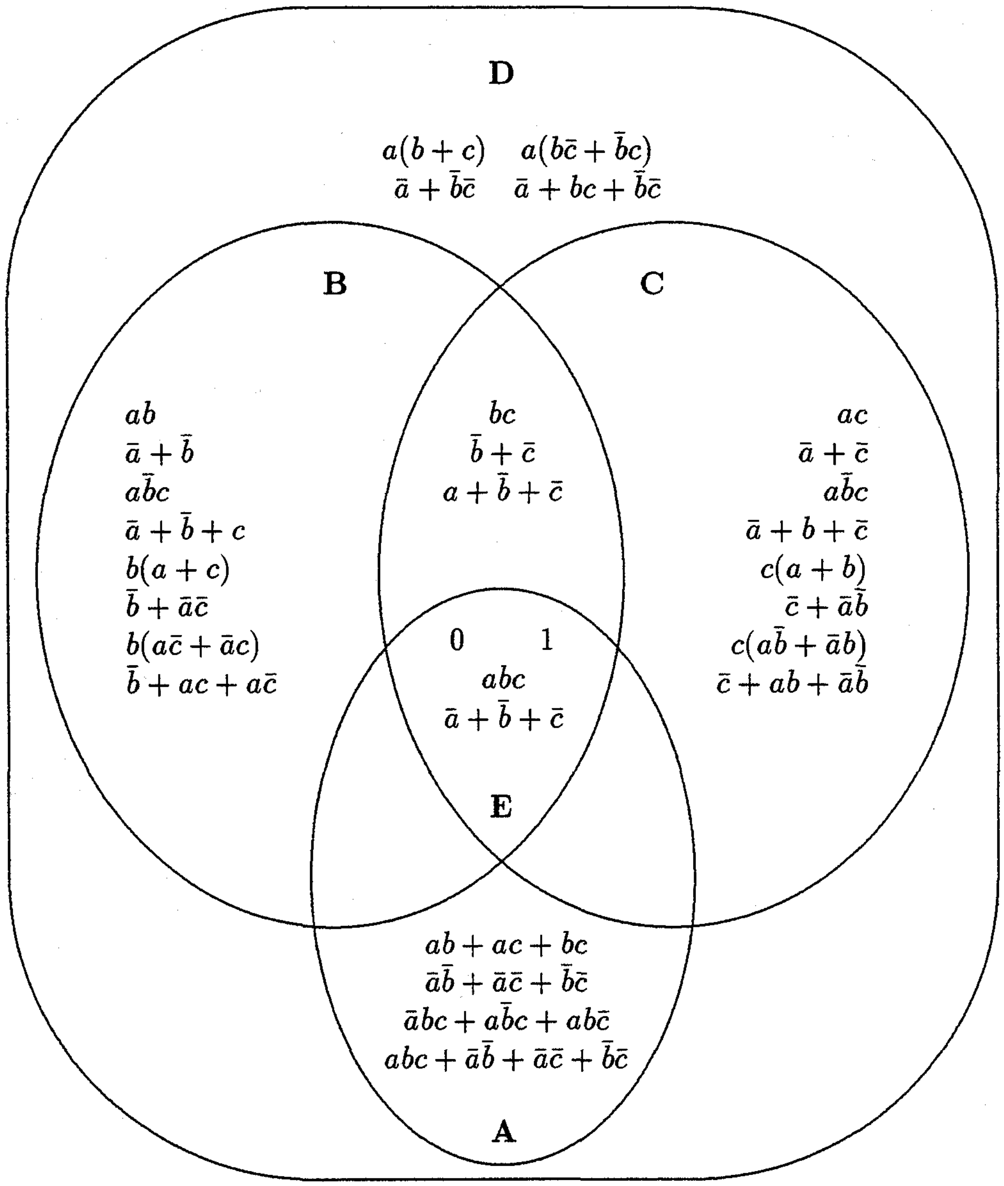
$$E = G_4(abc) = \{0, 1, abc, a + b + c\}.$$

