Volume 4, no. 4 (October 1994)

Wozu Algebra der Logik?
Ernst Schröders Suche nach einer universalen Theorie der Verknüpfungen*

Volker Peckhaus

Institut für Philosophie
der Universität Erlangen-Nürnberg
Bismarckstr. 1, D - 91054 Erlangen
e-mail: vrpeckha@phil.uni-erlangen.de

Abstract. At the end of his life Ernst Schröder (1841–1902) regarded the formulation of a general theory of operations as his "very own field of research." Already in his *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* (1873) and especially in *Über die formalen Elemente der absoluten Algebra* (1874) he had made the first steps towards establishing a "formal" or, in its final stage, an "absolute algebra" proceeding from the assumption that there are operations which allow to connect two objects of a given domain (not restricted to mathematical objects) to a third, which belongs also to the domain. By this means Schröder tried to go beyond the narrow boundaries of traditional arithmetic, and to embrace also non-commutative numbers like quaternions. Through Robert Grassmann's *Formenlehre* (1872), Schröder discovered the analogy between arithmetical and logical connectives, but already late in 1874 he went further: he then treated formal logic and arithmetic as two different models of formal algebra. His subsequent research was devoted to the analysis of logic as such a model. Schröder considered his proof that the "second subsumption of the distributive law" was not provable in the identical calculus without negation as one of the main results of his *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (vol. I, 1890). As a conclusion from this proof, he distinguished between a "really logical calculus" (of groups, algorithms etc.) without complete distributivity, and the identical calculus which had to contain a special postulate to provide the problematic second subsumption. When Schröder studied Peirce's algebra of relatives in the beginning 1890s, the focal point of his research returned to his early program of an absolute algebra. The logic of relatives with its relative operations following the laws of the absolute algebra seemed to provide the language for applying the intended general theory of operations to all fields of mathematics and, beyond this, to all fields of knowledge containing formal structures. In this modified conception Schröder regarded arithmetic as part of a "general logic".

---

*Revidierte Fassung eines Vortrages mit dem Titel „Wozu Algebra der Logik? Zum Lebenswerk von Ernst Schröder", gehalten am 13. November 1992 auf dem III. Österreichischen Symposium zur Geschichte der Mathematik in Neuhofen an der Ybbs. Eine frühere Fassung wurde am 14. September 1992 unter dem Titel „Arithmetik – Logik – absolute Algebra. E. Schröders Suche nach einer universalen Theorie der Verknüpfungen" auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Berlin vorgetragen. Ich danke Christian Thiel (Erlangen), mit dem verschiedene Vorfassungen intensiv diskutiert werden konnten. Für kritische Bemerkungen danke ich auch Gottfried Gabriel (Bochum), Detlef Spalt (Göttingen), Moritz Epple (Mainz) und Nathan Houser (Indianapolis, Ind.).

1 Ernst Schröder und sein Werk

1901 erschien in Berlin-Charlottenburg der Prachtband *Geistiges Deutschland*, in dem Porträts bedeutender deutscher Wissenschaftler zusammen mit kurzen Lebensbeschreibungen veröffentlicht wurden. Zu dieser Sammlung steuerte auch Ernst Schröder (1841–1902) eine in der dritten Person gehaltene autobiographische Notiz bei.[1] In der dort gegebenen Bestandsaufnahme seines wissenschaftlichen Schaffens teilt er seine Arbeiten in drei Bereiche ein: Er nennt zunächst „eine [...] Anzahl von Abhandlungen über einige seine Wissenschaft betreffende Tagesfragen". In die zweite Gruppe fallen die Arbeiten zur Schaffung einer „absoluten Algebra",

> d. h. zu einer allgemeinen auch über das Assoziationsgesetz hinausgehenden Theorie der Verknüpfung. Von Arbeiten wie diese, SCHRÖDERS ureigenstes Forschungsobjekt repräsentierend, ist noch wenig veröffentlicht.

Das dritte Gebiet stellen die Arbeiten dar, „die sich auf eine Reform und Weiterentwicklung der Logik beziehen." In diesen Arbeiten habe er versucht,

> die Logik zu einer rechnerischen Disziplin zu gestalten, insbesondere die relativen Begriffe einer exakten Behandlung zugänglich zu machen und durch Emanzipation von den Gewohnheitsfesseln der Wortsprache fortan auch auf dem Gebiete der Philosophie der „Phrase" jeden Nährboden zu entziehen. Es soll damit eine wissenschaftliche Universalsprache angebahnt werden, die von den linguistischen Bestrebungen à la Volapük himmelweit verschieden, sich mehr als Zeichen- wie als Lautsprache darstellt.

Auch die Arbeiten an diesem dritten Gebiet waren 1901 noch nicht zuende gebracht. Schröder weist selbst auf „ein umfangreiches Werk" hin, das seit 1890, also damals bereits seit 11 Jahren, der Vollendung entgegensehe. Er spricht hier die auf drei Bände mit fünf Teilen projektierten *Vorlesungen über die Algebra der Logik* an, von denen er zu Lebzeiten nur drei Teile veröffentlichen konnte (Schröder *1890*, *1891*, *1895*). Ein weiterer Teil wurde *1905* im Auftrag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von Karl Eugen Müller aus dem Nachlaß herausgegeben, der geplante zweite Teil des dritten Bandes über die *Algebra und Logik der Relative* ist nie erschienen, und etwaige Vorarbeiten sind mit Schröders Nachlaß vernichtet worden.

Schon diese wenigen Zitate machen deutlich, daß die übliche Charakterisierung Schröders als Algebraiker der Logik[2] zwar historisch insofern gerechtfertigt ist, als seine „gewichtigsten" Arbeiten den Bereich der Algebra der Logik betrafen, sie aber

[1] Schröder *1901*. Zur Biographie vgl. zuletzt Dipert *1991*. Die autobiographische Notiz stellt die wichtigste Quelle zur Biographie Schröders dar, nachdem sein umfangreicher Nachlaß im Zweiten Weltkrieg vernichtet worden ist. Vgl. zum Schicksal des Schröderschen Nachlasses Dipert *1991*, 17–21, und Peckhaus *1988*.

[2] Schröder gilt nach allgemeiner Ansicht als Vollender der „Booleschen Periode" in der mathematischen Logik — so z. B. Bocheński *1956*, 314. Bocheński gibt dort mit 1895 ein falsches Erscheinungsjahr für den ersten Band von Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*1890*) an.

kaum Schröders eigenen Vorstellungen über sein zentrales Arbeitsgebiet entspricht: Sein „ureigenstes Forschungsobjekt" ist die „absolute Algebra", ein Gebiet, das, zumindest von den Ausgangsfragen und Grundannahmen der modernen abstrakten Algebra bzw. der *Universal Algebra* ähnlich ist.[3] Und wenn Schröders erster Biograph und langjähriger Freund, der Freiburger Mathematiker Jakob Lüroth, von den Schröders Leistungsfähigkeit hemmenden, auch psychischen Problemen spricht, die ihn daran gehindert hätten, „das grosse Lebenswerk seiner Logikvorlesungen zu vollenden,"[4] so ist diese Aussage nur historisch zufällig korrekt. Schröder selbst sah die Vollendung seiner *Vorlesungen* als einen Zwischenschritt an, der zu bewältigen war, bevor er sich wieder seinen algebraischen Aufgaben widmen konnte.

Doch wie stehen Algebra und Logik im Werk Schröders zueinander? Die zitierten Stellen legen die Vermutung nahe, als handele es sich um zwei disparate, voneinander unabhängige Forschungsgebiete. Daß dies nicht so ist, darüber belehrt uns Schröder ebenfalls in der Autobiographie:

> Neigung zum Schematisieren und das Streben, die Praxis jeweils zur Theorie zu verdichten, wiesen SCHRÖDER darauf hin, der Physik durch Vervollkommnung der Mathematik vorzuarbeiten. Dies bedingte Vertiefung — wie der Mechanik und Geometrie — so vor allem der Arithmetik, und im Anschluss hieran stellte sich ihm allmählich die Notwendigkeit heraus, erst die Quelle aller dieser Disziplinen, die Logik, zu reformieren.

Der universelle Anspruch Schröderscher Wissenschaft wird deutlich. Sie diente der Schaffung der Voraussetzungen für die Grundlegung der Physik als der Wissenschaft der materialen Natur durch „Tieferlegung der Fundamente", um eine später von Hilbert benutzte, berühmt gewordene Metapher zu verwenden (Hilbert *1918*, 407). Wenn Schröder die Logik als „Quelle aller dieser Disziplinen" bezeichnet, so ist dies Ausdruck eines im 19. Jahrhundert durchaus nicht ungewöhnlichen, breiten Logikverständnisses. Wird die Logik als die Lehre von der menschlichen Denktätigkeit aufgefaßt, so ergibt sich ein Primat der Logik gegenüber z. B. der Mathematik trivialerweise, denn wenn die Tätigkeit des Mathematikers eine Art des Denkens ist, so fällt sie damit natürlich auch in den Kompetenzbereich der Logik. Rudolf Hermann Lotze, dessen Logikbuch Schröder aufmerksam studierte, sieht in der Mathematik einen „sich für sich selbst fortentwickelnden Zweig der allgemeinen Logik" (Lotze *1874*, § 18, 34), eine Formulierung, die sich fast wörtlich auch in Schröderschen Schriften findet.[5]

---

[3]Alfred North Whitehead knüpft in seinem *Treatise on Universal Algebra* (*1898*) an Schröder an, bezieht sich aber nicht auf dessen universal-algebraische Arbeiten, sondern nur auf den *Operationskreis des Logikkalkuls* (Schröder *1877*).

[4]Lüroth *1903*, 263 (*1966*, XVII).

[5]Schröder schreibt z. B. in seinem Beitrag zum Ersten Internationalen Mathematiker-Kongreß in Zürich „Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien" (*1898*, 149): „Als eine vielleicht noch nicht allgemein geteilte persönliche Ansicht möchte ich beiläufig aussprechen, dass mir die reine Mathematik bloss als ein *Zweig* der *allgemeinen Logik* erscheint."

2 Das Programm der „absoluten Algebra"

Es scheint jedenfalls lohnend, das Verhältnis zwischen „absoluter Algebra" und „Algebra der Logik" im Werk Schröders einmal näher zu untersuchen und bei der „absoluten Algebra" anzusetzen, die Schröder ja selbst herausgehoben hat. Dabei wird sich zeigen, daß Schröder den formalen Teil der Logik, der sich unter Verwendung einer symbolischen Notation als „rechnende Logik" und damit als „exakte Logik" gestalten läßt, als *Modell* einer umfassenderen, von ihm in der letzten Ausbauphase „absolut" genannten formalen Algebra auffaßte. Das Programm der „absoluten Algebra" formulierte Schröder in dem *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, das er noch als Realgymnasialprofessor in Baden-Baden (*1873*) veröffentlichte.[6] Es handelt sich um eine ursprünglich auf vier Bände angelegte Zahlentheorie, deren erster und einzig erschienener Band den Untertitel *Die sieben algebraischen Operationen* trägt und der die drei „direkten" algebraischen Operationen Addieren, Multiplizieren und Potenzieren mit ihren Inversen Subtrahieren, Dividieren, Radizieren und Logarithmieren behandelt. Eine erste Ausarbeitung des Programms findet sich in der ein Jahr später erschienenen Programmschrift *Über die formalen Elemente der absoluten Algebra* (*1874*). Weiterentwicklungen und Anwendungen hat Schröder in einigen kleineren Arbeiten, aber auch in umfänglichen Aufsätzen, die Titel tragen wie „Ueber eine eigenthümliche Bestimmung einer Function durch formale Anforderungen" (*1881*), „Tafeln der eindeutig umkehrbaren Functionen zweier Variablen auf den einfachsten Zahlengebieten" (*1887a*) oder „Über Algorithmen und Calculn" (*1887b*), veröffentlicht, aber auch in den Anhängen 4 bis 6 des ersten Bandes seiner *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*1890*, 616–697).

Im einleitenden ersten Kapitel seines *Lehrbuchs* von *1873* definiert Schröder die (reine) Mathematik als „Lehre von den Zahlen" und geht damit von der traditionellen Auffassung der Mathematik als Größenlehre ab.[7] Er führt den Zahlbegriff ein, läßt ihn aber weitgehend offen, weil „dieser selbst eine fortschreitende und noch nicht abgeschlossene Erweiterung oder Entwickelung" erfährt (*1873*, 2).[8] Unter Hinweis auf die Entdeckung hyperkomplexer Zahlsysteme bemerkt er (*1873*, 2), daß nichts der Einführung noch anderer Zahlen im Wege stehe, „es sei denn der Umstand, dass ihre Anerkennung und Darlegung ihrer Zweckmässigkeit mitunter erst erstritten werden müsste." Die Zahl sei jedenfalls ein willkürlich von uns geschaffenes Zeichen zur Erreichung unterschiedlichster, nur schwer unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu bringender Zwecke.[9] Diese Überlegungen finden später Eingang in die sehr allgemei-

[6]Vgl. die Analyse der formal-algebraischen Überlegungen Schröders in Mehrtens *1979*, 29–62; dort unter Herausarbeitung von Schröders Antizipationen des Verbandsbegriffs.

[7]Schröder *1873*, 2. Schröder unterscheidet sich hier auch von dem von ihm sonst regelmäßig konsultierten *Lehrbuch der Arithmetik* von Hermann Grassmann (*1861*). Dort wird Mathematik als „Wissenschaft von der Verknüpfung der Grössen" erklärt (H. Grassmann *1861*, 1). Wie Schröder hebt Grassmann jedoch den Verknüpfungsaspekt und damit die strukturellen Eigenschaften der Arithmetik hervor.

[8]Detlef Spalt verdanke ich den Hinweis, daß gerade im Jahr zuvor mit den Arbeiten von Cantor (*1872*), Dedekind (*1872*) und Heine (*1872*) wichtige Ergebnisse in der Theorie der reellen Zahlen erzielt worden waren. Vgl. auch Dauben *1979*, 47*ff.*

[9]Später wird Richard Dedekind die Formel prägen: „Die Zahlen sind freie Schöpfungen des

ne, nun nicht mehr auf die Mathematik beschränkte Definition des „Zahlengebietes" in der Programmschrift: Als grundlegend für die absolute Algebra hebt Schröder dort die Annahme der Gegebenheit einer „unbegrenzten Mannigfaltigkeit von Objecten (irgend einer Art)" hervor (*1874*, 3),

> welche begrifflich — durch ein Merkmal oder eine Grenze — von einander unterschieden sind. Beliebige Elemente dieser gedachten Mannigfaltigkeit werden mit Buchstaben a, b, c ... bezeichnet. [...] Die gegebene Mannigfaltigkeit kann ein *Zahlengebiet* — im weitesten Sinne des Wortes — genannt werden.

Die hier eingeführte Benennung des betrachteten Gegenstandsbereiches mit „Zahlengebiet"[10] ist weitgehend willkürlich, denn als Beispiele von solchen, „eine Mannigfaltigkeit constituirenden Objecten" nennt Schröder „Eigennamen, Begriffe, Urtheile, Algorithmen, Zahlen [der reinen Mathematik], Grössen- und Operationssymbole, Punkte und Punktsysteme, oder irgend welche geometrische Gebilde, Quantitäten von Substanzen, u. a. m." (Schröder *1874*, 3).

Zur formalen Algebra „im engsten Sinne des Wortes" rechnet Schröder (*1873*, 233)

> diejenigen Untersuchungen über die Gesetze algebraischer Operationen [...], welche sich auf lauter allgemeine Zahlen eines unbegrenzten Zahlengebietes beziehen, *über dessen Natur selbst weiter keine Voraussetzungen gemacht sind.*

Sie leiste damit die Vorarbeit „für die Betrachtung der verschiedenartigsten speciellen Zahlensysteme und Rechnungsoperationen, welche zu besondren Zwecken ersonnen werden mögen" (*1873*, 233). Den Gegenstand der formalen Algebra faßt Schröder im *Lehrbuch* in einem Katalog von vier Punkten zusammen (293*f*.):

(1) Die formale Algebra stellt in systematischer Vollständigkeit alle Annahmen zusammen, die überhaupt dazu dienen können, Verknüpfungsoperatoren für Zahlen eines Zahlengebietes zu definieren.

(2) Die formale Algebra stellt zu jeder Prämisse bzw. Prämissenkombination das vollständige System der Folgerungen auf („Separation" der Folgerungsmengen).

(3) Die formale Algebra untersucht, welche in sich abgeschlossene Zahlensysteme sich durch die definierten Operationen konstruieren lassen.

(4) Schließlich hat die formale Algebra zu entscheiden, „welche geometrische, physikalische oder überhaupt vernünftige Bedeutung diesen Zahlen und Operationen zukommen, welches reale Substrat ihnen unterlegt werden kann" (294).

---

menschlichen Geistes, sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen" (Vorwort zu Dedekind *1888*, zitiert nach der 10. Aufl., III).

[10] Das Wort selbst wurde von Schröder in anderem Zusammenhang allerdings schon in *1873*, 233, verwendet.

Erst nach Erledigung der Schritte (3) und (4) hat sich die formale Algebra zur *absoluten Algebra* fortentwickelt. Die Schritte zeigen zugleich, wie weitgehend Schröder bereits die Ansätze der modernen Modelltheorie antizipiert hat. Bezüglich der Operationen in den betrachteten Zahlengebieten wird angenommen, „dass es Operationen gebe, mittelst welcher durch Verknüpfung zweier Objecte ein drittes gebildet werden kann, das der nämlichen Mannigfaltigkeit zuzuzählen ist.“[11] Aus der Menge der möglichen Verknüpfungen greift Schröder, zunächst noch ohne Angabe von Auswahlkriterien, die nicht-kommutative „symbolische Multiplication“ heraus,[12] deren Ergebnis er durch

$$c = a \,.\, b = ab$$

charakterisiert.[13] Wegen der Nicht-Kommutativität führt Schröder zwei inverse Operationen ein:

$$\begin{array}{ll} \text{die Messung} & b \,.\, (a : b) = a \\ \text{und die Teilung} & \frac{a}{b} \,.\, b = a\,. \end{array}$$

Eine direkte Operation zusammen mit ihren Inversen nennt Schröder „Operationsstufe“.[14] In wesentlich kombinatorischen Untersuchungen behandelt er die Verhältnisse zwischen den sog. „Fundamentalgleichungen“, die zwischen den auf der Operationsstufe möglichen einfachen „Elementarausdrücken“ gebildet werden. Er stellt beispielhaft das Formelsystem O_1 für die Multiplikation und Division der reellen Zahlen auf[15] und bemerkt schließlich, daß u. a. auch *logische Addition* und *logische Multiplikation* von *Begriffen* „(oder auch Individuen)“ und von *Urteilen* „(desgl. auch Algorithmen)“ den Gesetzen von O_1 unterliegen (*1874*, 25).

[11]Schröder *1874*, 4. Es sei hier auf eine Analogie zu der Schröder offenbar unbekannten Definition der Permutationsgruppen von Arthur Cayley hingewiesen, der schon 1854 unter Hervorhebung erster Anwendungen der Idee der Gruppe auf Permutationen und Substitutionen durch Galois geschrieben hatte: “A set of symbols, $1, \alpha, \beta, \ldots$ all of them different, and such that the product of any two of them (no matter in what order), or the product of any one of them into itself belongs to the set, is said to be a *group*” (Zeichensetzung nach der Originalausgabe Cayley *1854*, 41, wieder in Cayley *1889*, 124; zitiert auch bei Wussing *1969*, 172*f*.; vgl. ebd., Anm. 225, S. 223*f*.).

[12]Schröder führt diesen „Operationstypus“ schon in seinem *Lehrbuch* ein (*1873*, 139), ohne allerdings die Bezeichnung „symbolische Multiplikation“ zu verwenden. Die Nichteindeutigkeit der inversen Operationen behandelt er ebenfalls schon im *Lehrbuch* (139–179).

[13]Schröder setzt in seinen frühen Arbeiten das Multiplikationszeichen allgemein auf die Grundlinie.

[14]Schröder *1874*, 5. Schröder hatte in seinem *Lehrbuch* Addition und Subtraktion als Operationen erster Stufe, Multiplikation und Division als Operationen zweiter und Elevation (Potenzieren und Exponenzieren), Radizieren und Logarithmieren als Operationen dritter Stufe eingeführt (vgl. Schröder *1873*, 119). Diese Terminologie findet in seinem ersten Logikbuch, dem *Operationskreis des Logikkalkuls*, eine Fortsetzung, wo die logischen Operationen Multiplikation (Determination) und Addition (Kollektion) samt ihren Inversen Division (Abstraktion) und Subtraktion (Exzeption) die beiden „Operationsstufen“ des „Operationskreises“ der Logik bilden (Schröder *1877*, 2*f*.).