Aus dieser Situationsbeschreibung ist klar, daß A, B und C Untergruppen von D sind, daß aufgrund der Definitionen von B, C und D (s.o.) $B + C = D$ ist und daher

$$(*) \qquad A \cdot (B + C) = A \cdot D = A$$

gilt. Dagegen sind $A \cdot B$ und $A \cdot C$ beide $= E$, so daß auch für ihre Summe gilt

$$(**) \qquad A \cdot B + A \cdot C = E \cdot E = E.$$



Zweifellos ist nun aber $E \subset A$ mit $E \neq A$. Ersetzen wir daher in $E \subset A$ das E gemäß (**) durch $A \cdot B + A \cdot C$ und das A gemäß (*) durch $A \cdot (B + C)$, so erhalten wir

$$A \cdot B + A \cdot C \subset A \cdot (B + C),$$

was nichts anderes heißt als

$$A \cdot (B + C) \not\subseteq A \cdot B + A \cdot C,$$

also das *Negat* der 2. Subsumtion des Distributivgesetzes darstellt (*op. cit.*, 686). Schröder hat damit die Unabhängigkeit dieser Subsumtion aufs neue nachgewiesen.

Der Aufwand ist natürlich auch bei diesem zweiten Gegenbeispiel noch beachtlich, und mehrere Autoren haben angesichts der offenbar interessanten Materie ihren Ehrgeiz darein gesetzt, einfachere Gegenbeispiele zu finden. Drei davon finden sich in Rezensionen des Schröderschen Bandes, und Schröder bringt sie zusammen mit einigen weiteren ihm brieflich durch Alwin Korselt und Andreas Voigt mitgeteilten Gegenbeispielen in der erst posthum von Eugen Müller herausgegebenen „zweiten Abteilung" des zweiten Bandes der *Vorlesungen*[6] im § 50 mit der Überschrift „Vervollkommnung gewisser Partieen des ersten Bandes" (a.a.O., 401–423). Das möglicherweise erste neue Gegenbeispiel gab Jacob Lüroth in seiner Rezension des Schröderschen Bandes für die *Zeitschrift für Mathematik und Physik*.[7] Es ist ein zahlentheoretisches Gegenbeispiel, das von Schröder auf S. 417–419 des II. Bandes ausführlich referiert wird und zu dem Eugen Müller in den „Anmerkungen des Herausgebers" (a.a.O., 595) in Erfüllung einer in Schröders Manuskript geäußerten Absicht noch Ergänzungen geliefert hat. Ich gehe aber auf dieses trotz der Ergänzungen nicht gerade einfache Gegenbeispiel hier nicht ein.

Andreas Voigt macht in seinem Aufsatz „Was ist Logik?",[8] über den Adelheid Hamacher-Hermes in ihrer Dissertation[9] berichtet hat, auf S. 303*f*. die kurze Bemerkung, daß die Inhaltslogik mit ihrer Auffassung der Begriffe als Merkmalskomplexe die Konstruktion eines Gegenbeispiels erlaubt, und er deutet dieses an. Schröder hat den von ihm (S. 413) als „Aperçu" bezeichneten Hinweis Voigts „unter seiner Beihilfe" im zweiten Band der *Vorlesungen* ausgeführt. Wir betrachten die folgenden Merkmale von Figuren der Elementargeometrie der Ebene:

$A \leftrightharpoons$ das Merkmal, ein Rechteck zu sein
$B \leftrightharpoons$ das Merkmal, eine Raute (ein gleichseitiges Viereck) zu sein
$C \leftrightharpoons$ das Merkmal, zu vier Achsen symmetrisch zu sein
$D \leftrightharpoons$ das Merkmal, zu zwei Achsen symmetrisch zu sein.

Die Summe $A+B$ der Merkmale, ein Rechteck und gleichseitig zu sein, ist offenbar das Merkmal, Quadrat zu sein. Es enthält das Merkmal, vierfach symmetrisch zu sein, in sich, so daß $(A+B)C = C$ ist. Ein Rechteck hat mit einer beliebigen zu vier Achsen symmetrischen Figur nur das Merkmal gemeinsam, zweifach symmetrisch zu sein, so daß $AC = D$ ist. Aber auch eine Raute hat mit einer beliebigen zu vier Achsen symmetrischen Figur nur dieses eine Merkmal gemeinsam und es ist also auch $BC = D$. Somit ist auch $AC + BC = D$. Nun ist jede vierfach symmetrische Figur auch zweifach symmetrisch, nicht aber umgekehrt, d. h. es gilt $D \preccurlyeq C$, nicht aber $C \preccurlyeq D$, und folglich gilt die Subsumtion $(A+B)C \preccurlyeq AC + BC$ *nicht*. Ein Kommentar Eugen Müllers zu diesem Gegenbeispiel, der u. a. auf die Besonderheit des

[6] Schröder, Ernst: *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*. Zweiter Band. Zweite Abteilung. Herausgegeben im Auftrag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von Eugen Müller. B. G. Teubner: Leipzig 1905; repr. 1966 (vgl. Anm. 1).

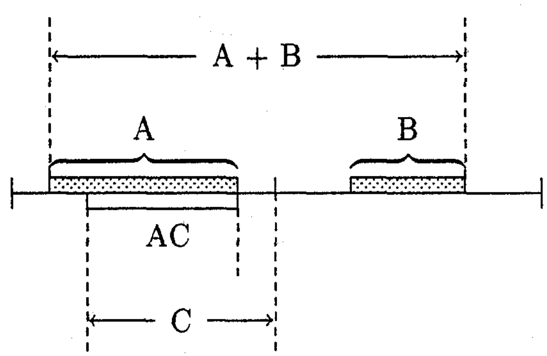
[7] Lüroth, Jacob: Rezension von SCHRÖDER 1890. *Zeitschrift für Mathematik und Physik. Historisch-literarische Abtheilung* 36 (1891), 161–169, das Beispiel auf S. 165*f*.

[8] Voigt, Andreas: Was ist Logik? *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie* 16 (1892), 289–332; die Bemerkung zur Unabhängigkeit der zweiten Subsumtion des Distributivgesetzes auf S. 303*f*.

[9] Hamacher-Hermes, Adelheid: *Inhalts- oder Umfangslogik? Analyse und Bewertung einer Debatte*. Phil. Diss. Aachen 1992 (erscheint als Monographie im Karl Alber Verlag, Freiburg/München).

Schröderschen „Begriffsinhalts-Produkts" eingeht, findet sich auf S. 594 des Bandes II, 2 von Schröders *Vorlesungen*.

Voigt hat Schröder offenbar brieflich noch ein zweites geometrisches Gegenbeispiel mitgeteilt, das Schröder in der ihm vorgelegten Form nicht für beweiskräftig hielt, aber auf S. 420 des II. Bandes der *Vorlesungen* verbesserte. Voigt betrachtet alle Kreise der Ebene einschließlich des „Nullkreises" vom Radius 0, und nimmt als Produkt XY zweier Kreise den größten Kreis, der in X und in Y liegt (und den Nullkreis, wenn sich X und Y nicht schneiden), sowie als Summe $X+Y$ zweier Kreise den kleinsten Kreis, in dem X und Y liegen. Schröder verbessert das Beispiel, indem er statt der Kreise zusammenhängende Strecken auf einem fest gegebenen Streckenstück nimmt, wobei das Produkt XY zweier Strecken X und Y ihr gemeinsames Stück ist (evtl. also Null), und die Summe $X+Y$ die kleinste X und Y umfassende Strecke. Für zwei disjunkte Strecken A und B und eine innerhalb $A+B$ gelegene, aber zu B disjunkte Strecke ist dann (vgl. die folgende Abbildung) $(A+B)C=C$, aber $AC+BC=0$:



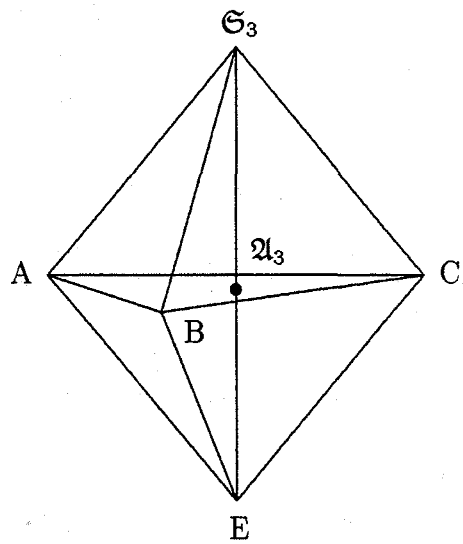
1894 veröffentlichte Alwin Korselt eine „Bemerkung zur Algebra der Logik",[10] die ausschließlich der Mitteilung seines ebenfalls geometrischen Gegenbeispiels zur zweiten Subsumtion des Distributivgesetzes dient. Er betrachtet Raumelemente, interpretiert „$A \Subset B$" als „A liegt in B", AB als das in A und B gelegene Element höchster Dimension, und $A+B$ als das A und B enthaltende Element niedrigster Dimension. Für drei verschiedene Punkte A, B und C auf einer Geraden g gilt dann $A(B+C)=Ag=A$, aber $AB+AC=0+0=0$.

Von Schröder überhaupt nicht erwähnt wird ein Gegenbeispiel, das Giuseppe Peano bereits 1891 in seiner Rezension[11] des ersten Bandes von Schröders *Vorlesungen* angegeben hat. Es besteht schlicht aus der von den Permutationen dreier Objekte gebildeten Gruppe (im Sinne der heutigen Gruppentheorie), der „symmetrischen Gruppe" $\mathfrak{S}_3$. Peano definiert XY als die größte in X und Y enthaltene Gruppe sowie $X+Y$ als die kleinste X und Y enthaltende Gruppe, und betrachtet die Permutationen $\pi_1 = 123 \rightarrow 132, \pi_2 = 123 \rightarrow 231$ und die dadurch bestimmten

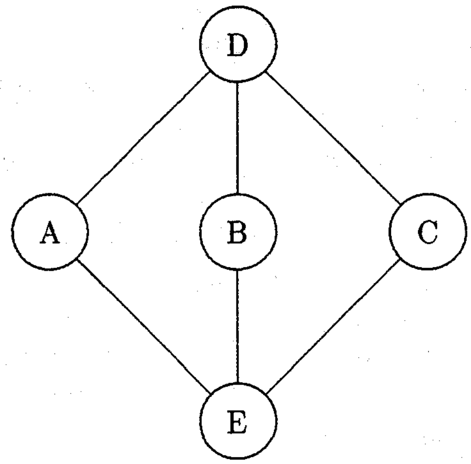
[10] Korselt, Alwin: Bemerkung zur Algebra der Logik. *Mathematische Annalen* 44 (1894), 156–157.

[11] Peano, Giuseppe: Rezension von Schröder 1890. *Rivista di Matematica* 1 (1891), 164–170, das Gegenbeispiel auf S. 167, hier zitiert nach dem Neudruck in G. Peano, *Opere Scelte* II, ed. Ugo Cassina (Cremonese: Roma 1958), 114–121, mit dem Gegenbeispiel auf S. 118 in der von S. 116–118 erstreckten Anmerkung *)).

Permutationen $\pi_3 = 123 \to 321$ und $\pi_4 = 123 \to 213$. A sei die von π_1 erzeugte Gruppe, B die von π_3 erzeugte, C die von π_4 erzeugte Gruppe. Dann ist $A + B$ gleich der vollen symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_3 C = C$, also $(A + B)C = C$, aber $AC + BC = E + E = E$ mit der von der „identischen" Permutation erzeugten Gruppe E. Da C von E verschieden ist, haben wir wieder ein Gegenbeispiel zur 2. Subsumtion des Distributivgesetzes. Mir ist rätselhaft, weshalb Schröder dieses Gegenbeispiel nicht einmal erwähnt, nachdem es ihm doch als gruppentheoretisches hätte besonders nahe liegen müssen. Natürlich wird man vermuten, daß es gar nicht zu seiner Kenntnis gelangt ist; das Literaturverzeichnis zur posthum erschienenen 2. Abteilung des zweiten Bandes der *Vorlesungen*, das die Rezension Peanos auf S. 602 erwähnt, ist erst von Eugen Müller zusammengestellt worden und kann nicht als Beleg dafür dienen, daß Schröder diese Rezension gekannt habe. Merkwürdiger ist, daß auch Mehrtens in seiner genannten Abhandlung zwar die Gegenbeispiele Korselts, Lüroths und Voigts, nicht aber das von Peano angegebene erwähnt.