[15]Das Formelsystem O_1 ist tatsächlich umfassender als das System für die Multiplikation und Division der reellen Zahlen, da in letzterem mit dem Ausschluß der Division durch 0 eine weitere Spezialisierung vorgenommen werden muß. Vgl. Schröder *1887*, 232.

3 Erste logische Elemente

Diese Bemerkungen zeigen, daß Schröder in der Programmschrift (*1874*) von der Anwendbarkeit formal-algebraischer Ergebnisse auf die Logik überzeugt war. Bezüge zur Logik tauchen aber auch an anderen, früheren Stellen auf. Sie ergeben sich schon aus der naiven Definition der Menge, die Schröder seiner konstruktiven, über die „Zählbarkeit" laufenden Einführung der natürlichen Zahlen zugrundelegte. Unter „Menge" versteht Schröder die gedankliche Verbindung mehrerer Einheiten, wobei ein jedes der zu zählenden Objekte eine „Einheit" ist, jeweils symbolisiert durch eine „Eins" bzw. einen „Einer" (*1873*, 5). Von diesem auf Kollektionen von Einheiten restringierten Mengenbegriff unterscheidet er Zusammenfassungen verschiedener Lösungen einer Gleichung oder Ausdrücke, die die möglichen Werte („Wertgemeinschaft") eines, wie Schröder ihn nennt, „vieldeutigen Ausdrucks" wie $\sqrt{a}$ charakterisieren. Schröder stellt sich das Problem, das Verhältnis z. B. in den reellen Zahlen zwischen dem Ausdruck $\sqrt{9}$ und jeder seiner beiden Basen $+3$ und -3 zu bestimmen (*1873*, 27). Für ihn liegt hier das logische Verhältnis der Überordnung eines „Generalwertes" über seine „Partikularwerte" vor, das der Ordnung eines weiteren Oberbegriffs über einen engeren Unterbegriff, einer Gattung über ihre Arten oder der Arten über ihre Individuen entspricht. Zur Darstellung dieser Umfangsverhältnisse führt er fünf logische Relationen ein, darunter die Gleichung und schon hier die in seinen späteren Schriften zur Logik so zentralen Subsumtionsrelationen $\preccurlyeq$ und $\succcurlyeq$ ($28f.$):

A sei ein „vieldeutiger" Ausdruck, der Werte $a, a', a'', \ldots$ annehmen kann. Dann gelten folgende Verhältnisse:

$$\textit{Superordination} \quad A \succcurlyeq \left\{ \begin{array}{l} a \\ a' \\ a'' \\ \vdots \end{array} \right. ,$$

Beispiele: Metall $\succcurlyeq$ Silber; $\sqrt{9} \succcurlyeq -3$.

$$\textit{Subordination} \quad \left. \begin{array}{l} a \\ a' \\ a'' \\ \vdots \end{array} \right\} \preccurlyeq A ,$$

Beispiele: Gold $\preccurlyeq$ Metall; $3 \preccurlyeq \sqrt{9}$.

$$\textit{Koordination} \quad a \mathrel{\succcurlyeq\!\!\!\!\preccurlyeq} a' \mathrel{\succcurlyeq\!\!\!\!\preccurlyeq} a'' \mathrel{\succcurlyeq\!\!\!\!\preccurlyeq} \ldots ,$$

Beispiele: Gold $\mathrel{\succcurlyeq\!\!\!\!\preccurlyeq}$ Silber [bezüglich Metall]; $3 \mathrel{\succcurlyeq\!\!\!\!\preccurlyeq} -3$ [bezüglich $\sqrt{9}$]. Schröder ist sich der Defizienz dieses Symbols bewußt: Es drücke nur die Existenz irgendeiner Gattung aus, zu der die Werte als Arten gehörten. Einen „genaueren Sinn" erhalte das Zeichen erst, wenn der die Individuen umfassende Oberbegriff genannt werde (28). Schröder fehlt hier allerdings noch das symbolische Instrumentarium, um den bemerkten Mangel zu beheben. Schröder hätte z. B. das Verknüpfungszeichen zur Symbolisierung des Bezuges indizieren können.

Eine *Gleichheit* zwischen zwei Begriffen A und B ist für Schröder dann gegeben, wenn beide dem Inhalt und Umfang nach übereinstimmen. Im Schröderschen Beispiel sind die „Generalwerthe zweier Ausdrücke" gleich, wenn „erschöpfend und ausschliesslich die nämlichen Specialwerthe von dem einen wie von dem andern Ausdruck angenommen werden können" (29), z. B. in den reellen Zahlen $\sqrt{9} = \sqrt[4]{81}$.

Als letzten Relator führt er schließlich das Zeichen „(=)" für „Übereinstimmung in einem bzw. gewissen Werten" oder „*Korrelation*" ein (29). Seien A und B vieldeutige Ausdrücke, so heißen A und B korrelativ zueinander, wenn sie mindestens einen Wert (Unterbegriff, Individuum) gemeinsam haben. Schröder reklamiert für sich die Priorität dafür, erstmals einen „Kunstausdruck" für das partikular-affirmative Urteil in die Logik eingeführt zu haben (29). Die von Schröder stets betonte mnemotechnische Komponente des geklammerten Gleichheitszeichens leuchtet nicht gleich ein. Schröder motiviert die Auswahl mit der Analogie zum Koordinationszeichen. Während „ ⋇ " ausdrückt, daß die links und rechts des Zeichens stehenden Ausdrücke einem (unbestimmt gelassenen) Oberbegriff gemeinschaftlich *unter*geordnet sind, soll das Korrelationszeichen durch Änderung des Richtungssinnes der Klammern veranschaulichen, daß die notierten Ausdrücke gemeinschaftlich bestimmten Werten *über*geordnet sind.

Schröder unterscheidet hier wie auch in seinen späteren logischen Werken *nicht* zwischen der Klasseninklusion und der Elementbeziehung. Dies ist im Sinne seiner formalen Auffassung der verwendeten Zeichen konsequent, führt aber im Falle singulärer Klassen auf Widersprüche. Schon Gottlob Frege hat dies zum wesentlich Kritikpunkt seiner ausführlichen Besprechung des ersten Bandes der Schröderschen *Vorlesungen* gemacht und gefordert (Frege *1895*, 455*f.*):

> Es sind auseinanderzuhalten
> a) die Beziehung, in der ein Gegenstand (Individuum) zu dem Umfange eines Begriffes steht, wenn er unter den Begriff fällt (*Subter*-Beziehung);
> b) die Beziehung, in der ein Umfang eines Begriffes zu dem Umfange eines Begriffes dann steht, wenn der erste Begriff dem zweiten untergeordnet ist (*Sub*-Beziehung).

Schröder betont (*1873*, 29), daß bei zusätzlicher Einführung der *Negation* eine vollständige Terminologie geschaffen sei zur Darstellung von Begriffsumfangsverhältnissen mit Hilfe von Formeln, „die sich dem Schema der sonstigen mathematischen Zeichensprache möglichst innig anschmiegen und in den ganzen Zeichenapparat harmonisch einreihen." Auch das mathematische Substitutionsprinzip identifiziert er mit einem logischen Prinzip, dem *dictum de omni et nullo*.[16] Während Charles S. Peirce schon *1870* mit dem „Illations"-Zeichen „ $\prec$ " ein Symbol eingeführt hatte, das er als "a basic and primitive relation subject to various interpretations" auffaßte (Anellis/Houser *1991*, 12) und durch das er insbesondere Klasseninklusion und Implikation ausdrücken konnte, machte Schröder den Schritt von der Begriffs-Subsumtion zur Aussagen-Implikation noch nicht. Ausdrücke, die Subsumtionen enthalten, sind für Schröder logische Urteile (Aussagen). Die Beziehungen zwischen den Urteilen und

[16] Ohne daß Schröder dieses Prinzip allerdings beim logischen Namen nennt.

damit auch die Implikation drückt Schröder allerdings noch verbal aus. Der Gedanke, das Subsumtionszeichen auch in der Aussagenlogik anzuwenden, ist spätestens in der Programmschrift angelegt, wenn Schröder von der Beliebigkeit der betrachteten „Zahlengebiete" spricht, deren „constituirende Objecte" u. a. Eigennamen, Begriffe oder Urteile sein können (Schröder *1874*, 3).

Die logischen Ausführungen in der Einleitung des *Lehrbuchs* faßte Schröder ab, ohne noch von irgendwelchen Arbeiten Kenntnis genommen zu haben, in denen vor ihm symbolisch-logische Methoden angewendet worden waren. Erst bei Fertigstellung eines späteren Druckbogens bekam Schröder Robert Grassmanns *Formenlehre oder Mathematik* von *1872* zu Gesicht, die dieser unter Mitwirkung seines Bruders Hermann verfaßt hatte, dessen *Lehrbuch der Arithmetik* (*1861*) Schröder verschiedentlich heranzog. Schröder sieht in Grassmanns Logik seine eben dargestellten Überlegungen zur Symbolisierung von Begriffsumfangsverhältnissen antizipiert. Wichtiger aber ist, daß ihm erst durch Grassmanns Werk die algebraische Struktur der logischen Verknüpfungsoperationen Konjunktion und Adjunktion bewußt wird und dies zunächst durchaus über die Entdeckung der Analogie zwischen Logik und Arithmetik. Schröder bemerkt, daß sich Grassmann des Plus-Zeichens für die kollektive Zusammenfassung (Adjunktion) bediene, daß er „dieselbe geradezu als eine Addition" auffasse, „man könnte sagen eine ‚logische Addition' — die dann ausser den Eigenschaften der gewöhnlichen (numerischen) Addition auch noch die Grundeigenschaft $a + a = a$ besitzt," und damit der dualen Form des von Grassmann unabhängig von Boole gefundenen *Law of Duality* genügt.[17] „Besonders interessant und neu war mir", so schreibt Schröder weiter, „Grassmanns Behandlung der Multiplication in der Logik." Schröder fällt auf, daß der Addition logischer Begriffsumfänge die Multiplikation als Addition der Inhalte bzw. der Merkmale von Begriffen gegenübergestellt ist. „Dieses Verfahren", schreibt Schröder (*1873*, 146),

> kann in der That nicht befremden, wenn man bedenkt, dass ja die Grundeigenschaften der Addition und die der Multiplication wesentlich dieselben sind, dass beide Operationen nur auf dem Gebiet der gewöhnlichen Arithmetik ein bereits feststehendes Verhältniss zu einander haben und dass man daher auf neuen Gebieten von vornherein zwischen beiderlei Auffassungsweisen die Wahl hat.

Diese Stelle markiert die Entdeckung der Analogie zwischen algebraischer und logischer Struktur, die sich in Folge von Schröders Umorientierung auf formal-algebraische Untersuchungen zu der Überzeugung von der Identität dieser Strukturen verdichtete. Diese Überzeugung findet allerdings erst in der 1874 veröffentlichten Programmschrift ihren Ausdruck, wo Schröder das Dualitätsgesetz für die symbolische Multiplikation als mögliche einfache Gleichung eines formal-algebraischen Algorithmus aufführt und logische Addition und Multiplikation von Begriffen als partikulare Lösungen bezeichnet. Er erweist Robert Grassmann die Reverenz, bemerkt aber, daß er „kürzlich" erfahren habe, daß die Gesetze dieser logischen Operationen schon vorher von George Boole in seinem „klassischen Werk" *An Investigation of the Laws*

[17] In Booles Logiksystem gilt diese Form wegen der exklusiven Auffassung der logischen Addition nicht.

of Thought (*1854*) entwickelt worden seien. Schröder hat also erst 1873/74 von der britischen Algebra der Logik Kenntnis genommen.

4 Logik als Modell der absoluten Algebra

Der weitere Gang von Schröders wissenschaftlicher Tätigkeit ist durchaus konsistent mit den Weichenstellungen in seinen frühen Arbeiten. Den großen Plan der absoluten Algebra im Hintergrund widmete er sich aber zunächst der Analyse eines Modelles: der Logik. In seinem *Operationskreis des Logikkalkuls* (*1877*) behandelte Schröder erstmals ausschließlich die Logik, indem er den Booleschen Logikkalkül interpretierte und modifizierte. Das Schwergewicht legte er auf die Darstellung der Dualität von logischer Addition und logischer Multiplikation und damit die algebraische Strukturgleichheit dieser Operationen. Die aufgestellte „Algebra der Logik" ist im wörtlichen Sinne nicht die Logik selbst, sondern deren *Struktur*. Schröder schrieb den *Operationskreis* noch auf Grundlage einer recht rudimentären Literaturkenntnis, denn außer den Quellenwerken von Boole und Grassmann hatte Schröder nur solche Literatur zur Kenntnis genommen, die zuvor in den noch nicht lange erscheinenden *Jahrbüchern über die Fortschritte der Mathematik* angezeigt worden war. Die *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*1890–1905*) dagegen lesen sich als profunde Zusammenschau der damals erschienenen Logikliteratur. Auch dort trennt Schröder den Gegenstand der Logik von ihrer Struktur. Der Kalkül wird als „Hülfsdisciplin" bezeichnet, der der eigentlichen Logik voraus- oder parallel mit ihr einhergeht (*1890*, 157). Im dritten Band der Vorlesungen, der mit *Algebra und Logik der Relative* (*1895*) überschrieben ist, schafft Schröder eine weitere Verallgemeinerung, wobei er nicht müde wird, den logische und algebraische Aspekte umfassenden Doppelcharakter einer Theorie der Relative zu betonen. In dem einzig erschienenen ersten Teil behandelte er lediglich die algebraische Seite. Die Logik der Relative, die den Bogen zur absoluten Algebra geschlagen hätte, plante er für den zweiten Teil, den er aber vor seinem Tod nicht mehr fertigstellen konnte.

4.1 Die Nichtbeweisbarkeit der zweiten Subsumtion des Distributivgesetzes

Die enge Verbindung von formaler Algebra und Algebra der Logik kann beispielhaft gezeigt werden an Schröders Beweis[18] der „Nichtbeweisbarkeit der zweiten Subsumtion des Distributivgesetzes" im logischen Kalkül, der vorbereitet wurde durch einen in der Literatur vielbeachteten Austausch zwischen dem amerikanischen Universalisten Charles S. Peirce und Ernst Schröder.[19] Nathan Houser hat in seinem Aufsatz "Peirce and the Law of Distribution" die Peirceschen Überlegungen minutiös rekonstruiert.[20] Die Schrödersche Behandlung des Gegenstandes ist bisher lediglich von Herbert Mehr-

[18] Schröder führt genauer gesagt zwei Beweise, von denen hier nur der erste behandelt wird.

[19] Zum Verhältnis zwischen Peirce und Schröder vgl. Barone *1966* und Houser *1991a*.

[20] Houser *1991b*. Die Arbeit geht auf Houser *1985* zurück.

tens in seinem Buch *Die Entstehung der Verbandstheorie* diskutiert worden.[21] Daß sie nicht in einem mit den Peirceschen Beiträgen vergleichbaren Maße von der historischen Forschung diskutiert worden ist, mag an Schröders Methode gelegen haben, die Edward Vermilye Huntington schon 1904 in seinem klassischen Aufsatz "Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic" als "a very complicated method" (*1904*, 291, Fn. †) kennzeichnete. Es ist aber gerade die Schrödersche Methode, die hier interessiert: Schröder führt seinen Beweis nämlich durch Angabe eines Modells, das den bis dahin entwickelten Theoremen seines Kalküls folgt, für das aber der in Frage stehende Teil des Distributivgesetzes nicht erfüllt ist. Da Schröder dieses Modell, den „*logische[n] Kalkul mit Gruppen*, z. B. von Funktionalgleichungen, Algorithmen oder Kalkuln", als Modell der formalen Algebra konstruiert, eignet sich die Darstellung dieses Beweises auch dazu, Schröders Vorstellungen von einer allgemeinen algebraischen Strukturtheorie zu verdeutlichen. Dafür ist es notwendig, Schröders Vorgehen im ersten Band der *Vorlesungen* kurz zu skizzieren und zuvor einige Besonderheiten der Schröderschen Terminologie darzulegen: Eine direkte Operation mit ihren Inversen heißt „Operationsstufe". Mehrere Operationen mit ihren Inversen bilden einen „Operationskreis". Diejenigen Formeln, die entsprechend den Substitutionsregeln gebildet sind, die in den Fundamentalgleichungen (Prämissen) einer Operationsstufe ausgedrückt sind, werden „Algorithmen" genannt. Ein Algorithmus ist also in dieser Terminologie kein Rechen*verfahren*, sondern eine Formelmenge. Ein „Kalkül" ist die Formelmenge, die aus einem Operationskreis folgt. Der arithmetische Kalkül z. B. ist ein Kalkül mit sieben Operationen auf drei Operationsstufen, der logische Kalkül besitzt vier Operationen auf zwei Operationsstufen.

Seine Theorie des identischen bzw. logischen Kalküls wendet Schröder in Bd. 1 seiner *Vorlesungen* auf *Gebiete* einer Mannigfaltigkeit von Elementen und auf *Klassen* oder Gattungen von Individuen, also auch auf Begriffsumfänge an (*1890*, 160). Die grundlegende Relation zwischen diesen Gebieten oder Klassen ist die Subsumption, also die Gebiete- oder Klasseninklusion. Schröder leitet die Theoreme seines Kalküls deduktiv aus vorausgesetzten Prinzipien und Definitionen ab, wobei er die Voraussetzungen sukzessive verstärkt. Interessant ist nun die Stellung der Distributivgesetze, also die Frage, welche Voraussetzungen Schröder für den Beweis der Gesetze benötigt. Er setzt als erstes Prinzip die Reflexivität voraus:

Prinzip I $\qquad a \preccurlyeq a$.

„a ist in sich selbst enthalten [...]; a ist untergeordnet oder identisch gleich a" (*1890*, 168).

Das zweite Prinzip ist das der Transitivität (170):

Prinzip II $\qquad$ Wenn $a \preccurlyeq b$ und zugleich $b \preccurlyeq c$, so ist auch $a \preccurlyeq c$.

[21]Mehrtens *1978*, 29–62, vgl. insbesondere seine Darstellung des Schröderschen Beweises 51–56. Die Grundzüge des Beweises stellt auch Randall R. Dipert dar (*1978*, 123–131, Anm. S. 146–148).

Schröder definiert die „identische Gleichheit“ als Antisymmetrie der Subsumtion (184):

Definition (1)	Wenn $a \preccurlyeq b$ und zugleich $b \preccurlyeq a$, dann und nur dann sei $a = b$.

In Definition (2) werden „identische Null“ („Nichts“) und „identische Eins“ („All“) eingeführt (184):

Df. $(2_\times)$	Df. (2_+)
$0 \preccurlyeq a$	$a \preccurlyeq 1$
„0 *nennen wir ein Gebiet*, welches zu jedem Gebiete a in der Beziehung der Einordnung steht.“	„1 *nennen wir ein Gebiet*, zu welchem jedes Gebiet a in der Beziehung der Einordnung steht.“

Schließlich führt Schröder noch in Definition 3 „identische Multiplikation“ (Konjunktion) und „identische Addition“ (Adjunktion) ein (196):

Df. $(3_\times)$	Df. (3_+)
Wenn für gegebene Gebiete a, b und c zugleich gilt	
$c \preccurlyeq a$ und $c \preccurlyeq b$	$a \preccurlyeq c$ und $b \preccurlyeq c$
so sei	
$c \preccurlyeq ab$.	$a + b \preccurlyeq c$.

Die Definitionen $4_{\times,+}$ (202) und $5_{\times,+}$ (205) sind modifizierte Fassungen von $3_{\times,+}$.