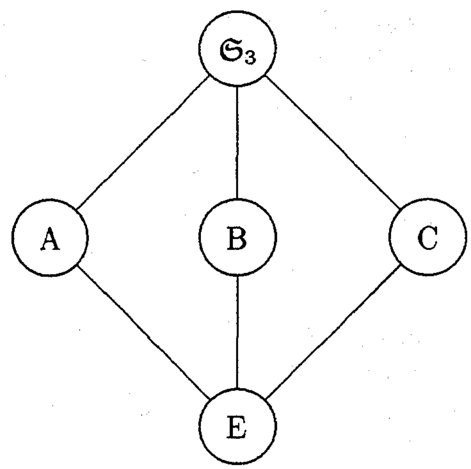


Alle diese Gegenbeispiele sind jedenfalls einfacher als die beiden von Schröder gefundenen, auch wenn dieser in seiner Erörterung in Band II ganz zu Recht bemerkt, daß zu einem wirklichen Unabhängigkeitsbeweis auch bei diesen Gegenbeispielen der Nachweis gehören würde, daß die Prinzipien und Definitionen in dem jeweiligen Modell erfüllt sind, und dies bei einigen von ihnen ebenfalls größeren Rechenaufwand erfordern dürfte. Zu Schröders beiden Gegenbeispielen zurückkehrend möchte ich zunächst bemerken, daß mir das zweite Gegenbeispiel einfacher vorkommt als das erste, wenngleich man darüber vielleicht streiten kann. Unbestreitbar ist, wie kompliziert beide doch gegenüber der heutigen abstrakten Verbandstheorie sind, die das elegante Hilfsmittel der sog. „Hasse-Diagramme" zur Verfügung hat. Stellt man die an Schröders zweitem Gegenbeispiel beteiligten fünf Untergruppen durch Punkte oder kleine Kreise in einer Ebene dar, und die Beziehung, daß eine Gruppe X Untergruppe einer anderen Gruppe Y ist, dadurch, daß man X unter Y anordnet und beide durch eine gerade Strecke verbindet, so erhält man für die fünf Gruppen Schröders das folgende Diagramm:



An ihm läßt sich nun auch unmittelbar und ganz einfach zeigen, daß die 2. Subsumtion des Distributivgesetzes nicht gilt. Wir deuten dazu $X + Y$ als den nächstgelegenen Punkt, in dem die von X und Y nach *oben* gezogenen Strecken zusammenkommen; sind X und Y selbst durch eine Strecke verbunden, so möge $X+Y$ der höher gelegene der beiden Punkte sein. $X \cdot Y$ sei der nächstgelegene Punkt, in dem die von X und Y nach *unten* gezogenen Strecken zusammenkommen; sind X und Y selbst durch eine Strecke verbunden, so sei $X \cdot Y$ der tiefer gelegene der beiden Punkte. Dann zeigt das obige Hasse-Diagramm selbst, daß einerseits $B + C$ gleich D und $A \cdot D$ gleich A, also $A \cdot (B + C) = A \cdot D = A$ ist, und daß andererseits $A \cdot B$ ebenso wie $A \cdot C$ gleich E ist. E ist aber echte Untergruppe von A, und damit ist wie in Schröders zweitem Gegenbeispiel die zweite Subsumtion des Distributivgesetzes in dieser Figur ungültig.

Betrachten wir nun noch einmal das von Peano gegebene Gegenbeispiel und die Doppelpyramide, durch die wir uns die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_3$ veranschaulicht hatten! Lassen wir die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_3$ (von der wir keinen Gebrauch gemacht hatten) weg, so können wir die drei gleichberechtigten zyklischen Untergruppen A, B und C der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$ auch in der Ebene nebeneinander darstellen, was ein Diagramm liefert, das uns bekannt vorkommt:



Überdies sehen wir, daß $\mathfrak{S}_3 = \{\pi_1, \pi_2\}, B = \{\pi_3\}$ und $C = \{\pi_4\}$ wie bei Schröder als

Erzeugnisse der angegebenen Permutationen betrachtet werden können, wenn man die Gruppenverknüpfung als Nacheinander-Ausführung der verknüpften Permutationen definiert. Peanos Gegenbeispiel entsteht gewissermaßen durch Vereinfachung des zweiten Schröderschen, wenn man als Elemente des konstruierten Verbandes nicht mehr gegenüber allen drei Operationen „$^-$", „+" und „·" abgeschlossene Bereiche nimmt, sondern nur noch gegenüber der einzigen Gruppenoperation abgeschlossene, wobei man dann als Schröders „+" die Nacheinanderausführung der Permutationen nehmen kann. Obwohl Schröder als Vorzug seines Gegenbeispiels hervorhebt, daß es ohne außerlogische Hilfsmittel konstruiert worden ist, steht wohl Peanos Gegenbeispiel der Schröderschen Konstruktion und der ihr zugrundeliegenden Denkweise am nächsten.

Das sowohl zu Schröders zweitem Gegenbeispiel als auch zu Peanos Gegenbeispiel gehörige Hasse-Diagramm ist heute eines der beiden Standardbeispiele für einen nicht-distributiven Verband. Man sieht dabei ganz davon ab, daß die Modelle, die diese durch das Hasse-Diagramm dargestellte Struktur aufweisen, durch „Hüllenoperationen", also mittels der Erzeugung gegenüber bestimmten Operationen abgeschlossener Bereiche entstehen, nicht einfach durch mengentheoretische Vereinigungs- und Durchschnittsbildung, die immer nur distributive Verbände liefern.

Der Fortschritt gegenüber der Denkweise Schröders und seiner Zeit liegt in dem hohen Abstraktionsniveau des heutigen Verfahrens, sich eine logische oder mathematische Relation einfach als räumliche Beziehung zweier Punkte auf dem Blatt Papier zu veranschaulichen und an einer solchen bloßen Zeichenkonfiguration mathematische Beweise zu führen. Es ist nicht ohne Ironie, daß dies gerade einem Manne schwergefallen sein sollte, der 1873 als einziges Axiom und wichtigstes Prinzip mathematischer Überlegungen ein „Axiom von der Inhärenz der Zeichen" hervorgehoben hatte, nach dem „bei allen unsern Entwicklungen und Schlußfolgerungen die Zeichen in unserer Erinnerung — noch fester aber am Papiere — haften".[12] Dennoch scheint mir Spott an dieser Stelle unangebracht: ohne die mühevolle und doch kreative Entwicklung konkreter Modelle der von Schröder dargestellten Art wäre es auch nicht zur Entdeckung ihnen gemeinsamer Strukturen und nicht zu ihrer modernen Erfassung durch Abstraktion gekommen. Die unerwartete Widerlegung der 2. Subsumtion des Distributivgesetzes in dem negationsfreien Teil des identischen Kalkuls hat Aufmerksamkeit erregt und dadurch sicher zur intensiveren Befassung mit metalogischen Fragen und Methoden beigetragen. Ob sie für die Algebra eine ähnlich zentrale Rolle gespielt hat wie für die Geometrie das Beltramische Modell einer nichteuklidischen Geometrie, muß ich den Historikern der Algebra zur Beantwortung überlassen.

[12]Schröder, Ernst: *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende.* Erster Band. *Die algebraischen Operationen* (B.G. Teubner: Leipzig 1873), 16*f*.