Die Distributivgesetze der Konjunktion und der Adjunktion führt Schröder im Zusammenhang mit den „nicht von der Negation handelnden Sätzen“[22] ein, ohne daß also schon die Negation definiert wäre. Sie stehen damit an gleicher Stelle wie in Peirces berühmtem, 1880 veröffentlichten Aufsatz “On the Algebra of Logic”, an dem sich Schröder sehr stark orientierte. Die Distributivitätsprinzipien sind dort unter dem Label „E“ als Theorem 8 notiert (*1880*, 33):

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c) \qquad (a \times b) + c = (a + c) \times (b + c)$$

Peirce schreibt zwischen beide Terme jeweils ein Gleichheitszeichen. In seinem Aussagenkalkül bedeutet dies, daß der rechts vom Gleichheitszeichen stehende Term den links stehenden impliziert und umgekehrt. Peirce bemerkt zu diesen beiden Prinzipien: “They are easily proved [...], but the proof is too tedious to give.” Kurze Zeit

[22]So die Überschrift von § 10.

nach der Veröffentlichung bat Schröder Peirce brieflich um eine Mitteilung des Beweises, die ihm Peirce aber abschlagen mußte, weil er die Notizen zu seinem Aufsatz nicht zur Hand hatte und sich außer Stande sah, den Beweis zu reproduzieren.[23]

Schröder präsentierte daraufhin im September 1883 beim 53. Zusammentreffen der *British Association* in Southport die Mitteilung (*1884*), daß in der Algebra der Logik das Distributivgesetz $a(b+c) = ab + ac$ syllogistisch bewiesen werden könne, aber lediglich als Implikation in einem Sinne, d. h. es könne gezeigt werden, aber auch nur dies, daß der Term $a(b+c)$ den Term $ab+ac$ impliziere — hier hat Schröder offenbar die Terme vertauscht, denn bewiesen werden kann die Implikation in die andere Richtung. Und dies tut Schröder auch im ersten Band seiner *Vorlesungen*, wo er jeweils zwei kurze Beweise für die Theoreme

$$25_\times)\ ab + ac \Subset a(b+c) \quad | \quad 25_+)\ a + bc \Subset (a+b)(a+c)$$

angibt (280). Er kann sich der Bemerkung nicht enthalten, daß sich die Beweise dieser Richtung „in der That leicht, aber gar nicht langwierig, auf dem [schon von Peirce] angedeuteten Wege“ führen lassen (291).

Mit den zur Verfügung stehenden Mitteln, also den bis dahin eingeführten Prinzipien und Definitionen, läßt sich aber die „zweite Subsumtion“

$$26_\times)\ a(b+c) \Subset ab + ac \quad | \quad 26_+)\ (a+b)(a+c) \Subset a + bc$$

nicht beweisen. Schröder kann vielmehr sogar die Unabhängigkeit dieser Sätze von den bisher entwickelten Theoremen aufzeigen. Er macht dies durch Angabe eines Modells, in dem diese Theoreme bis auf $26_{\times,+}$ gültig sind. Dieses Modell ist der erwähnte „logische Kalkul mit Gruppen“. Vor einer Darstellung der Schröderschen Konstruktion müssen aber noch einmal die Grundbegriffe der formalen Algebra skizziert werden, wie sie sich in der modifizierten Fassung von 1890 finden (Schröder *1890*, 617–646). Gegenstand der Untersuchung ist eine Mannigfaltigkeit U von Sätzen (618). Die Sätze dieser Mannigfaltigkeit seien durch arithmetische Formeln, sogenannte „Funktionalgleichungen“ darstellbar. Schröder beschränkt sich auf zweistellige Funktionen $f(a,b)$ mit ihren beiden Inversen $\varphi(a,b)$ und $\psi(a,b)$, wofür er abkürzend die „symbolische Multiplikation“ $a \cdot b$ mit ihren Inversen Messung (Verhältnis) $a : b$ und Teilung $\frac{a}{b}$ schreibt. Die Ausführung dieser Operationen führt jeweils zu eindeutig bestimmten Werten, und Schröder erhält drei untereinander äquivalente Aussagen:

$$ab = c, \quad b = c : a \quad \text{und} \quad a = \frac{c}{b},$$

die sich durch Einsetzung zu sechs Gleichungen mit jeweils zwei schematischen Buchstaben umformen lassen:

$$b = (ab) : a, \quad a = \frac{ab}{b}, \quad a(c:a) = c, \quad a = \frac{c}{c:a}, \quad \frac{c}{b}b = c, \quad b = c : \frac{c}{b}.$$

[23]Einen Beweis unter Benutzung stärkerer Voraussetzungen schickte Peirce mit einem Schreiben vom 14.2.1904 an Huntington, der ihn auch veröffentlichte (*1904*, 300–302). Peirce gesteht in seinem Begleitschreiben ein: “I must confess that I never carefully examined his [i.e., Schröder's] proof, having my table loaded with logical books for the perusal of which life was not long enough” (Huntington *1904*, 300*f*., Fn. *, Zit. 301. Vgl. die ausführliche Darstellung bei Houser *1991b*. Für pointierte Bemerkungen zur Kontroverse vgl. auch Crapo/Roberts *1969* sowie Curry *1977*, 160).

Unter Berücksichtigung der Beliebigkeit von mindestens zweien dieser Werte in den jeweiligen Gleichungen ordnet Schröder diese „Fundamentalbeziehungen" zu einem regelmäßigen Sechseck, in dem die Terme jeweils untereinander und zu dem in der Mitte stehenden b gleich sind (Abbildung 1).

$$
\begin{array}{ccccc}
 & a(b:a) & & \frac{b}{a}a & \\
 & & & & \\
\frac{a}{a:b} & & b & & a:\frac{a}{b} \\
 & & & & \\
 & \frac{ba}{a} & & (ab):a &
\end{array}
$$

Abbildung 1: „Fundamentalrelationen"

Durch diese Gleichungen werden praktisch die Regeln für die Ausführung der symbolischen Multiplikation und ihrer Umkehrungen angegeben. Schröder betrachtet nun einen eingeschränkten Bereich von Funktionalgleichungen und damit einen spezialisierten Algorithmus, nämlich den der „Klasse" $(3,3)$ der „Sorte" $a, b, c = a, b, c$, d. h. diejenigen Gleichungen, in denen auf beiden Seiten jeweils drei verschiedene „allgemeine Zahlen" a, b, c durch jeweils zwei Operationen der betrachteten Operationsstufe, hier der symbolischen Multiplikation mit ihren Umkehrungen, verknüpft werden. Aus dem Bestand der erzeugten Formeln werden diejenigen eliminiert, die Schröder „einerlei" nennt, d. h. Formeln, die durch Buchstabenwechsel aus einer anderen hervorgehen (z. B. wird $cd = dc$ eliminiert, wenn $ab = ba$ vorhanden ist) sowie Formeln, die durch „zyklische Vertauschung" der schematischen Buchstaben entstehen (z. B. wird $\frac{a}{bc} = \frac{c}{ab}$ eliminiert, wenn $\frac{a}{bc} = \frac{b}{ca}$).[24] Schröder erhält so einen Bestand von 990 Gleichungen, die in der Mannigfaltigkeit U enthalten sind. Er hat damit den Punkt (1) seines formal-algebraischen Programms erfüllt, indem er in „systematischer Vollständigkeit" alle Formeln zusammenstellt, die durch die spezielle Verknüpfungsoperation auf dem von ihm betrachteten „Zahlengebiet" erzeugt werden können.

Schröder geht nun bei der Konstruktion seines Modells zur „Separation" über, stellt also zu bestimmten Prämissen oder Prämissenkombinationen das vollständige System der Folgerungen zusammen und separiert damit, in seiner Terminologie, spezielle „Algorithmen".

Schröder muß aber zunächst noch sagen, was es heißt, logische Operationen auf Algorithmen anzuwenden. Der *Subsumtion*sausdruck $A \preccurlyeq B$ besagt, daß das Formelsystem A ein echter Teil des Formelsystems B ist oder mit ihm zusammenfällt (622–624). Das *logische Produkt* $A \cdot B$ bestimmt das Formelsystem, das beiden Algorithmen gemeinsam ist (624–626). Die *logische Summe* $A + B$ greift über die „identische" Summe hinaus, da sie das Formelsystem bestimmt, das nicht nur alle Formeln

[24] Vgl. Schröder *1887*, 235.

von A und von B umfaßt, sondern auch die Formeln, die aus der gemeinsamen Voraussetzung der Prämissen von A und B folgen (626–632). Schematisch läßt sich dies wie in Abbildung 2 veranschaulichen.

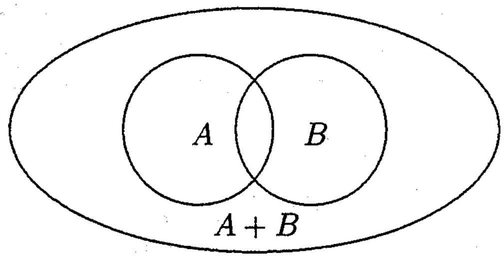

Abbildung 2: „Logische Summe“

Aus dem Bestand von U separiert Schröder zunächst den Algorithmus A_1, d. h. die Gleichungen, die aus dem Assoziativgesetz

$$b(ac) = (ba)c$$

folgen. Er erhält, da die Prämisse ebenfalls zu A_1 gehört, insgesamt 16 Gleichungen. Eine dieser Gleichungen ist z. B.

$$\frac{c}{a}b = c(b : a) .$$

Die Umformung[25] des linken Terms in den rechten geschieht unter Verwendung der beiden Fundamentalrelationen $a(b : a) = b$ und $\frac{c}{a}a = c$:

$$\frac{c}{a}b = \frac{c}{a}(a(b : a)) = \left(\frac{c}{a}a\right)(b : a) = c(b : a) .$$

Die Prämissen des Algorithmus C_1 der kommutativen Operationen in U lauten:

$$ab = ba \ , \quad a : b = \frac{a}{b} .$$

Sie gehören selbst nicht U an, führen aber zu 30, von Schröder explizit angegebenen Gleichungen aus U, z. B.

$$\frac{c : b}{a} = \frac{(\frac{c}{b})}{a} .$$

Die logische Summe von A_1 und C_1 umfaßt alle Gleichungen, die der Kommutativität und der Assoziativität genügen. Dieser Algorithmus O_1 enthält 150 Gleichungen und entspricht dem Algorithmus der arithmetischen Multiplikation.

Schröder zeichnet schließlich noch den Algorithmus C_{00} aus, der aus den Prämissen

$$ab = a : b = \frac{b}{a}$$

[25] Beispiel in Schröder *1873*, 243*f*.

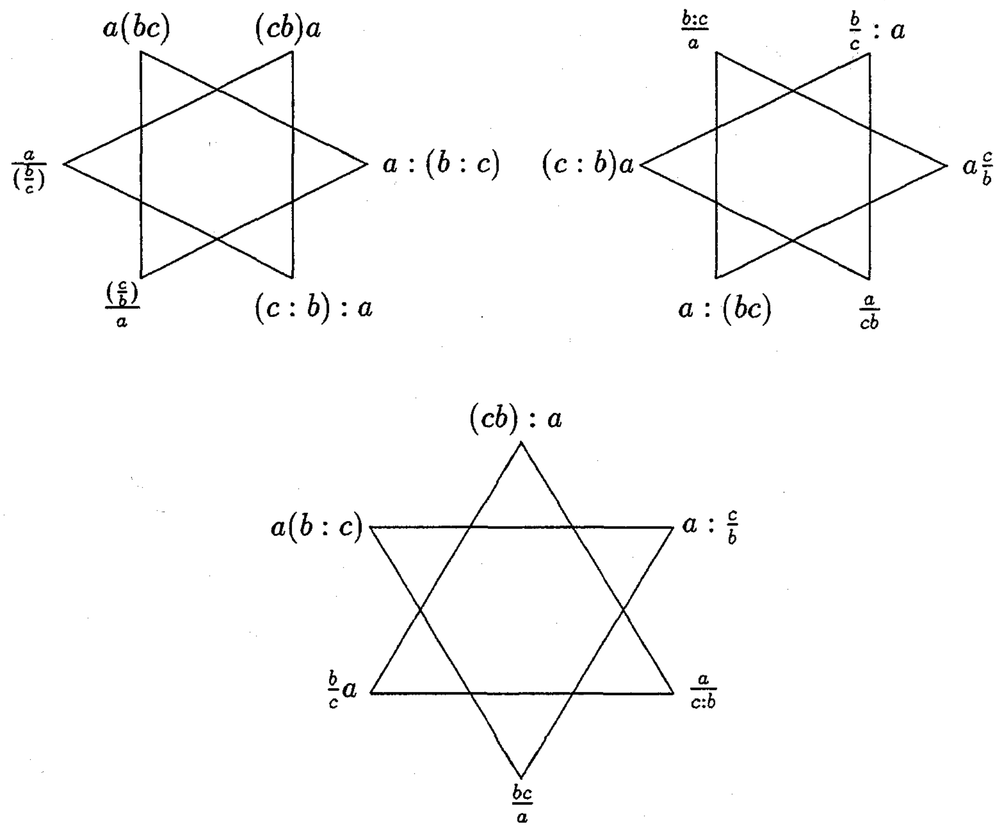

Abbildung 3: Algorithmus C_{00}

folgt und dessen Gleichungen er in einem Schaubild (Abbildung 3) zusammenstellt — die Verbindungslinien zwischen den Termen stehen für Gleichheitszeichen (639). Von diesen 18 Formeln genügen nur zwei,

$$\begin{array}{lrcl} \text{nämlich} & a(b:c) & = & a:\frac{c}{b} \\ \text{und} & \frac{b}{c}a & = & \frac{a}{c:b} \end{array}$$

den Prämissen von O_1. Den Schnitt von O_1 und C_{00} nennt Schröder E_1. Die Umfangsverhältnisse zwischen den eingeführten Algorithmen veranschaulicht Schröder mit einem Diagramm (Abbildung 4).
Dabei sind

$$\begin{array}{lrcl} & A_1 + C_1 & = & O_1 \\ \text{und} & C_{00} \cdot O_1 & = & E_1 \,. \end{array}$$

Der eigentliche Unabhängigkeitsbeweis ist nun recht kurz. Stellt man die problematische Form des Distributivgesetzes für die separierten Algorithmen auf, so erhält man:

$$(A_1 + C_1) \cdot C_{00} \Subset A_1 \cdot C_{00} + C_1 \cdot C_{00} \,.$$

Da die Summe von A_1 und C_1 gleich O_1 ist, beide Algorithmen aber keine Formel

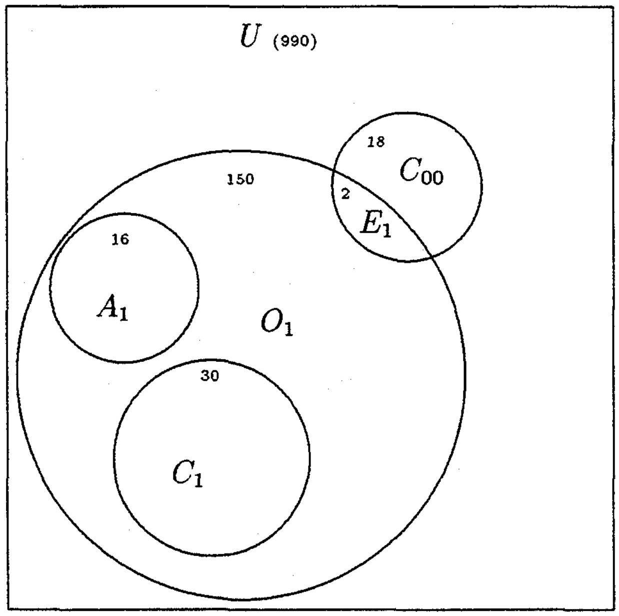

Abbildung 4: Umfangsverhältnisse in U

mit C_{00} gemeinsam haben, ergibt sich

$$\begin{array}{rcllrcl}
O_1 \cdot C_{00} & \preccurlyeq & 0+0 & \text{wg.} & A_1 + C_1 & = & O_1 \\
 & & & \text{und} & A_1 \cdot C_{00} & = & 0 \\
 & & & \text{und} & C_1 \cdot C_{00} & = & 0 \\
E_1 & \preccurlyeq & 0 & \text{wg.} & O_1 \cdot C_{00} & = & E_1 \\
 & & & \text{und} & \multicolumn{3}{l}{\text{Dualitätsgesetz}} \\
\text{also } E_1 & = & 0 & \text{wegen} & \multicolumn{3}{l}{\text{Df. } (2_\times) \text{ und Df. } (1)}
\end{array}$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, daß E_1 zwei Gleichungen enthält.[26] Welche Konsequenzen zieht Schröder? Zunächst stellt er fest (291),

> dass statt des *einen* eigentlich *zweierlei* Kalkuln existiren, derart, dass in dem einen beide, im andern nur der eine der beiden Teile des Distributionsgesetzes unbedingt statthat. Mit dieser Erkenntniss aber drängt sich die Notwendigkeit auf, die verschiedenen Kalkuln auch verschieden zu benennen. Es erschien mir angemessen, den

[26]Der große Erfolg dieses Resultates laßt sich daran messen, daß mit Bezug auf den Schröderschen Beweis weitere Gegenbeispiele veröffentlicht wurden: In seiner Rezension des ersten Bandes der *Vorlesungen* veröffentlichte Eugen Lüroth einen zahlentheoretischen Beweis (*1891*, 165*f.*). Andreas Heinrich Voigt skizzierte in seiner Replik auf Edmund Husserls Kritik an der Schröderschen Algebra der Logik einen Beweis in einem „Kalkül idealer Inhalte" mit geometrischer Interpretation (Voigt *1892*, 303*f.*). Ein weiterer geometrischer Beweis wurde als „Auszug aus einem Briefe an die Redaction" von Alwin Korselt in den *Mathematischen Annalen* publiziert (Korselt *1894*). Es sei schließlich noch auf den „Beweis der Unbeweisbarkeit" der zweiten Distribution durch Georg Wernick (*1929*) hingewiesen, der deshalb bemerkenswert ist, weil er in einem *axiomatischen* System ohne Negation geführt wird. Wernick nimmt keinen Bezug auf Schröders Beweis.

ersten, bisher schlechtweg so genannten „Logikkalkul" seitdem als den „*identischen*" Kalkul zu bezeichnen im Gegensatz zu dem andern, dem Kalkul mit „Gruppen" — vielleicht als dem eigentlich „*logischen*", beide Kalkuln jedoch nach wie vor in das Gebiet der „*Algebra der Logik*" zu verweisen.

Dann setzt er eine spezielle Form des Distributivgesetzes als Prinzip $\mathrm{III}_\times$ dem identischen Kalkül voraus:[27]

$$\text{Wenn } bc = 0, \text{ so gilt } a(b+c) \preccurlyeq ab + ac.$$

Schröder bemerkt noch, daß Versuche, die problematischen Distributivgesetze unter Verwendung der noch einzuführenden Negation mit dem ihr zugehörigen Postulat zu beweisen, ebenfalls fehlschlagen. Diese Aussage relativiert Schröder wenig später. In Definition (6) führt er nämlich die Negation wie folgt ein:

„Negation" [eher: „Negat"] eines Gebietes a nennen wir ein solches Gebiet a_1, welches zu ihm in der Beziehung steht, dass zugleich:

$$aa_1 \preccurlyeq 0 \quad \text{und} \quad 1 \preccurlyeq a + a_1$$

ist.

Er postuliert zusätzlich, daß es zu jedem Gebiet a auch ein Negat a_1 gibt (303) und bemerkt im Anschluß, daß er „es hier noch dahingestellt sein lassen" muß, ob sich die fragliche Form des Distributivgesetzes ohne Prinzip $\mathrm{III}_\times$ unter Hinzuziehung der Negation und daraus folgender Theoreme beweisen ließe (310). Huntington wirft in seiner methodischen Kritik an der Schröderschen Algebra der Logik Schröder zu Recht vor, lediglich die Unabhängigkeit einer einzigen seiner Definitionen gezeigt zu haben, und dies nicht einmal vollständig, da er ja die mögliche Unabhängigkeit von $\mathrm{III}_\times$ von der Negation nicht in Betracht gezogen habe.[28]

4.2 Logik der Relative als Organon für die absolute Algebra

Das hier vorgeführte Beispiel zeigt, wie Schröder sich in der Praxis eine Durchführung der Punkte (1) bis (3) seines Programms der absoluten Algebra vorstellte. Noch wenig ist gesagt über Punkt (4), nämlich die Aufgabe der formalen Algebra, zu entscheiden, „welche geometrische, physikalische oder überhaupt vernünftige Bedeutung

[27]Schröder *1890*, 293. Im von Karl Eugen Müller posthum herausgegebenen zweiten Teil des zweiten Bandes der *Vorlesungen* publiziert Schröder einen Beweis des vollen Distributivgesetzes, der ihm von Alwin Reinhold Korselt 1895 brieflich mitgeteilt wurde. Dieser Beweis benutzt ein modifiziertes Prinzip $\mathrm{III}^\circ_\times$, in dem die Symmetrie hinsichtlich der Dualität von logischer Multiplikation und Addition nicht aufgegeben werden muß (Schröder *1905*, 421); vgl. auch den Kommentar Müllers, der einen weiteren, Schröder 1899 mitgeteilten Beweis Korselts in seinen Anmerkungen abdruckt (Schröder *1905*, 596*f.*). Die Korseltschen Überlegungen haben Eingang gefunden in den von Müller bearbeiteten Schröderschen *Abriß der Algebra der Logik*, wo sich der Beweis im § 66 („Der Distributionssatz") findet (Schröder *1909*, 43*f.*; Schröder *1966*, III, 703*f.*).

[28]Huntington *1904*, 291, Fn. †. Auch Christine Ladd-Franklin hebt dies in ihrer Rezension von Bd. 1 der *Vorlesungen* hervor (Ladd-Franklin *1892*, 132).

diesen Zahlen und Operationen zukommen, welches reale Substrat ihnen unterlegt werden kann" (Schröder *1873*, 294). Zur Erfüllung dieses Punktes des Schröderschen Programms fehlte vor allem ein Werkzeug, das verschiedenartigste Gegenstandsbereiche der Strukturuntersuchung allererst erschließt. Schröder glaubte schließlich dieses Werkzeug in der Logik der Relative gefunden zu haben. *1891* erschien der erste Teil des dem Aussagenkalkül gewidmeten zweiten Bandes seiner *Vorlesungen*. Für diesen zweiten Band hatte Schröder ursprünglich auch Ausführungen über den Relativkalkül vorgesehen. In Folge einer eingehenderen Beschäftigung mit der Logik von Charles S. Peirce wuchs die Algebra der Relative aber über das vorgesehene Maß hinaus. Schröder berichtet darüber im „Zwischenwort", mit dem er die beiden Teile des zweiten Bandes seiner *Vorlesungen* voneinander trennen wollte. Er hatte nach Fertigstellung der ersten Hälfte des Bandes im Juni 1891 gehofft, die zweite Hälfte, deren Inhalt die Logik der Relative bilden sollte, noch im Herbst desselben Jahres veröffentlichen zu können, aber:

> Selten wol in meinem Leben bin ich in einer Schätzung so weit fehlgegangen, als damals bei der Beurteilung von Grösse und Schwere der Lücken meines Manuskripts. Dies kam daher, dass die mir einzig brauchbar erscheinende Arbeit des Herrn *Peirce* über Relative in [9c] [d. i. Peirce *1883*], die auch wirklich die hauptsächliche Grundlage zu meinem Band 3 abgegeben hat, blos einen Umfang von 18 Druckseiten einnimmt, (die auf halb so viele von den unsrigen gehen würden), und dass ich wähnte, mit einem möglichst reproduzirenden Referat darüber — nicht ohne kritische Randbemerkungen — davonzukommen. Die ungeheure Tragweite dieser Abhandlung wurde mir erst bei der Detailbearbeitung klar.[29]

Diese Entdeckung führte zu einer regelrechten Blockade. Aus subjektiven Gründen, so schrieb er im September 1893 an die Peirce-Schülerin Christine Ladd-Franklin, könne er sich nicht der leichteren Arbeit der Vollendung und Überarbeitung des zweiten Bandes widmen, bevor er nicht weitgehend durch den dritten sei.[30]

In der *Algebra und Logik der Relative* offenbart sich eine Erweiterung des ursprünglichen Programms der absoluten Algebra zu einem Grundlegungsprogramm für alle formalisierbaren bzw. mit formalen Mitteln arbeitenden Wissenschaften. Dieses erweiterte Programm Schröders war zweigeteilt. Es bestand aus der absoluten Algebra als allgemeiner Theorie der Verknüpfungsoperationen und der Relativlogik als allgemeiner logischer Theorie. Durch die Relativlogik wurde ein „Bezeichnungssystem", also eine formale Sprache bereitgestellt, die sich bei geeigneter Interpretation der schematischen Buchstaben und der relativen Operatoren auf unterschiedlichste Gebiete wie Geometrie, Mengenlehre oder auch die menschlichen Verwandtschaftsbeziehungen anwenden ließ. Roger D. Maddux hat darauf hingewiesen, daß De Morgan, Peirce und Schröder in ihren relativlogischen Arbeiten "were certainly interested in deducing complicated formulæ from simpler ones, but they were not particularly interested in the axiomatic approach to the calculus of relations", ein Zugang, der erst

[29]Schröder *1905*, XXIV.

[30]Schröder an Christine Ladd-Franklin, dat. Karlsruhe 17.9.1893, Ladd-Franklin Papers, Columbia University Library, Butler Library, New York, Box 5.

von Alfred Tarski gewählt wurde (Maddux *1991*, 438). Im Schröderschen System führte dies zu einem Katalog formaler Ausdrücke, was Charles S. Peirce 1911 zu der Kritik veranlaßte, daß die Algebra der Relative von Schröder systematisch aufgebaut worden sei, daß dieser Aufbau aber "brought out its glaring defect of involving hundreds of merely formal theorems without any significance, and some of them quite difficult."[31] Die Aufgaben, die sich Schröder selbst gestellt hatte, erschöpften sich aber nicht in der Sammlung von Formeln, denn für ihn war die Reformulierung nur Mittel zum Zweck. Schröder übersetzte, nur um ein Beispiel zu nennen (*1895*, 349*f*.), die Dedekindsche Kettentheorie in die Sprache der Relativlogik mit dem

> *End*ziel [...]: zu einer streng logischen *Definition* des *relativen* Begriffes „*Anzahl von*–" zu gelangen, aus welcher sich alle auf diesen Begriff bezüglichen Sätze rein deduktiv werden ableiten lassen [*1895*, 349*f*.].

Schröders logisches System rückt damit, zumindest von der Zwecksetzung her in die Nähe des Fregeschen Logizismus, eine Richtung, die mit der Algebra der Logik üblicherweise nicht oder nur als Gegenpol in Verbindung gebracht wird.[32]

5 Schluß

Die Analyse der logischen Arbeiten Schröders im Kontext seines übergeordneten formal-algebraischen Programms führt zu einer Revision der Standarddeutungen der Algebra der Logik zumindest in Hinblick auf die Schröderschen Beiträge. Als Grundlage der Algebra der Logik wird der Ansatz verstanden, „Gesetze der Logik in die Form von Gleichungen zu kleiden, welche denjenigen der mathematischen Algebra nachgebildet sind" (Rödding *1971*, 152). Auf diese Weise entstehe durch „Algebraisierung der Logik" (Guillaume *1985*, 816) eine „neue Logik auf algebraischer Grundlage" (Berka/Kreiser *1986*, 23). Durch Adaption der mathematischen Methode sei in der Algebra der Logik „ein weiterer Zweig am Baume der Mathematik" entstanden (Krämer *1988*, 31). Herbert Mehrtens sieht gar in dem Programm der Algebra der Logik, in der anfangs die „Gesetze des Denkens" in eine formale Zeichensprache nach Art der mathematischen Algebra gefaßt werden sollten, den Terminus „Algebra" metaphorisch verschoben (Mehrtens *1990*, 502).

Diese Urteile werden der Algebra der Logik Schröders, des „Vollenders der Booleschen Periode" (Bocheński *1956*, 314), nicht gerecht. Die Betonung der Analogie zwischen Mathematik und Logik, die bei Schröder nur in der Initialphase seines logischen Schaffens überhaupt eine Rolle spielte, läßt die Symbolisierung der Logik als gelungenes Probestück im Rahmen der Bemühung um eine Reform der Logik erscheinen. Dadurch werden sowohl die originär mathematischen Ausgangsfragen Schröders verdeckt, als auch das universalistische Konzept seines formal-algebraischen und logischen Programms verschüttet. Schröders Algebra der Logik ist nicht nach alge-

[31] Peirce schreibt dies in dem historischen Überblick seines Artikels "Relatives" in der zweiten Auflage des *Dictionary of Philosophy and Psychology*. Zit. nach Peirce *1933*, 404–409. Maddux weist auf diese Stelle hin (Maddux *1991*, 422*f*.).

[32] Vgl. Peckhaus *1993*.

braischem Modell gestaltet, sondern als Modell der formalen Algebra konstruiert. Logische Strukturen werden nicht wie algebraische Strukturen behandelt, sondern mit solchen identifiziert.

Schröders Lebenswerk ist Ausdruck einer konsequenten Entwicklung seiner wissenschaftlichen Arbeit. Er ist seinem in den frühen Schriften vertretenen universalalgebraischen Programm über fast dreißig Jahre treu geblieben. Seine Arbeiten zur Algebra der Logik passen nahtlos in dieses Programm hinein, stellen also keinen Umweg oder eine unabhängige Entwicklung dar. Daß Schröder letztendlich scheiterte, in dem Sinne, daß er weder seine absolute Algebra, noch sein logisches System zu einem Abschluß bringen konnte, hängt wohl vor allem damit zusammen, daß seine Algebra der Logik, insbesondere die Algebra und Logik der Relative zum „Selbstläufer" wurde und Arbeitsfelder eröffnete, die Schröder nicht vorhergesehen hatte und als einzelner auch nicht bewältigen konnte.

Literaturverzeichnis

ANELLIS, Irving H./HOUSER, Nathan R. *1991* "The Nineteenth Century Roots of Algebraic Logic and Universal Algebra", in: H. Andréka/J. D. Monk/I. Németi (Hgg.), *Algebraic Logic*, North Holland: Amsterdam/Oxford/New York (= *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*; 54), 1–36.

BARONE, Francesco *1966* „Peirce e Schröder", *Filosofia* **17**, 181–224.

BERKA, Karel/KREISER, Lothar *1983 Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik*, 3. erw. Aufl., Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt.

BOCHEŃSKI, Joseph Maria *1956 Formale Logik*, Alber: Freiburg/München (= *Orbis Academicus*, III, 2).

BOOLE, George *1854 An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, Walton & Waberly: London; Repr. Dover: New York o.J. [1951].

CANTOR, Georg *1872* „Über eine Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", *Mathematische Annalen* **5**, 123–132; wieder in Cantor *1932*, 92–102.

— *1932 Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind*, hg. v. Ernst Zermelo, Springer: Berlin; Repr. Olms: Hildesheim 1966.

CAYLEY, Arthur *1854* "On the Theory of Groups, as depending on the Symbolic Equation $\Theta^n = 1$ [Tl. 1]", *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, ser. 4, **7**, 40–47; Wiederabdruck in: Cayley *1889*, 123–130.

— *1889 The Collected Mathematical Papers*, Bd. 2, Cambridge University Press: Cambridge.

CRAPO, Henry H./ROBERTS, Don D. *1969* "Peirce Algebras and the Distributivity Scandal" [Abstract], *The Journal of Symbolic Logic* **34**, 153–154.

CURRY, Haskell B. *1977 Foundations of Mathematical Logic*, Dover Publications: New York.

DAUBEN, Joseph Warren *1979 Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press: Princeton, NJ; Repr. 1990.

DEDEKIND, Richard *1872 Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg: Braunschweig, [7]1965; wieder in: Dedekind *1932*, 315–334.

— *1888 Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg: Braunschweig, [10]1965; wieder in Dedekind *1932*, 335–391.

— *1932 Gesammelte mathematische Werke*, hg. v. Robert Fricke/Emmy Noether/Oystein Ore, Bd. 3, Vieweg: Braunschweig.

Dictionary of Philosophy and Psychology, 2. Aufl., hg. v. J. M. Martin, Macmillan & Co.: New York 1911.

DIEUDONNÉ, Jean *1985 Geschichte der Mathematik. 1700–1900. Ein Abriß*, Vieweg: Braunschweig/Wiesbaden 1985.

DIPERT, Randall R. *1978 Development and Crisis in Late Boolean Logic: The Deductive Logics of Peirce, Jevons, and Schröder*, Ph. D. Diss. Indiana University.

— *1991* "The Life and Work of Ernst Schröder", *Modern Logic* 1 (1990–1991), 119–139.

FREGE, Gottlob *1895* „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik", *Archiv für systematische Philosophie* **1**, 433–456; wieder in Frege, *Kleine Schriften*, hg. v. Ignacio Angelelli, Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt 1967, 193–210.

GRASSMANN, Hermann Günther *1861 Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*, Th. Chr. Fr. Enslin: Berlin (= Grassmann, *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten*, Tl. 1).

GRASSMANN, Robert *1872 Die Formenlehre oder Mathematik*, R. Grassmann: Stettin; Repr. Georg Olms: Hildesheim 1966.

GUILLAUME, Marcel *1985* „13. Axiomatik und Logik", in: Dieudonné *1985*, 748–881.

HEINE, Eduard *1872* „Die Elemente der Funktionenlehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **74**, 172–188.

HILBERT, David *1918* „Axiomatisches Denken", *Mathematische Annalen* **78**, 405–415; wieder in Hilbert *1935*, 178–191.

— *1935 Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3: *Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes, Lebensgeschichte*, Springer: Berlin/Heidelberg; 2. Aufl., Springer: Berlin/Heidelberg/New York 1970.

HOUSER, Nathan *1985 Peirce's Algebra of Logic and the Law of Distribution*, Doctor of Philosophy Thesis, University of Waterloo, Ontario.

— *1991a* "The Schröder-Peirce Correspondence", *Modern Logic* 1 (1990–1991), 206–236.

— *1991b* "Peirce and the Law of Distribution", in: *Perspectives on the History of Mathematical Logic*, hg. v. Thomas Drucker, Birkäuser: Boston/Basel/Berlin, 10–33.

HUNTINGTON, Edward V. *1904* "Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic", *Transactions of the American Mathematical Society* **5**, 288–309.

KORSELT, Alwin *1894* „Bemerkung zur Algebra der Logik", *Mathematische Annalen* **44**, 156–157.

KRÄMER, Sybille *1988 Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriß*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt.

LADD-FRANKLIN, Christine *1892* Rez. v. Schröder *1890*, *Mind* n.s. **1**, 126–132.

LOTZE, Rudolf Hermann *1874 Logik. Drei Bücher vom Denken, vom Untersuchen und vom Erkennen*, S. Hirzel: Leipzig (= Lotze, *System der Philosophie*, Tl. 1); Neuausgabe Lotze *1989*.

— *1989 Logik. Erstes Buch. Vom Denken (Reine Logik)*, hg. v. Gottfried Gabriel, Felix Meiner: Hamburg (= *Philosophische Bibliothek*; 421).

LÜROTH, Jakob *1891* Rez. v. Schröder *1890*, *Zeitschrift für Mathematik und Physik. Historisch-literarische Abtheilung* **36**, 161–169.

— *1903* „Ernst Schröder †. Mitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **12**, 249–265; wieder als Lüroth *1905* (Repr. Lüroth *1966*).

— *1905* „Ernst Schröder †", in: Schröder *1905*, III–XIX; Repr. Lüroth *1966*.

— *1966* „Ernst Schröder †", in: Schröder *1966*, III–XIX.

MADDUX, Roger D. *1991* "The Origins of Relation Algebras in the Development and Axiomatization of the Calculus of Relations", *Studia Logica* **50**, 421–455.

MEHRTENS, Herbert *1979 Die Entstehung der Verbandstheorie*, Gerstenberg: Hildesheim (= *arbor scientiarum*; A.VI).

— *1990 Moderne – Sprache – Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme*, Suhrkamp: Frankfurt a. M.

PECKHAUS, Volker *1988* „Karl Eugen Müller (1865–1932) und seine Rolle in der Entwicklung der Algebra der Logik", *History and Philosophy of Logic* **9**, 43–56.

— *1993* „Ernst Schröder und der Logizismus", in: *Philosophie und Logik. Frege-Kolloquien Jena 1989/1991*, hg. v. Werner Stelzner, Walter de Gruyter: Berlin/New York (*Perspektiven der Analytischen Philosophie*; 3), 108–119. De Gruyter: Berlin/New York.

PEIRCE, Charles Sanders *1870* "Description of a Notation for the Logic of Relatives, Resulting from an Amplification of the Conceptions of Boole's Calculus of Logic", *Memoirs of the American Academy* **9**, 317–378; Wiederabdruck in: Peirce *1933*, 27–98; *1984*, 359–429.

— *1880* "On the Algebra of Logic", *American Journal of Mathematics* **3**, 15–57; Wiederabdruck in Peirce *1986*, 163–208.

— *1883* "Note B: The Logic of Relatives", in: *Studies in Logic by Members of the Johns Hopkins University*, Little, Brown & Company (Repr. Peirce *1983*), 187–203; Wiederabdruck in: Peirce *1986*, 453–466.

— *1933 Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Bd. 3: *Exact Logic (Published Papers)*, hg. v. Charles Hartshorne/Paul Weiss, Harvard University Press: Cambridge, Mass., [2]1960.

— *1983 Studies in Logic by Members of the Johns Hopkins University (1883)*, mit Einleitung v. Max H. Fisch, Vorwort v. Achim Eschbach, Benjamins: Amsterdam u. a. (= *Foundations of Semiotics*; 1).

— *1984 Writings of Charles Sanders Peirce: a Chronological Edition*, Bd. 2: *1867–1871*, hg. v. Edward C. Moore, Indiana University Press: Bloomington/Indianapolis.

— *1986 Writings of Charles Sanders Peirce: a Chronological Edition*, Bd. 4: *1879–1884*, hg. v. J. W. Kloesel, Indiana University Press: Bloomington/Indianapolis.

RÖDDING, D. *1971* Art. „Algebra der Logik", in: *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, hg. v. Joachim Ritter, Bd. 1: *A–C*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt, Sp. 152–153.

SCHRÖDER, Ernst *1873 Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende*, Bd. 1 [mehr nicht erschienen]: *Die sieben algebraischen Operationen*, B. G. Teubner: Leipzig.

— *1874 Über die formalen Elemente der absoluten Algebra*, Schweizerbart'sche Buchdruckerei: Stuttgart; zugl. Beilage zum Programm des Pro- und Real-Gymnasiums in Baden-Baden für 1873/74.

— *1877 Der Operationskreis des Logikkalkuls*, Teubner: Leipzig; Repr. als „Sonderausgabe" Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt 1966.

— *1881* „Über eine eigenthümliche Bestimmung einer Function durch formale Anforderungen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **90**, 189–220.

— *1884* "Exposition of a Logical Principle, as Disclosed by the Algebra of Logic but Overlooked by the Ancient Logicians", in: *Report of the Fifty-Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science Held at Southport in September 1883*, John Murray: London, 412.

— *1887a* „Tafeln der eindeutig umkehrbaren Functionen zweier Variabeln auf den einfachsten Zahlengebieten", *Mathematische Annalen* **29**, 229–317.

— *1887b* „Über Algorithmen und Calculn", *Archiv der Mathematik und Physik* (2) **5**, 225–278.

— *1890 Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*, Bd. 1, B. G. Teubner: Leipzig; Repr. Schröder *1966*.

— *1891 Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*, Bd. 2, Tl. 1, B. G. Teubner: Leipzig; Repr. Schröder *1966*.

— *1895 Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*, Bd. 3, Tl. 1: *Algebra und Logik der Relative*, B. G. Teubner: Leipzig; Repr. Schröder *1966*.

— *1898* „Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien", in: *Verhandlungen des Ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897*, hg. v. Ferdinand Rudio, Teubner: Leipzig (Repr. Kraus: Nendeln 1967), 147–162.

— *1901* Unsign., „Grossherzoglich Badischer Hofrat Dr. phil. Ernst Schröder[,] ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Karlsruhe i. Baden", in: *Geistiges Deutschland. Deutsche Zeitgenossen auf dem Gebiete der Literatur, Wissenschaften und Musik*, Adolf Eckstein: Berlin-Charlottenburg o.J. [1901].

— *1905 Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*, Bd. 2, Tl. 2, hg. v. Karl Eugen Müller, B. G. Teubner: Leipzig; Repr. Schröder *1966*.

— *1909 Abriß der Algebra der Logik*, bearb. v. Eugen Müller, Tl. 1: *Elementarlehre*, Teubner: Leipzig; Repr. Schröder *1966*, Bd. III, 651–710.

— *1966 Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*, [„second edition"], 3 Bde., Chelsea: Bronx, N.Y.

VOIGT, Andreas Heinrich *1892* „Was ist Logik?", *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie* **16**, 289–332.

WERNICK, Georg *1929* „Die Unabhängigkeit des zweiten distributiven Gesetzes von den übrigen Axiomen der Logistik", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **161**, 123–134.

WHITEHEAD, Alfred North *1898 A Treatise on Universal Algebra, with Applications*, Bd. 1 [mehr nicht erschienen], Cambridge University Press: Cambridge; Repr. Hafner: New York 1960.

WUSSING, Hans *1969 Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes. Ein Beitrag zur Entstehungsgeschichte der abstrakten Gruppentheorie*, Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin.