ℵ Modern Logic ω

DEDEKIND Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS

JOSEP PLA I CARRERA

Departament de Lògica, Història i
Filosofía de la Ciencia
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via 585
08007 Barcelona, España

ABSTRACT. I examine Richard Dedekind's important contributions to set theory. These contributions are made in his mathematical work and I present an exposition of several of his mathematical papers. I develop my paper in the following sections:

1. Dedekind's first contacts with the concept of set [*1855-1858*]
2. The manuscript of 1858 and the paper of 1872
3. «Supplement X» of Dirichlet's *Lectures on Number Theory*, second edition [*1871*]
4. The text of 1888 and the manuscript of 1872-1878
5. An unpublished manuscript of 1887-1897: the dangers of set theory
6. The unpulished manuscripts of 1887 and 1889
7. Dedekind and topology
8. Conclusion

and I show that Dedekind's contributions to set theory are very important and that without them possibly the introduction of set theory into mathematicical work might have appeared later that it did.

AMS/MOS subject classifications: 01A55, 01A60, 03-03, 03E25, 04-03, 04A25.

Ante afirmaciones como la que hace Jean Dieudonné en el prefacio de la obra de P. Dugac *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques* [*1976*, 11], según la cual, por lo que a la creación de la teoría de conjuntos se refiere, debemos asociar a Richard Dedekind con Georg Cantor y debemos, además, 'considerar *que comparten por igual el mérito de haber puesto las bases* "conjuntistas" de la matemática actual,'[1] se impone un

[1]Véase también [Dieudonné y otros *1978*] I, cap. VI, 373]. El capitulo citado, *Fondements de l'Analyse,* ha sido escrito por Pierre Dugac, pero nos referiremos a él como Dieudonné y otros [*1978*], I, cap. VI.

análisis comparativo de la obra de ambos matemáticos, análisis que lleva previamente a un vaciado de las aportaciones y resultados *de* estos insignes matemáticos relativos a las *bases conjuntistas* de las matemáticas.

Un simple vistazo superficial nos dice que Dedekind hizo una aportación importante en relación con el concepto de *infinito actual,* siguendo la línea de Bolzano [*1851*][2] y esto lo hace en 1872 algunos años antes de que Cantor inicie sus investigaciones propiamente conjuntistas.[3]

En topología conjuntista, en cambio, Cantor se adelanta a Dedekind con los *puntos de acumulación*, los *conjuntos cerrados*, los *conjuntos derivados*, *etc*..... Dedekind, no obstante, *asume inmediatamente tales* conceptos.

Indiquemos, de paso, que ambos matemáticos, Cantor y Dedekind, se pisotearon el terreno en lo relativo a la *construcción* de los números reales. La aportación de Dedekind aparece en 1872, si bien su gestación es quince años anterior; data de 1858 cuando estaba elaborando la *Primera parte del cálculo diferencial e integral.*[4] Cantor publicó aquel mismo año, una construcción de los números reales en la línea de Charles Méray [*1869*][5] que, aparentemente, es completamente distinta de la de Dedekind.

Cantor será, sin embargo, el único de estos dos matemáticos que se preocupará de la teoría de los números transfinitos, y el único tambien que la llevará a sus últimas consecuencias; Dedekind, en cambio, nunca asumirá completamente esta teoría de nueva factura.[6]

---

[2]En esta obra Bernhard Bolzano admite sin ninguna reserva la *existencia* de conjuntos infinitos (p. 13-14) y muestra que el conjunto de proposiciones verdaderas es infinito; establece además que lo que produce enunciados paradójicos es precisamente la existencia de conjuntos infinitos (p. 1) e intuye, finalmente, la posibilidad de que existan conjuntos infinitos de potencias distintas (pp. 28-29).

[3]Recordemos que las primeras aportaciones de Cantor a la teoría de conjuntos son resultados relativos al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, que culminan en el resultado de 1874; la primera abstracción conjuntista se situa en 1878. Véase Pla [*1989*, 347-348 y las notas 27 a la 36].

[4]Dugac [*1976*, 24-25], Dieudonné y otros [*1978*, I, cap. VI, 366-367]. Dedekind gustaba de presentar sus lecciones de forma completa y autocontenida; apreciaba que las demonstraciones fuesen rigurosas y estuviesen bien asentadas en conceptos previamente establecidos que evitasen, en lo posible, sino completamente, el tener que recurrir a la intuición.

[5]Respecto de la afirmación acerca de las coincidencias entre las construcciones de Georg Cantor y Charles Méray, véase Droeven [*1990*], 4^{a} parte y Dugac, P. [*1970*].

[6]Es de interés, para comprender la actitud dispar de estos dos matemiticos en relación con la teoría de la equipotencia y del cardinal, tener presente el episodio acaecido entre ambos matemáticos acerca de la equipotencia existente entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$; la existencia de dicha equipotencia presenta un conflicto con el concepto de *dimensión*; Cantor, para resolverlo, pondrá el concepto de equipotencia por delante del concepto de dimensión, mientras que Dedekind, por el contrario, considerari interesantes aquellas biyecciones que *conserven* la dimensión—los *homeomorfismos* y conjeturará la imposibilidad de establecer un *homeomorfismo* entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Véase Cavaillés [*1962*, 214-215]; Pla [*1984*, 14-16].

Coincido plenamente con la opinión de Jean Dieudonné (en [Dugac, *1976*, 10]): "Dedekind no parece haber mostrado jamás un excesivo interés por lo que, con el paso del tiempo, sería el único objeto de las investigaciones de Cantor en la segunda parte de su carrera, la teoría de los conjuntos '*transfinitos*'."

Un análisis superficial, sin embargo, no basta para poder mantener con propiedad, ni tampoco para poder rechazar con certeza, afirmaciones como la de Dieudonné; por esta razón nos hemos planteado la conveniencia de analizar la *obra* **conjuntista** de Dedekind, haciendo un seguimiento de algunos de sus trabajos más relevantes en relación con la teoría de conjuntos; si logramos que la presentación sea clara y exhaustiva dispondremos ya de un *primer* documento[7] de trabajo que, junto a estudios análogos de las obras de Cantor relativas a la teoría de conjuntos [Meschkowski *1967*; Dauben *1979*; Frápolli *1987*; Gómez *1991*], permitirá, a *pooteriori*, una valoración objetiva y concreta de lo que, cada uno de ellos, aportó y de sus lagunas, de sus paralelismos y de sus divergencias y, quizás, y esto sería lo más importante de todo, de sus *intuiciones*.

No quisiera terminar esta presentación sin mencionar la diferencia ideológica de estos dos insignes hombres de ciencia, diferencia que nos apunta muy bien Cavaillés [*1962*, 119-120]. Para Dedekind "se trata de resolvrer problemas de matemáticas y, para ello, no hace falta desarrollar una nueva ciencia", se trata de "fundamentar la matemática que ya existe". Dedekind cree que las "matemáticas deben reducirse a la lógica", con lo que se aproxima a la ideología de la escuela *logicista*. Cantor, en cambio, en una línea de pensamiento más famalista desarrollará una nueva teoría matématica—formal o, si se prefiere, formalizable—de la que los teoremas matemáticos clásicos constituirían teoremas particulares (véase [Kleene *1952*, capítulo III, §11]).

1. Los primeros contactos de Dedekind con el concepto de conjunto [1855-1858]. En este período Richard Dedekind está desempeñando su tarea docente en Göttingen y produce dos trabajos que lo ponen en contacto con la teoría de coniuntos v que conviene analizar.

El primero de estos trabajos aparece publicado en 1857 [*1930-32*, I, 40-66][8] y está claramente inspirado en la tarea de Gauss [*1863*, 2, 212-240] relativa a la teoría de números. En él Dedekind introduce los conjuntos como *clases de equivalencia* y calcula

Pierre Dugac dedica un buen número de páginas al amplio diálogo que mantuvieron, con mayor o menor intensidad, Cantor y Dedekind en el período que va desde 1872 a 1899, a través de su cartografía. Esta cartograffa fué recogida por Emmy Nœther y Jean Cavaillés [*1937*] y, años más tarde, fue traducida al francés por Jean Cavaillés [*1962*, 187-251]. Algunas de las cartas, sin embargo, permanecieron inéditas hasta que, en 1976, Pierre Dugac las incoporó en su obra sobre Dedekind en el apéndice XL [Dugac *1976*, 223-262].

[7] Es preciso indicar que existen ya estudios importantes en este sentido, como son Cavaillés [*1962*, 36-39; 71-72;119-140]; Dieudonné y otros [*1978*, I, cap. VI, 366-368; 373-375 y 380-381] y Dugac [*1976*]. Nuestra aportación se basará ampliamente en las obras de Dedekind y en estos estudios. Su línea será semejante a la de Dugac pero centrándonos sólo en las aportaciones conjuntistas de Dedekind y refiriéndonos al resto de su obra sólo en tanto que aporten algo a la teoría de conjuntos. Las aportaciones no conjuntistas de Dedekind, que resulten clarificadoras para nuestros intereses, las comparaciones con otros matemáticos así como sus respectivas aportaciones las daremos en las notas.

[8]En las citas de las obras de Dedekind que se hallen contenidas en los *Werke*—es decir, en [Dedekind *1930-32*, I, II, III]—nos remitiremos siempre a la paginación de los *Werke*. En otro caso nos remitiremos a la paginación del texto original o de la edición citada.

con ellos como si fuesen números; para ello toma un representante de cada una de las clases de equivalencia. Veamos más de cerca que es lo que realmente hace Dedekind [*1857*; *1930-32*, I, 41]: introduce la congruencia entre dos polinomios de una variáble x, módulo un número primo p:

> Dos polinomios A, B (en x) son congruentes módulo p, brevemente
>
> $$A \equiv B \ (\text{mód}\ p),$$
>
> si todos los coeficientes de las potencias de x de $A-B$ son múltiplos de p.

A continuación Dedekind observa que es una congruencia; es decir comprueba la *compatibilidad* con las operaciones aritméticas de suma, producto y potenciación, y seguidamente ofrece ciertas propiedades aritméticas de esta congruencia entre polinomios.[9] Observa, además, que los teoremas de *divisibilidad* en $\mathbb{Z}[x]/p\mathbb{Z}[x]$, que se corresponden con los teoremas de divisibilidad entre números, se obtienen gracias a que

> el sistema de la infinidad de funciones de una variable, congruentes entre sí módulo p, se comporta como un único número bien determinado en la teoría de los números. [Dedekind *1857*; *1930-32*, I, 47].[10]

Es preciso poner de manifiesto que Dedekind considera *como un nuevo ente* una *colección infinita de objets;* es el embrión de toda teoría de conjuntos: considerar *actual* el infinito y admitir la posibilidad de considerar como algo **nuevo** una totalidad infinita.[11]

Dedekind ha dado, pues, un paso importante en la naciente teoría de conjuntos al tomar conciencia de que es preciso *manipular* conjuntos infinitos como si fuesen números. Dice [Dedekind *1857*; *1930-32*, I, 47]: "al sistema de las infinitas clases no congruentes... corresponde la sucesion de los númeras enteros de la teoría de números."[12]

---

[9] Constituyen los §§2 al 6 [Dedekind *1857*; *1930-32*, I, 41-46]. En ellos Dedekind establece la *identidad de Bézout* [§4] tras haber establecido el *grado* de un polinomio A en x, módulo p, como el máximo exponente de los términos de A cuyo coeffciente no es múltiplo de p y haber establecido que gr AB = gr A + gr B [la *primalidad de p es esencial* para evitar los divisoreo de cero] y tras haber introducido los *divisores primarios* como aquellos cuyo coeficiente principal es $\equiv 1$, mód p; seguidamente establece el algoritmo de división y el criterio de Euclides para obtener el máximo común divisor (mód p) de dos polinomios. Establece además la *unicidad de la descomposición*, a menos de congruencia módulo p, en factores primos-primarios.

[10] El distingo es mío.

[11] Véase la definición de conjunto que ofrecerá Dedekind en su obra *Was sind und was sollen die Zahlen?* treinta años más tarde, en 1888, y que analizaremos más adelante.

[12] Es patente la introducción de conceptos conjuntistas, no con la intención de elaborar una *teoría abstracta de conjuntos* sino con la intención de desarrollar una teoría matemática concreta: en este caso relativa a la teoría de números. Es la forma de actuar de Dedekind.

Dedekind, una vez que ha considerado que un conjunto infinito puede ser considerado un nuevo ente, nos habla ya con toda naturalidad del conjunto (infinito) de estos nuevos entes. De esta forma aparece una nueva abstracción propia de la teoría de conjuntos: *los conjuntos de conjuntos.*[13]

El texto de Dedekind suscita otra cuestión que conviene analizar: en él Dedekind [*1857*; *1930-32*, I, 47] afirma que, en los cálculos, cada función de una clase se puede substituir por otra función de la misma clase: *cada función representa, pues, una clase*. La cuestión consiste en saber si Dedekind usa implícitamente el **Axioma de Elección** (A.C., por "Axiom of Choice"). Según Medvedev [*1965*, 27] la respuesta es afirmativa puesto que Dedekind *elije un representante* en cada una de las claes finitas y esto lo hace en *una infinidad* de clases; segúin Moore [*1982*, 13], en cambio, Dedekind, en cada uno de los teoremas que expone en esta monografía, sólo usa *dos clases* y, por consiguiente, sólo hace elecciones *finitas* y, por lo tanto, no hay ninguna elección que requiera realmente del A.C.

Lo que, en realidad, hace Dedekind [*1857*; *1930-32*, I, 47] es lo siguiente: *define una congruencia entre clases;* si queremos ser precisos debemos decir, no obstante, *entre representantes de las clases*:

> Dos clases de polinomios, o sus representsntes A y B, son congruentes respecto de una clase de polinomias, de representante M, brevemente
>
> $$A \equiv B \text{ (mód } p, M) \text{ o } A \equiv B \text{ (mód } M),$$
>
> cuando la diferencia $A - B$ módulo p es divisible por M.

Es decir: ssi $A \equiv B + MC$, módulo p, siendo C un polinomio de $\mathbb{Z}[X]$.

Ahora Dedekind analizará la congruencia, *módulo M*, y estsblecerá su teoría a lo largo de una veintena de páginas. Sus teoremas se refieren siempre a un número finito de clases y, por consiguiente, en cada demostración sus elecciones, al ser finitas, evitan, de acuerdo con la opinión de Moore, la utilización del A.C.

Y realmente todos los resultados de la memoria de Dedekind se pueden establecer sin tener que recurrir al A.C. Pero entiendo que esta no es la cuestión. La cuestión reside en saber si Dedekind pensaba que *cada clase* tiene *asociado* un representante *de* una vez por *todas, o* no. Concretando, cuando Dedekind [*1857*; *1930-32* I, 47] afirma "cada clase tiene *asociado* un grado...," ¿entiende que, a *cada* clase, se le puede asociar un grado—grado que calculará eligiendo un representante de dicha clase y calculando su grado, en el bien entendido de que previamente se haya establecido que el grado no depende del representante—, o bien piensa—y esta es la opinión de Medvedev que comparto—que *todas* las clases tienen asociado, de una vez por todas, un grado? La respuesta es difícil puesto que no hay nada que nos indique con claridad el pensamiento de Dedekind en este

---

[13] Es una de las piedras claves de la teoría abstracta de conjuntos, que en este texto dedekiniano se acepta con absoluta naturalidad.

sentido; no obstante, en aquella época, el problema de la elección simultánea en familias infinitas no constituía aún un problema y, por consiguiente, no había razón alguna para evitarlo. Más adelante reencontraremos esta cuestión en otros trabajos de Dedekind.

La segunda memoria fue elaborada en [*1855-58*; *1930-32*, III, 439-445][14] y, en ella, como dice E. Noether [Dedekind *1855-58*; *1930-32*, III, 445], Dedekind está ya en "posesión de los conceptos y métodos de la teoría abstracta de grupos". En este texto Dédekind considera un grupo finito: "un conjunto con m elementos, provisto de una operación";[15] pero lo que conviene observar es su teoria de *homomorfismos*—aplicaciones que transportan la estructura—y que Dedekind, a medianos de siglo pasado, introduce y maneja tal como se hace en la actualidad.

Dedekind, a cada θ de M, le asocia un objeto θ_1 e impone que esta correspondencia respete la operación; dice [*1855-58*; *1930-32*, III, 440]:[16]

> a cada producto $\theta\varphi\phi...\lambda$ de objetos θ, φ, ϕ, ..., λ de M k corresponde el producto $\theta_1\varphi_1\phi_1...\lambda_1$ de sus imágenes [de sus correspondientes] θ_1, φ_1, ϕ_1, ..., λ_1.

Así obtiene el conjunto M_1 que tiene m_1 elementos θ_1 distintos. Entonces establece "el conjunto M_1 es un grupo" [Dedekind *1855-58*; *1930-32*, III, 440].[17]

El siguiente teorema nos muestra que las *antiimagenes* de la unidad del grupo constituyen, a su vez, un grupo y que su orden divide al orden del grupo.[18]

El teorema 3 es interesante tanto desde el punto de vista de la *incipiente teoría de conjuntos* en la obra de Dedekind [*1855-58*; *1930-32*, III, 441] como en el desarrollo de la propia *teoría de groupos*:[19]

---

[14] Esta memoria la cita Dedekind en una carta a Frobenius, fechada el 8 de febrero de 1895. Véase [Dedekind *1930-32*, II, 419.]

[15] Dedekind establece la definición de *estructura de tipo* 2, si bien en las demostraciones de sus teoremas supone que la operación satisface ciertas propiedades: las propiedades de grupo.

[16] Asi es como define Dedekind la operación en la imagen M_1: θ_1, φ_1 son elementos de M_1, su producto $\theta_1\varphi_1$ es $(\theta\varphi)_1$.

[17] Es el teorema 1. Indiquemos, de paso, que en el trabajo de 1857 hacía servir la palabra *System:* "Das System unendliche vielen inkongruenten *Klassen...* entspricht der Reinhe der ganzen Zahlen in der Zahlentheorie" [Dedekind *1857*; *1930-32*, I, 47], mientras que ahora, en cambio, utiliza la palabra *Komplex;* "Der Komplex der m_1 voneinander verschiedenen Objekte θ_1 werde mit M_1 bezeichnet" [Dedekind *1855-58*; *1930-32*, III, 440] como si quisiese distinguir los conjuntos de las estructuras algebraicas.

[18] Dedekind [*1855-58*; *1930-32*, III, 441]. Es el teorema 2. En la demostración de este teorema Dedekind utiliza las propiedades de la operación de un grupo que no había explicitado con anterioridad, ad como la existencia del elemento unidad. Aquí aparece, pues el ker Φ, en donde Φ designa el homomorfismo de M en M_1, $\theta \mapsto \theta_1$.

[19] Por el teorema 2 sabemos que N = Ker Φ es un *subgrupo* normal de M; es decir, observa que, para cada $\theta \in M$, $\theta \cdot N = N \cdot \theta$.

Si N es el grupo de las n antiimágenes de la unidad en M, entonces $M = N + N{\cdot}\theta'$

$+ N{\cdot}\theta'' + \ldots + N{\cdot}\theta^{m_1-1}$.

La idea de Dedekind es la siguiente: al conjunto $\theta{\cdot}N = N{\cdot}\theta$ le corresponden n objetos que se aplican todos ellos en el mismo θ_1 del grupo M_1. Consideremos, pues, los m_1 conjuntos $N, N', N'', N^{(m_1-1)}$. Estos conjuntos son, precisamente, las *antiimágenes* de los m_1 elementos de M_1; están ligados, además, por la ley de composición $N^{(p)}{\cdot}N^{(q)} = N^{(r)}$. Disponemos, pues, de un grupo finito con m_1 elementos *isomorfo* a M_1: a cada conjunto $N^{(p)}$, le asociamos un elemento $\theta_1^{(p)}$ de M_1, siendo $\theta_1^{(p)}$ la imagen común a todos los elementos de $N^{(P)}$. Dedekind observa [*1855-58*; *1930-32*, III, 441], además, que los $N^{(P)}$ son las clases laterales de la forma $\theta{\cdot}N = N$.

Dedekind ha establecido, pues, el teorema de homomorfismo de grupos: si Φ: $M \to M_1$ es un morfismo y $N = \ker \Phi = \Phi^{-1}(1)$ es el grupo de las antiimágenes de la unidad de M_1, entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & M_1 \arrow[d, leftrightarrow, "\text{isormorfismo}"] \\
M / \ker \Phi \arrow[r, equal, "\text{id}"'] & M / \ker \Phi
\end{tikzcd}$$

y, claramente,

$$M = \bigcup_{\bar{\theta} \in M / \ker \Phi} \bar{\theta}$$

haciendo uso de la operación de unión de una familia *finita* de conjuntos.[20]

---

[20] Dedekind, de nuevo, introduce un *conjunto*—ahora se trata de un grupo finito—de clases de equivalencia y nuevamente lo identifica, vía un *isomorfismo,* con un conjunto de objetos: el grupo imagen M_1. Ahora, sin embargo, todo es finito.

A continuación Dedekind [*1855-58*; *1930-32*, III, 441-442] estudia las permutaciones de un grupo finito (o los isomorfismos entre dos grupos finitos isomorfos); estudia su composición y llega a la conclusión de que constituyen un grupo.

En este artículo Dedekind tiene asumidas ya algunas ideas conjuntistas importantes: la de *conjunto* (y la de *estructura algebraica*) finito; la de *conjunto de clases de equivalencia* (o *conjunto cociente*) a través de la relación de equivalencia que induce una aplicación (que, en este caso, además es una congruencia). Considera también el conjunto de *automorfismos* de un grupo finito. Maneja con toda soltura la composición de aplicaciones y la *unión* finita de conjuntos. Tiene asumidas ya algunas ideas de una teoría de conjuntos utilitaria y muy incipiente, pero muy útil para ofrecer una presentación rigurosa y, al mismo tiempo, clarificadora de la teoría elemental de grupos.

2. El manuscrito de 1858 y el texto de 1872. Según Dugac [*1976*, 24], Dedekind sentirá la necesidad de elaborar una teoría de los números reales cuando se halla preparando la *Primera parte del cálculo diferencial e integral*, un curso de análisis matemático que debía impartir durante el semestre de invierno de 1855-59, recién nombrado profesor de la *Escuela Politécnica* de Zurich. Con anterioridad a esta fecha no habia impartido jamás un curso de análisis matemático [Dieudonné y otros *1978*, I, cap. VI, 366]. No debe pues extrañarnos que Dedekind que, ademas de un excelente investigador, era un *pedagogo excepcional*, según opinión de Dirichlet [Biermann *1971*, 9-12], compartida por Kappeler, aptitud que lo llevará a ser nombrado profesor del citado centro de Zurich, sienta la necesidad de fundamentar el análisis matemático. Él mismo nos lo refiere en el prólogo de su opúsculo de 1872 [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, prólogo, 315; *1901*, 1]:[21]

> Mi atención a las cuestiones que constituyen el tema de este opúsculo datan del otoño de 1858. Siendo profesor de la Escuela politécnica de Zurich me ví por vez primera, en la obligación de impartir lecciones de cálculo diferencial y sentí de forma más viva que nunca la falta de una fundamentación realmente cientifica de la aritmética.

Esta falta de fundamentación científica de la aritmética se pone de manifiesto en los mejores tratados de cálculo diferencial, los cuales recurren a la intuición geométrica en cuestiones como la *continuidsd* y en el *trato que se da a las magnitudes continuas*, cuando lo que realmente hace falta es una base "puramente aritmética" [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, prólogo, 316; *1901*, 2]. Dedekind consigue su objetivo, como nos dice a mismo, el 24 de noviembre de 1858 [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, prólogo, 315; *1901*, 1].[22]

---

[21] Daremos la referencia de esta obra según la paginación del *Gesammelte mathematische Werke*, III [*1930-32*], y también según la paginación de la traducción inglesa de [*1901*]: *Essays on the Theory of Numbers*.

[22] La precisión de esta fecha no debe sorprendernos en absoluto, puesto que Dedekind llevaba un diario [cf. Dugac *1976*, apéndice XXV, 26 de abril de 1913], diario que, según Dieudonné y otros [*1978*, I, vol. VI, 367], "tuvo que destruir antes de morir". Esta fecha la encontramos asmismo en el

Una exposición de este vínculo entre el análisis matemático y los números reales lo hallamos en el guión del curso de cálculo diferencial que Dedekind dió el trimestre de invierno de 1862-63 en su villa natal de Brunswick [Dugac *1976*, apéndice IV, 151-153].[23] En él hallamos un curso de análisis que sigue el modelo de exposición que se ha convertido en clásico; es el programa de un curso cuidadosamente desarollado y didácticamente correcto, como es usual al espíritu de Dedekind. Su introducción sigue la línea del pensamiento dedekiniano sobre *qué significa fundamentar el análisis matemático*, pensamiento que hallamos brillantemente expuesto en la introducción al texto de 1872 [*1872*; *1930-32*, III, 315-334 ; *1901*, 1-27].[24]

La preocupación de Dedekind, en este contexto, la constituye la enorme cantidad de intuición geométrica que los matemáticos que le habían precedido así como los de su

---

manuscrito de 1858 [Dugac *1978*, apéndice XXXII], manuscrito que utilizó en una conferencia dada en la sociedad científica de Brunswick sobre esta cuestión el 11 de enero de 1864.

[23] Este apéndice constituye el guion o programa del mencionado curso y consta de una introducción y de tres puntos; el §1 de la introducción, titulado el *dominio* [*Gebeit*] *de los números reales*: *su continuidad*, pone te manifiesto que Dedekind disponía de una teoría de los números reales y que la enseñaba; el §4 contiene el concepto de *límite* y nos mueotra que, para Dedekind, este concepto es posterior y presupone de ntemano la introducción de los números reales y su continuidad; ahí hallamos también el teorema que, según Dedekind, hace necesaria la rigorisación del análisis: "toda sucesión creciente acotada superiormente tiene un límite"; en los §§5 y 6 no ofrece el cálculo de ciertos limites, como por ejemplo, $e = \lim_{k\to\infty} (1 + \frac{1}{k})^k$ y $1 = \lim_{k\to 0} \frac{\sin x}{x}$. En §7 analiza los infinitamente grandes y los infinitamente pequeños de diversos órdenes y advierte de la falta de rigor en el estudio de estas cuestiones. En los capitulos 1, 2 y 3 expone la teoria del cálculo diferencial hasta el desarrollo en serie de potencias de Taylor y MacLaurin de una función con un estudio del resto, terminando con la exposición de ciertas cuestiones relativas a las series numéricas y a las series de potencias.

[24] Este texto, no aparece hastel año 1872. No obstante Dedekind elaboró sus rasgos más caracteristicos y fundamentales en 1858 según nos expone, como ya hemos indicado, el propio Dedekind y nos lo prueba además la existencia del manuscrito de 1858 (*cf.* [Dugac *1976*, apéndice XXXII, 203-209]). Sabemos además que Dedekind tenia la intención de publicarlo en 1870 [Dugac *1976*, 38]: "...pues, por lo menos, en 1870, Dedekind había intentado publicar su libro acerca de la continuidad y los números irracionales". Esta es la razón que nos llevn a analizar este texto con anterioridad al *Suplemento X* de la segunda edición de las *Lecciones de teoría de números* [*Vorlesungen über Zahlentheorie*] de P.G. Lejeune-Dirichlet, que Dedekind publicó en [*1871*] y que analizaremos someramente más addante, pero sólo en relación con la teoría de conjuntos. En una carta a Lipschitz [Dedekind *1930-32*, III, 468-474] el propio Dedekind justifica el retraso de esta edición: "Jamás he pensado que mi concepción de los números irracionales tenga un valor excepcional, sino no la habria guardado durante 14 años" y añade: "todo matemitico que haya reflexionado al respecto habrá llegado al mismo resultado" (p. 470), si bien el resto de la carta (cf. Dugac [*1976*, 48-50]) y las discusiones que su método provocó despiertan en Dedekind, cada vez con mayor ímpetu, el convencimiento del rigor y adecuación de *su* método al extremo que en una carta a Lipschitz [Dedekind *1930-32*, III, 474-479] indica un método "infalible" para verificar si una teoría matemática es "verdadera": este método consiste en "reemplazar todos los términos por palabras inventadas, desprovistas de sentido: si el edificio se construye con rigor, u validez se mantendrá" y, para Dedekind, *su* teoría de los numeros irracionales resiste la prueba. En estas palabras vemos el embrión de las ideas *formalistas* de Hilbert, embrión que ha hecho que Emmy Noether subrayara, en una nota-comentario que esta insigne autora dedica al texto de Dedekind de 1872 [Dedekind *1930-32*, III, 334], "el contenido axiomático" de las cartas de Dedekind a Lipschitz de 10 y 27 de julio de 1876.

propia época utilizaban en las demostraciones de los teoremas de análisis matemático. Estas intuiciones que se ponlan de manifiesto principalmente en aquellas cuestiones que hacían referencia a los límites y, sobretodo, en la *demostración del* teorema *de existencia de limite de las* sucesiones crecientes *acotadas* [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 316; *1901*, 1] que, si bien era perfectamente aceptable en una presentación del análisis matemático breve, clara y didáctica, era completamente inaceptable desde el punto de vistsa del rigor [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 316; *1901*, 1].

> Este sentimiento de disgusto era tan grande que me llevó a meditar sobre esta cuestión hasta que hallé una fundamentación puramente aritmética y perfectamente rigurosa de los principios del análisis infinitesimal. [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 316; *1901*, 1-2]

Y esta será la solución que aportará Dedekind, "una fundamentación puramente aritmética y completamente rigurosa de los principios del análisis infinitesimal" que le permita demostrar el teorema de *existencia* de límites de sucesiones crecientes acotadas superiormente o teoremas equivalentes qúe "puedan considerarse, de alguna manera, una base suficiente del análisis infinitesimal" [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 316; *1901*, 2].[25] Lo que hay que hacer pues, es lo siguiente: "descubrir el auténtico origen de este teorema en los elementos de aritmética y asegurarse, al mismo tiempo, una definición real de la esencia de la continuidad" [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 316; *1901*, 2].

Pero, como nos dicé J. Cavaillés [*1962*, 36], esta fundamentación "debe recurrir inevitablemente a la noción de conjunto: toda matemática que no quiera reconocer lo absoluto de un acto debe partir de la noción de conjunto" y Dedekind, como si pretendiese constituirse en pregonero de esta opinión, se ve en la necesidad de utilizar una cierta teorla *de conjuntos* aun cuando sólo sea pragmáticamente.[26] Es precisamente esta teoría *pragmática* de conjuntos, implícita en la fundamentación dedekiniana del análisis matemático, lo que analizaremos a continuación, ateniéndonos al manuscrito de 1858 y al texto de 1872.

De entrada Dedekind considera la *totalidad* de los números racionales, dotados de *su aritmética* que se justifica por su propia "naturalidad"[27], aritmetización esencial en Dedekind, que le permitirá evitar la intuición gométrica, que es lo que constituye el gran escollo.

[25] Esta opinión, según Dugac [*1970*, 339], es acorde con la de Méray y también con la de Weierstrass, puesto que el criterio de finitud de Weierstrass equivale al enunciado de este teorema (*cf.* [Dieudonné y otros *1978*, I, cap. VI, 367]). Véase al respecto Bunn [*1984*, 283-284].

[26] Recordemos, de pasada, que la aparición de la teoría *cantoriana* de conjuntos se halla vinculada también al anilisis matemático; concretamente se halla vinculada a la *unicidad de representación de una función en serie trigonométrica* (*cf.* [Pla *1984*]) y se inicia en Cantor [*1870*] a raíz de la lectura de la memoria de Riemann [*1854*], publicada por Dedekind en 1868, dos años después de la muerte de su autor; al profundizar en este análisis sobre las series trigonométricas Cantor establece, en Cantor [*1872*], su teoría de los números reales que, como nos hace notar Zermelo (*cf.* [Cantor *1932*, 102]), "es el lugar en el que nace la teoría cantoriana de conjuntos".

[27] Esta naturalidad, para Dedekind, "es consecuencia tel simple acto aritmético de contar que no es otra cosa que una creación sucesiva de la sucesión de los números enteros positivos en la que cada

Este conjunto, que llamo 𝔑, posee, en primer lugar, una completitud y autorreferencia que, en otro lugar, he designado como característica de un cuerpo de números" [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 318 ; *1901*, 4-5],[28]

que nos dice, en definitiva, que ℚ presenta las propiedades de estabilidad de sus operaciones algebraicas; es decir, nos dice que ℚ es un cuerpo.[29]

Dedekind [*1872*; *1930-32*, III, 318; *1901*, 5], sin embargo, requiere de las propiedades de orden de ℚ las cuales le confieren la estructura de *dominio* [*Gebeit*] infinito totalmente ordenado [*wohlgeordnet*].[30] Además Dedekind [*1872*; *1930-32*, III, 318-319; *1901*, 5-6] consigue una presentación puramente algebraica que substituye a la intuición geométrica.[31]

Dedekind considera, pues, la *totalidad* ℚ de los números racionales que "son, dice, una creación libre de los seres humanos" [*1858*, 204] y resultan del acto de contar. Nuevamente, pues, Dedekind considera como entes matemáticos ciertos conjuntos infinitos y este hecho no le pasará por alto a Cantor [*1932*, 185].

El orden de ℚ tiene tres propiedades que Dedekind pone de manifiesto:

I. La *transitividad:* $a > b$, $b > c$ implica $a > c$. [*1872*; *1930-32*, III, 319; 1901, 5][32]

II. La *densidad* de ℚ: si $a \neq b$, entre a y b hay una *infinidad* de números. [*1872*; *1930-32*, III, 319; *1901*, 7][33]

---

elemento está definido de forma directa por su precedente; el acto simple consiste en el paso de un elemento ya creado al elemento siguiente que hay que crear" [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 317; *1901*, 4]. Aquí aparecen dos ideas de Dedekind que volveremos a encontrar más adelante: "la capacidad creadora de los matemáticos por lo que a los números se refiere" y "el acto simple y cresdor del paso al suuiente." Este acto simple y creador del paso al siguiente se halla también en toda la ideología de los "*números de clase*" de Cantor ([Cantor *1883*, 546 y sgs.]; véase asímismo Pla [*1989*, 381-382, nota 42]).

[28] Dedekind usa la palabra *System* que como veremos, es la palabra que se impondrá en la terminología de Dedekind para designar a un *conjunto.*

Dedekind se refiere al *suplemento X* o al §159 de la segunda edición de las *Lecciones sobre la teoría de números* de P.G. Lejeune-Dirichlet de 1871 que analizaremos muy someramente más adelante. Dedekind utiliza la palabra *Zahlkörper*; véase Dedekind [*1871*; *1930-32*, III, 224].

"Cuerpo de números"; Dedekind utiliza la palabra *Zahlkörper*; véase Dedekind [*1871*; *1930-32*, III, 224].

[29] Nosotros, a diferencia de Dedekind, este cuerpo de números 𝔑 lo designaremos por ℚ.

[30] "...Das System 𝔑 ein wohlgeordnetes, nach zwei entgegengesetzten Seiten hin unendliches Gebeit von einer Dimension bildet."

[31] Dedekind [*1858*, 204] da el orden vía los positivos: "$a < b$ ssi $b-a$ es positivo" y así elimina toda referencia a la intuición geométrica.

[32] Dedekind [*1858*, 204] dice "b está entre a y c".

[33] En el manuscrito de 1858 (*cf.* [Dugac *1976*, 204]) añade que "el conjunto de los números b, incluidos entre a y c, se puede designar por (a,c)...que es un intervalo".

Aquí Dedekind, en el inicio mismo de su fundunentación del análisis, pone de manifiesto una propiedad *topológica importante.*

III. La separación de $\mathbb{Q}$:[34] todo elemento a de $\mathbb{Q}$ *sepera al conjunto* $\mathbb{Q}$ *en dos clases* A_1 y A_2, cada una de las cuales es "infinita" y tales que los elementos de A_1 son menores que a y los elementos de A_2 son mayores que a [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 319; *1901*, 7].

El elemento a lo podemos asignar tanto a A_1 como a A_2, siendo en cada caso, respectivamente, el mayor o el menor de todos ellos [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 319; *1901*, 7]. De esta forma Dedekind [*1872*; *1930-32*, III, 319; *1901*, 7] pasa a considerar dos *subconjuntos* A_1 *y* A_2 de $\mathbb{Q}$, *disjuntos*, *complementsrios* y *contiguos* en el sentido de que "separan a $\mathbb{Q}$ en dos clases A_1 y A_2 tales que cada uno de los elementos de la primera clase A_1 es menor que cada uno de los elementos de la segunda clase A_2.[35] La pareja A_1, A_2 es una *cortadura* y se designa por medio de (A_1, A_2).[36]

La idea de conjunto es inevitable en la presentación que hace Dedekind puesto que, en ella, debe considerar:

1. $\mathbb{Q}$ como una *totalidad* infinita;
2. el conjunto $\mathbb{Q}_+$ de los racionales positivos para poder establecer la relación de orden sin tener que recurrir a la intuición geométrica;
3. una pareja de totalidades infinitas A_1 y A_2, asociadas a un número racional a, tales que

$$\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2,$$
$$\mathbb{Q} = A_1 \cap A_2,$$
$$\forall a_1 \in A_1 \, \forall a_2 \in A_2 \, (a_1 < a \wedge a < a_2).$$

Esta necesidad de recorrer a conjuntos en la separación de $\mathbb{Q}$ se halla expuesta de forma mucho más sugerente en el manuscrito de 1858 y sobretodo en el texto *Intervalle*

[34] En el manuscrito la separación de $\mathbb{Q}$ es la propiedad IV; el parágrafo III lo dedica a una intuición realmente importante que podía haber contribuido a simplificar la presentación de Dedekind; es el concepto de *intervalo* que, en el texto de 1872, aparece sólo de pasada en §6; en cambio en el apéndice XXXII que nos ofrece Dugac [*1976*, 209] encontramos, a forma de cierre, el *código manuscrito III.10* de Dedekind, titulado *Intervalle.* En él se insinua la posibilidad de elaborar una teoría conjuntista de los intervalo que, si Dedekind la hubiese adoptado en la redacción del texto, le habría permitido una presentación mucho más clara y, a la vez, más conjuntista. Curiosamente, en el manuscrito (p. 204) hay un tenue intento de introducir los intervalos en el redactado de la exposición de las propiedades del cuerpo de los números racionales; este tenue intento, dn embargo, no tendrá ninguna repercusión posterior y desaparecerá en la redacción del texto.

[35] En el manuscrito (p. 204) designa $A_1 = (-\infty, a)$ y $A_2 = (a, +\infty)$ y, por consiguiente, según Dedekind, a pertenece a ambos intervalos.

[36] Dedekind [*1872*; *1930-32*, III, 323; *1901*, 12] usa la palabra "*Schnitt*."

que, como ya hemos indicado, nos ofrece Dugac [*1976*, 209] al final del manuscrito y que analizaremos con mayor detalle más adelante.

Seguidamente, en el §2, Dedekind analiza la correpondencia que hay entre los elementos de $\mathbb{Q}$ y los *puntos de la recta* L y nos informa de que fue prercisamente el análisis de los puntos de la recta L lo que lo llevó a considerar las *separaciones*—"todo punto de L determina una separación de L"—así como también la *densidad* y el concepto de segmento [en el manuscrito, *1872*; *1930-32*, III, 319-320; *1901*, 6-8; *1858*, 204].[37] Además, si en L se elige un origen y un segmento unidad, se tiene que $Q < L$ [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 320; *1901*, 8; *1858*, 204].[38]

Dedekind [*1872*; *1930-32*, III, 320-321; *1901*, 8-9] nos dice que L, a diferencia de $\mathbb{Q}$, es *continua* en el sentido de que L es "infinitamente más rica en puntos de lo que $\mathbb{Q}$ lo es en nümeros".[39] Esta "riqueza" de L—la *completitud o continuidad*—Dedekind utiliza la expresión "Vollständigkeit" o "Stetigkeit"—de L es la característica o riqueza que ha de tener el universo de los números que debemos crear [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 321; *1901*, 9; *1858*, 205];[40] recordemos que los números racionales son una creación de la mente humana [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 321; *1901*, 9]:[41]

> Si ahora, como es nuestro deseo, procuramos seguir aritméticamente todos los fenómenos de la línea recta, el dominio de los números racionales es completamente *insuficiente* y por consiguiente es absolutamente necesario que el instrumento $\mathfrak{R}$ construido por la creación de los números racionales se perfeccione esencialmente con la creación de unos números nuevos de manera que el dominio de los números se complete o, como podríamos decirlo también, alcance la misma continuidad que la línea recta.

---

[37] Dedekind utiliza las palabras *Strecke* (*Stück*) para dedgnar el concepto de *segmento*.

[38] Dedekind transporta $\mathbb{Q}$ en L que, como sabemos gracias a Descartes, es un transporte que podemos hacer con regla y compás (*cf.* [Descartes *1637*] y [Pla *1987*, 839]).

[39] En [*1858*, 204-205] cita a Platón, en una clara alusión al Teeteto, para recordarnos que *esisten infinitas longitudes inconmensurables a una longitud dada*. En L hay, pues, *infinitos* puntos a los cuales no les corresponde *ningún* número racional. Dugac se sorprende de que Dedekind no cite asimismo los *Elementos* de Euclides; *cf.* [Dugac *1976*, 41].

[40] *Cf.* nota 29.

Esta riqueza que ha de tener $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ podria explicar la razón por la cual a Dedekind no le sorprende, en absoluto, la demostración que le envió Cantor (cf. carta de 20 de junio de 1877 en [Cavaillés *1962*, 200] según la cual la potencia de $\mathbb{R}$ es mayor que la potencia de $\mathbb{Q}$ (*cf.* [Dugac *1976*, 41]).

[41] En el manuscrito [Dedekind *1858*, 204], al hablar de la creación de los números racionales, se refiere a una "creación libre(?)" del espiritu humano, con un signo de interrogación algo misterioso que indica, quizás, que esta creación se debe hacer *aritméticamente y con exclusión de cualquier intuición geométrica* y por lo tanto, como veremos, en el seno de una cierta teoría de conjuntos y de ahí que no sea tan *libre* como se podría pensar de antemano. Dedeknd recoge, no obstante, una idea que se halla ya en una carta de Gauss a Weber (*cf.* Gauss [*1880*, 497]). Como veremos más adelante Dedekind defiende, ante Weber, esta capacidad creadora.

Esta creación aritmética de los números requiere de una cierta teoría de conjuntos, como veremos con toda claridad en la propia exposición que hace Dedekind del proceso que se debe seguir. Para lograr la misma continuidad que la línea recta, considera la "esencia de la continuidad" de la recta que no es otra cosa que el *principio recíproco* de la propiedad de separación [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 322; *1901*, 11; *1858*, 206]:

> Si todos los puntos de una línea recta los separamos en dos clases de forma que cada punto de la primera clase se halle a la izquierda de cada uno de los puntos de la segunda, entonces existe un punto y sólo uno que genera esta separación de la recta en do clases, esta cortadura de la recta en dos partes

y enseguida añade [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 322-323; *1901*, 11; *1858*, 205-206]:

> Creo no equivocarme si me imagino que todos los lectores admiten la veracidad de esta afirmación, a pesar de que puedan sentirse defraudados por el hecho de que lo que desvela el secreto de la continuidad sea una trivialidad,

pero "la suposición de esta propiedad de la línea recta no es otra cosa que un axioma en virtud del cual atribuyo a la línea recta la continuidad... [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 323; *1901*, 12; *1858*, 208].[42]

Este parágrafo es de una importancia decisiva en la construcción dedekiniana de los números reales, como pone de manifiesto el propio Dedekind: si bien la continuidad de la recta nos viene dada por la *intuición geométrica* que de ella tenemos—y es precisamente esta intuición lo que hay que evitar—, es preciso **crear** un *dominio de números nuevos* que posea este *principio* o *axioma* que *atribuimos* a la recta *L*: la *completitud* o *continuidad*; y debemos crearlo mediante una construcción que, inspirándose en la *intuición geométrica*, no descanse en ella.[43] Esto sólo es posible con una construcción conjuntista de los números, basada en los naturales (o en los racionales).

Este análisis intuitivo y trivial, como dice el propio Dedekind, es lo que lo lleva a crear de forma conjuntista los números reales. ¡Veamos como lo hace![44]

---

[42] En realidad ni Dedekind ni ningún otro matemático de su época ni tampoco de la época anterior alguna dispone de una descripción o construcción matemática—independiente de la intuición —de la línea recta *L*. Con respecto a una descripción de *L* véase la obra de David Hilbert relativa a los *Fundamentos de la Geometría* [*1899*].

[43] El uso de los *intervalos* habría puesto de manifiesto mucho más claramente la aportación conjuntista de Dedekind. Al evitarlos, en la presentación que hace, la aportación conjuntista queda muy escondida.

[44] R. Bunn en su *Developments in the foundation of mathematics from 1870 to 1910* [*1980*; *1984*, 288] es absolutamente claro: "Dedekind parece haber dado con esta definición reflexionando sobre el comportamiento de las líneas, y contrastando el sistema formado por los puntos de una recta con el sistema de los números reales. Pero Dedekind no deseaba embarcarse en la tarea de axiomatizar el concepto de magnitud, que subrayaría el papel de un axioma de continuidad. La geometría tenia que servir solamente como el origen de la idea para construir una fundamentación aritmética; el sistema continuo en el que tebía descansar la fundamentación de Dedekind tenía que ser aritmético en el

Dedekind, en el §4 [*1872*; *1930-32*, III, 323-324; *1901*, 12-15; *1858*, 206], crea los números irracionales observando que, en $\mathbb{Q}$, no *toda cortadura*—no toda descomposición de $\mathbb{Q}$ en *dos classes* A_1 y A_2 tales que $\forall a_1 \in A_1\ \forall a_2 \in A_2\ (a_1 < a_2)$ —corresponde a un número racional $a \in \mathbb{Q}$ y observando, además, que hay una *infinidad* de cortaduras que no están asociadas a número racional alguno.[45] Esta *falta de correspondencia* entre números racionales y cortaduras es precisamente, para Dedekind, la *incompletitud* o *discontinuidad* de $\mathbb{Q}$ que debemos evitar en el nuevo dominio que vamos a crear.[46] Esto obliga, pues, a Dedekind [*1872*; *1930-32*, III, 325; *1901*, 15; *1858*, 207] a tener que trabajar con cortaduras en vez de hacerlo con números racionales; "para cada cortadura (A_1, A_2) **no** racianal *creamos* un número nuevo, *irracional*, α, completamente definido por la cortadura (A_1, A_2)." Dos números "son iguales" si corresponden a cortaduras no esencialmente distintas.[47] En cambio, números racionales distintos generan cortaduras esencialmente distintas. Dedekind evita, en este caso, la técnica de paso al cociente que, como hemos visto, había usado en sus trabajos anteriores de teoría de números. Sin embargo, en el manuscrito, se halla a un paso de evitar las cortaduras esencialmente iguales, generadas por un racional, cuando dice "podríamos imponer que el racional que genera la cortadura perteneciese, en todo caso, a la segunda clase y de esta manera la primera clase, en ningún caso poseeria último elemento" [Dedekind *1858*, 207], pero después de haber establecido esta precisión no la tiene en cuenta para nada. Dos números son iguales si corresponden a cortaduras no esencialmente distintas. A partir de esta creación, cualquier consideración acerca del *cuerpo de los números reales*, como veremos en el análisis que sigue, se *traducirá* en consideraciones acerca de las cortaduras; es decir, en *consideraciones sobre ciertas clases de números racionales*; es decir, *en consideraciones de índole conjuntista.*

En primer lugar, Dedekind crea un conjunto—el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales—utilizando la idea de correspondencia e, implícita e inconscientemente, el *axioma de reemplazamiento* de la teoría axiomática de conjuntos. Aquí, sin embargo, como observa Dugac [*1976*, 43], lo que sucede es que nos encontramos ante una posición platónica,

---

sentido de que sus operaciones debían estar definidas, en último término, sobre la base de las operaciones de los números naturales, y no debía hacerse mención alguna de ningún objeto geométrico. Así pues, a la vez que una base para construir demostraciones, Dedekind quería conseguir también una fundamentación puramente aritmética del cálculo."

[45] Dedekind nos da dos métodos—uno de ellos en el manuscrito de 1858 [*1858*, 206-207] y el otro en el texto de 1872 [*1872*; *1930-32*, III, 324-325]—que proporcionan *cortaduras no-racionales*. En el manuscrito da la cortadura, concreta, que coreresponde a $\sqrt{2}$. En el texto, en cambio, a cada $D \in \mathbb{Q}$ tal que, para un $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$, le asocia la cortadura $A_1 = \{x \in \mathbb{Q}: x^2 > D\}$ y constata que es un *intervalo infinito sin elemento mínimo*.

[46] [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 325; *1901*, 15; *1858*, 207]: "In dieser Eigenschaft, da nicht alle Schnitte durch rationale Zahlen hervorgebracht werden, besteht die Unvollständigkeit oder Unstetigkeit des Gebietes $\mathfrak{R}$ aller rationalen Zahlen."

[47] Los números racionales generan, de hecho, *dos* cortaduras según que el número racional en cuestión pertenezca a la primera o a la segunda clase; estas cortaduras son *esencialmente iguales* o *no essencialmente distintas* (*cf.* [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 325; *1901*,15; *1858*, 207]).

posición adoptada por Dedekind [*1872*; *1930-32*, III 323; *1901*, 13] en su presentación del conjunto $\mathbb{R}$ de los número reales:

> ...En efecto, los números racionales existen antea de engendrar [*hervorbringen*] la cortadura y la manera de formar las cortaduras, a partir de los elementos de $\mathbb{Q}$, justifica plenamente la palabra "engendrar". Pero, nosotros creemos que cuando la cortadura (A_1, A_2) no corresponde a un número racional, entonces la palabra "engendrar" parece presuponer (contrariamente a la concepción instantánea de Dedekind contenida en la afirmación de "creación" de nuevos números) una cierta "existencia" a priori de α, si bien en realidad es α quien es engendrado por la cortadura.

Dedekind no considera a la *clase de equivalencia* de las cortaduras, vía la relación ser *esencialmente iguales* como un número real; de haberlo hecho así, la creación de la mente del conjunto de los números reales sería un conjunto cociente, de forma análoga a como había procedido en sus trabajos anteriores de teoría de números.

Ahora Dedekind nos muestra que la completación $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ *está totalmente ordenada* y, para ello, requiere de ciertas *propiedades conjuntistas*, puesto que la relación de orden entre dos números reales α y β se establece por medio de ciertas relaciones entre las primeras clases de las cortaduras (A_1, A_2) y (B_1, B_2) que *generan*, respectivamente, α y β; Dedekind, en un intento simplificador, observa que es suficiente conocer una parte de la cortadura para disponer de la cortadura completa.[48] Además Dedekind [*1872*; *1930-32*, III, 326; *1901*, 15-16] nos da la propiedad que caracteriza a la primera de las clases en una cortadura: "si al pertenece a A_1, todos los racionales menores que al son de A_1."

La definición del orden entre α y β se obtiene *comparendo* las primeras clases de las cortaduras.[49] Para ello, dada la complejidad de su definición de cortadura, se ve obligado a analizar *todos* los casos posibles:

1. si $A_1 = B_1$, las cortaduras son iguales y esto lo indicaremos por $\alpha = \beta$ o $\beta = \alpha$;[50]
2. si $A_1 \neq B_1$, entonces $A_1 \nsubseteq B_1$ y, en consecuencia, $B_1 \subset A_1$ [o $B_1 \nsubseteq A_1$ y entonces $A_1 \subset B_1$].[51] Ahora hay que distinguir dos casos:

[48] [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 325-326; *1901*, 16]: "Si conocemos la primera clase A_1, la segunda clase A_2 constará de todos los elementos que no son de la primera."

[49] Aquí Dedekind recurre a la relación de *inclusión* entre conjuntos que establece lingüítica-mente: "si todo número de *A* se halla contenido en *B*, entonces *A* se hallará también contenido en *B*" (*cf.* [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 326; *1901*,16; *1858*, 207]).

[50] Aquí Dedekind nos informa de que "$A_1 = B_1$ es lo mismo que $A_1 \subseteq B_1 \wedge B_1 \subseteq A_1$"; este es el axioma de *extensionalidad*; *cf.* [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 328; *1901*,16].

[51] Constituye una consecuencia inmediata de la equivalencia indicada en la nota anterior.

Aquí Dedekind usa con toda corrección sus propias definiciones, evitando completamente cualquier recurso a la intuición geométrica: puesto que, si $A_1 \nsubseteq B_1$, existe un $a_1 \in A_1$ tal que $a_1 \notin B_1$ y, por la definición de cortadura, $a_1 \in B_2$ y cualquier $b_1 \in B_1$ será menor que $a_1 \in A_1$ y, por la

2a. sólo hay un elemento de A_1 que no pertenece a B_1: este número necesariamente debe ser racional y entonces las cortaduras (A_1, B_1) y (B_1, B_2) no son esencialmente distintas y $\alpha = \beta$ [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 326; *1901*, 16-17];

2b. por lo menos hay dos elementos de A_1 que no pertenecen a B_1 y, por la densidad de $\mathbb{Q}$, hay *infinitos*; en este caso ambas cortaduras son esencialmente distintas y α y β son diferentes y, además, "α es mayor que β, β es menor que α, lo cual se expres a simbólicamente por medio de $\alpha > \beta$ o bien $\beta < \alpha$ [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 327; *1901*, 17].[52] Dedekind además pone de manifiesto la analogía entre este caso y el caso en el que $B_1 \nsubseteq A_1$, así como el hecho de que no haya más casos. Además nos hace observar que el orden en $\mathbb{R}$ *coincide* con el orden $\mathbb{Q}$ cuando α y β son racionales [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 327-328; *1901*, 17-18].

En resumen, Dedekind reduce el orden de los números reales α y β a la relación de inclusión que pueda existir entre A_1 y B_1 y obtiene las posibilidades que siguen:

I. $A_1 \subseteq B_1$ y $B_1 \subseteq A_1$;
II. $A_1 \nsubseteq B_1$;
III. $B_1 \nsubseteq A_1$.

Así pues obtiene los casos siguientes de cortaduras:

1. idénticas $\quad A_1 = B_1 \quad$ conducen a $\alpha = \beta$;

2. no idénticas $\begin{cases} \text{no esencialmente distintas} & [M \text{ finito] dan } \alpha = \beta \,; \\ \text{esencialmente distintas} & [M \text{ infinito] dan } \alpha > \beta \text{ o } \beta > \alpha \,, \end{cases}$

en donde $M = |A_1 - B_1| = (A_1 - B_1) \cup (B_1 - A_1)$.

---

caracterización que Dedekind ha dado de la primera clase de una cortadura, $b_1 \in A_1$, pero $A_1 \neq B_1$ [*1872*; *1930-32*, III, 326; *1901*, 16].

[52] La presentación del orden en el manuscrito es ligeramente distinta. En él establece la igual-dad de dos números reales cuando las cortaduras que los definen son *no*-esencialmente distintas y diferentes cuando son esencialmente distintas. (Es decir: $\alpha = \beta$ ssi $A_1 - B_1$ y $B_1 - A_1$ son finitos.) Si α y β poseen cortaduras esencialmente distintas y $A_1 \subseteq B_1$, entonces $\alpha < \beta$ ("menor quen"); si $A_1 \not\subset B_1$, entonces $\alpha > \beta$.

En este texto Dedekind excluye los casos forzando las cosas y sin recurrir a las propiedades conjuntistas de A_1, B_1, pero entonces se ve en la necesidad de establecer un *teorema*: "si $\alpha < \beta$, entonces $\beta > \alpha$, pero si $\alpha > \beta$, entonces $\beta < \alpha$" y es ahí donde se ve obligado a recurrir a las propiedades de las primeras clases A_1, B_1, tanto a las propiedades que poseen por ser primeras clases de una cortadura como a las que poseen por ser subconjuntos de $\mathbb{Q}$ (*cf.* [Dedekind *1858*, 207, primera parte del §5]).

Estos casos son excluyentes, pero dadas dos cortaduras (A_1, A_2) y (B_1, B_2) sus primeras partes A_1 y B_1 siempre satisfacen uno de ellos. Esto es lo que hace que el orden del dominio $\mathbb{R}$ de los números reales sea *total* o *lineal*. Dedekind [*1872*; *1930-32*, III, 327; *1901*, 17-18] es muy claro:

> Esto agota todas las posibilidades y de ello se sigue que uno de los números sea msyor y que el otro sea menor y, por lo tanto, se dispone de dos posibilidades; no es posible ningún otro caso. Esta verdad se hallaba contenida en el uso del comparativo (mayor, menor) usado para designar la relación entre α y β, pero hasta el momento nadie había justificsdo este uso.

De nuevo Dedekind manifiesta la necesidad de justificar una intuición geométrica y, también, nuevamente, esta justificación pasa por la utilización de una *teoría de conjuntos* más o menos ingenua.[53] Además, como obsersa Kleene [*1952*, 52], el autor aplica el *principio de tercio excluso* a $\mathbb{Q}$ que es un conjunto infinito actual.[54]

Por fin, antes de entrar en el §5, titulado "La continuidad de los números reales" observa que:

(i) "todo número real α parte $\mathbb{Q}$ en dos clases A_1 y A_2 que contienen, respectivamente, a los números racionales menores, mayores que α";

(ii) "si $\alpha > \beta$, entonces entre α y β hay una infinidad de racionales" [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 327-328; *1901*, 18-19].[55]

Ahora se halla ya en situación de establecer, con absoluto rigor, en el dominio $\mathbb{R}$ de los números reales, las propiedades I, II, y III así como la *continuidad* de $\mathbb{R}$ que constituye la propiedad IV [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 327-328; *1901*, 19; *1858*, 207-208]:

I. *Transitividad*: si $\alpha > \beta \wedge \beta > \gamma$, entonces $\alpha > \gamma$ y decimos que "β está entre α y γ."
II. *Densidad*: si $\alpha \neq \gamma$, existen infinitos β entre α y γ.
III. *Separación*: todo $\alpha \in \mathbb{R}$ induce una partición del conjunto $\mathbb{R}$ en dos clases infinitas $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$; son las clases $\mathfrak{A}_1 = \{\alpha_1 \in \mathbb{R}: \alpha_1 < \alpha\}$ y $\mathfrak{A}_2 = \{\alpha_2 \in \mathbb{R}: \alpha < \alpha_2\}$

[53] Es decir, Dedekind, al identificar las cortaduras con la primera clase A_1 —a menos de un racional—puede reducir la cuestión del orden entre números reales a las propiedades conjuntistas de las primeras clases; dadas las primeras clases A_1, B_1, dispone de tres casos que se excluyen mútuamente:

$$(\alpha)\ A_1 = B_1; \quad (\beta)\ A_1 \subseteq B_1; \quad (\gamma)\ B_1 \subseteq A_1$$

y, en los casos β y γ, dispone de dos casos que se excluyen: $|A_1 - B_1|$ finito; $|A_1 - B_1|$ infinito.

[54] Este *principio* constituye el "leit motiv" de discordia en la discusión formalista y constructivista en la cuestión relativa a la fundamentación lógica y/o conjuntista de las matemáticas.

[55] Observemos que constituye simplemente una nueva lectura de las definiciones.

(asignando α a una u otra clase arbitrariamente con lo cual pasa a ser, respectivamente, máximo o mínimo.)

IV.*Contiuidad:* toda cortadura de $\mathbb{R}$ está generada por un *único número real.*

La demostración [Dedekind *1872*, *1930-32*, III, 329; *1901*, 19; *1858*, 208] es conjuntista: si $(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)$ es una cartadura de $\mathbb{R}$, entonces (U_1, U_2) (en donde $U_i = \mathfrak{A}_1 \cap \mathbb{Q}$, $i = 1, 2$) es una ortadura de $\mathbb{Q}$ y, cossiguientemente, *define* un número real α bien determinado. Sea ahora $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq \alpha$ entonces hay una infinidad de números raciondes q entre α y β. Distinguimos dos casos (aplicando la *ley de tricotomía* del orden):

- $\alpha < \beta$ y $\alpha < q < \beta$; en este caso, $q \in U_2$ y, por tanto, $q \in \mathfrak{A}_2$ y $\beta \in \mathfrak{A}_2$;
- $\alpha > \beta$ y $\alpha > q > \beta$; en este caso, $q \in U_1$ y, por tanto, $q \in \mathfrak{A}_1$ y $\beta \in \mathfrak{A}_1$;

es decir: $\beta \in \mathfrak{A}_1$ o $\beta \in \mathfrak{A}_2$ según que $\alpha > \beta$ o $\alpha < \beta$; es decir, α es el *único* real que puede *dividir* $\mathbb{R}$ por medio de la cortadura $(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)$.

Dedekind recurre, pues, a las propiedades conjuntistas necesarias para poder afirmar que "si $(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)$ es una cortadura de $\mathbb{R}$, (U_1, U_2) (en donde $U_i = \mathfrak{A}_1 \cap \mathbb{Q}$, $i = 1, 2$) es una cortadura de $\mathbb{Q}$", que es el punto esencial de la demostración, puesto que es esta cortadura la que nos proporciona el número *real* α. El resto es, entonces, una simple constatación.[56] Así pues Dedekind utiliza la *propiedad distributiva:*

$$\mathbb{Q} = \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = (U_1 \cup U_2) \cap \mathbb{Q} = (U_1 \cap \mathbb{Q}) \cup (U_2 \cap \mathbb{Q})$$

y la *propiedad de absorción* del conjunto vacío: $A \cap \emptyset = \emptyset$, que son las propiedades que permiten garantizar la validez de sus afirmaciones. Constituye un uso implicito—que jamás se explicita, ni en el manuscrito ni en el texto—pero absolutamente indispensable para que la construcción de Dedekind del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales sea rigurosa—libre de intuiciones geométricas—, que es el propósito de Dedekind.

En el manuscrito, el parágrafo 5 se termina con la definición de *número real positivo* y *número real negativo*: son, respectivamente, los α tales que $\alpha > 0$ o $\alpha < 0$.

Dedekind dispone de la continuidad del dominio $\mathbb{R}$ de los números reales, pero precisa establecer que $\mathbb{R}$ se puede dotar de estructura de cuerpo y, para ello, precisa de las operaciones de *suma*, *producto*, *diferencia* y *cociente*. Seguidamente deberá establecer las propiedades de cuerpo. Este objetivro no se logra completamente ni en el manuscrito—en el que Dedekind sólo define la suma y la diferencia—ni en el texto—en el que sólo define la suma.[57]

---

[56] En el manuscrito [*1858*, 208], Dedekind afirma que $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ es una partición de $\mathbb{R}$, y entonces supone que o bien $\alpha \in \mathfrak{A}_1$ o bien $\alpha \in \mathfrak{A}_2$; si $\alpha \in \mathfrak{A}_1$ afirma entonces que, para todo $\alpha_1 \in \mathfrak{A}_1$, $\alpha_1 \leq \alpha$; si pertenece a $\mathfrak{A}_2$, para todo $\alpha_2 \in \mathfrak{A}_2$, $\alpha_2 \geq \alpha$. Sin embargo Dedekind no precisa en que se fundan estas afirmaciones.

[57] Recordemos con Fraenkel [*1964*, 52] que las cortaduras son "menos cómodas en los cálculos efectivos" de lo que lo son otras presentaciones.

Dedekind dedica el §6 del texto, "Operaciones con números reales," a las operaciones y es interesante destacar la definición, restringida a $\mathbb{R}$, de ley de composición [*1872*; III, 329; *1901*, 19]:

> A fin de reducir una operación arbitraria entre dos números reales α y β a operaciones con números racionales basta definir, a partir te las cortaduras (A_1, A_2) y (B_1, B_2) engendradas por los números reales α y β del conjunto $\mathbb{R}$, una cortadura (C_1, C_2) que correoponderá (*entsprechen*) al resultado γ de la opetación.

La reducción de "operaciones entre números reales" a la operación que a "A_1 y B_1 le hace corresponder C_1" es, una vez más, un recurrir a la teoría incipiente de conjuntos; esta correspondencia la explicita Dedekind en el caso de la suma (en el texto) y de la suma y la diferencia (en el manuscrito).

En el caso de la suma, dados A_1 y B_1, define:[58]

$$C_1 = \{c \in \mathbb{Q}: \exists a_1 \in A_1 \; \exists b_1 \in B_1 \, (a_1 + b_1 \geq c)\}$$

y observa que $C_1 \neq \emptyset$ y que $\mathbb{Q} - C_1 \neq \emptyset$ y por consiguiente induce una cortadura (es decir: cumple la propiedad que caracteriza a las *primeras clases* de una cortadura). Esta cortadura está generada por un cierto número real γ que, *por definición*, es la *suma* de α y β (es decir: $\gamma = \alpha + \beta$). Y, si α y β son racionales, entonces esta suma coincide con la suma racional.[59]

A continuación añade, de acuerdo con la definición de ley de composición que hemos dado más arriba: "De la misma forma podemos definir las demás operaciones de la aritmética elemental como, por ejemplo, la diferencia, el producto y el cociente, la potencia y la extracción de raíces, los logaritmo...."[60]

---

[58] En realidad $C_1 = \{a_1 + b_1: a_1 \in A_1 \wedge b_1 \in B_1\}$ que es la construcción del manuscrito [Dedekind *1858*, 208]. En cierta forma Dedekind, siguiendo quizás las técnicas utilizadas entre ideales en el citado *suplemento X*, define la *sumas de reales* por medio de *sumas de conjuntos*:

$$A_1 + B_1 = \{a_1 + b_1: a_1 \in A_1 \wedge b_1 \in B_1\} = \{c \in \mathbb{Q}: \exists a_1 \in A_1 \;\; \exists b_1 \in B_1 (c \leq a_1 + b_1)\},$$

que constituye, sin duda, un recurso conjuntista.

[59] La operación + deflnida en $\mathbb{R}$ extiende la operación + que se tenía inicialmente en $\mathbb{Q}$ [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 328; *1901*, 22; *1858*, 208].

[60] En el manuscrito [*1858*, 208] Dedekind deflne, también, la diferencia, introduciendo la ley de composición interna que, a A_1 y B_1 le asocia

$$C_1 = \{c \in \mathbb{Q}: \exists a_1 \in A_1 \, \exists b_1 \in B_1 \, (c \leq a_1 - b_1 \, c)\} = \mathrm{A}_1 - \mathrm{B}_1.$$

Enuncia, además, que $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$, etc... Y, al parecer, inició un §8 con la multiplicación (*cf.* [Dugac *1976*, 46]).

> ...y así se llega a demostraciones aritméticas de teoremas (como $\sqrt{6} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$) que, según lo que yo conosco, hasta el presente no han sido demostrados jamás. [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 330; *1901*, 22]

Este parágrafo del texto contiene el concepto de *intervalo* que le permite "evitar, en parte, la dificultad en la definición de las operaciones" [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 331; *1901*, 22] y un *teorema general* que le permite extender las propiedades de ley operaciones racionales al dominio aritmético de los números reales, como por ejemplo, la *ley distributiva*: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. Este teorema general, en la línea de generalización de la definición de ley de composición, establece una *cierta continuidad* entre las operaciones aritméticas y constituye el embrión de las álgebras topológicas; es una ley que establece un cierto vinculo de regularidad entre las operaciones aritméticas de $\mathbb{Q}$ y el paso al límite. Dice [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 331; *1901*, 23-24]:

> ...Es fácil ver que todo se reduce a demostrar que las operaciones aritméticas poseen una cierta continuidad. Lo que quiero dar a entender con esto se puede expresar bajo la forma de un teorema general: "Si el número λ es el resultado de una operación realizada con los números α, β, γ, ... y λ se halla en el intervalo L, entonces existen intervlos A, B, C,... que contienen a α, β, γ,... tales que los resultados del mismo cálculo con números arbitrarios de A, B, C, ..., en vez de α, β, γ, ... serán asímismo números del intervalo L.

Este teorema es, además, para Dedekind [*1872*; *1930-32*, III, 331; *1901*, 23-24], "demasiado pesado" y es preciso buscar un "camino más satisfactorio para introdudr las ideas de variable, función y límite que permita darles una forma más apropiada y que permita fundamentar en ellos las definiciones de las operaciones aritméticas más elementales".

El texto [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 331-334; *1901*, 24-27] termina con el parágrafo "Análisis infinitesimal," parágrafo que no existía en el manuscrito pero del que, con toda seguridad, disponía ya Dedekind en su curso de análisis matemático de Brunswick. En el Dedekind, tras establecer la definición de límite nos ofrece el teorema que, como veíamos al empezar el análisis de este texto, constituye la base de la fundamentación del análisis y nos indica además que dicho teorema [*1872*; *1930-32*, III, 332; *1901*, 24-25]: "Si una magnitud [*Größe*] crece de forma continua pero no va más allá de todos los límites posibles, alcanza un valor límite," es equivalente al *principio de continuidad* (IV) de $\mathbb{R}$.[61]

[61] "Una variable (continua) x tiende a un límite a cuando en su proceso x cae por fin entre dos números que contienen al número a, o bien, lo que es lo mismo, cuando $x- a$ en valor absoluto se hace finalmente más pequeño que un valor dado distinto de cero". Eo curioso que Dedekind no recurra aquí—sería la ocasión y el lugar adecuados—al concepto de intervalo.

Esta es la presentación rigurosa—es decir, conjuntista—de la continuidad de $\mathbb{R}$ que constituye, según Dedekind, la base de la fundunentación del análisis real.[62]

En toda esta presentación Dedekind pasa por encima del concepto de intervalo como si pasara sobre ascuas; sin embargo este concepto lo hallamos en el manuscrito, en el texto y en un texto, titulado *Intervalle*.[63] Este concepto, si lo hubiese utilizado con toda su potencialidad, le habría permitido ofrecer un tratamiento *conjuntista* más claro todavía.

En el texto *Intervalle* el propio Dedekind [*1858*, 209] dice:

> Cada uno de las sistemas de números racionales que apsrece en las cortaduras ...constituye un caso particular del concepto que sigue, concepto que facilitará las reflexions que haremos más adelante.

Este concepto es precisamente el concepto de intervalo que Dedekind [*1858*, 209] define de la forma siguiente: "Un conjunto [*System*] de números racionales es un intervalo si todos los números situados entre dos números del conjunto (§1) pertenecen también al conjunto." En esta definición Dedekind hace referencia explícita al §1.[64] La sugerencia implícita que supone el hecho de que este texto se haya colocado a continuación del manuscrito, nos ha llevado a releer el parágrafo §1 del manuscrito y nos hemos encontrado con que, en la propiedad II de dicho parágrafo, Dedekind introduce la misma definición de intervalo y añade que los conjuntos infinitos de la forma

---

[62] En un texto inédito que Dugac [*1976*, 199-203] nos ofrece en el apéndice XXXI y en el cual Dedekind realiza un estudio exhaustivo del libro de Du Bois-Reymond *Die allgemeine Functionenlehre*, I de [*1882*], hallarnos las demonstraciones de cuatro teoremas de análisis matemático que Dedekind nos ofrece utilizando su teoría de las cortaduras:

Teor 1. "Si un conjunto de números reales está acotado, tiene supremo e ínfimo";
Teor 2. "Si $y = f(x)$ es una función real y continua en $[a, b]$, existe un $c \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in [a, b]$, siendo $f(c)$ el supremo de las y";
Teor 3. "Si $y = f(x)$ es una función real continua en $[a, b]$, entonces para todo ε positivo, existe un δ positivo tal que, en *todo* **intervalo** de longitud δ, la oscilación de f (diferencia entre supremo e ínfimo de los valores y) es menor que $\in$";
Teor 4. "Con las mismas hipotesio que el teorema anterior, si $f(a) > 0 > f(b)$, existe un c, mínimo en $[a, b]$, tal que $f(c) = 0$".

Con ello Dedekind quiere mostrar, y esta era precisamente su intención y objetivo iniciales cuando en 1858 inició las investigaciones de los números que ahora ns ocupa, que su teoria—conjuntista—de las cortaduras es una teoría excelente que permite of recer demostraciones "más breves y rigurosas" (*cf.* [Dugac *1976*, apéndice XXXI-8-, 201]).

Nótese que, en la formulación del teorema 3, Dedekind recurre al concepto de intervalo que, de haberlo llevado a sus últimas consecuencias, le habria permitido simplificar su propia presentación.

[63] Véase [*1858*, 204]: es la propiedad III del orden de los números racionales; Dedekind [*1872*; *1930-32*, III, 331; *1901*, 22], en el que, de pasda, en el §6, lo introduce para poder establecer el *teorema general de continuidad* que hemos citado más arriba y finalmente en [*1858*, 209], que constituye un texto que Dugac añade al final del manuscrito (*cf.* [Dugac *1976*, 209]).

[64] El texto *Intervalle* es un texto que viene encabezado por "§4. *Intervalle*"; esta numeración hace pensar que formaba parte de un texto más amplio, del que constituía el parágrafo cuarto.

$$(a, c) = \{b \in \mathbb{Q}: a \leq b \leq c\}$$[65]

son intervalos y, en la propiedad III, el concepto de intervalo, observando que (a,c) y $\mathbb{Q}$ son intervalos; en la propiedad IV, por fin, introduce las notaciones $(-\infty, a)$ y $(a, +\infty)$ para indicar las partes de una cortadura determinada en $\mathbb{Q}$ por un número racional a [Dedekind *1858*, 209]. En *Intervalle* dice además que las clases de las cortaduras son intervalos. Establece además una relación de inclución entre intervalos "si todos los números de un intervalo A están en un intervalo B, decimos que A es una parte de B" y ensguida añade: "todo intervalo es una parte de $\mathbb{Q}$."[66]

Dedekind [*1858*, 209] enuncia además una *enumeración* de los posibles casos de relaciones entre dos intervalos A y B..., en base a la partición de $\mathbb{Q}$, en tres intervalos A, A', A'', partición que queda determinada por A y seguidamente afirma que, para comparar "dos intervalos A y B", basta comparar "los números comunes a los intervalos A, A', A'' con cada uno de los intervalos B, B$'$, B''.[67]

Aquí Dedekind dispone de toda la artillería coniuntista necesaria para formular la teoría del orden de los números reales e, incluso, para *identificar* el número real con los intervalos del primer tipo.[68]

En el manuscrito *Intervalle* Dedekind introduce además el concepto de *intervalos contiguos* [*1858*, 209] y, en el texto [*1872*; *1930-32*, III, 330-331; *1901*, 23], el de *intervalo finito*. Los intervalos contiguos son "intervalos *disjuntos*—in elementos comunes —tales que su unión es un intervalo" y un intervalo A racional es finito cuando "existen a_1, $a_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $A \subseteq (a_1, a_2)$". Las dos clases de una cortadura son intervalos contiguos y jamás son intervalos finitos.

---

[65] Introduce además la definición de los intervalos semi-abiertos y abiertos, así como símbolos para representarlos.

[66] Véase Dedekind [*1858*, 204, 209; *1872*; *1930-32*, III, 331; *1901*, 23]. Además usa la palabra *Stück*: porción. Indiquemos, además, que Dedekind [*1858*, 209] utiliza el término *enthalten* tanto para designar la pertenencia de un elemento a un conjunto ("Zu jedem Intervall A gehören zwei andere a', A'', welche zu R ergänzen; A' enthält alle Zahlen a', welche kleiner sind, ab jede in A enthaltene Zahl a; A'' enthält alle Zahlen a'', welche grosser sind, als jede in A, enthaltene Zahl a") como la inclusión de un conjunto en otro ([*1858*, 204]: "Sind alle Zahlen Intervalls R auch in dem Intervall S enthalten, so heisst R ein Stück von S, enhalten in S"). Más adelante analizaremos un texto de Dedekind, situado entre 1887 y 1897, relativo a la pertenencia y a la inclusión.

[67] En el texto [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 331; *1901*, 23] el intervalo A debe ser finito; este requisito no aparece sin embargo en *Intervalle*, lo que implica que el subconjunto vacío de $\mathbb{Q}$ se haya de considerar también como un intervalo.

[68] Sin embargo Dedekind no identifica jamás el número real con la primera clase de la cortadura; esto le habría permitido, por un lado, poder evitar la *necesidad creadora de la mente*—crear se habría convertido en construir conjuntos y conjuntos de conjuntos. Este paso lo dará Russell en los *Principles of Mathematics* [*1903*] y lo hará con la caracterización de primera clase dada por Dedekind [Russell *1903*, 271]. La dificultad que nunca logró superar Dedekind fue la que consistía en identificar de alguna forma las cortaduras no-esencialmente distintas. Además, en este caso, la elección de un representante canónico no habria requerido el A.C.

Finalmente introduce un apartado que titula "Adición de intervalos" en el que asocia, a cada pareja de intervalos *A*, *B*, el *intervalo suma*

$$C = A + B = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Esta definición, aparentemente algebraica, es una deflnición absolutamente conjuntista. Asocia un intervalo *C* a cada pareja de intervalos *A* y *B*. De hecho, Dedekind establece una operación en el conjunto de los intervalos, en un proceso generalizador propio de la teoría de conjuntos y que sería absolutamente imposible fuera de ella.

3. El Suplemento X a las "Lecciones sobre la teoría de números" de Dirichlet, Segunda Edición [1871]. En el periodo 1869-1870 Dedekind consigue, por fin, vencer las graves dificultades que había hallado para poder "fundamentar una teoría general de los ideales que iluminase, desde una perspectiva abstracta, el objetivo principal del libro" [*1930-32*, III, 396-397][69] y este dominio abstracto, como había intuido ya en sus cursos do álgebra superior,[70] "era preciso para ligar el álgebra y la teoría de números por medio de lo que tienen de más íntimo y profundo" [Dedekind *1930-32*, III, 400] y, una vez vencidas todas las dificultades, pudo publicar esta teoría abstracta en el *Suplemento X* de la segunda edición de las *Lecciones sobre Teoría de Números* de Dirichlet.[71] Este suplemento es fruto de una intensa reflexión por parte de Dedekind que lo llevaría a convertir la *teoría de* números en "una disciplina en plena madurez, dotándola de las herramientas esenciales" [Bourbaki *1969*, 130] y, tras su publicación, Dedekind basará toda su obra relativa a la *teoría de números* en esta técnica y metodología.[72]

En [*1863*] Dedekind publica la Primera Edición de las citadas *Lecciones* de Dirichlet y lo hace con un gran fidelidad a la obra de Dirichlet ya que, gracias a las múltiples conversaciones mantenidas con Dirichlet a lo largo de los años 1855-1858, había podido seguir de cerca lo "esencial de estas lecciones y había podido discutir el porque de los métodos utilizados en ellas" [Dedekind *1930-32*, III, 392]. Sin embargo a la hora de llevar a término la publicación, basándose en un proyecto de libro elaborado por Dirichlet,

[69] Véanse los excelentes artículos de H.M. Edwards [*1980*], [*1983*] y [*1987*].

[70] Estos cursos corresponden a los semestres de invierno de 1856-57 y de 1857-58; son cursos relacionados con la división del círculo y de álgebra superior que Dedekind impartió en Göttingen, en cuya universidad fue encargado de curso en el período 1854-1858, antes de convertirse en profesor de la Escuela politécnia de Zurich.

[71] P.G. Lejeune-Dirichlet, no llegó a ver ni siquiera la primera edición de sus *Vorlesungen über Zahlentheorie* que, gracias a Dedekind, apareció en 1863. El apéndice X aparece por vez primera en la segunda edición, fechada en el año [*1871*]; la tercera edición hay que situarla en [*1879*] y la cuarta edición es de [*1894*]—siendo reeditada por la editorial Chelsea en [*1968*]—; es precisamente en esta última edición que el apéndice X se convierte en el apéndice XI.

[72] Técnica y metodología que podemos encontrar explicitada con todo detalle en su memoria *Sur la théorie des nombres entiers algebriques* de 1876-1877. En ella se aleja de los métodos tradicionales de Kummer [*1847*; *1847a*; *1851*] lo cual le creará ciertas dificultades con Lipschitz que entiende de forma distinta la manera de hacer y presentar las matemáticas. Véase, al respecto, [Dugac *1976*, 65].

Dedekind se encontró con graves dificultades, según comunicó a su amigo Henle [Dugac *1976*, Apéndice XV, 170-171], no tanto en lo relativo al contenido de la materia en ú misma cuanto en la forma de exponerla.

Como ya hemos mencionado en diversas ocasiones Dedekind acompañará las *Lecciones* de Dirichlet de comentarios—*Suplementos*—de su cosecha personal y es precisamente en el *Suplemento X* de la Segunda Edición—que, según Bourbaki [*1969*, 10^a edición, 130],[73] es una "obra de arte"—en donde Dedekind nos expone de forma magistral, y con un estilo nuevo y un método absolutamente moderno que contrasta con los de sus contemporáneos, la *teoría de cuerpos, módulos e ideales.*

Según Dugac [*1976*, 30], siguiendo la opinión expresada por Cantor [*1932*, 120], casi un siglo antes, acerca de las investigaciones conjuntistas de Dedekind, es precisamente en el *Suplemento X* en donde hay que buscar el "nacimiento de la teoría de conjuntos" de Dedekind así como "las fuentes de la matemática moderna". Pero, en cierta forma, el propio Dedekind era consciente de su aportación. En el prefacio a la Segunda Edición de las *Lecciones* [*1930-32*, III, 396-397] nos dice que en el *Suplemento X* ha pretendido introducir: "una teoría general de los ideales a fin de poder iluminar con luz nueva, desde un punto de vista muy abstracto, la totalidad de la exposición del libro" y es precisament al usar la expresión "desde un punto de vista muy abstracto" que Dedekind se refiere, precisamente, a la teona de conjuntos. Esta abstracción—que consiste precisamente en la introducción de ciertas *estructuras algebraicas*—no "es una mera y simple abstracción del lenguaje" [Dieudonné y otros *1978*, 111]. Es algo mucho más profundo y se halla en la misma sintonía que las técnicas que hemos encontrado en otros trabajos suyos precedentes. Dedekind necesita de una cierta *teoría de conjuntos*—de *estructuras algebraicas*, si así se prefiere—porque precisa calcular con ellas "ya sea utilizando operaciones conjntistas, ya sea utilizando operaciones algebraicas" [Dieudonné y otros *1978*, 111].[74]

---

[73] Esta opinión la hace suya Dugac en [Dieudonné y otros *1978*, 200].

[74] Quizás sea de interés precisar, aunque sea muy someramente, cual era la situación en manos de Kummer y cual fue la aportación de Dedekind.

Sabemos que Gauss en sus *Disquisitiones Arithmeticae* [*1801*] introdujo y estudió los *enteros de Gauss* que son los números de la forma $a + b \cdot i$, con $a, b \in \mathbb{Z}$. Esta teoría se encuentra muy desarrollada en su memoria *Theoria residuorum biquadrsticorum* [Gauss *1832*]. El conjunto $\mathbb{Z}[i] = \{a + b \cdot i : a, b \in \mathbb{Z}\}$ tiene propiedades aritméticas parecidas al conjunto $\mathbb{Z}$: es un anillo que admite algoritmo euclideo de división, posee cuatro elementos invertibles – ± 1, $\pm i$ — que reciben el nombre de *unidades* y, en él, existen *números primos* – números que no admiten deocomposición alguna en dos factores, salvo que uno de ellos sea una unidad—. En este anillo el número 3 es primo mientras que, en cambio, el número $5 = (1 + 2 \cdot i) \cdot (1 - 2 \cdot i)$ no lo es. Admite *unicidad en la descomposición en números primos*. $\mathbb{Z}[i]$ es el anillo de enteros de un cuerpo—el cuerpo $\mathbb{Q}(i)$—de la misma forma que $\mathbb{Z}$ es el anillo de enteros del cuerpo $\mathbb{Q}$; ello significa que $\mathbb{Q}(i)$ se obtiene simetrizando $\mathbb{Z}[i]$ de la misma forma que $\mathbb{Q}$ se obtiene simetrizando $\mathbb{Z}$ a fin de que cualquier elemento no nulo del anillo de enteros admita inverso respecto de la operación producto en el cuerpo del cual es anillo de enteros.

Kummer al intentar establecer la *imposibilidad* de solución entera para $z^p = x^p + y^p$, x, y, z $\in \mathbb{Z}$, $xyz \neq 0$, con p primo > 2, procedió, allá por el 1840, de la forma siguiente $z^p = [x + y] \cdot [x + \zeta y] \cdot \ldots \cdot [x + \zeta^{p-1} y]$ en donde ζ es una raíz p-ésima de la unidad (es decir, es un número complejo que satisface la equación $X^p = 1$ y las inecuaciones $X^r \neq 1$, si $r < p$) y, por consiguiente, es de la forma $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ y cumple la propiedad $1 + \zeta + ... + \zeta^{p-1} = 0$.

Así pues Kummer amplió la aportción de Gauss introducicindo los *anillos cicltómicos* $\mathbb{Z}[\zeta]$, en donde$\mathbb{Z}[\zeta] = \{a_0 + a_1 \cdot \zeta + ... + a_{p-2} \cdot \zeta^{p-2} : a_i \in \mathbb{Z}\}$.

Kummer bautizó los elementos $f(\zeta) = a_0 + a_1 \cdot \zeta + ... + a_{p-2} \cdot \zeta^{p-2}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, del anillo ciclotómico $\mathbb{Z}[\zeta]$ con el nombre de *enteros complejos*.

En la hipótesis de que el anillo ciclotómico $\mathbb{Z}[\zeta]$ posea una aritmética semejante—fundamentalmente por lo que se relaciona con la *divisibilidad*—aritmética de $\mathbb{Z}$, entonces en el anillo $\mathbb{Z}[\zeta]$ sería posible establecer los siguientes hechos:

(i) los elementos $x + \zeta^k \cdot y$ son primos entre sí, dos a dos,

(ii) cualquier divisor irreducible de $x + \zeta^k \cdot y$ es asímismo divisor de z^p y, por consiguiente, debe figurar con un exponente que sea divisible por p y, además,

(iii) $x + \zeta^k \cdot y$ es una poteneia p-ésima a menos de un elemento invertible

y todo ello llevaría contradicción. Esta contradicción habría establecido pues la imposibilidad de hallar soluciones enteras para las ecuaciones de Fermat, con $p > 2$.

Dirichlet, sin embargo, se da cuenta de que la suposición de la *unicidad de decomposición* no está justificada en absoluto. Como ejemplo consdérese el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ En él se tiene que $6 = 2 \cdot 3 = [1 + \sqrt{-5}] \cdot [1 - \sqrt{-5}]$, en donde los números 2, 3, $1 + \sqrt{-5}$ y $1 - \sqrt{-5}$ son números primos del anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Se observa, además, que 3 es irreducible, puesto que si tuviésemos $3 = [x + y \cdot \sqrt{-5}] \cdot [z + w \cdot \sqrt{-5}]$, resultaría que $3 = [x - y \cdot \sqrt{-5}] \cdot [z - w \cdot \sqrt{-5}]$ y por conaiguiente $9 = [x^2 + 5y^2] \cdot [z^2 + 5w^2]$.

Sin embargo $3 = u^2 + 5v^2$ carece de soluciones entras y, por consiguiente, uno de ambos factores debe ser 1 y el otro debe ser 9. Ello nos lleva, por ejemplo, a $x = \pm 1$, $y = 0$. De modo que $3 = \pm[z + w \cdot \sqrt{-5}]$; de ahí que $z = \pm 3$, $w = 0$. De todo ello resulta que 3 es irreducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

A pesar de ser irreducible carece de una propiedad *característica* de los números primos en el anillo $\mathbb{Z}$, puesto que 3 *divide al producto* $[2 + \sqrt{-5}] \cdot [2 - \sqrt{-5}]$ y, en cambio, no divide a ninguno de los factores. Además, en el anillo ciclotómico $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, se conculca otra propiedad muy importante de la divisibilidad en $\mathbb{Z}$: $9 = 3 \cdot 3 = [2 + \sqrt{-5}] \cdot [2 - \sqrt{-5}]$, en donde ambos factores son primos entre sí y, sin embargo, no son cuadrados perfectos. De todo ello se deduce que la hipótesis de Kummer—"con un aritmética como la de $\mathbb{Z}$"—es falsa, por lo menos, en cierto anillos ciclotómico. (El primer ejemplo que se logró en este sentido y en el que trabajaron Cauchy y Kummer fue $\mathbb{Z}[\zeta]$, en donde ζ designaba una raíz 23-ava de la unidad.)

A partir de [*1847*; *1847a*] Kummer a fin de garantizar la *imposibilidad* de la ecuación $z^p + y^p = z^p$, e decir, a fin de *poder garantizar la unicidad de la descomposición*, introdujo los *números ideales*—que, según Dedekind, "jamás fueron definidos." Por ejemplo, es posible descomponer d número 6 en la forma

$$6 = \sqrt{2}^{\,2} \, \frac{1 + \sqrt{-5}}{\sqrt{-2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{-5}}{\sqrt{-2}} = \alpha^2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2$$

y entonces 6 el *producto de cuatro números* ideales de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Así Kummer, además de los números primos, introduce los números ideales y con ello, en ciertos anillos, se consigue la *unicidad* de la descomposición que, como hemos visto, constituía el meollo de la cuestión en la presentación de Kummer de la demostración del *último problema de Fermat*. Se pierde no obstante la validez del teorema de Euclides y e pierde también la noción de numero primo, en el sentido de que ciertos números irreducibles—que no se pueden descomponer—se comportan como si fuesen compuestos. (Como contrapartida véase el comportamiento del anillo $\mathbb{Z}[\theta]$ [Kline *1972*, 822].)

Utilizando esta nueva técnica Kummer logra demostrar la imposibilidad de solución de $z^p + y^p = z^p$, para cualquier número primo $2 < p \leq 100$, con excepción de 37, 59 y 67.

Dirichlet, entre los años 1840 y 1846, publicará una serie de notas todas ellas relativas a los anillos $\mathbb{Z}[\theta]$, en los que $\theta \in \mathbb{C}$ y satisface además una ecuación del tipo: $x^n + a_1 \cdot z^{n-1} + ... + a_n = 0$, $a_i \in \mathbb{Z}$

Dedekind se planteará también lá cuestión relativa a la unicidad de factorización y lo hará siguiendo las inspiraciones e intuiciones de Gauss y de Dirichlet. Son precisamente esta inspiración e intuición las que encontramos perfectamente recogidas en el *Suplemento X*: *Über die Composition der binären quadratischen Formen* que consta de los parágrafos 159-163 de las mencionadas *Lecciones* de Dirichlet. El texto [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 224] es de una gran originalidad para su época. Empieza con el concepto de *cuerpo de números*:[75] es un conjunto *infinto* de números reales o complejos ["*System von unendlichen vielen reellen orden Komplexen Zahlen*"] cerrado y completo (es decir: algebraicamente estable[76]).

Seguidamente Dedekind introduce la *inclusión* de dos cuerpos y la intersección de dos cuerpos, utilizando no obstante palabras que pide prestadas a la estructura algebraica de los números. Dice [Dedekind *1871*; *1930-32*, III, 224] que un cuerpo A es un "*divisor* de un cuerpo M, cuando todos los números contenidos en A se hallan también en M."[77] Los elementos comunes a dos cuerpos A y B forman un cuerpo D que denomina el *máximo común divisor* de A y B [Dedekind *1871*; *1930-32*, III, 224]. En este texto Dedekind no introduce ningúin símbolo para designar ni la inclusión ni la intersección.[78]

---

y estudiará sus elementos invertibles o unidades. Así esaban las cosas al respecto cuando intervinieron Dedekind y Kronecker. (Para una mayor información véase, por ejemplo, [Dieudonné y otros *1978*, 201-227].)

[75] Es esta la primera vez que Dedekind usa estas palabras que, no obstante, reencontraremos en [Dedekind *1872*] y que se incorporará de forma naturar a la terminología matemática—"concepto que parece apropiado como basse del álgebra superior."

El cuerpo numérico mínimo es $\mathbb{Q}$ y el cuerpo numérico máximo es $\mathbb{R}$. Dedekind utiliza la palabra "Körper."

Más adelante [Dedekind *1930-32*, I, 105-158] introduce los *órdenes* que no son otra cosa que *subanillos* especiales del anillo de enteros de un cuerpo de números algebraicos K. El concepto de anillo fue introducido por David Hilbert en [*1897*].

[76] Dice Dedekind: "abgeschlosen und vollständig" y lo que Dedekind [*1871*; *1930-32*, III, 224] entiende, en este contexto, es que un cuerpo es estable para las operaciones $+, -, \cdot$ y $\div$: "cada una de estas operaciones asocia un número del mismo conjunto, a cada pareja de números arbitrarios del conjunto."

[77] Dedekind dice también que M es un *múltiplo* de A. Indiquemos, de pasada, que Dedekind no dispone aún de ninguna palabra específica para designar la pertenencia de un objeto a un conjunto; en esta definición usa las palabras "enhalten" (contenidos) y "vorfinden" (que se hallan en).

El cuerpo $\mathbb{Q}$ "divide a todos los cuerpos" [Dedekind *1871*; *1930-32*, III, 224].

[78] En cambio, en su memoria *Über die Anzahl der Ideal-Classen in den verchiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers*, datada en 1877 [Dedekind *1877*; en *1930-32*, I, 105-157], introduce, al igual que antes, las operaciones conjuntistas entre grupos, pero ahora, además, introduce los simbolos $A < M$ para indicar que A es un divisor de M y $A-B$ para indicar la intersección de los cuerpos A y B. Además introduce al mínimo común múltiplo de A y B que designa por medio de $A + B = \{a + b: a \in A, b \in B\}$ y observa que estas operaciones entre grupos satisfacen ciertas relaciones que ponen de manifiesto "la dualidad que hay entre las nociones de máximo común divisor y mínimo común múltiplo." Se ha dicho que este artículo constituye el antepasado de la *teoría de grupos reticulados* (véase Dugac [*1976*, 72 nota de pie de página]).

Conviene observar, sin embargo, la diferencia que hay entre las definiciones $A - B$ y $A + B$. La primera es conjuntista—el máximo conjunto común a los conjuntos A y B —; la segunda es algebraica, a pesar de que después resulte que, desde el punto de vista *conjuntista*, sea el mínimo

También considera los *morfismos* φ que, a cada elemento de un cuerpo A, le hacen corresponder un número $b = \varphi(a)$, de manera que

$$\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a')$$
$$\varphi(a \cdot a') = \varphi(a) \cdot \varphi(a')$$

y observa que el cosjunto de las imágenes $B = \varphi\langle A\rangle = \{\varphi(a)\colon a \in A\}$ es un cuerpo [Dedekind *1871*; *1930-32*, III, 224].[79] Así se obtiene un cuerpo *conjugado* de A (lo dessigna "*konjugiert*" [Dedekind *1871*; *1930-32*, III, 224].)

Seguidamente Dedekind considera la *dependencia* y la *independencia* lineales ("*voneinandere abhängig oder unabhängig*;" [Dedekind *1871*; *1930-32*, III, 224]) de números con coeficiestes en $\mathbb{Q}$ exactamente igual a como hoy se hace en los textos de álgebra lineal e introduce el concepto de base de un cuerpo Ω que, en tanto que $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, tenga *dimensión finita* [*1871*; *1930-32*, III, 225]. Dedekind [*1871*; *1930-32*, III, 225] ofrece entonces la *condición* que deben cumplir los n^2 coeficientes racionales h_{ij} de n números complejos $\omega^1, \ldots, \omega^n$, expresados en una base $\omega_1, \ldots, \omega_n$ para que a su vez constituyan una base. La condición es: $\det(h_{ij}) \neq 0$ [Dedekind *1871*; *1930-32*, III, 225].

Todo el parágrafo §159 está dedicado, a partir de entonces, a los cuerpos que son extensiones de dimensión finita sobre *el* cuerpo $\mathbb{Q}$; es decir, aquellos cuerpos Ω cuyos elementos son de la forma $\omega = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \omega_i$ en donde $\omega_1, \ldots, \omega_n$ son $\mathbb{Q}$-linealmente independientes; n es el *grado del cuerpo* (que es finito); estos cuerpos se pueden caracteritzar por medio de las n primeras potencias sobre ciertos números θ que son *ceros de ciertos polinomios irreducibles de grado n*, que Dedekind [*1871*; *1930-32*, III, 225-227] establece observando que el *producto* de dos elementos de la forma $\omega = \sum_{i=1}^{n} h_i\, \omega_i$ será del cuerpo ssi lo son los $\frac{1}{2}n(n + 1)$ productos diferentes $\omega_i \cdot \omega_j$ $(i < j)$ de los elementos de la base.

Establece asimismo la condición para que n elementos de un cuerpo formen base e introduce el concepto de transformación lineal biyectiva [Dedekind *1871*; *1930-32*, III, 228][80] así como el concepto de *cuerpo conjugado* de un cuerpo $\mathbb{Q}(\omega)$ dado, y el concepto de norma de un elemento.[81]

---

conjunto que contiene a la vez a los conjuntos A y B, manteniendo, no obstante, la estructura algebraica.

En este trabajo la utilización de los símbolos algebraicos para indicar operaciones conjuntistas hace sospechar la gran importancia motivadora que la teoría de números tuvo en la mente de Richard Dedekind a la hora de elaborar su teoría de conjuntos "*ad hoc*."

[79] En la 4^a edición hace servir la notación *af* que le permite una notación "más natural de la composición de aplicaciones" (véase [Lejeune-Dirichlet *1894*, 462] o [Dedekind *1930-32*, III, 27]).

[80] Una extensión de dimensión finita obre $\mathbb{Q}$ la podemos caracteritzar per medio de una raíz de un polinomio *irreducible*; las demás raíces generan otras extensiones de dimension finita sobre $\mathbb{Q}$ que poseen la misma dimensión. Todos estos cuerpos son conjugados entre sí y la aplicación que

Tras este análisis de las extensiones finitas del cuerpo $\mathbb{Q}$ y tras haber observado [*1871*; *1930-32*, III, 236-237] el resultado importante que establece que "todo cuerpo finito sobre $\mathbb{Q}$ está caracterizado por un elemento ω" Dedekind pasa a analizar "quién y cómo son los enteros de estos cuerpos" [*1871*; *1930-32*, III, §160, 236-242].[82]

En primer lugar introduce el concepto de *número algebraico* como aquel número $\theta \in \mathbb{C}$ que satisface una ecuación

(1) $$\theta^n + a_1 \cdot \theta^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot \theta + a_n = 0, a_i \in \mathbb{Q}\ (1 \leq i \leq n)$$

y θ es un entero algebraico ssi todos los coeficientes $a_i \in \mathbb{Z}$. Los enteros algebraicos constituyen un cuerpo que contiene a $\mathbb{Q}$ y los enteros algebraicos constituyen un anillo ν,[83] contenido en dicho cuerpo que, a su vez, contiene a $\mathbb{Z}$. Por lo que a la divisibilidad se refiere, en ν es posible establecer definiciones semejantes a las que se cumplen en $\mathbb{Z}$.[84]

Disponiendo ya de todas estas definiciones y propiedades, Dedekind establece las definiciones siguientes:

> Dados dos enteros algebraicos α y β, α es *divisible* per β ssi $\alpha = \beta \cdot \gamma$, en donde γ es un entero algebraico.

transforma una raíz en otra, extendida por linealidad a los restantes elementos, nos proporciona un *isomorfismo* entre dichos cuerpos.

[81] La norma de un número ω es precisamente el producto de los n valores conjugados de ω. Véase, más adelante, la nota 90.

[82] El problema de fondo que preocupaba en relación con los *enteros algebraicos* era, como ya hemos precisado en la nota 76, el *problema de la unicidad de factorización*; era preciso establecer una *teoría de la factorización* y era necesario que contemplase un *teorerma de unicidad*, teoría y teorema que hasta el momento ni Kummer ni Dirichlet, ni el propio Dedekind, habían logrado resolver. Esta preocupación la encontramos expuesta con toda claridad en su manuscrito francés de 1876-1877: "El problema que se nos plantea consiste en establecer las leyes generales de la divisibilidad que rigen en los sistemas ν de los enteros algebraicos de un cuerpo de números algebraicos de grado n" y esto hay que hacerlo "desarrollando los principios generales de la teoría general...que he publiculo en la segunda edición de las *Lecciones de la teoría de números* de Dirichlet" [Dedekind *1930-32*, III, 263-264]. Nosotros utilizaremos ahora el apéndice de la segunda edición ahora el artículo de 1876-1877—cuya exposición metodológica y sistemática lo convierten en un texto de referencia muy importante para seguir las ideas de Dedekind en torno a esta cuestión—. Tales presentaciones serán sistematizadas completamente en el Suplemento XI de la 4^a edición de las *Lecciones* de Dirichlet [Dedekind *1930-32*, III, 2-222].

[83] Dedekind [*1871*; *1930-32*, III, 223]: la suma, la diferencia y el producto de dos enteros algebraicos es un entero algebraico.

[84] Dedekind [*1871*; *1930-32*, III, 237]: α es múltiplo de β ssi α/β es un entero algebraico; $\alpha \equiv \beta$ mód γ ssi $\alpha-\beta$ es múltiplo de γ. Los enteros algebraicos tiene, además, una propiedad realmente importante: dado un entero algebraico a y un cuerpo K, existe un polinomio φ, irreductible en K, tal que $\varphi(\alpha) = 0$ [Dedekind *1871*; *1930-32*, III, 238; 1876-77; *1930-32*, III, 263-265].

$\varepsilon \in \nu$ es una *unidad* ssi ε divide a cualquier otro número algebraico.[85]

La dificultad se encuentra en la *primalidad* de los números enteros algebraico y a que "en el dominio de todos los enteros algebraicos no existen números primos, puesto que todo entero que no sea una unidad se puede descomponer en producto de dos o mas enteros algebraicos que no son unidades" [*1876-77*; *1930-32*, III, 264].[86]

Para recuperar la existencia de los números primos—que Dedekind [*1876-77*; *1930-32*, III, 279] llama *indescomponibles* porque, por lo que a la divisibilidad se refiere, no se comportan como auténticos números primos—, introducirá ciertos cuerpos de números algebraicos y sus correspondientes anillos de enteros. A tal fin considera un número algebraico θ de grado n (es decir, un número algebraico para el cual el polinomio $X^n + a_1 \cdot X^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot X + a_n = 0$ que interviene en (1) es irreducible) y entoces resulta que

$$\mathbb{Q}(\theta) = \Omega = \{q_0 + q_1 \cdot \theta + ... + q_{n-1} \cdot \theta^{n-1} : q_i \in \mathbb{Q},\ 0 \leq i \leq n-1\}$$

es un "cuerpo finito de grado n" [Dedekind *1876-77*; *1930-32*, III, 264].[87] Este cuerpo lo podemos clasificar en dos clases: la clase ν de los enteros algebraicos[88] y su complementario que está fonnado obviamente por los números algebraicos fraccionarios. Dedekind establece trivialmente que el conjunto de los enteros algebraicos es un subconjunto propio del conjunto de los números algebraicos de la misma forma que $\mathbb{Z}$ lo es de $\mathbb{Q}$ y que además el conjunto $\mathbb{Z}$ está contenido en el conjunto de los enteros algebraicos. Estos cuerpos de números algebraicos y sus correspondientes anillos de enteros tienen propiedades muy semejantes a las que poseían el cuerpo de todos los números algebraicos y su anillo de enteros. En ellos se pueden reestablecer las definiciones de divisibilidad y de elemento descomponible e *indescomponible*.[89]

[85] Véase [Dedekind *1876-77*; *1930-32*, III, 264]. En el *Suplemento XI* de la cuarta edición de las *Lecciones* de Dirichlet nos dice que ε es una unidad ssi existe otro entero ε' tal que $\varepsilon \cdot \varepsilon' = 1$ [Dedekind *1894*, *1930-32*, III, 98].

[86] De hecho, dice [Dedekind *1871*; *1930-32*, III, 239 y *1876-77*; *1930-32*, III, 264]: "α debería ser primo si no fuese una unidad y solamente tuviese como factores unidades ε y enteros algebraicos del tipo $\varepsilon \cdot \alpha$.

[87] Dicho cuerpo se obtiene adjuntando θ a $\mathbb{Q}$.

[88] Existen enteros algebraicos $\theta_1, ..., \theta_n$ tales que cualquier otro entero algebraico del cuerpo es de la forma $h_1 \cdot \theta_1 + ... + h_n \cdot \theta_n$, en donde $h_1, ..., h_n$ son enteros racionales: así pues ν es un $\mathbb{Z}$-módulo que posee una base formada por los elementos $\theta_1, ..., \theta_n$ [Dedekind *1871*; *1930-32*, III, 242].

[89] Dedekind [*1876-77*; *1930-32*, III, 266] dice que: "un número del conjunto $\Omega = \{q_0 + q_1 \cdot \theta ... + q_{n-1} \cdot \theta^{n-1}: q_i \in \mathbb{Q}, 1 \leq i \leq n-1\}$, en donde $f(\theta) = a_0 + ... + a_{n-1}\theta^{n-1} + \theta^n = 0$ con f irreducible, es descomponible ssi es producto de dos números de Ω, ninguno de los cuales ea una unidad."

(En este contexto Dedekind define la norma de un elemento $\omega \in \Omega$ de la forma siguiente: si $\omega = g(\theta) = q_0 + q_1 \cdot \theta ... + q_{n-1} \cdot \theta^{n-1}$, entonces podemo considerar los elementos $\omega_j = g(\theta_j) = q_0 + q_1$

Pero ahora, de nuevo, la dificultad se encuentra en la *primalidad* de los números enteros algebraicos y el "problema que se nos plantea consiste en establecer las leyes generales de divisibilidad que rigen el sistema v" [Dedekind *1876-77*; *1930-32*, III, 264],[90] y para poder resolver esta dificultad Dedekind se ve obligado a recurrir ampliamente a la *teoría de conjuntos.*

Esta aproxcimación de Dedekind [*1876-77*; *1930-32*, III, 268] a la *teoría de conjuntos* desde la teoría de números viene de la mano de los *ideales* que define con toda precisión porque,[91] según Dedekind, la extraordinaria aportación de Kummer **no** "logra definir los

---

$+ \ldots + \theta^{n-1} \cdot \theta_j^{n-1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$, endonde $\theta, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ son las raíces complejas de $f(\theta) = 0$. Estos elementos son los que permiten definir la norma de ω:

$$N(\omega) = \omega \cdot \omega_1 \cdot \ldots \cdot \omega_{n-1}$$

y entonces es fácil constatar que un elemento ω es una unidad ssi $N(\omega) = \pm 1$.)

[90] En el trabajo francés que de hecho es el que hemos seguido en nuestra exposición anterior—, Dedekind hace un repaso de la problemática de Kummer [*1851*] en relación con la *unicidad de la descomposición* en el caso de los cuerpos *ciclotómicos* y, como ya hemos indicado, puede ocurrir que un número descomponible *se puede representar de múltiples maneras, completamente diferentes* como producto de números indescomponibles. Es decir, a los números indescomponibles—que no descomponen—les falta una propiedad propia de los números primos: si un número primo divide a un producto debe dividir necesariamente a uno de los factores y ello ahora, como hemos indicado ya, no ocurre necesariamente [Dedekind *1876-77*; *1930-32*, III, 280].

Seguidamente hace una reflexión sobre la aportación de Kummer de los números ideales que constituyen, dice "un descubrimiento realmente profundo y fecundo" [Dedekind *1876-77*; *1930-32*, III, 267].

[91] Ya hemos hablado del anillo $\Omega = \mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{x + y \cdot \theta \colon x, y, z \in \mathbb{Z}\}$, en donde 0 es una raíz de la ecuación $\theta^2 + 5 = 0$. En este anillo tenemos únicamente los siguientes elementos indes-componibles:

$$a = 2,\ b = 3, c = 7,\ b_1 = -2 + \theta,\ b_2 = -2-\theta,\ c_1 = 2+3\cdot\theta, c_2 = 2-3\cdot\theta,$$
$$d_1 = 1 + \theta,\ d_2 = 1-\theta, e_1 = 3 + \theta,\ e_2 = 3-\theta,\ f_1 = -1+2\cdot\theta,\ f_2 = -1-2\cdot\theta,\ g_1 = 4+\theta,\ g_2 = 4 - \theta.$$

Estos elementos indescomponibles están ligados por las siguientes relaciones:

$$(1) \qquad ab = d_1 d_2,\ b^2 = b_1 b_2,\ ab_1 = d_1^2 ,$$

$$(2) \qquad ac = e_1 e_2,\ c^2 = c_1 c_2, ac_1 = e_1^2 ,$$

$$(3) \qquad bc = f_1 f_2 = g_1 g_2,\ af_1 = d_1 e_1,\ ag_1 = d_1 e_2 .$$

y por consiguiente uno de estos elmentos indescomponibles divide al producto de otros dos sin dividir a ninguno de los factores. Así pues, como ya hemos repetido con anterioridad, los elementos indescomponibles del anillo ciclotómico $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$ carecen de una de las propiedades propias de los númeroe primosa de $\mathbb{Z}$, que es precisamente la propiedad de Euclides, indispensable para establecer la unicidad de la descomposición.

Para eliminar esta diflcultad de Ω, Kummer introduce cinco números ideales: $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ que e hallan caracterizados por números ideales. Sólo consigue su divisibilidad." Es en este punto donde incide Dedekind [*1876-77*; *1930-32*, III 268-269] y donde plantea la necesidad de "introducir de forma

---

$$a=\alpha_2,\ b=\beta_1,\ c=\gamma_1\gamma_2,\quad b_1=\beta_1^2,\ b_2=\beta_2^2\ \ c_1=\gamma_1^2,\ c_1=\gamma_2^2;$$

$$d_1=\alpha\beta_1,\ d_2=\alpha\beta_2,\ e_1=\alpha\gamma_1,\ \ e_2=\alpha\gamma_2,$$

$$f_1=\beta_1\gamma_1,\ f_2=\beta_2\gamma_2,\ g_1=\beta_1\gamma_2,\ \ g_2=\beta_2\gamma_1,$$

y serán precisamente estos *nuevos* elementos indescomponibles los que se comportarán como los auténticos (?) números primos en $\mathbb{Z}$.

Ahora Dedekind intentará justificar la aparición de lo números ideales por el hecho de que en $\mathbb{Z}$ "basta observar la forma como se comporta un número como divisor para conocer completamente la constitución esencial del número." Y dice [Dedekind *1876-77*; *1930-32*, III, 281]:

> Si sabemos, por ejemplo, que un número positivo a divide a un producto de dos cuadradossólo si divide por lo menos a uno de dichos cuadrados, concluiremos con toda certeza que a es igual a 1, o bien que a es un número primo o bien que es el cuadrado de un número primo. Igualmente es cierto que un número a contiene un cuadrado distinto de la unidad cuando se puede establecer 1a existencia de un número que no es divisible por a, pero cuyo cuadrado es dvisible por a. Así pues, si para un cierto número a podemos establecer uno de estos dos caracteres, deberemos concluir con toda certeza que a es el cuadrado de un número primo.

Y seguidamente justifica la necesitad de introducir el número ideal α. Para ello considera un elemento $\omega = x + y\cdot\theta$ y considera su norma $N(\omega) = x^2 + 5y^2$ y su cuadrado $\omega^2 = x^2 + 2xy\cdot\theta - 5y^2$. De ahí que

$$\omega^2 - N(\omega) = 2(xy\cdot\theta - 5y^2)$$

por consiguiente, $\omega^2 \equiv N(\omega)$ mód 2. De ahí resulta que

$$\omega^2\cdot\omega'^2 \equiv N(\omega)\,N(\omega') \quad \text{mód } 2.$$

Ahora bien, para que 2 divida a $\omega^2\omega'^2$ es preciso que divida a uno de ambos cuadrados. Si tomamos $\omega = x + y\cdot\theta$ con x e y impares, se obtendrá un número ω que no será divisible por 2, pero cuyo cuadrado d lo será. Teniendo en cuenta la observación anterior, resulta que "el número 2 se comporta en el anillo ciclotómico $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ como si fuese el cuadrado de un número primo α" [Dedekind *1876-77*; *1930-32*, III, 282]. De todo ello resulta que un número $\omega = x + y\cdot\theta$ es divisible por α ssi $N(\omega)$ es par. De ahí la relación de Dedekind

$$(\alpha)\qquad x \equiv y \qquad \text{mód } 2.$$

Por medio de razonamientos análogos Dedekind logra justificar la necesidad de los restantes cuatro número ideales de Kummer $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ y obtiene las ecuaciones asociadas a ellos:

$$(\beta_1)\qquad x \equiv y \qquad \text{mód } 3;$$
$$(\beta_2)\qquad x \equiv -y \qquad \text{mód } 2;$$
$$(\gamma_1)\qquad x \equiv 3y \qquad \text{mód } 7;$$
$$(\gamma_2)\qquad x \equiv -3y \qquad \text{mód } 7.$$

Así resuelve y justifica Dedekind [*1876-77*, *1930-32*, III, 278-286] la presentación de los números ideales de Kummer.

rigurosa" estos nuevos entes y nos dice que la "creación de estos nuevos entes"[92] se nos hará más "evidente" si la "compararnos con la introducción de los números irracionales." Como nos recuerda Dugac [*1976*, 68, nota], en este parágrafo hallamos "la justificación de nuestro intento de mostrar la unidad profunta de la matanática de Dedekind y yo añadiría que esta unidad profunda tiene como recurso último, íntimo e irrenunciable la *teoría incipiente de conjuntos*

Dedekind [*1876-77*, *1930-32*, III, 269, nota] de alguna manera fija las exigencias de la creación, recordándonos las que respetó en la creación de los *reales*. Disponemos de una estructura algebraica—el cuerpo $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, -, \div \rangle$ —bien determinada; la creación debe hacerse de manera que se extienda esta estructura algebraica y por medio de una "única definición creadora." Entonces, siguiendo de alguna mallera su propias huellas y a la vez las huellas de Kummer, impone las restricciones a las que debe someter su creación: "no definiré un número ideal, definiré la divisdibilidad de los números de un cierto dominio numérico de números divisibles por un número ideal." Y entonces añade:

> Ello nos lleva de una manera absolutamente natural a considerar el conjunto [*ensemble*] de todos los números α del dominio ν—de todos las enteros algebraicos—que son divsibles por un número ideal determinado. [Dedekind *1876-77*, *1930-32*, III, 270][93]

Así se obtiene un ideal de enteros algebraicos. *Cada número ideal de Kummer proporciona un ideal en el sentido de Dedekind*. De nuevo Dedekind, utilizando la enorme *simplicidad de su capacidad creadora*, considerará los ideales más simples

$$(\mu) = \{\mu \cdot \nu : \omega \in \nu\}, \text{ en donde } \mu \in \nu \text{ está determinado.}$$

Son los *ideales principales* y tienen dos propiedades características que se fundamentan en las propiedades de los enteros algebraicos (y en el hecho de que estos constituyan un anillo). Estas propiedades son:

$$1.\ \mu \cdot \omega \pm \mu \cdot \omega' = \mu \cdot [\omega \pm \omega'];\quad 2.\ [\mu \cdot \omega] \cdot \omega' = \mu \cdot [\omega \cdot \omega']$$

y, por consguiente, (μ) es cerrado por suma y diferencia y absorbe, por producto, los elementos de ν.

[92] Esta introducción de números nuevos es legitima y volvemos a encontrar aquí la capacidad creadora del matemático—capacidad a la que Dedekind no quiere renuneiar—, pero también ahora esta capacidad creadora requerirá de la *teoría de conjuntos*

[93] Podemos comparar este acto creador que evita las definiciones ontológicas y ofrece, de hecho, definiciones relacionales con la mayor creación de las matemáticas griegas que of reciera Eudoxo. Ese genial matemático griego, evitando la definición ontológica de *razón*—que con la aparición de las magnitudes *inconmensurables* había perdido toda su razón—, ofrece un camino nuevo a los matemáticos griegos y a sus sucesores introduciendo la definición relacional de *igualdad entre dos razones*, esto es, el concepto de proporción (véase Euclides [*1970*, Libro V, definición 5].

De este análisis Dedekind [*1876-77*, *1930-32*, III, 271] extrae la definición de ideal de un cuerpo *k*

> Todo sistema $\mathfrak{a}$ de números enteros de un cuerpo Ω que posea las dos propiedades siguientes:
> I. la suma y diferencia de dos números cualesquiera del sistema $\mathfrak{a}$ son también números de este mismo sistema,
> II. todo producto de un número del sistema $\mathfrak{a}$ por un número del sistema ν es un número del sistema $\mathfrak{a}$,
>
> se denomina un ideal del cuerpo.[94]

Entonces Dedekind se halla ya en situación de establecer la *divisibilidad* entre ideales que constituye—y esto es lo que realmente nos interesa destacar—una *propiedad conjuntista*

---

[94] Es interesante observar en este contexto que, si bien Dedekind menciona la posibilidad de recorrer a la capacidid creadora que la permitiría asociar un *número ideal nuevo de forma que todo ideal fuese principal*, no lo hace. Dice:

> Ahora, si perseguimos el objetivo de conseguir, mediante la introducción de los números ideales y de una forma de lenguaje correspondiente, que las leyes de la divisibilidad del dominio numérico ν tengan una conformidad completa con las que reinan en el dominio de los enteros racionales, e obtiene que las definiciones de los números ideales y de la divisibilidad para dichos númoros deberán enunciarse de tal forma que los dos teoremas elementales que hemos expuedo más arriba, 1 y 2, se mantengan aun cuando μ no sea un número que realmente exista, sino más bien un número ideal, y por condguiente las do propiedades I y II pertenecerán no sólo a los ideales principales sino también a cualquier otro ideal. Hemos hallado, pues, por medio de este análisis un carácter común a todos los ideales; a cualquier número ya sea existente o ideal, corresponde un ideal completamente determinado $\mathfrak{a}$, que deberá gozar en todo caso de las propiedades I y II.
>
> Pero un hecho que tiene una importancia mucho mayor todavía, y de la cual no he podido demostrar rigurosamente su veracidad de forma rigurosa más que después de muchos y vanos esfuerzos y tras haber remontado gran cantidad de dificultades, es que, recíprocamente, cualquier sistema $\mathfrak{a}$ que posea las propiedades I y II es también un ideal, es decir que $\mathfrak{a}$ constituye el conjunto de todos los números α del dominio a que son dividbles o bien por un número existente bien determinado o bien por un número ideal, indispensable para completar la teoría. Las dos propiedades I y II son pues no solo condiciones necesarias, sino también suficientes para que un sistema numérico $\mathfrak{a}$ sea un ideal; cualquier otra condición a la que se quiera someter los sistemas numéricos $\mathfrak{a}$, si no constituye una simple consecuencia de I y II, haría imposible la explicación completa de todos los fenómenos de la divisibilidad en el dominio $\mathfrak{a}$.
>
> Esta constatación me ha conducido naturalmente fundamentar toda la teoría de números del dominio ν sobre esta definición tan simple, completamente libre de toda obscuridad y de la admisión de los números ideales. [Dedekind *1876-77*, *1930-32*, III, 271-272].

Y, en una nota de pie de página realmente importante en el proceso mental de Dedekind [*1876-77*, *1930-32*, III, 272], añade: "Está perfectamente permitido, aunque no sea necesario en absoluto, hacer corresponder a todo ideal $\mathfrak{a}$ un número ideal que lo engendre, caso de que el ideal no sea un ideal principal."

$$\alpha \text{ es } \textit{divisible} \text{ por m ssi } \alpha = \mu \cdot \omega \in (\mu).$$

De la propiedad II resulta que $(\alpha) \subseteq (\mu)$.

Recíprocamente, si $(\alpha) \subseteq (\mu)$, entonces $\alpha \in (\alpha)$. De donde: $\alpha \in (\mu)$ y por consiguiente $\alpha = \mu \cdot \omega$ y μ divide a α.

A partir de los ideales principales hemos deducido una propiedad conjuntista que equivale a la divisibilidad. A partir de ella, Dedekind [*1876-77*; *1930-32*, III, 272] establece —por simple generalización—el concepto de *divisibilidad* entre ideales cualesquiera. Dice [*1876-77*; *1930-32*, III, 272]:[95]

> Un ideal $\mathfrak{a}$ es divisible por un ideal $\mathfrak{b}$ o es múltiplo de $\mathfrak{b}$ ssi todos los elementos del ideal $\mathfrak{a}$ son miembros del ideal $\mathfrak{b}$.
>
> Un ideal $\mathfrak{p}$, diferente de $\mathfrak{v}$, que carezca de divisores distintos de sí mismo y de $\mathfrak{v}$, es un ideal primo.

Conviene indicar que $\mathfrak{v}$ es el ideal *unitario*—el ideal *de todos los números algebraicos enteros*—. Este ideal divide a los demás ideales. Con estas definiciones resulta, pues, que un ideal primo es un ideal maximal propio—distinto de $\mathfrak{v}$—respecto de la inclusión.[96]

Disponiendo ya de la divisibilidad de ideales es natural que Dedekind [*1876-77*; *1930-32*, III, 272-273] se cuestione acerca del *producto* de dos ideales:

> si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son dos ideales, entonces su producto $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ es el ideal
>
> $$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i : a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b}, n \in \mathbb{N}\};$$

es decir, el ideal de *todas las sumas finitas* de productos de elementos del ideal a con elementos del ideal $\mathfrak{b}$.

Ahora es fácil constatar que $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ es un ideal y además es divisible por $\mathfrak{a}$ y por $\mathfrak{b}$ (es decir, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}$). Con todo Dedekind [*1876-77*; *1930-32*, III 273] nos dirá que la trabazón íntima y profunda del producto y de la divisibilidad pasan por el establecimiento de *dos* teoremas:

> si el ideal $\mathfrak{c}$ es divsible por el ideal $\mathfrak{a}$, existirá siempre un ideal $\mathfrak{b}$, y sólo uno, tal que $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$.

[95] $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$ ssi $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, que es una definición absolutamente conjuntista de la *divisibilidad de los ideales.*

[96] Aparece así otra definición aritmética absolutamente conjuntista.

Será ahora cuando Dedekind [*1876-77*; *1930-32*, III, 278-296] desarrollará con todo lujo de detalles el anillo ciclotómico $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b \cdot \sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ y cuando establecerá qué ocurre con el teorema de *unicidad de la descomposición* para este cuerpo en particular. Para llevar a cabo de una forma rigurosa su objetivo, Dedekind [*1876-77*, *1930-32*, III, 288-289] precisará de las propiedades de los módulos—de hecho precisará sólo dc las propiedades de los $\mathbb{Z}$-módulos:

Un ideal generado por $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ es el sistema

$$\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_k\rangle = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \alpha_i : \lambda_i \in \nu(k)\} \;.\,.$$

Dedekind dispone de los ideales (0), (1) = $\nu(k)$ y de los ideales *principales* (α). Entonces analiza, en el seno de $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ los ideales $\langle 2\rangle$ y $(2, 1 + \sqrt{-5})$ y observa que $\langle 2\rangle \neq (2, 1 + \sqrt{-5})$, entendiendo que dos ideales $\mathfrak{a} = \langle\alpha_1,\ldots,\alpha_p\rangle$ y $\mathfrak{b} = \langle\beta_1,\ldots,\beta_q\rangle$ son iguales ssi *todo elemento del primero es un elemento del segundo y todo elemento del segundo lo es del primero*.[97] Además observa [Dedekind *1876-77*, *1930-32*, III, 291-292] que

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \langle\alpha_1 \cdot \beta_1, \ldots , \alpha_1 \cdot \beta_q, \ldots, \alpha_p \cdot \beta_1,\ldots,\alpha_p \cdot \beta_q\rangle$$

y entonces es claro que $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$ y que $\mathfrak{a} | \mathfrak{b}$ ssi $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$.[98]

---

[97] Conviene retomar el ejemplo del anillo ciclotómico $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ para comprender el proceso mental de Dedekind [*1876-77*, *1930-32*, III, 288-289], tal como nos lo ofrece él mismo:

> La condición para que un número $\omega = x + y \cdot \sqrt{-5}$ sea divisible por el ideal primo α es, en virtud de (α), que $x \equiv y$ mód 2; para obtener pues el sistema $\mathfrak{a}$ de todos los números ω divisibles por α, deberemos poner $x = y + 2 \cdot z$, en donde y, z designan números enteros arbitrarios; por consiguiente el sistema $\mathfrak{a}$ se compone de todos los números de la forma $2 \cdot z + (1 + \sqrt{-5}) \cdot y$. Es decir que $\mathfrak{a}$ es un *módulo* finito, cuya base está formada por los dos números independientes 2 y $1 + \sqrt{-5}$ y por lo tanto
>
> $$\mathfrak{a} = (2, 1 + \sqrt{-5}).$$
>
> De forma análoga, si designamos respectivamente $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ los sistemas de los números divisibles por β_1, β_2, γ_1, γ_2, obtenedremos utilizando los congruencias (β_1), (β_2), (γ_1), (γ_2),
>
> $$\mathfrak{b}_1 = (3, 1 + \sqrt{-5}), \; \mathfrak{b}_2 = (3, 1 - \sqrt{-5})$$
> $$\mathfrak{c}_1 = (7, 3 + \sqrt{-5}), \; \mathfrak{c}_2 = (3, 1 - \sqrt{-5}).$$

[98] Dedekind [*1876-77*, *1930-32*, III, 290-291], además, introducirá el concepto de *ideal conjugado* de un ideal dado $\mathfrak{m}$, así como el concepto de *norma de un ideal* $\mathfrak{m}$ de la form $m = \langle\mathfrak{m} \cdot a, \mathfrak{m} \cdot (b +$

La cuestión de la *unicidad de la descomposición* de los cuerpos del tipo $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ es equivalente al hecho de que *todo ideal sea principal* [Dedekind *1876-77*; *1930-32*, III, 295]. Así pues, si $D > 0$, la unicidad de descomposición vale para D – 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67 y 163 [Kline *1972*, 822]. La teoría de Dedekind, a través de su aritmética de los ideales—de conjuntos—reencuentra la unicidad de descomposición, gracias al poder creador de la mente—la teoría de conjuntos de este genial matematico.

Antes de abandonar definitivamente las aportaciones conjuntistas de Dedekind en este trabajo eminentemente aritmético, quisiera destacar la vinculaciones que el trabajo tiene con el A.C.

Dedekind establece [*1871*, §163; *1876-77*; *1930-32*, III, 273] que *todo ideal* $\mathfrak{a} \neq 1$ *es o bien primo o bien se puede representar como un producto de ideales primos* y esta representación se puede hacer *de forma única* y, consiguientemente establece que "todo ideal de un anillo de números algebraicos se puede sumergir en un ideal maximal."

Este resultado lo establece, no obstante, mediante consideraciones algebraicas que le permiten obviar el A.C.[99]

En cambio Dedekind recorre al A.C., y el uso que de él hace es inevitable, cuando trata con módulos. En el año 1871 Dedekind, como ya hemos indicado, introduce el concepto de *módulo*[100] y, seguidamente, basándose en Gauss introduce la *congruencia módulo un módulo* $\mathfrak{a}$[101] y asentadas las propiedades elementales establece un teorema verdaderamente profundo

> Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son dos módulos, existe un conjunto $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}$ tal que, para cada $\alpha \in \mathfrak{a}$, existe un único $\alpha' \in \mathfrak{a}'$ tal que $\alpha \equiv \alpha'$ (mód $\mathfrak{b}$). [Dedekind *1876-77*, 76]

$\sqrt{-5}$ ⟩⟩ como $N(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}^2 \cdot a$ y entonces la norma de un ideal principal, generado por μ, coincide con la norma de μ.

Del análisis de todos estos hechos resulta fácilmente que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$ no es un anillo de ideales principales. Supongamos, por ejemplo, el resultado siguiente [Dedekind *1876-77*; *1930-32*, III, 292] $\langle 2\rangle = \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{m}$. .

Entonces $N(\mathfrak{m}) = N(\mathfrak{a})^2 = N(2) = 2^2$. Si a fuese principal, tendríamos que $\mathfrak{a} = (a + b \cdot \sqrt{-5}\,)$ y, por consiguiente, $N(\mathfrak{a}) = \pm 2 = N(a + b \cdot \sqrt{-5}\,) = a^2 + 5 \cdot b^2$ que carece de solución entera.

[99] Recordemos, de pasada, que la demostración del teorema general que afirma que "todo ideal de un anillo conmutatiro arbitrario con unidad se puede sumergir en un ideal maximal de dicho anillo" requiere del A.C.; sin embargo, es más débil que el A.C.

En cambio, si substituimos anillo conmutatitvo por retículo, entonces el resultado que se obtiene es equivalente al A.C. [Pla *1991*, 363].

[100] Un conjunt $\mathfrak{a}$ de números reales o complejos es un *módulo* ssi es cerrado por las operaciones + y – [Dedekind *1871*; *1930-32*, III, 242].

[101] Dedekind [*1894*, 75] o [*1876-77; 1930-32*, III, 275]. Gauss [*1801*, art.1] introdujo la con-gruencia entre números enteros módulo un cierto número entero primo p. Dedekind, en cambio, generaliza esta noción a módulos y establece que $\omega \equiv \omega'$ [mód $\mathfrak{a}$] ssi $\omega' \in \mathfrak{a}$.

Recordemos [Dedekind *1876-77*, 70-71], que, en su época, este concepto era un concepto excesivamente general; un concepto que extendía el concepto de ideal. Consúltese, al respecto, las críticas de Lipschitz a la idea de módulo y a la teoría desarrollada por Dedekind, utilizando este concepto [Dugac *1976*, 65].

Así se obtiene un sistema *completo de representantes relativamente* a $\mathfrak{b}$ *del módulo* $\mathfrak{a}$ y Dedekind [*1876-77*, 76, 20-21] para demostrar este teorema lo que realmente hace es "partir a en clases módulo $\mathfrak{b}$" y "coger un representante en cada una de las clases." Esta elección no parece, en nada, distinta de las que encontramos en las obras de Lejeune-Dirichlet ([*1863*] y [Dedekind *1876-77*, 18, 59]) para conseguir representantes de las clases de congruencia módulo m o incluso de las formas binarias. Sin embargo hay una diferencia esencial: las elecciones de Lejeune-Dirichlet se han realizado mediante una regla que permite la elección; en cambio, en el caso del teorema de Dedekind arriba mencionado, tal regla no existe; la elección se ha realizado sin disponer de regla alguna.[102] Resulta de todo ello que Dedekind será el primer matemático que utilizará el axioma de la elección (A.C.) en conjuntos no numerables, si bien la elección numerable habría sido utilizada ya, en ciertos problemas de análisis, por Cauchy [*1821*, 460-462] y por Heine [*1872*, 183].[103]

Vemos, una vez más, como Dedekind recurre cuando precisa de ello, a las herramientas conjuntistas que le hacen falta para obtener, con rigor, los resultados que persigue. En este caso utiliza una herramienta de gran potencia: elecciones arbitrarias y, en cualquier caso, *elecciones no-numerables.*

4. El texto de 1888 y el manuscrito de 1872-1878.[104] Con este texto nos hallamos, sin ningún género de dudas, ante la obra clave de Dedekind desde el punto de vista que nos interesa: Dedekind recorre al lenguaje *de la* teoría de conjuntos para *edificar de forma adecuada*—rigurosa y que evite la intuición geométrica—*el edificio matemático*, cuyo fundamento lo constituyen los números naturales ya que, a partir de ellos, será posible fundamentar el análisis con el establecimiento riguroso de los números irracionales. Dos textos nos ayudarán a comprender el alcance de esta afirmación:

> A menudo sucede en matemáticas que, en un sistema Ω dado de objetos o elementos, todo elemento ω e reemplaza por medio de una cierta ley por otro objeto ω' bien determinado; es usual designar este hecho con el nombre de substitución.... Es usual expresarse con mayor comodidad si, como lo haremos nosotros, consideramos esta substitución como una aplicación [*Abbildung*] del sistema Ω y

---

[102] Como nos indica Moore [*1982*, 16], si $\mathfrak{a} = \mathbb{R}$ y $\mathfrak{b} = \mathbb{Q}$, entonces $\mathfrak{a}'$ esun conjunto no numerable; véase [Vitali *1905*, 3-5].

[103] Si bien este resultado Heine probablemente se lo debe a Georg Cantor.

[104] El primer comentario que cabe en relación con este texto hace referencia a su título. Dedekind lo titula *Was sind und was sollen die Zahlen?* que coincide con el título de su manuscrito, según podemos constatar en Dugac [*1976*, 293]. André Weil, en su traducción francesa—"Sur l'infini" [*1926a*, 99-110]—de David Hilbert [*1926*] traduce el título del artículo que nos ocupa como *Que sont et que représentent les nombres?*—que es el título que adopta Dugac en su libro sobre Dedekind para titular el capitulo VII—W.W. Beman lo traducirá al inglés por *The Nature and Meaning of Number* [Dedekind *1901*, 44]. La traducción literal (véase Dieudonné y otros, [*1978*, 374]) es *Qué son y qué deben ser los números?*

entonces indicaremos por ω' la imagen del elemento ω y por Ω' la imagen de Ω.[105]

Y prosigue [Dedekind *1888*, *1930-32*, III, 336; *1901*, 32 y nota]

> En esta capacidad del espíritu humano, capaz de comparar una cosa ω con una cosa ω', o de poner en relación ω con ω'..., sin la cual no sería posible ningún pensamiento general, descansa también, como intentaré establecer en otro lugar, toda la ciencia de los números.

El otro texto es mucho más reciente—pertenece a Jean Dieudonné [*1987*, 144]—y dice *in extenso*

> También fue Dedekind quien...en su obra "Was sind und was sollen die Zahlen"...inició su trabajo con una suerte de "fascículo de resultados" en el cual introduce un languaje muy preciso que se refiere a las expresiones completamente vagas que utilizaban sus contemporáneos.
>
> A pesar de que la obra no tuvo la influencia inmediata que merecía, la necesidad de adoptar un lenguaje como este, y a la vez uniforme para todas y cada una de las partes de las matemáticas, se fue imponiendo lentamente a principios del siglo XX. Con algunos añadidos posteriores a Dedekind se convirtió en lo que podríamos llamar el *lenguaje conjuntista intuitivo*, utilizando en la actualidad el forma universal y sin el cual los matemáticos no podrían comunicarse en absoluto, salvo que recurriesen a circumloquios interminables.
>
> Dedekind no intentó, en absoluto, presentar este lenguaje axiomáticamente; es claro que, para él, al igual que para sus colegas y contemporáneos, la definiciones y resultados elementales que enumera expresan "verdsdes de sentido común"; podemos afirmar que, a pesar de ulteriores controversias..., aún hoy los matemáticos siguen usando este lenguaje con este mismo sentido, ya que lo que les importa es que les permite expresar sus ideas sin ambiguedad.

Esta tarea, con un desarrollo muy acabado y cuidado, la iniciará Dedekind en su manuscrito de 1872 (v. [Dugac *1976*, 293-309]). Será precisamente en este manuscrito donde encontraremos un motivo que, en cierta manera, informari toda la obra dedikiniana: "En ciencia no debemos admitir jamás dn demostración nada que se pueda demostrar." Este *leit motiv* constituye el inicio del prefacio a la primera edición del texto [Dedekind *1888*, *1930-32*, III, 335; *1901*, 31] y a renglón seguido se inscribe en una línea epistemo-

[105] Recordemos que, en 1871, Dedekind introdujo ya, como hemos visto, la idea aplicación te un cuerpo en sí mismo y que Dedekind precisaba de ella para poder introducir el concepto de elemento *conjugado*, pero las aplicaciones eran, en realidad, morfismos, como sucedía también en el texto sobre grupos de 1855-1858. Ahora, en cambio, aparece la definición te aplicación en su sentido más general; este concepto lo encontramos ya en el manuscrito de 1878. No obstante, el texto que acabamos de citar nos lo ofrece Dedekind en la 3ª edición de la *Teoría de números* de Dirichlet, que está fechada en 1879.

lógica *logicista*: "al hablar de aritmética," nos dice, "como una parte de la lógica entiendo que ello implica que considero el concepto de número totalmente independiente de las nociones e intuiciones de espacio y tiempo y que lo considero un resultado inmediato de las leyes del pensamiento" y, como nos recuerda Jean Cavaillés, [*1962*, 119] Dedekind se coloca en una postura que se aleja completamente de la que adoptaría Georg Cantor: "no se trata de desarrollar una nueva ciencia, se trata de *fundamentar* la matemática en uso." La tarea realizada por Dedekind es una tarea que sigue los pasos de Schröder, Kronecker y Helmholtz—tarea que hallaría su continuación en Gottlob Frege y Giuseppe Peano—y que "consiste en reducir las matemáticas a la lógica."[106]

Esta reducción pasa, como en otras ocasiones, por la *creación del espíritu humano*: "los números son creaciones libres del espíritu humano; sirven para aprehender fácilmente y con mayor precisión las cosas" [Dedekind *1888*, *1930-32*, III, 335]. Se trata, como nos dice E. Zermelo [*1908*, 115] refiriéndose al *Formulaire* de G. Peano, de "un intento de sistematización escolar." Y entonces Dedekind [*1888*, *1930-32*, III, 337-338; *1901*, 35-36] añade: "...espero que las páginas que siguen, en tulto que constituyen un intento de establecer la ciencia de los números sobre un fundamento uniforme, encontrará una acogita generosa...." Este fundamento uniforme que tebe hallar una generosa acogida en la sociedad matemática de finales del siglo XIX es, debemos insistir, la teoría ingenua de conjuntos:

> Así hallamos la singularidad decisiva en la historia de la teoría de conjuntos; singularidad que consiste en el hecho de que sus nociones y algunos de sus resultados esenciales se hayan encontrado, casi involuntariamento, entorno de unas investigaciones relativas fundamentación de la aritmética. [Cavaillés *1962*, 121]

Con su análisis Dedekind logra tres resultados realmente notables y principales que Cavaillés nos indica con su gran capacidat de síntesis:

1. una organización general entorno a la noción de aplicacion;
2. una definición del orden y, correlativamente, el *fundamento de las definiciones por recurrencia*;

[106] [Cavaillés *1962*, 119-120]. Dedekind es claramente consciente de este hecho, según podemos constatar leyendo las notas a la introducción del texto que estamos comentando: "La aparición de su memorias (Ernst Schröder, *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* [*1873*], Leopold Kronecker, *Über der Zahlbegriff* [*1887*], Hermann Helmholtz, *Zählen und Messen* [*1887*]) es lo que me ha empujado a retomar las nuevas concepcione que, si bien tienen una misma ideología, son absolutamente diferente en su fundamento." Con estas palabras Dedekind contradice sus propias espectativas de 1878 [carta a Weber de 19 de noviembre] y da satisfacción a un deseo expresado por Weber (véase [Dugac *1976*, 79]). Se repite, pues lo que ya había sucedido antaño con la obra de Heine, cuya aparición le decidió a publicar su estudio relativo a la construcción de lo números reales.

En el prefacio a la *Segunda Edición* Dedekind tiene ya conocimiento de la aparición de la obra de Frege, *Grundlagen der Arithmetik* [*1884*]; en ella, dice Dedekind, "el punto de vista de la esencia de los números e distinta de la mía, pero sin embargo en esta obra se consiguen resultados muy próximos a los míos."

3. la teoría completa de los conjuntos finitos.

Todos estos resultados son, de hecho, resultados conjuntistas—*no son ni numéricos ni geométricos*—y permiten *crear*, en virtud de esta *capacidad creadora* que posee la teoría de conjuntos y que es fruto de la capacidad creadora del espíritu humano, los números, por medio de los cuales "es posible conseguir el objetivo ultimo del pensamiento, objetivo que consiste en facilitar la vida del hombre" [Dugac *1976*, 315]. En definitiva, pues, Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 337], plagiando a Platón, nos dirá que "el hombre aritmetiza."[107]

El análisis concreto de la obra de Dedekind relativa a la construcción de los números naturales es el método más rotundo para poner de manifiesto el hilo que rige su pensamiento global y particular.

La obra consta de 14 apartados de los cuales los tres primeros son capítulos simplemente conjuntistas y no apuntan, en absoluto, a la *creación numérica* que les sigue [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 344-390; *1901*, 44-115].[108]

El primero—Conjunto de elementos ["System von Elementen"][109]—tiene un cariz completamente general y pretende establecer con toda precisión los conceptos que se emplearán a continuación a lo largo de todo el trabajo.[110] La primera definición dice [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 344]: "Una cosa [*Ding*] es cualquier objeto de *nuestro penssamiento*."[111] Si a designa una cosa, entonces $a = b$ significa que "todo lo que podemos pensar de a, también lo podemos pensar de b y recíprocamente [*dasselbe Ding sind*]."[112] Seguidamente ofrece la primera definición importante [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 344]:[113]

107 άεί ὀ ὰνθρωπος ὰριθμητίζει. Recordemos que Platón había dicho: "Διοσ γεομετριζα" [Plutarco, *Convival Questions*, VIII, 2.1: άεί γεωμετρεῖν τὸν θεὸν] (véase [Thomas *1939*, 386]). Dedekind, además se aleja también de Kronecker y de sus famosas palabras "Dios hizo el número, el hombre el resto" (véase [Weber *1893*, 23] o [Wussing *1979*, 546]).

108 Estos parágrafos son: *Conjunto de elementos*, *Transformación de un conjunto y Transformaciones semajantes. Conjuntos semjantes.*

109 Aquí Dedekind adopta la palabra *System* para designar un conjunto, a pesar de que al dar la definición no recuerda otros nombros que han sido utilizado por otros autores con un significado sinónimo. En cambio, no cita el nombre que había utilizado él mismo en su memoria algebraica de 1855-58, en la que, en realidad, manejaba *estructuras algebraicas* en vez de conjuntos abstractos (véase la nota 17).

110 Algunos de estos conceptos habián hecho aparición, más o menos incipientemente, en obras anteriores y no abandonarán ya, en adelante, a Richard Dedekind ni en su forma de expresarse ni en su forma de pensar.

111 El subrayado e mío Pone de manifiesto una sus más el valor que Dedeknd da al poder generador de la mente.

112 Encontramos como axioma de 1as igualdad el enunciado lógico $\forall x\ \forall y\ (x = y \leftrightarrow F(x) = F(y))$. Este enunciado lógico—acorde con su ideología *logicista* pone de manifiesto, de nuevo, la capacidad creadora de la mente.

113 *System* o también *Inbegriff*, *Mannigfaltigkeiteit*, *Gesamtheit*.

> Cuando cosas distintas *a*, *b*, *c*, ...se pueden concebir desde un mismo punto de vista, entonces podemos reunirlas en nuestro espíritu y decimos que forman un conjunto *S*; las cosas *a*, *b*, *c*, ...reciben entonces el nombre de elementos de *S*.

Los elementos de un conjunto *S* se hallan *contenidos* en *S* y *S* consta de sus elementos y ahora, recurriendo de nuevo al poder creador de la mente, Dedekind consigue crear objetos nuevos que son precisamente los conjuntos: "Este conjunto *S*, considerado como un objeto de nuesro pensamiento, también es una cosa."[114]

Ahora Dedekind [*1888*; *1930-32*, III 345; *1901*, 45] establece la *caracterización por extensión* y, de hecbo, el *primer axioma* de la teoría de conjuntos: "todo conjunto está absolutamente determinado cuando, para cada cosa, está bien determinado d pertenece o no al conjunto."[115]

Seguidamente Dedekind hace ciertas precisiones relativas a la necesidad de considerar los *conjuntos unitarios* o *singletonos*, precisiones que sin embargo no lleva a su últimas consecuencias.[116] Más adelante volveremos sobre esta cuestión.

Aparece también la aceptación del *conjunto vacío* como "un conjunto que, en otros lugares y en otro tipo de investigaciones, puede resultar útil imaginar [*crear*]," pero que, sin embargo, según sus propias palabras, "no precisa en esta presentación de los *números naturales*." Este conjunto lo denomina *das leere System* [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 345].

El resto del parágrafo [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 345] contiene el *álgebra de los conjuntos*. En primer lugar nos ofrece la definición de *parte* [*Teil*] *A* de un conjunto *S* que podemos formalizar por

$$A \text{ es una } \textit{parte} \text{ de } S \text{ ssi } \forall a \in A \; (a \in S)$$

---

[114] *Ibid*. Ahora Dedekind, en una nota defiende precisamente el *poder creador de la mente* con su gran poder creativo. No acepta limitación alguna e insinua su des cuerdo con posturas como las de Kronecker que pretenden imponer limitaciones a este poder creador.

Es interesante, a modo de contraste, releer las definiciones de conjunto que ofrecen Bolzano y Cantor para poder captar las analogías que presentan en relación con esta concepción creadora de la mente:

> Un conjunto es una colección en la cual no ce condder el orden de sus partes. [Bolzano *1851*, 4]

> Por un *conjunto* entenderemos una colección cualquiera *M* de objetos definidos y distintos de nuestr percepción o de nuestro pensamiento considerados en un todo. [Cantor *1895* , 481]

(Véase [Pla *1989*, 357].)

Conviene indicar ya desde ahora mismo que la imprecisión de su definición los llevaría a considerar el *conjunto de todos los conjuntos*; Dedekind concretamente no hablará del *conjunto de todes mis ideas*.

[115] Véase, al respecto, Dugac [*1976*, 273]. Dedekind establece en lenguaje literario la sentencia siguiente: $S = T$ ssi $\forall x (x \in T \leftrightarrow x \in S)$.

[116] Así lo indica en una carta a H. Weber de 24 de enero de 1888 [Dugac *1976*, 273, apéndice L].

y seguidamente introduce un símbolo para abreviar la relación "A es una parte de S": $A \ni S$.[117] Dedekind accepta el término el *universo de A* para indicar que $A \subseteq S$.

Seguidamente establece la *reflexividad*, la *transitividad* y el *carácter anti-simétrico* de la relación de inclusión $\subseteq$. Dice [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 346] que A es una *parte propia* [*echter Teil*] de S ssi $A \subseteq S$, pero $A \neq S$.[118]

En la definición 8 introduce [Dedekind *1888*; *1930-2*, III, 346] el concepto de *reunión* de conjuntos [*zusammengesetzten System*][119] y en la 17 [Dedekind *1888*; *1930-2*, III, 347] el de *intersección* de conjuntos [*Gemeiheit der System A, B, C,* ...que denota $\mathfrak{G}(A, B, C)$]. Y precisa que es conveniente aceptar la reunión y la intersección de familias de conjuntos con un solo elemento (y entonces $\mathfrak{M}(A) = \mathfrak{G}(A) = A$). También advierte que "no debe confundirse la unión de una familia $A, B, C,$... con el conjunto que tiene como elementos los objetos $A, B, C,$ .....[120] En relación con la intersección nos hace observar que puede acaecer que "los conjuntos $A, B, C,$... no tengan ninguna parte común;" entonces, dice, son conjuntos sin parte común y en tal caso la intersección $A \cap B \cap C \cap$ ... "carece de sentido."[121]

---

[117] Nosotros, por comodidad y para abreviar la exposición, usaremos la expresión usual $A \subseteq S$ Dedekind dice que evitará el símbolo dual $S \supseteq A$. Con todo en el manuscrito introduce el concepto de *múltiplo* de un conjunto: T es múltiplo de S ssi $T \supseteq S$ [Dugac *1976*, 294]. Dedekind, además, usará a indistintamente para designar a y $\{a\}$. Ello hace que escriba $a \subseteq S$ para indicar, de hecho, que $\{a\} \subseteq S$ o, equivalentemente, que $a \in S$ en nuestra nomenclatura.

[120] Seguidamente nos dice que, si $A \subsetneqq S$, entonces "hay un elemento a de S tal que $a \notin A$."

[119] Conviene indicar que, en la definición que Dedekind da en el texto, no precisa en absoluto la *cardinalidad* de la familia de conjuntos que se pueden reunir. Su definición se halla expresada, claro esti, mediante una formulación informal. Constituyo una formulación informal del *axioma de la unión* puesto que, en el texto, aceptará con toda naturalidad la posibilidad de efectuar intersecciones —y, por analogía, *reuniones—no finitas*.

Aunque hoy sepamos que no hay dualidad entre ambas definiciones y que, si aceptamos el *axioma de separación*, la existencia de intersección arbitraria (no vacia) de conjuntos está garantizada en tanto que conjunto y, en cambio, la existencia como conjunto de la unión arbitraria de conjuntos es preciso imponerla explícitamente, debemos pensar que en la época de Dedekind ambos conceptos debían contederarse duales y absolutamente análogos, considerados metodológicamente. Sin embargo, más adelante, veremos que Dedekind es muy cautelos o a la hora de utilizar uniones, incluso numerables, para definir conjuntos.

En el manuscrito sólo considera la unión de dos conjuntos A y B que designa $A \vee B$. En el texto, en cambio, acepta la unión de los conjuntos $A, B, C,$..., que designa $\mathfrak{M}(A, B, C, ...)$. Este signo lo hallamos también en [Cantor *1932*,145].

[120] Dedekind no introduce notación alguna para designar el conjunto $\{A, B, C, ...\}$, pero advierte de que $A \cup B \cup C \cup ... \neq \{A, B, C, ...\}$.

[121] Dice [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 347] exactamente: "sie heißen dann System ohne Gemeinteil, und das Zeichen $\mathfrak{G}$ (*A, B, C,* ...) ist bedeutungslos" y nos remite entonces a la observación relativa al conjunto vacío. De hecho, la no aceptación del conjunto vacío le obligará a tener que admitir ciertas excepciones: "Con todo, sin embargo, en los teoremas que hagan referencia a intersecciones, dejaremos casi siempre al lector la tarea de añadir mentalmente la condición de existencia así como la de descubrir la interpretación que hay que dar en los casos en que se presente la no existencia."

Establece la asociatividad finita de la reunión, pero no dice nada acerca de la conmutatividad como si pensase que realmente reúne *familias de golpe*; en cambio, en el caso de la intersección, no dice nada acerca de la asociatividad.[122]

El §2 —*Transformación de un conjunto*—es central en *Was sind und was sind und was sollen die Zahlen?* Contiene la idea germinal de la naciente teoría numérica, mencionada ya en la introducción y que, de hecho, es la que posee el *carácter creador necesario*.[123] Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 342], siguiendo la catacterística de mantener el máximo rigor posible, intenta darnos una definición de este nuevo concepto. La aplicación, dice, "es una ley [*Gesetz*] en virtud de la cual a todo elemento determinado s de S le corresponde un elemento determinado, que es el transformado de s y que designremos $\varphi(s)$."[124]

Dedekind introduce asimismo la restricción de una aplicación definida en S a un subconjunto T de S. (Dice: "si $T \subseteq S$ y φ es una aplicación de S, entonces ésta contiene una aplicación determinada de T.") La aplicación restringida $\varphi \mid T$ la designa igualmente φ.

Introduce [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 348] también el conjunto $\varphi(T) = \{\varphi(t): t \in T\}$ tal que da el nombre de "transformado de T" [*Bild von t, $\varphi(t)$* y *Bild von T, $\varphi(T)$*)].[125] La aplicación más simple es la *identidad* [*die identische Abbildung*].

Renglón seguido introduce el simbolismo s' y T' para abreviar, respectivamente, $\varphi(s)$ y $\varphi(T)$ y demuestra que

1. si $A \subseteq B$, entonces $A' \subseteq B'$;

---

[122] No obstante, es claro que Dedekind era consciente de la relación

$$\mathfrak{G}(A, B, C, ...) \subseteq A, B, C, ... \subseteq \mathfrak{M}(A, B, C, ...).$$

Sin embargo, Dedekind no establece ni la maximalidad de $\mathfrak{G}(A, B, C, ...)$ ni la minimalidad de $\mathfrak{M}(A, B, C, ...)$, de lo que, sin ningún género de dudas, era consciente ya que, de hecho, no es más que una abstracción de los conceptos de *máximo común divisor y mínimo común múltiplo* en el caso de los ideales y la divisibilidad.

Tampoco queda claro, en este contexto inicial, si para Dedekind la teoría de conjuntos que precisa—y que crea—se reduce al *álgebra de las partesde un conjunto S*: el *universo*. Y no queda claro porque Dedekind no hace jamás referencia alguna al *complementario* de un conjunto relativamente al universo.

[123] La idea de *aplicación* la hemos encontrado ya en otros textos anteriores de Dedekind. Esta idea la debe, sin embargo, a su colega y amigo Dirichlet [*1879*, §163]: *Vorlesungen über Zahlentheorie*.

[124] Esta defínción, no obstante, no aparece en el manuscrito. En él sólo se nos dice que una aplicación de A en B asocia cada objeto $a \sim A$ un objeto $a \in A$ un objeto $a \mid \varphi = b$ de B.

Conviene destacar dos diferencias notables entre el texto y el manuscrito. En el manuscrito la aplicación φ es una aplicación de A en B; aquí, en cambio, es una aplicación de S en sí mismo. En el texto, la *imagen* o *transformado* de s, lo designa $\varphi(s)$, mientras que en el manuscrito utiliza $s \mid \varphi$ y además (en [Dugac *1976*, 295, apéndice LI, 6]) defiende que la notación $a\varphi$ y $A\varphi$ es más natural que $\varphi(a)$ o $\varphi(A)$.

También es interesante notar que Dedekind observa, ya en el manuscrito, que el "cálculo del cardinal" lleva necesariamente a la noción de "correspondencia" (v. [Dugac *1976*, 293, apéndice LI, 1]).

[125] Dedekind *1888*; *1930-32*, III 348]. En el manuscrito introduce la idea de *antiimagen* u *original* [*bestimmt*; Dugac *1976*, apéndice LI, 2, 294] que no aparece en el texto.

2. $(A \cup B \cup ...)' = A' \cup B' \cup ...;$
3. $(A \cap B \cap ...) \subseteq A' \cap B' \cap ....$[126]

La *composición* de aplicaciones θ de dos aplicaciones φ y ϕ, siendo φ una aplicación definida en S y ϕ una aplicación definida en $\varphi(S) = S'$, es la aplicación definida en S por

$$\theta(s) = \phi(s') = \phi(\varphi(s)).$$

La aplicación θ la podemos designar $\phi \cdot \varphi$ o $\phi\varphi$ y sólo tiene sentido si $\phi(S') \subseteq S$[127]

Nos advierte, además, que la "composición de aplicaciones no es conmutativa" y establece que "es asociativa." Y añade que la composición de ϕ, φ, ξ, etc. se puede designar $\phi\varphi\xi\cdot\cdot\cdot$ [Dedekind *1888*, *1930-32*, III 349; *1901*, 53].

Con §3— *Transformaciones semejantes. Conjuntos semejantes*—se acaba la introducción conjuntista de Dedekind. En este parágrafo introduce las *aplicaciones inyectivas* y *sus propiedades*.

Una aplicación es una semejanza (o *distinta* [*ähnlich*, *deutlich*])[128] si, a cada pareja a, b $\in S$, con $a \neq b$, le corresponden imágenes a', b' también distintas [Dedekind *1888*, *1930-32*, III 350; *1901*, 53].

Seguidamente observa [Dedekind *1888*, *1930-32*, III 350][129] que "toda aplicación inyectiva admite una inversa [*umgekehrte Abbildung*]" y entonces establece que, si φ es inyectiva (los teoremas 27 al 31 [Dedekind *1888*, *1930-32*, III 350-351; *1901*, 53-54]),

1. $A' \subseteq B'$ implica $A \subseteq B$ (y, en consecuencia, si $A' = B'$, entonces $A = B$).
2. $(A \cap B \cap \cdots)' = A' \cap B' \cap \cdots$.
3. 1_S es inyectiva.
4. La compuesta de dos aplicaciones inyectivas es asimismo una aplicación inyectiva y, además

$$(\phi\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\phi^{-1} .$$

Ahora Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 351] introduce la semejanza de conjuntos: "dos conjuntos R y S son semejantes ssi existe una inyección φ de S tal que $\varphi(S) = R$"[130]

---

[126] Son las proposiciones 22, 23 y 24 de Dedekind [*1888*, *1930-32*, III, 348-349; *1901*, 51-52].

[127] Para Dedekind todas las aplicaciones son aplicaciones de S en S. Dieudonné y otros [*1978*, 375], lo interpreta como $S' \subseteq \phi^{-1}(S) \subseteq \text{dom } \phi$.

[128] Nosotro las llamaremos aplicciones inyectivas.
Este concepto lo hallamos ya en el manuscrito [Dugac *1976*, 294].

[129] De hecho Dedekind observa que "cada imagen $s' \in \varphi(S)$ tiene una antiimagen y sólo una."
Resulta que $\varphi^{-1}\varphi = \mathrm{id}_S$. Existe, pues, una aplicación inversa $\varphi^{-1}: S' \to S$. De hecho Dedekind trabaja con *biyecciones* porque se restringe siempre a las *imágenes*.

[130] "Die System R, S heißen ähnlich...." En el texto no queda en absoluto claro si φ es una aplicación del conjunto S en si mismo, pero a lo largo de todo el trabajo todas las aplicaciones que se

Observa que la semejanza es simétrica ($S = \varphi^{-1}(R)$), reflexiva ($S = 1_S(S)$) y transitiva ($T = \varphi(R)$, $R = \phi(S)$, entonces $T = \varphi\phi(S)$).[131] Y seguidamente dice [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 351; *1901*, 55; Definición 34]:[132]

> **Definición.** En consecuencia podemos dividir [*Mann kann daher alle System in Klassen einteilen...*] todos los conjuntos en clases de manera que una clase conste exclusivamente de los conjuntos $Q, R, S, \ldots$ semejantes a un conjunto determinado [*welche einem bestimmten System R, den Repräsentanten der Klasse...*] R que es el representante de la clase; en virtud de (33) la clase no cambia si se elige como representante cualquier otro representante te la clase

y acaba esta introducción cojuntista viendo que las biyecciones represetan las partes y las partes propias.[133]

A partir de ahí Dedekind usará la *teoría intuitiva* para crear los *números naturales*, creación que, como veremos, pasará por el poder creador de la mente. Dedekind dedicará 11 apartados a esta cuestión, todos ellos basados en el concepto básico de *cadena* que encontramos en el §4—*Aplicación de un conjunto en sí mismo*—.[134] En este parágrafo Dedekind indica que "una aplicación φ es una aplicación de S en sí mismo ssi $\varphi(S) \subseteq S$ y, por consiguiente, deja claro que las aplicaciones que había definido y utilizado hasta aquel momento—en las que no especificaba en absoluto el conjunto de llegada—eran generales y no tenían porque ser necesariamente exhaustivas.

---

manejan son aplicaciones de un conjunto S en sí mismo y Dedekind sigue la técnica, como ya hemos indicado con anterioridad, de construir tan solo la *teoría de conjuntos que necesita*.

De hecho Dedekind introduce la *equipotencia* de conjuntos.

[131] Dedekind [1888; *1930-32*, III, 351; *1901*, 55]. Es el teorema (33). Dedekind es consciente de que se halla frente a una relación de equivalencia que *clasifica* los conjuntos en clases de equivalencia. Véanse los teoremas 33 y 34.

[132] Dedekind no se da cuenta que se halla ante la paradoja que surge al considerar la *totalidad* de todos los conjuntos, ya que, al ser un objeto pensable, es un conjunto.

Es precisamente en esta familia en donde establece la relación de equivalencia. Observa que "cada elemento de una clase sirve para representarla" y, por consiguiente, observa la "independencia de representantes." No habla, sin embargo, del conjunto de los representantes—que al ser un objeto pensable debería ser un conjunto y entonces nos hallaríamos ante el A.C.—y así logra evitar el A.C.

Dedekind, sin embargo, a diferencia de Cantor no extras de esta definición más que aquello que precisa para establecer su teoría de los números naturales que eo lo que pretende establecer. De hecho el concepto general en sí mismo, aun cuando no lo despreciará cuando Cantor se lo muestre, no le preocupa particularmente.

[133] Constituye el teorema 3 de Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 351; *1901*, 55].

[134] Es interesante observar el subtítulo que contiene el manuscrito: "Ensayo de un análisis del concepto de número desde un punto de vista intuitivo" [Dugac *1976*, 293, apéndice LVI, 1 *Mott*]. Este punto de vista intuitivo lo constituyen, sin duda alguna, la teoría de conjuntos y el concepto de cadena.

[Dedekind *1888*, *1930-32*, III, 352]: *Kette*. En el manuscrito dice "o cualquier otro nombre" y, en la página 296 de Dugac [*1976*], hallamos redefinido el concepto de cadena con el nombre de grupo [*Gruppe*].

Entonces establece la definición de cadena de un conjunto S relativamente a una aplicación φ: "una parte $K \subseteq S$ es una cadena ssi $K' \subseteq K$."[135] Este concepto está íntimamente ligado con el concepto de *cortadura* y de *ideal*—conceptos todos ellos que, en la creación matemática de Dedekind, llevan a una nueva clase de números.

Dedekind [*1872*; *1930-32*, III, 317] usará el concepto de cadena para construir $\mathbb{N}$ —el *conjunto de los números naturales*—. Lo hallamos mencionado en el §1 de su texto sobre los números reales cuando habla de la cadena de los números ["*Die Kette dieser Zahlen* ..."] enteros positivos....

Seguidamente establece la *estabilidad* entre el concepto de cadena y las operaciones *conjuntistas*: la unión, la intersección y la imagen de cadenas son cadenas y S es una cadena (son los teoremas 39, 42, y 43 [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 352; *1901*, 56-57]).[136]

En la definición 44 Dedekind considera la *clase de todas las φ-cadenas* de S que contienen a A:

$$K(A) = \{K \subseteq S: A \subseteq K \text{ y } K' \subseteq K\}$$

y observa que este conjunto es no vacío y enseguida considera su intersección

$$A_0 = \bigcap K(A) = \varphi_0(A).^{137}$$

Así obtiene la *cadena del conjunto A* ["*Kette das System A*; Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 353; *1901*, 58].[138] Esta noción es *realmente importante*. Y Dedekind [*1888*; *1930-32*,

---

[135] Es claro que una cadena lo es relativamente a una aplicación $\varphi: S \rightarrow S$, para un conjunto S dado de antemano [Dedekind *1888 ; 1930-32*, III, 352; *1901*, 56]. Y así lo hace constar d propio Richard Dedekind después de establecer la definicion 37, que es la definición de *cadena*.

[136] Dugac [*1976*, 86] afirma que el estudio "sistemático de la estabilidad de las operaciones conjuntistas frente a una aplicación dada es otro aspecto *moderno* de esta obra."

[137] Esta definición—dice Cavaillés [*1962*, 123]—tiene un carácter *transfinito*; es decir, un carácter abstracto: "la totalidad de las cadenas que contienen a un cierto conjunto A no se da a través de un cierto carácter, sinó que se establece *in abstracto*."

De hecho queda permitida en virtud de la definición abstracta de conjunto de Dedekind. No obstante, debemos indicar que $K(A) \subseteq \wp(S)$, si es definible, no es una clase propia.

La familia de todas las cadenas de S y la familia de todas las cadenas de S que contienen a un cierto conjunto A [o un cierto elemento $a \in S$] es un sitema clausura en el sentido de Alfred Tarski [*1930*, 371] y tiene asociado un operador de consecuencia. Dedekind, no obstante, no acepta intersecciones vacías; sin embargo nos hace observar que $K(A) \neq \emptyset$ y, por consiguiente, $\bigcap K(A)$ *tiene sentido*.

[138] Ahora en 48, resumiendo 45, 46 y 47, provará que A_0 es la menor cadena que contiene a A (esto es: $A_0 \supseteq A$; $A_0' \subseteq A_0$; si $A \subseteq K$ y K es una cadena, $A_0 \subseteq K$).

Más adelante veremos que es precisamente en base a esta definición que Dedekind es capaz dc establecer el teorema de equivalencia. Véase [Pla *1988*]. Y es gracias a ella también que Dedekind puede of recernos de una forma absolutemente rigurosa el principio de inducción. (Véase el comentario de Zariski [*1926*, 173]).

III, 353; *1901*, 58] observa que "la φ-imagen de la φ-cadena de A es igual a la φ-cadena de la φ-imagen de A."

Es decir: $(A_0)' = (A')_0$ o dicho de otra forma $\varphi(\varphi_0(A)) = \varphi_0(\varphi(A))$. Este conjunto lo designaremos A_0' y es fácil establecer que $A_0 = A \cup A_0'$.[139]

De todo ello se sigue el *teorema de inducción completa*:[140]

si queremos probar que la cadena $A_0 \subseteq \Sigma$ — en donde Σ puede ser, o no, una parte del conjunto S – , es suficiente probar que

$$\rho.\ A \subseteq \Sigma;$$
$$\sigma.\ \text{si } x \in A_0 \cap \Sigma, \text{ entonces } x' \in \Sigma.$$

La demostración es elemental: basta hacer $G = A_0 \cap \Sigma$. Entonces $G' = (A_0 \cap \Sigma)' \subseteq \Sigma$ y, por consiguiente, $G' \subseteq G$ y G es una cadena y $\supseteq A$. De donde $G \supseteq A_0$ y $\Sigma \supseteq A_0$ (véase [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 353-354; *1901*, 60-61].

Dedekind es consciente de que ha establecido la "base científica del tipo de demostraciones conocido con el nombre de inducción completa" y nos hace notar que, de hecho, Σ es el conjunto de "todos los objetos que tienen una cierta propiedad que cumplen los objetos del conjunto A y que, además, es preservada por la aplicación φ."

Observemos que, de hecho, ρ y σ nos permiten garantizar que

---

[139] Veamos las demostraciones:

1. $A \subseteq A_0$ implica $A' \subseteq (A_0)'$ y A_0' es una cadena, de donde $(A')_0 \subseteq (A_0)'$.

$A' \subseteq (A')_0$ y entonces $A \cup (A')_0$ es una cadena que contiene a A; de donde $A_0 \subseteq A \cup (A')_0$ y por consiguiente

$$(A_0)' \subseteq ((A')_0) \cup A' \subseteq (A')_0.$$

2. Sabemos que $A_0 \subseteq A_0'$; pero $A' \subseteq A \subseteq A_0$. De donde $(A')_0$ y, por lo tanto,

$$A_0 \subseteq A \cup A_0' \subseteq A_0.$$

Es de interés observar, siguiendo a Cavaillès [*1962*, 123], el carácter maxima) del conjunto A_0' : este conjunto es el *máximo* que podemos conseguir a partir del conjunto A por iteración de la aplicación y sobre A, es decir

$$A_0 = A \cup A' \cup A'' \cup \ldots$$

Ahora todavía es más claro que $K = A_0 = A \cup A' \cup A'' \cup \ldots$ es una cadena, que contiene al conjunto A y también es claro que, si H es otra cadena que contiene al conjunto A entonces $H \supseteq K$.

Dedekind, no obstante, no recurre a la unión numerable que esta caracterización implicaría. Ahí hallamos una disimetría en la utilización, por parte de Dedekind, entre la intersección y la unión traria de conjuntos.

[140] Este es uno de los escasos teoremas que el propio Dedekind [*1888*; *1930-32*, III,. 354-355] bautiza: *Satz der vollständingen Induktion*

$$A \subseteq \Sigma,\ A' \subseteq \Sigma \text{ y, si } A^{(n)} \subseteq \Sigma, \text{ entonces } A^{(n+1)} \subseteq \Sigma .$$

De ahí que $A_0 = A \cup A' \cup A'' \cup ... \subseteq \Sigma$, porque "$A_0$ contiene todo lo que se obtiene iterando sobre A."

Con todo, y pese a la referencia sobre el índice n que hace Dedekind, aún nos hallamos un poco lejos del *conjunto de los números naturales*. Es preciso salvar un escollo muy importante: se precisa de los conjuntos infinitos.[141] He aquí otro *leit motiv* de la teoría de conjuntos: la *existencia de los conjuntos infinitos*. Este será precisamente el contenido—y el objetivo—del §5: *El finito y el infinito*.[142]

Un conjunto S es *infinito* ssi es semejante a una parte propia de sí mismo ["Ein System S heißt *unendlich...*; *endliches System*"; *1888*, definición 64].[143] En caso contrario el conjunto es finito. Seguidamente, en una pretensión de rigor que jamás abandona la obra de Dedekind, establece que "existen conjuntos infinitos"[144] y, al demostrarlo, advierte en

---

[141] Esta preocupación es importante hsta el extremo que, en d manuscrito, Dedekind define el concepto de conjunto infinito antes incluso de establecer la definición de cadena. Con todo, sin embargo, en el texto va mucho más lejos pue to que e da cuenta de que es preciso establecer la *existencia*.

[142] El título del parágrafo es ya, de por sí, interesante pueo, si bien nos hace pensar en el *infinito* como la *negación del finito* —ya que *finito* va antes que *infinito* —, en realidad Dedekind procede exactamente al revés. El propio Dedekind nos lo hace notar en el prefacio de la *Segunda Edición* cuando ofrece una segunda definición—la definición de *conjunto finito* —"más simple, por cuanto no precisa del concepto de dmilitud, pero sobre la cual es dificil edificar los funtamentos de la aeitmética."

Dedekind elaborará un inédito que podemos hallar recogido en los *Gesammelte Werke* [Dedekind *1930-32*, III, 450-458] y que fue estudiado con cierto detalle por Jean Cavaillés y al que dedicaremos nuestra atención más adelante.

Véase [Cavaillés *1962* , 67-70; 124-128].

[143] Es la defínción 64 de Dedekind [*1888*].

"Nos hallamos con la primera definición de conjunto infinito de la historia" [Dieudonné y otros *1978*, 385.] En la introducción a la *Segunda edición* hallamos una definición nueva que se basa en el concepto de *transformación* o *aplicación*, pero que no requiere en absoluto del carácter biyectivo de ésta. De hecho es la definición que Tarski [*1924* , 45] considerará y para la que establecerá la *finitud en el sentido de Dedekind* , §5, (64).

La otra implicación, en cambio, precisa del A.C.

El concepto de finitud como "numerable con un número natural" y la equivalencia de la negación de este hecho con la definición de Dedekind la podemos encontrar en Sierpiński [*1928*, §48] para lo cual requerirá el uso del A.C. (véase Pla [*1989* , 357-368] y Moore [*1982*, 22-30]).

Dedekind afirma categóricamente que él es el primero en haber establecido esta definición—definición *absolutamente conjuntista*, que *no precisa en absolúto del concepto de número* —y que la comunicó a Cantor (en 1882) y a otros matemátcos antes de publicar el texto que nos ocupa.

Dedekind, además, comunica a Weber [en carta de 24 de enero que podemos ver en Dedekind [*1930-32*, III, 488] que el texto de Cantor de 1877 (véase [Cantor *1932* ,119]) tuvo la virtud de atraer su atención sobre el hecho. (Véase Dugac [*1968*, 87] en relación con las pretensiones de Cantor relativas a la paternidad del concepto de conjunto infinito.)

[144] Nos hallamos ante uno de los escollos más importantes de la teoría dedekiniana de conjuntos: este hecho eo absolutamente indispensable para poder establecer con rigor—*evitando todo recurso a la intuición geométrica* —la construcción del conjunto $\mathbb{N}$, como veremos más adelante. Es precisamente una *afirmación conjuntista* y nada más: enuncia la existencia de un cierto tipo de conjuntos cuya definición se puede establecer con todo rigor utilizando sólo conceptos de la teoría de conjuntos, que eviten completamente todo recurso al concepto de número. La cuestión filosófica — epistemológica,

una nota 18 *semejanza con la consideración* que se establece en el §13 de las *Paradoxien des Unendlichen* de Bernhard Bolzano, fechada en Leipzig en el año [*1851*], pero de la que Dedekind no tendrá conocimiento hasta dsepués de que haya aparecido ya su *Primera Edición*, según comenta en el introducción a la *Segunda edición*.[145] En la demostración [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 388] considera "el reino de mis pensamientos [*meine Gedankenwelt*];" es decir, la "totalidad S de todas las cosas que pueden ser objeto de mi pensamiento"[146] y afirma que el conjunto S es un conjunto *infinito*. Entonces el paso al siguiente es: "si $a \in S$, el pensamiento s' que establece que el elemento s puede ser objeto de mi pensamiento, es también un elemento de S." De esta forma obtiene una aplicación φ: $S \rightarrow S$.

La dificultad consiste en ver que $S' \subsetneq S$; es decir, en ver que "hay elementos de S que no son elementos de S'" (por ejemplo: "mi yo").[147]

---

si se prefiere—reside en situar el problema o bien en el ámbito del *formalismo* o bien en el ámbito del *realismo-platonismo*. Para Dedekind, realista-platónico, la existencia es algo que debemos establecer; para Zermelo —como repreoentante de la mentalidad formalista—es algo que hay que admitir.

[145] En el manuscrito, por el contrario, este teorema no aparece por ninguna parte.

[146] A la vista de las definiciones de *cosa* y de *conjunto* dadas por Dedekind, ya comentadas, esta totalidad coincide con el *conjunto de todas las cosas*; y, por lo tanto, contiene al *conjunto de todos las conjuntos*. Esta consideración será criticada por Hessenberg [*1906*, 176–177] en su trabajo de *Grundbegriffe der Mengenlehre* quien afirmará que este concepto no es lógico sino psicológico. Cavaillés [*1962*, 124–125] se hara eco de esta afirmación y añadirá que "es un recurso extraño en un escrito como el de Dedelcind," escrito que pretende fundamentar el conjunto de los números naturales recurriento al rigor de los conceptos lógicos y *conjuntistas* y evitando cualquier recurso debido a la intuición.

Bolzano [*1851*, 14-15] se refiere, en cambio, a "las propodciones que son verdaderas en sí mismas." Ello le permite disponer de forma harto natural del paso al siguiente—"si una proposición A es cierta, entonces es cierta la proposición 'A es cierta'." Pero Bolzano justifica la infinitud en el hecho de que es posible conseguir un conjunto "mayor que cualquier conjunto finito." La diferencia con Dedekind es realmente notable puesto que, en Bolzano, de alguna manera, lo que se hace es contar y por consiguiente se halla implícito el número natural que Dedekind intenta evitar.

[147] Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 357] recorre a "mi yo" [mein eigenes Ich]. Pero este recurso precisa de algunas justificaciones. No es posible aceptarlo sin más. En primer lugar, "mi yo" ¿pertenece al conjunto S de "mis pensamientos"? Y, en segundo lugar, *¿cómo sabemos que "mi yo" no es un cierto s'?*

Dedekind intenta dar respuesta a estas dos objeciones en una carta a Keferstein, datada el 8 de febrero de 1890: "Así consigo una demostración rigurosamente correcta: 'mi yo' puede considerarse un objeto de mi pensamiento, ...pero no es un pensamiento."

Consciente de esta dificultad, la pone de manifiesto sin ningún reparo en la introducción de la *Tercera Edición* cuando dice:

> ...un suceso ha ido tomando cuerpo y me ha hecho dudar de lo que decía [en la Primera edición] porque, con el paso del tiempo, se ha puesto en duda la certeza del fundamento de mi concepto más importante. No puedo subestimar la justeza ni la importancia parcial de tales dudas.... Con todo, sin embargo, mi confianza en la harmonía interna de la lógica no se ha tambaleado ni un ápice; creo que una investigación rigurosa de la potencia del espíritu, que consiste en poder crear, a partir de elementos bien determinados, un nuevo objeto, el conjunto que constituyen, necesariamente distinto de cada uno de sus elementos, ha de conducir finalmente a una reconstrucción instacable de los fundamentos de mi trabajo....

Por fin es claro—a mi entender esta afirmación de Dedekind no tiene nada de clara—que, si a y b son "dos elementos de S distintos, entonces a' y b' también serán distintos" y, por consiguiente S será un conjunto infinito.

Seguidamente establece que el carácter de finitud o de infinitud se conserva por transformaciones semejantes y que "ningún conjunto infinito puede ser jamás parte de un conjunto finito" y, por fin, establece que, al "añadir un solo elemento a un conjunto finito jamás podrá obtenerse un conjunto infinito."[148]

El §6—*Conjuntos simplemente infinitos. La serie de los números naturales*—nos ofrece el concepto fundamental que se requiere para introducir con rigor los números naturales. Este concepto es el concepto de conjunto simplemente infinito ["Ein System N heißt *einfach unendlich...*"]: un cojunto N es *simplemente infinito* ssi existe una inyección $\varphi: N \to N$ tal que N es la cadena de un elemento que no pertenece a $\varphi(N)$ [Dedekind

---

Una vez más aparecen el poder creador de la mente—poder creador que consiste en la capacidad de *crear conjuntos*—y el convencimiento de una *doctrina logicista* que, juntos, han de permitir una fundamentación rigurosa e intachable.

Véase, en este sentido, Dugac [*1976*, 88-90] y, en particular, la opiniones de Bertrand Russell respecto de esta cuestión y, sobretodo, los textos de Ernst Zermelo.

[148] Dedekind [1888; *1930-32*, III, 357-359; *1901*, 64-66]. "Todo lo que es menor que un conjunto finito es finito y todo lo que es mayor que un conjunto infinito es infinito." "Al añadir un elemento a un conjunto finito se obtiene un conjunto infinito." En la demostración de este ultimo enunciado, Dedekind usa a para designar, de hecho, $\{a\}$ y a' para designar $\{a\}' = \{a'\}$. Usa además la palabra *Inbegriff* en vez de usar la palabra *System*. Veámoslo con detalle: "Si a es un elemento de S y si el agregado [*Inbegriff*] T de todos los elanentos de S distintos del elemento a $(T = S-\{a\})$ es finito, entonces S es finito." Tenemos que ver que $S' = S$. Pero $S = T \cup \{a\}$ y $S' = T' \cup \{a'\}$ y $a' \notin T'$ y $S' \subseteq S$ en virtud de la inyectividad de la aplicación φ.

Para ver que $T' \cup \{a'\} = T \cup \{a\}$ distinguiremos dos casos:

• si $a' \notin T'$, entonces $T' \subseteq T$ con T finito y φ inyectiva; por consiguiente

$$T' = T \text{ y } a' \notin T' = T; \text{ de donde } a' = a;$$

• si $a \in T'$, entonces $a = b'$, con $b \in T\ (b \neq a)$. Sea $T = U \cup \{b\}$ y $S = U \cup \{a\} \cup \{b\}$.

Entonces

$$S' = U' \cup \{a'\} \cup \{a\}.$$

Ahora consideremos la aplicación

$$\phi: \ T = U' \cup \{b\} \to S'$$

tal que $\phi(u) = u'$; $\phi(b) = a'$. Entonces

$$\phi(T) = U' \cup \{a'\}, \text{ con } a' \notin U',$$

siendo ϕ una semejanza de T y $\langle T \rangle \subseteq T$ y T finito. De donde $T = \phi(T) = U' \cup \{a'\}$ y entonces

$$S' = U' \cup \{a'\} \cup \{a\} = T \cup \{a\} = T \cup \{b'\}$$

y ahora aplicamos la parte precedente.

1888; *1930-32*, III, 359]. El elemento generador del conjunto N el elemento básico de N [*Grundelement von* N] —lo designaremos por 1 y diremos simplemente que N se ha ordenado por medio te la transformación φ.[149]

Por consiguiente, un conjunto N es simplemente infinito ssi

> existe una inyección φ: $N \to N$ —es el paso al siguiente— y un elemento $1 \in N$ es el elemento básico —tales que
>
> α. $N = \varphi(N) \subsetneq N$;
> β. $N = 1_0 = \{1\} \cup N' = \{1, \varphi(1), \varphi^2(1), ...\}$;
> γ. $1 \in N - N'$;
> δ. φ es inyectiva.

No cabe duda alguna,[150] a la vista de lo que acabamos de exponer, que es la *teoría de conjuntos*—inyecciones, cadenas, cadenas de un elemento, etc.—lo que constituye la base epistemológica de la axiomática de Giuseppe Peano, base epistemológica que Dedekind nos ofrece paso a paso gracias al poder creador de su mente.

La teoría de Dedekind se basa pues en la *existencia* de conjuntos *simplemente infinitos* que, de hecho, son los conjuntos *coordinables con los números naturales*—atención! que este conjunto, el de los números naturales, aún no ha sido introducido—. Estos conjuntos

[149] En realidad Dedekind debería hablar, no de la cadena del elemento 1, sino de la cadena del singletón formado con un elemento de $N - \varphi\langle N \rangle$. Así pues, un conjunto N es simplemente infinito ssi existe una *inyección* φ: $N \to N$ tal que $N = (\{n\})_0$, en donde $n \in N - \varphi\langle N \rangle$.

Es claro que φ no es una biyección.

Es obvio que todo conjunto simplemente infinito es infinito en el sentido de Dedekind. En realidad Dedekind introduce la idea de *primer elemento* y de *paso al siguiente*, vinculados ambos a una aplicacion inyectiva φ e impone que N sea *fuertemente inductivo*: "existe un $x_0 \in N$ y si $x \in N$, entonces $x' \in N$ (y, además, todo $y \in N$, $y \neq x_0$, satisface $y = z'$, $z \in N$)." Esta es, de hecho, la observacion que hace Jourdain [*1916*, 426]:

$$N = \{1\} \cup \{1\}'_0 = \{1\} \cup N' = \{1, \varphi(1), \varphi^2(1), ...\}$$

como indicábamos ya en la nota 141. Dedekind, con su gran capacidad credor, consigue evitar el etc.; introduce la *sucesión infinita actualmente* sin tener que designarla explícitamente término a término.

[150] Así se obtiene un *modelo de Peano* $\langle N, \varphi, 1 \rangle$ en el sentido actual de la palabra (véase [Pla *1991*, 278]). Plagiando las palabras de O. Zariski [*1926*, 183] digamos que con esta aportación Dedekind "alcanza el punto álgido de la parte propiamente matemática de su obra." De aquí en adelante la teoría aritmética podrá desarrollarse por medio de bases puramente lógicas. Dedekind *ha logrado un conjunto* en el cual

1. hay un elemento 1 que no es siguiente de ningún otro;
2. cualquier elemento, distinto del elemento 1, es siguiente de otro elemento;
3. el anterior de cada elemento es único.

Disponemos ya de todos los *axiomas de Peano* con excepción del de inducción completa, axioma que constituye el teorema designado con el número 80 de este mismo parágrafo 6 y que Dedekind deduce del concepto básico de cadena.

son infinitos tanto en el sentido de Dedekind como en el usual.[151] Dedekind establece entonces la existencia de los conjuntos simplemente infinitos.[152]

Esta forma de definir el conjunto *N*, evitando los posibles objetos indeseables fue "uno de los puntos más difíciles de mi análisis—dice Dedekind—y el conseguir resolverlo me exigió largas reflexiones."[153]

Ahora hay que ver que *existen conjuntos simplemente infinitos*. Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 359-360; *1901*, 68], en realidad, demuestra que "cada conjunto infinito contiene un conjunto simplemente infinito *N*."[154]

La consideración del conjunto *N*, "con abstracción de la naturaleza de sus objetos" lleva a Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 360; *1901*, 68] al *conjunto de los números naturales* o números naturales o simplemente números [...so heißen diese Elemente natürliche Zahlen oder Ordinalzahlen oder auch schlachbin Zahlen...] y el número 1 es el "número básico de la serie numérica *N* [...und das Grundelement 1 heißt die Grundzahl der Zahlenriehe *N*]."[155] Reaparece el *poder creador* de Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 360; *1901*, 68]:

> Esta liberación de los elementos de toda suerte de contenido [abstracto] es la que justifica que podamos afirmar que los números naturales constituyen una creación libre de la mente humana.

---

[151] Véanse las definiciones de Bernhard Bolzano y Georg Cantor [Pla *1989*, § 5 y, en particular, pagina 17].

[152] En el manuscrito [Dugac *1970*, apéndice LVI, 2] Dedekind intenta *construir* un conjunto simplemente infinito, pero no lo consigue. ¿Por qué no estableció la existencia de un conjunto simplemente infinito mediante una demostración *psicologista* como había hecho con los conjuntos infinitos? Quizás le molestaba la *semejanza* de los conjuntos simplemente infinitos con el conjunto ℕ de los números naturales que constituía precisamente el objeto que *realmente* pretendía conseguir y cuya construcción debía evitar cualquier recur o de la intuición.

[153] Carta de Dedekind a Keferstein [van Heijenoort *1967*, 100; Dedekind *1982* , 155] ya que debía lograr decir "sin caer en el más obvio y pernicioso de lo círculos viciosos" que n pertenece a N, si n es 1, o bien si n es la imagen de φ conseguida iterando su aplicación un *número finito de veces* a 1.

Esto lo consigue Dedekind utilizando el concepto de *cadena de un elemento* (de un *singletón*): "*N* es el conjunto que contiene todos los objetos que pertenecen a cualquier clase que contenga a 1 así como a todas las imágenes por φ de los elementos de N." Es el mínimo conjunto inductivo. De nuevo es preciso recurrir a la teoría de conjuntos.

También nos da cuenta, de hecho, de la razón por la cual en ves de introducir la existencia delos conjuntos simplemente infinitos prefiere introducir la existencia de hs conjuntos infinitos.

[154] Constituye el apartado 72 del texto. La demostración es realmente simple: si S es un conjunto infinito, existe un elemento $1 \in S - S'$. Basta considerar entonces $N = 1_0$ y constatar que cumple las condiciones requeridas. Así evita los *elementos indeseables* de *S*; es decir, evita otros posibles elementos minimales. De esta argumentación resulta trivialmente que la existencia de conjuntos infinitos implica la *existencia de conjuntos simplemente finitos*.

[155] Nos encontratnos aquí con otra característica propia de la *teoría de conjuntos*, característica que consiste en *hacer abstracción de la naturaleza de los objetos*. De hecho sólo debemos atender a las propiedades conjuntistas. A este respecto véase la observación de Cantor [*1895*, 481-482; Pla *1989*, 378, nota 16] en la que justifica la notación $\overline{\overline{M}}$ porque cada raya indica que se ha realizato una *abstracción*; es decir, según Cantor, en el cardinal se realizan *dos abstracciones*.

Ahora, creados ya los números naturales *en base al poder creador de la mente humana* que se articula en una teoría de conjuntos con el poder de abstracción que conlleva —, el resto es *pura lógica* —lógica en el seno de la *teoría de conjuntos* —; sólo habrá que recurrir a propiedades conjuntistas bien articuladas y perfectamente establecidas. Dice Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 360; *1901*, 68]:

> El objetivo principal de la ciencia de los números se halla constituído por las leyes que se derivan de las condiciones α, β, γ y δ y que, por consiguiente, son siempre las mismas, cualquiera que sea el conjunto simplemente infinito que se considere y sean los que sean las nombres que se den a sus elementos particulares....[156]

Así pues a 1 lo llamaremos el *número básico —primer elemento de N* y a la aplicación φ le daremos el nombre de paso al siguiente. Si $n \in N$, $n' \in N'$ y n' es *el siguiente* de n.[157]

Ahora Dedekind establece que

$$n'_0 \subseteq n_0 = \{n\} \cup n'_0 \quad \text{y} \quad N = \{1\} \cup N',$$

que 1 caracteriza la cadena N y entonces se halla ya en situación de ofrecernos la inducción completa [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 361; *1901*, 69-70]:[158]

> Para establecer que un teorema vale para todos los números n de una cadena m_0 basta probar
>
> 1. el teorema para $n = m$; y
> 2. que la valides del teorema para un $n \in m_0$ implica su validez para n'.

---

[156] Aquí tenemos *dos características* de la *teoría moderna de conjuntos*: **no** *importa la naturaleza de los objetos*; **importan** *las relaciones conjuntistas* que, de alguna manera, y ello precisamente constituye la segunda característica, se *deducen lógicamente* de unas relaciones básicas —axiomas '*ad hoc*'—en una perspectiva *formalista*. Dedekind, de hecho, en su logicismo-platonismo impone las relaciones básicas en la propia creación de los objetos matemáticos; en el poder creador de la mente, que no es un poder creador arbitrario sino razonado y razonable que permite un logicismo en su desarrollo posterior.

[157] [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 360]: "*folgende Zahl*." La ordenación φ, una vez realizada la abstracción de la naturaleza de los elementos, se constituye en el *paso al siguiente*.

[158] N es la "única cadena que contiene a 1." Dice: "sea $K = 1_0 = N$ y, puesto que es obvio que $N \subseteq K$, habremos terminado." De hecho $n_0 = \{n, n', n'', \ldots\}$. Aquí Dedekind designa $\{n\}$ por medio de n. Puesto que, en rigor absoluto, $n \subseteq n_0$ no significa nada en abosluto, podríamos interpretarlo como $n \in n_0$.

Cuando $m = 1$ y $m_0 = N$ obtenemos la *inducción completa.*

Pero, como dice Dedekind, φ ordena N y por consiguiente es posible hablar de "números mayores que" y de "números menores que." Este es precisamente el título del §7: *La relación de orden entre elementas*. En él Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 361; *1901*, 70-71] usa la inducción hasta la saciedad y establece las propiedades del orden, basándose en la inclusión que existe entre las cadenas que los elementos de N generan en el seno de N.[159]

El número m es menor que el número n ["*m* heißt kleiner als die Zahl *n* "] (y, al mismo tiempo, n es mayor que m ["*n* größer als *m* "]) ssi

$$n_0 \subseteq m'_0$$

(o bien $n_0 \in m'_0$.) Este hecho lo designaremos $m < n$ y $n > m$. [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 363][160]

Es claro que el orden $<$ es una relación de orden y que $(N, <)$ es un conjunto totalmente ordenado. Es total (v. parágrafo (90) [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 363; *1901*,

---

[159] Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 361; *1901*, 70-71] observa que la aplicación $o\colon N \to \wp(N)$, $n \mapsto n_0$, es inyectiva. En realidad está definida en $N^* = \{\{n\}: n \in N\}$.

Establece [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 362; *1901*, 72] que toda cadena $K \subseteq N$ está caractaizada por un elemento $k \in N$; es decir, "si $K \subseteq N$ es una cadena, entonces existe un único $k \in N$ tal que $k_0 = K$ o $k'_0 = K$, según que k pertenezca o no a la cadena K. En ambos casos, no obstante, $k'_0 \in K$."

Observa asímismo, preparando el terreno para la *asimetría* y la *linealidad* del orden, que, si m, $n \in N$ y $m \neq n$, entonces se cumple una y sólo una de las relaciones conjuntistas $n_0 \subseteq m'_0$ o $m_0 \subseteq n'_0$; es decir, para cada pareja m, n, con $m \neq n$, $n < m \vee m < n$ y sólo una.

Un *concepto conjuntista*—la *inclusión de cadenas*—le permite ordenar los números naturales y e tablecer las propiedades de la relación de orden. Este mecanismo de reducción de una propiedad aritmética a una propiedad conjuntista nos recuerda perfectamente la relación de orden que Dedekind establecía entre números reales. Véanse páginas 224-227.

[160] Implícitamente supone que $n \not\in m$ puesto que $n_0 \subseteq n'_0$ no es posible. Sabemos, en cambio, que $n'_0 \subseteq n_0$.

Intuitivamente

$$n_0 = \{n, n', n'', \ldots\} \subseteq \{m', m'', \ldots\} = m'_0$$

que equivale a $n \in \{m', m'', \ldots\}$ y, por consiguiente, $n = m^{p}$); así pues $m < n$. Y reciprocamente.

73]) y cumple $n < n'$ y $n \not< n$ (parágrafo (91), *ibid*).[161] También establece [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 364; *1901*, 74] que, si $n < m$, $m < p$, entonces $n < p$ así como la antisimétrica (que es una simple consecuencia de su resultado (93)).[162]

A continuación establece que $\langle N, < \rangle$ es un conjunto bien ordenato: toda parte T de N tiene un elemento mínimo y la demostración [Dedekind *1888; 1930-32*, III, 364; *1901*, 74-75] es muy elegante:

> Cualquier cadena de N es la cadena de un elemento único. Por consiguiente, la cadena T_0 de T es la cadena de un elemento $k \in N$; es decir
>
> $$T_0 = \{k\} \cup k'_0 .$$
>
> Así pues $k \in T$ (ya que, en caso contrario, $T_0 = k'_0$ por la minimalidad de una cadena generada por un conjunto) y, para todo $t \in T, t \neq k, t \in k'_0$; de donde $k < t$.[163]

Dedekind, no obstante, se enfrenta con una dificultad técnica que deberá superar necesariamente: la técnica de las cadenas te aplicaciones inyectivas lo llevan de forma inexorable a tener que trabajar con *conjuntos infinitos* o con *conjuntos simplemente infinitos* ; sin embargo debe aproximarse, haciendo uso de estas definiciones, al concepto de *conjunto finito*: "aquel conjunto que es susceptible de ser contado por medio de un número natural." Para ello introduce el concepto de los segmentos finitos. Las cadenas generadas por un elemento n (es decir, las cadenas n_0) son *segmentos finales* (y, por consiguiente, son conjuntos infinitos); ahora es preciso introducir los *complementarios*—los *segmentos*

---

161 No dice nada acerca de si es posible o no intercalar un elemento p entre n y n'. Supongamos que $n < p < n'$. Entonces $n'_0 \subseteq p'_0$ y $p_0 \subseteq n'_0$; de donde $p_0 \subseteq p'_0$. Imposible!

Con todo, Dedekind, en (117), designa a n' el "*número posterior*" al número n y entonces establece el resultado anterior. Sin embargo disponía de todos los elementos necesarios para establecer este resultado muchísimo antes.

162 Dedekind introduce $n \leq m$ ssi $n < m$ o $n = m$. Entonces en (93) y (94) establece, respectivamente, que las relaciones

$$m \leq n\ ,\ m < n',\ n_0 \subseteq m_0;\ m < n,\ m' \leq n,\ m' < n'$$

son equivalentes. Y seguidamente nos ofrece todas las leyes de transitividad posibles. Véase [Cavaillés *1962*, 126-127].

163 Dedekind define el concepto de elemento mínimo [*eine kleinste Zahl*] y afirma que n es el elemento mínimo de n_0 y que 1 lo es de N.

iniciales [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 365; *1901*, 75].[164] —Estos segmentos son los que le servirán *para contar*. Introduce [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 365; *1901*, 75] para ello

$$Z_n = \{m \in N : m \leq n\} = [1, n].^{165}$$

Este concepto es de una enorme importancia en la tarea de Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 365-368; *1901*, 76-80] y le permite establecer —mejor aún, reencontrar —las *propiedades clásicas* de los números naturales, propiedades que enunciamos a continuación:

0. $Z_1 = \{1\}$ (Dedekind escribe $Z_1 = 1$) (es (102));
1. cualquier número n' tiene un precedente [*eine nächst kleinere Zahl*] del cual es siguiente immediato [*ein nächst größte Zahl*] (es (117));
1′. todo número $u \in U$, distinto del mínimo de U, tiene un antecedente (es (113));
2. toda parte $T \subseteq Z_n$ tiene último elemento y, si $E \subseteq N$ tiene último elemento n, $E \subseteq Z_n$ (son (113) y (114));
3. $m < n$ ssi $Z_m \subsetneq Z_n$ y reciprocamente (es (106));
4. $N = Z_n \cup n'_0$; $\{n\} = Z_n \cap n_0$ (son (103), (104)).

Ahora se halla ya en situación de estudiar las partes finitas y las partes *infinitas de la serie numérica*. Este es precisamente el contenido del §8, en el que establece

1. Z_n es finito (es (119));
2. si $n \neq m$, Z_n y Z_m no son semejantes (es (120));[166]
3. toda parte $E \subseteq N$ con máximo es finita [es (121)];
4. toda parte $U \subseteq N$ sin máximo es simplemente infinita (es (122));

de lo que se sigue que, en el ámbito de la serie numérica, la *finitud* o la *infinitud*—que, en todo caso, es simple—equivale al hecho de poseer o no último elemento.

---

[164] Nos hallamos en la línea de los número *ordinales* que, de hecho, son *segmentos iniciales bien ordenados*.

[165] $m \in Z_n$ ssi $m \leq n$ ssi $m < n'$ ssi $n_0 \subseteq m_0$.

[166] Este resultado es esencial para poder establecer el número de elementos de un conjunto finito arbitrario. De hecho, Dedekind observa que la aplicación $N \to \wp(N)$, $n \mapsto Z_n$, es una semejanza. Es decir, $N \sim \{Z_n : n \in N\}$.

Dedekind demuestra **1** por inducción completa;[167] para ello necesita ciertos resultados previos como el hecho de que "un singletón es finito" ((65)) y que "si a un conjunto finito le añadimos singletón, se obtiene otro conjunto finito" ((70)).

La demostración de **2** se basa en el hecho de que, si $n \neq m$, entonces $n < m$ (o $m < n$) y $Z_n \subseteq Z_m$ y entonces aplica la definición de conjunto finito (en el sentido *no-infinito*).

La propiedad **3** es consecuencia del hecho que $E \subseteq Z_m$, $m = \text{máx}\ E$ y de que toda parte de un conjunto finito es finita.

La demostración de **4** se basa en que todo $u \in U$ tiene un *siguiente immediato* $\overline{u}$; así se obtiene una aplicación Φ tal que $\Phi(U) = \overline{U} \subseteq U$.

Si $u, v \in U$ y $u \neq v$, entonces $u < v$ implica $\overline{u} \leq v$ y, por consiguiente, $\overline{u} < \overline{v}$. De lo que resulta que Φ es inyectiva.

Si $u_1 = \text{mín}\ U$ (*principio de la buena ordenación*), entonces, para todo $u \in U$, $u_1 \leq u < \overline{u}$; de donde $u_1 \notin \overline{U}$. De lo que resulta que U es infinito.

Finalmente hay que ver que $\Phi_0(u_1) = U$.

Es claro que $\Phi_0(u_1) \subseteq U$. Supongamos que $\Phi_0(u_1) \subsetneq U$. Existirá un $u \in U$ tal que $u \notin \Phi_0(u_1)$. Sea $\omega = \text{mín}\ (U - \Phi_0(u_1))$. $\omega \neq u_1$ ya que $u_1 \in \Phi_0(u_1)$ y $\omega \notin \Phi_0(u_1)$. Al ser distinto del mínimo de U tiene un antecedente v; es decir, $\omega = \overline{v}$ y $v < \omega$; de ahí que $v \in \Phi_0(u_1)$. Pero entonces $\overline{v} \in \Phi_0(u_1)$. Imposible!

En §9—*Definición por inducción de una aplicación definida en la serie de los números naturales*—Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 370; *1901*, 83] consigue establecer un resultado realmente importante: las "definiciones por recurrencia."[168] Se dispone de un conjunto Ω arbitrario, de una aplicación θ de dicho conjunto en sí mismo (inyectiva o no!) y de un elemento distinguido ω de Ω. Una definición [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 372; *1901*, 85-86] por recurrencia consiste en la única aplicación $\Phi : N \to \Omega$ que satisface:

1. $\Phi(N) \subseteq \Omega$;
2. $\Phi(1) = \omega$;
3. $\Phi(n') = \theta(\Phi(n))$.[169]

De hecho Dedekind establece este teorema para cada $n \in N$, restringiéndose a Z_n y entonces lo establece por inducción. Obtiene [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 372; *1901*, 85-

[167]Es decir [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 368; *1901*, 81], utiliza (80).

[168]Es preciso saber qué ocurre en 1 y cómo se pasa de n a $n' = n + 1$.

[169]Dedekind establece el *teorema de definición por inducción*.

86], para cada $n \in N$, una aplicación única $\Phi_n : Z_n \rightarrow \Omega$ tal que $\Phi_n(Z_n) \subseteq \Omega$, $\Phi_n(1) = \omega$ y $\Phi_n(t') = \theta(\Phi_n(t'))$, si $t < n$.[170] Entonces define la aplicación $\Phi(n) = \Phi_n(n)$.

En particular obtiene $\Phi(N) = \theta_0(\omega)$ y $\Phi(n_0) = \theta_0(\Phi(n))$.

Las definiciones por recurrencia **sólo** tienen sentido en relación con el sistema simplemente infinito N mientras que la *inducción completa* es posible en *cualquier cadena relativa a una aplicación arbitraria* [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 373; *1901*, 89].[171]

Es en virtud de este teorema, nos dice Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 374; *1901*, 90-91], que tiene sentido la *técnica de la iteración* de una operación.[172] Consideremos una *estructura algebraica* $\langle H, \cdot \rangle$. A cada elemento $\omega \in H$ podemos asociarle una aplicación $\dot{\omega} : H \rightarrow H$ tal que $\dot{\omega}(1) = \omega$ y $\dot{\omega}(n') = \omega \cdot \omega^n$. La asociatividad de $\cdot$ garantiza la validez de

$$\omega^{n'} = \omega^n \cdot \omega \quad \text{y} \quad \omega^n \cdot \omega^m = \omega^m \cdot \omega^n .$$

Ahora Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 374; *1901*, 90-91] analiza, en el §10, la *clase de las conjuntos simplemente infinitos* y establece los dos resultados siguientes:

1. todos los conjuntos simplemente infinitos son equivalentes a N y, por consiguiente, lo son entre sí;
2. todo conjunto equivalente a un cnjunto simplemente infinito es simplemente infinito.[173]

---

170 Dedekind establece la *existencia* y la *unicidad* de Φ_n p or inducción sobre n :

- Para $n = 1$, $\Phi_1 = \omega \in \Omega$.
- Construída ya la aplicación Φ_n, definimos

$$\Phi_{n'}(m) = \begin{cases} \Phi_n(m) , & \text{si} \quad m \leq n , \\ \theta(\Phi_n(n)) , & \text{si} \quad m = n' . \end{cases}$$

De ahí se siguen obviamente, para cada $n \in N$, la existencia y la unicidad.

171 Es posible observar que las definiciones por recurrencia arbitrarias pueden llevar a *paradojas* e incluso a *contradicción*. Sea $S = \{a, b\}$, con $a' = b$, $b' = a$. Entonces $a_0 = b_0 = S$. Sea ahora $\Omega = \{\alpha, \beta. \gamma\}$ y consideremos la aplicación θ tal que $\theta(\alpha) - \beta$, $\theta(\beta) = \gamma$ y $\theta(\gamma) = \alpha$.. Luego, si hacemos $\Phi(a) = \alpha$, entonces $\Phi(b) = \beta$ y $\Phi(b') = \theta(\Phi(\beta)) = \gamma \neq \alpha$.

172 Técnica que se encuentra en la base de la *teoría de grupos*.

173 $\Omega = \theta_0(\omega)$ y $\Phi(1) = \omega$ y habremos terminado ya que $N = 1_0$.

Seguidamente Dedekind nos muestra su enorme capacidad de *razonar en el seno de la teoría de conjuntos*: "todos los teoremas relativos a los números (es decir, a los miembros de un conjunto infinito simplemente ordenado por una transformación φ) resultan de este orden y son válidos asímismo en cualquier otro sistema simplemente infinito Ω ordenado por una aplicación θ." Esto según Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 378; *1901*, 95], permite la *traducción de un teorema de la aritmética de un lenguaje a otro*, vía la aplicación Φ: $N \to \Omega$.[174]

Ahora disponemos ya de los números naturales, sabemos que sirven para contar los segmentos iniciales de N. Falta establecer su aritmética. Dedekind dedica los §§11, 12 y 13 a la *suma*, el *producto y* la *potencia*—y, en definitiva, a la *aritmética*—de los números naturales. Para hacerlo sigue el razonamiento clásico. Define

$$+_m : N \to N \text{ por medio de } +_m(n) = \begin{cases} m, & \text{si } n = 0\,, \\ +_m(p))'\,, & \text{si } n = p'\,, \end{cases}$$

y después establece las propiedades de la suma. De forma análoga define el producto y la potencia de los números naturales y a continuación, y en base a estas definiciones, establece las correspondientes propiedades así como las trabazones que hay entre ellas y con el orden $<$.

El último apartado—el apartado §14 [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 384-390; *1901*, 105-115], que titula *Número* (Dedekind introduce la palabra "*Anzahl*") *de elementos de un conjunto*—se refiere al *cardinal* de los conjuntos *finitos* y a su relción con los conjuntos Z_n. El primer teorema que establece es realmente notable y merece que le dediquemos una cierta atención. Dice [Dedekind *1888*, *1930-32*, III, 384-385; *1901*, 105-106]: "Un conjunto Σ es infinito ssi, para cada n, contiene un cierto conjunto $\Sigma_n \subseteq \Sigma$ tal que $\Sigma_n \sim Z_n$ (para cada n, $Z_n \subsetneqq \Sigma$)."

Si Σ es infinito, contiene un conjunto dmplemente infinito T tal que $T \sim N$ y cada $Z_n \subseteq N$ es semejante a un $T_n \subsetneqq T \subseteq \Sigma$ y se obtiene una implicación.

Veamos ahora el reciproco.[175] Por hipótesis, a cada $Z_n \subseteq N$, le corresponde una aplicación α_n tal que $\alpha_n\langle Z_n\rangle \subsetneqq \Sigma$. De la existencia de la familia $(\alpha_n)_{n\in N}$ podemos construir *recursivamente* una aplicación β_n tal que, si $m < n$ (o, equivalentemente, si $Z_m \subseteq Z_n$), la transformación β_m definida en Z_m se halle contenida en la aplicación, β_n definida en

[174] He ahí el *isomorfismo de modelos* de una cierta teoría. De hecho, en la actualidad, no hablaríamos ya de una traducción de un lenguaje a otro; hablaríamos de *interpretaciones diversas de un mismo lenguaje*. El lenguaje formal es único. Los modelos en los que hay que leer el lenguaje cambian.

[175] Dedekind dice: "a pesar de que pueda parecemos evidente es mucho más complejo."

Z_n; es decir que, si $m < n$, $\beta_n|_{Z_m} = \beta_m$; de donde, para todo $m < n$, $\beta_n(m) = \beta_m(m)$.[176]

Ahora bien lo único que nos garantiza la hipótesis del teorema es que

$$A_n = \{\alpha_n \colon Z_N \to \Sigma \colon n \in N\} \neq \emptyset .$$

Entonces Dedekind *debe elegir* un $\alpha_n \in A_n$ *de una vez por todas*. Resulta pues que, en esta demostración, Dedekind utiliza el A.C., *numerable* (véase [Cassinet y Guillemot *1983*, 84-86], [Moore *1982*, 27-28], y [Pla *1989*, 360, 390]).

Este teorema [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 368-368; *1901*, 109] tiene un corolario esencial "un conjunto Σ es finito o infinito según que, para un cierto $n \in N$, $\Sigma \sim Z_n$ o que, cualquiera que sea $n \in N$, $\Sigma \nsim Z_n$" que pone de manifiesto que *finito* significa *equipotente a un número natural* e *infinito* significa *no equipotente a ningún número natural*. Esta es una definición distinta de la que inicialmente diera Dedekind. Ahora, sin embargo, Dedekind establece la equivalencia entre ambas definiciones. Pero para efectuar dicha equivalencia precisa del A.C.[177]

Ahora es posible definir el concepto de *número de elementos de un conjunto finito*: "si Σ es un conjunto finito, existe un número natural $n \in N$ tal que $\Sigma \sim Z_n$" (Dedekind [*1888*; *1930-32*, III, 387] usa el término "*Anzahl*").

Este número n es el *número de elementos* de Σ. Cuando un número se usa en este sentido se denomina *número cardinal*. De nuevo nos enfrentamos con el poder creador de la mente:

> ...prefiero considerar como número cardinal, no la classe de todos los conjuntos finitos equipotentes, sino algo *nuevo*—asociado a la clase—que *crea el espíritu humano*. Somos divinos y tenemos ciertamente la facultad de crear no sólo entes materiales—ferrocarriles, telégrafos—sino típicamente entes mentales [Dedekind *1888*; *1930-32*, III, 389][178]

---

[176] Necesitamos funciones α_n tales que, para cada $n < m$, $\alpha_n \subseteq \alpha_m$ para que $\alpha = \bigcup \alpha_n$ sea una función que esté bien definida.

[177] Según G. Hessenberg [*1906*, V] el primero que observó que Dedekind habia utilizado el A.C. en esta demostración fue Ernst Zermelo. Wałcaw Sierpiński [*1928*] en el apartado §48 establece este resultado utilizando de forma absolutamente consciente el A.C. y, en respuesta a Henri Lebesgue [*1905*, 269], dice que "a pesar de que le parece verdaderamente difícil que jamás alguien pueda mostrar un conjunto que no sea ni finito, ni infinito, jamás se ha establecido la imposibilidad de este tipo de conjuntos" [Sierpiński, *1928*, 52-53]. Véanse también Pla [*1989*, 360] y Zermelo [*1908*, 113-114].

[178] Dedekind dice "Was der Geist erschafft." Carta a H. Weber de 24 de enero de 1888.

y seguidamente hace referencia a otro gran acto creador que nos lleva a "crear algo nuevo asociado con la cortadura, algo que la produce, que la genera." De alguna forma, Dedekind va mucho más lejos que Kronecker que precifia del *poder creador de los dioses para poder obtener el número.* El resto, sin embargo, para Kronecker, pertenece al poder creador del hombre. Dedekind, en cambio, precisa del "poder creador divino del hombre" para conseguir el número. Ahora bien como dice Dieudonné [*1969*, 374-375]: "La idea más original de Dedekind consiste en haber definido (creado, si se prefiere), no los números naturales, sino los conjuntos finitos" y por consiguiente, si bien *parece alejarse de la teoría de conjuntos* al no aceptar la "clase de todos los conjuntos finitos equipotentes" como concepto de número, de hecho, en un acto creador de una lucidez propia de los auténticos genios (los auténticos dioses entre los hombres), evita las *clases propias* en su creación numérica y *se limita* a simples conjuntos: los conjuntos Z_n.

Dedekind parte de una definición de conjunto infinito (y, por negación obtiene, de rebote, una definición de conjunto *finito*) y "...por razonamientos de la teoría de conjuntos consigue establecer las propiedades de los números naturales" [Dieudonné *1969*, 375].

Sería conreniente remarcar que Dedekind consigue lo que Cantor no conseguiría. Consigue un *representante canónico* de la clase de **todos** los conjuntos finitos equipotentes entre sí; el conjunto Z_n. Pero, para disponer de **todos** los representantes canónicos $(Z_n)_{n \in N}$, precisa del A.C. Será fácil caracterizar estos representantes canónicos, evitando el A.C. Para ello será necesario fijar un elemento básico bien determinado—el primero—y una aplicación bien determinada—el paso al siguiente.

5. Un inédito entre 1887-1897: Peligros de la teoría de conjuntos.[179] En este inédito Dedekind trata del "peligro que existe si se *confunde* un conjunto S constituído por un solo elemento a con el propio elemento a." Y en este apunte nos ofrece algunas de estas contradicciones.

Supongamos que $a = \{b, c\}$, con $b \neq c$, y $S = \{a\}$. Si hacemos $S = a$ entonces, de acuerdo con la *definición de igualdad de conjuntos*, $b = c = a$. Contradicción!

Dedekind toma conciencia de que el "acto creador de la mente" permite crear, "a partir de objetos bien determinados a, b, c, ..., un objeto S que queda completamente determinado por ellos." Este nuevo objeto es *un conjunto*; aquellos son *los elementos* de dicho conjunto.

Ahora podemos decir que:

$S = T$ ssi "todo elemento de S es elemento de T y recíprocamente."

Seguidamente Dedekind dice que, en general, un conjunto S "no se obtiene mediante la designación de aus elementos a, b, c, ..., sino indicando las condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer un objeto para poder ser considerado un elemento de S."

---

[179] [Sinaceur *1971*, 247-254]. Este inédito *Gefahren der Systemlehre*, según Sinaceur, debe situarse en el decenio 1887-1897. En este sentido es interesante análisis de Sinaceur [*1971*, 247-250].

Hallamos entonces la idea—*errónea*—de que un cosuunto es la *extensión de un predicado.* Con todo, sin embargo, es muy posible que un predicado sea aplicable a un sólo objeto. Por ejemplo el predicado $P(x)$: x es un número natural $\wedge\ 7\ x| \wedge x < 10$. Pero en estos casos es claro que **no** hay que confundir el sistema S con el elemento a.

A continuación observa—entendiendo un conjunto como la extensión de un predicado —que puede darse el caso de que "no haya ningún objeto que satisfaga el predicado $P(x)$." Tiene, pues, sentido admitir el "conjunto asociado a este predicado—el conjunto vacío—." Ya hemos indicado que, en *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Dedekind había rechazado totalmente este conjunto. Ahora nos advierte de que este conjunto "es de una enorme utilidad lógica" y ello es claro si admitimos que

$$S \neq T \text{ ssi } [\exists x \in S\ (x \notin T)] \vee [\exists x \in T\ (x \notin S)]\,.$$

Hay que establecer, pues, ciertas precisiones y esto es lo que nos ofrece Dedekind [*1877–97*, 253] en este sencillo artículo.

1. El conjunto nulo (vacío) 0 es único.
2. A no es parte de S si, y sólo si, $\exists\, x \in A\ (x \notin S)$. En otro caso, A es una parte de S (y ahora, en este caso, Dedekind introduce la notación $A \prec S$).
3. El conjunto nulo 0 es el único conjunto que es parte de cualquier otro conjunto.

(Nótese que, en este inédito, Dedekind introduce el símbolo $\prec$ para indicarla inclusión de conjuntos.)

Seguidamente critica su afirmación (errónea) según la cual "todo elemento s de S puede considerarse un subconjunto de S" ($s \prec S$) y añade que

$A \prec S$ sólo tiene sentido si A y S son *conjuntos.*

Ahora bien, si $\{s\}$ es el singletón de s,[180] entonces

$\{s\} \prec S$ tiene sentido, pero en cambio $s \prec S$ carece de él.

Nos encontramos entonces con una nueva precisión de Dedekind. Esta precision reza:

$\{s\} \prec S$ sólo tiene sentido si s es un conjunto

[180] Dedekind introduce el símbolo $\{s\}$ para indicar el conjunto cuyo único elemento es s.

y, por consiguiente, en el §3 de *Was sind und was sollen die Zahlen?* s significa $\{s\}$. Pero esta identificación, aún en el caso de que s sea un conjunto, es peligrosa: Sea $s = \{t, u\}$, con $t \neq u$, y sea $S = \{s, t\}$.[181] Si admitimos la consideración errónea del §3, tendremos que $s \prec S$ pero entonces $u \in S$ y $u \neq t$; de donde $u = s$ y entonces tendríamos que $u = \{t, u\}$. Análogamente, $t = \{t, u\}$ y, por lo tanto, $t = u$, ¡Contradicción!

6. Los inéditos de 1887 y de 1889. Dedekind se había proporcionado una maquinaria *conjuntista* suficientemente potente para resolver con toda simplicidad problemas que, en su época, eran problemas de una cierta dificultad y complejidad.

Uno de estos problemas era el *teorema de equivalencia.*[182] Este teorema lo enuncia y lo establece Cantor para el conjunto $\mathbb{R}$ en su carta de 5 de noviembre de 1882, basándose, claro está, en el *principio de las dos clases.* (Es la *Hipótesis del Continuo.*) Cabe remarcar que Cantor trabaja con *ordinales* y por consiguiente dispone de la *ley de tricotomía.*[183] En 1884 Georg Cantor enuncia la *validez universal.*[184] La primera demostración de este resultado universal la obtendrá, sin ningún género de dudas, Richard Dedekind el once de julio de 1887. Por desgracia este resultado permanecerá inédito durante cuarenta y cinco años hasta que, en 1932, aparecerán los *Gessammelte Werke* de Dedekind [*1930-32*]. No obstante, Cantor tendrá conocimiento de la existencia de esta demostración de Dedekind en el año 1899.[185]

La idea de Dedekind consiste en utilizar la *potencia* sin precedentes de su *concepto* de *cadena.* "Si φ es una semejanza de S en S y $S' = \varphi(S)$ y $S' \subseteq T \subseteq S$, entonces S y T son conjuntos semejantes" [Dedekind *1887*; *1930-32*, III, 447].

Si $S \neq T$, Dedekind considera el conjunto $U = S - T$ y la cadena U_0. Entonces, utilizando la propiedad de la *iteración* [Cavaillés *1962*, 130], obtiene que

---

[181] Dedekind ofrece también la notación $s = \{t, u\}$.

[182] Véase [Moore *1982*, 42-43; 46-48] y [Pla *1988*]. Este teorema se conoce en la actualidad con el nombre de *teorema de Bernstein-Cantor-Schröder.*

[183] Es lo que él llama la *fuente* de la demostración de su teorema [Cavaillés *1962*, 233].

[184] A pesar de la generalidad de este enunciado en Cantor perdura el *convencimiento* de que los *teoremas de tricotomía* y de *equivalencia* tienen ambos de la misma naturaleza conjuntista. Es realmente desafortunado este supuesto pues implica el convencimiento de que ambos requieren para su establecimiento del A.C., lo cual en el caso del principio de tricotomía es falso, como comprobarán Bernstein, Schröder y Dedekind.

[185] Véase Cavaillés [*1962*, 246]. Sin embargo en esta fecha Cantor conoce ya la demostración de Schröder—errónea—de 1896 y la de Bernstein de 1897. Se tardaría todavia diez años en disponer de la demostración de este teorema que Dedekind había establecido un decenio antes, gracias precisamente a disponer de su *teoría incipiente de conjuntos.*

$$U_0 = U \cup \varphi\langle U\rangle \cup \varphi^2\langle U\rangle \cup \ldots \subseteq S$$

(véase [Pla *1988*, nota 23], así como Dedekind [1888; *1930-32*, III, 375]).

Seguidamente define

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in U_0 \\ x & \text{si } x \notin U_0 \end{cases}$$

y esta es la semejanza que buscábamos entre S y T.[186] Esto termina la demostración de Dedekind que, como podemos observar, no requiere en absoluto de la *ley de tricotomía (*consúltese el n^0 63 que Dedekind enuncia sin demostración, en *1930-32*, III, 356).

Otra cuestión conjuntisita importante generada por Dedekind en su obra *Was sind und was sollen die Zahlen?* es el concepto de *conjunto infinito* y de rebote de *conjunto finito*. En dicha obra, Dedekind [*1889*; *1930-32*, III, 450-456] da una definición *positiva* del concepto de *conjunto infinito*: "Un conjunto Ω es infinito ssi existe una parte propia T, $T \sim \Omega$," que significa que existe una aplicación inyectiva (de hecho biyectival tal que $\varphi(T) = \Omega$. La definición de conjunto finito es entonces una *definición negativa*: "un conjunto es finito cuando **no** es infnito."

---

[186]De hecho $S' \subseteq T \subseteq T \cup U$ y $T = S' \cup Q$, es decir

$$S' \subseteq \underbrace{S' \cup U}_{T} \subseteq \underbrace{S' \cup Q \cup U}_{S}$$

Ahora hacemos

$$S = U_0 \cup V, \text{ con } V \subseteq T$$
$$S' = U'_0 \cup V', \text{ con } U'_0 \cup V \subseteq T$$

y entonces $T \subseteq U_0 \cup V = S = U \cup U'_0 \cup V$ y $T \cap U = \emptyset$ implica $T \subseteq U'_0 \cup V$.

De donde $T = U'_0 \cup V$ y $V \sim V'$ implica $U_0 \cup V \sim U_0 \cup V' \sim U'_0 \cup V'$ y hemos terminado. De hecho Dedekind hace lo siguiente:

$$S = V \cup U \cup U' \cup U'' \cup \ldots$$
$$S = V' \cup U' \cup U'' \cup \ldots$$

y, puesto que $T \cap U^{(n)} = \emptyset$ $(n = 0, 1, \ldots)$, resulta que

$$T = S - U = V \cup U \cup U' \cup U'' \cup \ldots$$

y con ello el resultado queda establecido.

Así pues los conceptos básicos—*conjuntistas*, sin duda—de aplicación y de equipotencia le permiten introducir la *infinitud*, pero no le permiten, por el contrario, definir la *finitud*.[187] Parece natural, sin embargo, pensar que el concepto de *finitud* es más simple que el de *infinitud*; sin embargo, como indicábamos en la nota de pie de página 271, el objetivo de Dedekind no lo constituían tanto los conceptos de conjunto finito-conjunto infinito o su dualidad—los cuales habrían constituído preocupaciones *puramente conjuntistas* y, como renimos defendiendo a lo largo de todo este trabajo, Dedekind nunca antepuso las cuestiones conjuntistas, *en su sentido mas abstracto*, *independientemente* de las cuestiones matemáticas, ni siquiera cuando estas podían ser cuestiones de *fundamentación logico-conjuntista de las matemáticas*—cuanto lograr construir *con el máximo de rigor lógico posible* el conjunto de los números naturales y, a partir de ellos, *fundamentar el análisis* y, de hecho, las matemáticas. Y para lograrlo, como ya hemos repetido suficientemente, Dedekind precisa de la noción de conjunto infinito, noción que nos ofrece *de forma positiva* y *directa*. No obstante, una vez superada la construcción de los números naturales, Dedekind, en una de sus limitadas intromisiones específicas a la teoría de conjuntos en sí misma,[188] se planteará frontalmente la *definición positiva* y *directa* de *conjunto finito*.

Los resultados de estas reflexiones no se harán esperar y los hallamos mencionados, como ya hemos indicado con anterioridad, en el *Prefacio* de la *Segunda Edición* de la obra relativa a los números naturales. En 1889, exactamente el 9 de marzo, Dedekind [*1889*; *1930-32*, III, 450] disponía ya de esta definición

> Un conjunto S es *finito* cuando existe una aplicación φ de S en S tal que ninguna de sus partes propias $A \subsetneq S$ se aplica en A.[189]

[187] Un conjunto X es finito ssi $X \sim Z_n$ requiere de los Z_n (es decir, requiere de los números naturales) y en la construcción de Dedekind es preciso haber *establecido lo que debe entenderse por conjunto infinito* y *haber establecido la existencia de conjuntos infinitos* antes de disponer de los conjuntos Z_n. De hecho, paradójicamente, *no le hace falta el concepto de conjunto finito para poder introducir los números naturales*; en absoluto. Le hace *falta* que exista el *conjunto de todos los números naturales*. Le hace falta, en términos actuales, el *axioma del infinito* y, por consiguiente, le hace falta el concepto de conjunto infinito.

Dedekind podía haber prescindido de la definición de *conjunto finito* hasta que no dipusiese de los conjuntos Z_n. Entonces la cueotión de si un conjunto es finito o infinito habría quedado pendiente. Habríase planteado entonces la cuestión de si no-infinito = finito, pero ello constituye el corolario marcado con el n^0 de pie de página 322 y, como hemos visto ya, requiere del A.C.

[188] En la primera parte de este parágrafo hemos analizado, de paso, otra incursión de este tipo que hemos desarrollado con mayor amplitud en otra parte [Pla *1988*].

[189] Esta definición "llevará a graves dificultades cuando se quiera desarrollar, si se desea a la vez evitar el recurso de los números naturales."

Con esta definición en la mano puede lograr ciertos resultados que indicaremos a continuación [Dedekind *1889*; *1930-32*, III, 450-460]. Antetodo observemos que la definición establece alternativamente que $S' \subseteq S$ y que, si $A' \subseteq A$, entonces $A = S$. De esta consideración se deducen con facilidad:

1. $S' = S$: es claro que $S' \subseteq S$ y, por consiguiente, $S'' \subseteq S'$ y, por lo anterior, $s' = s$. Resulta, pues, que todo elemento $s \in S$ es de la forma $s = t'$, $t \in S$.
2. $s \neq s'$: supongamos que $s' = s$, entonces $\langle\{s\}\rangle' = \{s'\} = \{s\} \subseteq \{s\}$ y entonces $\{s\} = S$.[190]
3. Seguidamente nos da la definición del concepto de *casi-cadena*: [Dedekind *1889*; *1930-32*, III, 451]:[191]

Un conjunto $H_s \subseteq S$ es una *casi-cadena* ssi

1. $s \in H_s$;
2. $H' \subseteq H_s$ en donde $H = H_s - \{s\}$ [*Durchschnitt*].

De ahi que, si $s' \in H_s$ entonces $H_s = S$ y, si $s' \notin H_s$, entonces $H \subsetneq S$ [*Strecke ab*].[192]
4. Con este concepto es posible introducir con facilidad el concepto de arco entre dos elementos a y b de S [Dedekind *1889*; *1930-32*, III, 451]:

$$ab = \bigcap_{a \in H_b} H_b .$$

La equivalencia entre esta definición y la que diera inicialmente Dedekind "es posible a mi entender," dice Dedekind, "e incluso es fácil si se dispone de los números naturales y se utiliza la observación realizada al final del §131": esta ob ervación hace referencia a la *propiedad de iteración* a la que ya hemos hecho referencia.

Tarski, por el contrario, llegará a una conclusión bien distinta: "con esta definición es posible deducir sin ningún género de dificultades los teoremas más importantes relativos a los conjuntos finitos así como su equivalencia con la definición habitual, aritmética." Esta definición la constituye el *orden cíclico* (véase [Cavaillés *1962*, 133], [Pla *1989*, 18-20] y [Tarski *1924*, 92]).

[190] Aquí Dedekind usa el símbolo $[s]$ para indicar el conjunto unitario formado con el único elemento s. Además, $S \neq \{s\}$, puesto que, si $S = \{s\}$, carecería de partes propias y esto no es aceptable para Dedekind.

[191] Esta definición la utilizará A. Tarski [*1924*, 92] para establecer la equivalencia entre esta definición y la suya. Sin embargo, según indica, Cavaillés [*1962*] Tarski desconocia este trabajo de Dedekind.

[192] Dedekind establece, además, que H'_s es una cierta casi-cadena $H_{s'}$ y que la intersección de una familia de casi-cadenas es asímismo una casi-cadena.

5. Ahora Dedekind [*1889*; *1930-32*, III, 452] establece que
Todo arco ab es una casi-cadena; es decir, $ab = H_b$ y entonces puede demostrar ya su objetivo:
6. La aplicación φ es inyectiva

Lo hace observando que
- $aa = \{a\}$, puesto que $\{a\}$ es una casi cadena H_a que contiene a a ;
- $b'b = S$, lo cual es consecuencia del hecho que, si $b' \in ab$, entonces $ab = S$;
- si $c \in ab$, entonces $cb \subseteq ab$;[193]
- si $a \neq b$, $ab = \{a\} \cup a'b$ (de alguna manera la aplicación φ es el paso al siguiente en el orden cíclico).[194]

De todo ello resulta fácilmente que, si $a \neq b$, entonces a es *exterior* a $a'b$.[195]
Por fin se obtiene que la aplicación φ es inyectiva.[196]

---

[193] Estas consideraciones se pueden representar gráficamente.

[194] Cabe indicar, ante todo, que $A \cup B$ (que Dedekind designa $A + B$) es la unión de A y B.

Sabemos que $a, b \in ab$ y que $a \neq b$. Entonces $a' \in ab$ (en virtud de la definición de ab y de H_b); de donde $a'b \subseteq ab$; y por consiguiente $\{a\} \cup a'b \subseteq ab$.

Ahora hay que ver que $\{a\} \cup a'b$ es un H_b que contiene al elemento a. Obviamente $a \in \{a\} \cup a'b$. Si $s \neq b$, $s \in H_b$, entonces

- si $s = a$, $s' = a' \in a'b \subseteq \{a\} \cup a'b$;
- si $s \in a'b$ y $s \neq b$, entonces $s' \in a'b$. Por lo tanto, $ab \subseteq \{a\} \cup a'b$ y hemos terminado.

Si $a = b$, el resultado es falso.

Se tiene también que $a'b \cup b'a = S$. Para verlo basta con constatar que $(a'b \cup b'a)' \subseteq a'b \cup b'a$:

- si $s \in a'b$, entonces $s' \in a'b$ (si $s \neq b$) y $b' \in b'a$;
- si $s \in b'a$, entonces $s' \in b'a$ (si $s \neq a$) y $a' \in a'b$.

[195] Si $a \neq b$, entonces $a \notin a'b$ y $b \notin b'a$.

Si $a \in a'b$, consideremos el conjunto $A = \{s \in S\text{: } s \neq b \text{ y } s \in s'b\}$.

Es claro que $A' \subseteq A$: supongamos que $s \in s'b$, entonces dado que $s \notin bb = \{b\}$, resulta que $s' \neq b$ y por consiguiente

$$s \in s'b = \{s'\} \cup s''b, \text{ con } s \neq s', \text{ implica que } s \in s''b \text{ y } s' \in s''b$$

y, por lo tanto, $s' \in A$. Así pues $A = S$, lo cual no es posible, puesto que $b \notin A$.

Además establece que, si $a \neq b$, entonces $a'b \cap b'a = \emptyset$ puesto que, si $M = a'b \cap b'a$, entonces cualquier elemento $m \in M$ ($m \neq a, b$] cumple que $m' \in M$ y $M = S$ y esto es del todo imposible.

[196] Si $a \neq b$ y $a' = b'$, entonces $a'b \cap b'a \supseteq \{a'\}$. ¡Imposible!

De todo ello se deduce que $cb = S$ ssi $c = b'$.[197]

En definitiva, pues, toda pareja a, b de objetos distintos de S parte al conjunto S en dos arcos disjuntos:

$$S = a'b \cup b'a, \qquad a'b \cap b'a = \emptyset.$$

Es posible generalizar este resultado: si $a \neq b \neq c \neq a$, entonces

$$b'c \cap c'a \cap a'b = \emptyset \quad \text{y} \quad b'c \cup c'a \cup a'b = S$$

o bien

$$a'c \cap c'b \cap b'a = \emptyset \quad \text{y} \quad a'c \cup c'b \cup b'a = S.$$ [198]

Ahora podemos ver ya que, para toda terna a, b, c de elementos distintos, se tiene una de las dos posibilidades alternativas:

$$b'c = b'a \cup a'c \quad \text{o} \quad b'c = b'a \cap a'c.$$ [199]

A partir de estos resultados es posible establecer, con todo rigor y sin recurrir para nada a la intuición geométrica, el *orden cíclico:* dados los dementos a, b, c, con $a \neq b \neq c \neq a$, podemos definir la relación "estar entre" ([Dedekind *1889*; *1930-32*, III, 454], véase asímismo [Cavaillés *1962*, 143-148]:

> a está entre b y c $(b \leq a \leq c)$ ssi $b'c = b'a \cup a'c$.
> a está entre c y b $(c \leq a \leq b)$ ssi $c'b = c'a \cup a'b$.

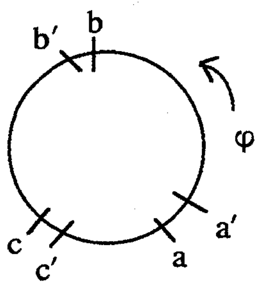
El orden se establece naturalmente cogiendo $a \neq b$ y b'; de ahí resulta que $a < b$ ssi $ab' = ab \cup b'b' = ab \cup \{b'\}$.

---

[197] $b'b = S$ ya está probado. Supongamos ahora que $cb = S$; entonces $a'b = S$, en donde $a' = c$. Pero entonces $a \in a'b$ y de ahí que $a = b$ y $c = b'$.

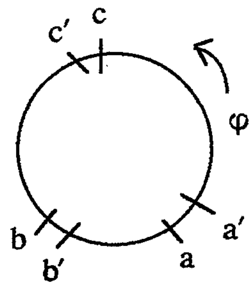
[198] La misma demostración.

[199] Dedekind afirma, además, que $b'c = b'a \cup a'c$ es equivalente a cualquiera de las igualdades $c'a = c'b \cup b'a$, $a'b = a'c \cup c'b$, $c'b = c'a \cap a'b$, $a'c = a'b \cap b'c$, $b'a = b'c \cap c'a$ y, análogamente, para la situación alternativa, $b'c = b'a \cap a'c$. Además introduce el símbolo $A - B$ para indicar la intersección de los conjuntos A y B.



(o cualquiera de las posibilidades posibles por permutación de a, b, c).

És claro también que $b'c = b'a \cup a'c$ equivale a $c'b = c'a \cap a'b$.[200]



Finalmente Dedekind establece la *unicidad de los extremos* de *un arco* y el resultado *principal* que establece que toda casi-cadena es un arco:

Sea H_S una casi-cadena.

- Si $H_S = S$, entonces $H_S = s's$.
- Si $H_S \subsetneq S$, entonces $S = H_S \cup A$, con $\emptyset = H_S \cap A$. Ahora bien $A' \subsetneq A$ y, por consiguiente, existe un $a \in A$ tal que $a' \in H_S$; de donde, $a's \subseteq H_S$.

Hay que ver que $H_S = a's$:

---

[200] [Dedekind *1889*; *1930-32*, III, 454]. Dados a, b, c distintos entre sí, $c \in a'b$ o $c \in b'a$. Supongamos que $c \in a'b$, entonces $c' \in a'b$ ($c \neq b$); de donde $c'b \subseteq a'b$ y $c'b \cap ab' \subseteq a'b \cap b'a = \emptyset$.

Por otro lado

$$S = a'b \cup b'a = b'c \cup c'b,$$

lo cual implica $b'a \subseteq b'c$ que, a suvez, implica $a \in b'c$.

Así pues, de la hipótesis $c \in a'b$ resulta que

$$c'b \subseteq a'b,\ b'a \subseteq b'c \ \text{ y } a \in b'c \text{ implica } a'c \subseteq b'c$$

de donde $b'c \supseteq b'a \cup a'c$.

Supongamos ahora que la inclusión fuese estricta; tendríamos un $m \in b'c$ tal que $m \notin b'a$ y $m \notin a'c$. Pero, puesto que

$$a'b \cup b'a = S, \quad a'c \cup c'a = S,$$

resultaria que, cualquier $m \in b'c$, perteneceria necesariamente a $b'a$ y a $c'a$ y entonces $b'c \cap c'a \cap a'b \neq \emptyset$; de donde resulta que $b'c = b'a \cup a'c$.

Esta expresión es precisamente la dudidad por paso al complementario que transforma el complementario de la unión de dos conjuntos en la intersección de los complementarios. Constituye, pues, la *ley de De Morgan*.

1. $a \neq s$ puesto que $a \in A$ y $s \in a's \subseteq H_s$. De donde resulta, pues, que:
$a's \cup s'a = S = H_s \cup A$ ya que $A \subseteq s'a$ y $a's \cap s'a = \emptyset$;

2. si $a's \subsetneq H_s$, sea H= $\{m \in H_s : m \notin a's\} \subseteq s'a$; de donde:

$$H_s = H \cup a's$$
$$s'a = A \cup H$$
$$H = H_s \cap s'a$$

pero $H' \subseteq H_s \cap s'a$ y $H = S$. ¡Imposible! puesto que $s \notin H$. De donde resulta que $H = a's$ y $A = s'a$.

3. La unicidad sigue naturalmente del hecho que $ab = cd$ ssi $a = c$ y $b = c$ [Dedekind *1889*, *1930-32*, III, 455-456].[201]

La última conclusión de Dedekind [*1889*; *1930-32*, III, 457] consiste en establecer una correspondencia entre los elementos de S y los de una parte propia T de S:

Para cada $s \in S$, existe un único s_1 que sstisfsce las cuatro condiciones que siguen:

1. Si $T \subseteq as$ para un cierto $a \in S$, entonces $s_1 s \subseteq as$;
2. $T \subseteq s_1 s$;
3. $s_1 \in T$;
4. $ss_1 \cap T \subseteq \{s, s_1\}$.

En efecto: puesto que $s_1 s = S$, tenemos que $T \subseteq s_1 s$.
Por consiguiente,

$$A = \{a \in S : T \subseteq as\} \neq \emptyset.$$

Consideremos ahora $H = \bigcap_{a \in A} as$. Es una casi-cadena y, por lo tanto, es un arco. Existe, pues, un $s_1 \in S$ tal que $H = s_1 s$.

[201] Supongamos que $ab = cb$: si $a = b$ no hay nada que decir; si $a \neq b$, entonces $ab = \{a\} \cup a'b = cb$. Ahora si $c \neq a$, entonces $cb \subseteq a'b \subsetneq ab$; de donde $cb \neq ab$.

Supongsmos ahora $ab = cd$ y $b \neq d$, entonces $b \in cd = ab$; de donde $b' \in ab$ y $ab = S$. ¡Imposible!. De donde finalmente $b = d$.

Tenemos, pues, que se cumplen las condiciones

1. $s_1 s \subseteq as$ para todo $a \in A$; es decir, para todo $a \in S$ talque $T \subseteq as$;
2. $T \subseteq s_1 s$.

Si $s_1 = s$, entonces $s_1 s = ss = \{s\}$ y $T = \{s\}$ y entonces se cumplen asímismo **3** y **4**.
Si $s_1 \neq s$, entonces $s_1 s = \{s_1\} \cup s_1{}'s$.

Supongamos ahora que $s_1 \notin T$. Entonces $T \subseteq s_1{}'s$ y, por **1**, $s_1 s \subseteq s_1{}'s$, pero entonces $s_1 \in s_1{}'s$. ¡Imposible! Por consiguiente, $s_1 \in T$.

Supongamos ahora que $u \in T \cap ss_1$ y que $u \neq s$, $u \neq s_1$. Entonces $u \in ss_1 = \{s\} \cup s's_1$ de donde $u \in s's_1$. Ello hace que $u \notin s's_1$. Luego $u \notin \{s_1\} \cup s's_1 = s_1 s$. De donde $u \notin T$. ¡Imposible!

A cada $T \subsetneq S$, le hemos asociado, pues, una aplicación Ψ: $S \to T, s \mapsto s_1$ talque $S_1 \subseteq T$ y $T_1 \subseteq T$.

La aplicación Ψ es *inyectiva* sobre T. Supongasnos que $a, b \in T$ y $a \neq b$. Entonces $T \subseteq a_1 a \cap b_1 b$ y $a \in b_1 b$, $b \in a_1 a$. Si suponemos ahora que $a_1 = b_1 = c$, entonces $a \in cb$ y $b \in ca$. Ahora bien c $\neq a$, $c \neq b$. De donde $a \in c'b$ y $b \in c'a$, pero $c'b = c'a \cap a'b$; de donde $a \in a'b$. ¡Imposible!

Dedekind detiene aquí el estudio de este concepto de conjunto finito y consiguientemente este estudio que, como hemos podido observar con todo luio de detalles, tiene un desarrollo absolutamente conjuntista. Sin embargo, Jean Cavaillés [*1932*, 143-148], sin demasiado esfuerzo, logrará deducir que esta definición de conjunto finito es una buena definición de conjunto finito, puesto que satisface la mayos parte de las propiedades que se pueden esperar de la idea intuitiva de conjunto finito, las cuales son:

1. "Todo subconjunto de un conjunto finito es finito."
2. "Si A es conjunto finito y $b \in A$, $A \cup \{b\}$ es un conjunto finito."
3. Principio de inducción completa: "Si existe una clase $\mathfrak{K}$ tal que
  3.1. existe un $s \in S$ tal que $\{s\} \in \mathfrak{K}$.
  3.2. si $B \cup \{s\} \in \mathfrak{K}$ toda ves que $B \in \mathfrak{K}$ y $s \in S$, entonces $S \in \mathfrak{K}$."
4. "La clase de todos los subconjuntos de un conjunto finito es finita."
5. "Si un conjunto es finito es finito de Dedekind."

1. Ante todo es preciso establecer que

• $as' = as \cup \{s'\}$, $a, s \in S$.

Tenemos que

$$a's' = a's \cup s's' \text{ o bien } a's' = a's \cap s's' = \{s'\},$$

La segunda no es posible. Así pues, teniendo en cuenta que a es exterior a $a's'$. Luego

$$a \cup a's' = a \cup a's \cup \{s'\}.$$

• El objeto s_1 asociado a $s \in S$ por medio de la aplicación Ψ está caracterizado por

$\Psi(s) = s_1 = s'$, si $s' \in T$ (es evidente);

$\Psi(s) = s'_1 = s_1$, si $s' \notin T$ (s y s' tienen la misma imagen):

$$\mathrm{T} \subseteq s'_1 s' = s'_1 \cup \{s_1\} \text{ implica } \mathrm{T} \subseteq s'_1 s \text{ y } s'_1 \in T$$

y entonces

$$ss'_1 = s's'_1 \cup \{s\} \text{ y } T \cap \mathrm{ss}'_1 \subseteq \{s'_1, s\}.$$

Ahora es fácil establecer **1**:

Sea T el conjunto y Ψ la aplicación asociada y consideremos un $U \subsetneq T$ tal que $U_1 \subseteq U$. Si ahora definimos el conjunto

$$V = \{s \in S : s_1 \in U\},$$ [202]

bastará verificar que $V = S$:

• si $v \in V$, entonces
  • o bien $v' \in T$ y $v' = v_1$ y $v_1 \in U$ y por tanto $v'_1 \in U$,
  • o bien $v' \notin T$ y $v'_1 = v_1$ y, por hipótesis, $v_1 \in U$ y $v'_1 \in U$,
  y, por lo tanto, $V' \subseteq V$. La finitariedad de S implica entonces que $V = S$.

---

[202] Si un conjunto $X \subseteq S$ se transforma en sí mismo, ello significa que $X_1 \subseteq X$ y, por con-siguiente, $X \cap T \neq \emptyset$. Nos restringimos entonces al conjunto $T^0 = X \cap T$. Es claro que $X_1 \subseteq T^0$ y $T_1^0 \subseteq X_1 \subseteq T^0$. Basta pues evitar que $U \subseteq T$ se pueda transformar en sí mismo.

Sin embargo esto es imposible puesto que $\exists t \in T$ tal que $t \notin U$ y, por otra parte, $t = k'$, con $k \in S$ y, dado que $t = k' \in T$, entonces $k_1 = k' \in T$ y $k_1 \notin U$. De donde $k \in V$.

2. Si A es finito y φ: $A \to A, x \mapsto x' = \varphi(x)$ es la aplicación asociada a A y $b \notin A$ y a es un elemento arbitrario de A, definimos la aplicación H: $A \cup \{b\} \to A \cup \{b\}$ mediante la expresión por casos

$$H(x) = \begin{cases} b & \text{si } x = a \\ a' = \varphi(a) & \text{si } x = b \\ x' = \varphi(x) & \text{si } x \neq a; b \end{cases}$$

Sea $U \subsetneq A \cup \{b\}$ tal que $H\langle U \rangle \subseteq U$. Distingamos los dos casos posibles:

- $U \subseteq A$ y entonces $b \in U$ y $a \notin U$; de donde $H\langle U \rangle = \varphi(U) \subsetneq U$ y $U = A$. ¡Imposible!
- $U = U_0 \cup \{b\}$, con $U_0 \subsetneq A$. Entonces $a' = \varphi(a) \in U_0$ y entonces $\varphi(U_0) \subseteq U_0$ y $U_0 = A$. ¡Imposible!

3. Todo consiste en ver que, si existe un arco sb tal que $sb \in \mathbb{K}$, entonces $S \in \mathbb{K}$ ya que, aplicando la hipótesis **3.1.**, obtendremos $ss = \{s\} \in \mathbb{K}$ y habremos terminado.

Sea $H = \{b \in S : sb \in \mathbb{K}\}$. Puesto que (por **3.2**) $sb' = sb \cup \{b'\}$, resulta que $H' \subseteq H$ y por consiguiente $H = S$. Así pues, para todo $r \in S$, $sr \in \mathbb{K}$ y, en particular, para el valor de r tal que $s = r'$. De donde $r'r = S \in \mathbb{K}$.

4. Consideremos la clase $\mathbb{K}$ de los subconjuntos A de S tales que $\wp(A)$ es finito.

- Si $S \in \mathbb{K}$, hemos terminado.
- Si $S \notin \mathbb{K}$, entonces
  - para todo $s \in S$, $\{s\} \in \mathbb{K}$;
  - supongamos ahora que $A \in \mathbb{K}$ (y, por consiguiente, $A \subsetneq S$) y sea $b \in S$ y $b \notin A$.

Resulta que $A \cup \{b\}$ es finito y hay que ver que clase $A \cup \{b\} \in \mathbb{K}$.[203]

[203] Jean Cavaillés afirma que $\wp(A \cup \{b\}) = \{\{b\}\} \cup \{M \cup \{b\}: \emptyset \neq M \in \wp(A)\}$ y de ahí se deduce fácilmente que $\wp(A \cup \{b\})$ es finito, puesto que se obtiene añadiendo un conjunto unitario a un conjunto finito.

Ahora bien

$$\wp(A \cup \{b\}) = \wp(A) \cup \{\{b\}\} \cup \{M \cup \{b\} : \emptyset \neq M \in \wp(A)\}$$

y entonces es preciso establecer que "la unión de dos conjuntos finitos es asímismo un conjunto finito" y entonces la demostración estaría correctamente establecida.[204]

5. Todo conjunto finito es finito de Dedekind.[205]

Sea $\mathcal{K} = \{A \subseteq S$: no es posible biyectar en una parte de sí mismo$\}$:

- Si $s \in$ S, entonces $\{s\} \in \mathcal{K}$;
- si $A \in \mathcal{K}$, entonces A $\cup$ $\{b\} \in \mathcal{K}$.

Supouamos que existe una biyección de una parte $M \subsetneq A \cup \{b\}$ en $A \cup \{b\}$. Es fácil construir una biyección de una parte $N \subsetneq A$ en A.

Es claro, pues, que en base a una *teoría sencilla* de conjuntos es posible establecer un análisis completo del concepto de finitud— o, si se prefiere del concepto de *conjunto finito.* Este tipo de análisis será retomado por Wacław Sierpiński [*1918*] y por Alfred Tarski [*1924*] unos pocos años más tarde.

7. Dedekind y la topología. Nos hallamos con dos textos en los cuales Dedekind tratará cuestiones de *topología.* Estos textos son *Allgemeine Satze über Räume* [*Teoremas generales sobre espacios*; *1871a; 1930-32*, II, 353-355][206] y *Beweis und Anwendungen einer allgemeinen Sätze über mehrfach ausgedehnte stetige Gebeite* [*Demostración y aplicaciones de un teorema general relativo a los dominios continuos de dimensión n*; *1892*; *1930-32*, II, 356-369].

---

[204] Sean A y B dos conjuntos finitos. Veamos que $A \cup B$ es un conjunto finito. (En virtud de 1 podemos suponer sin pérdida de generalidad que los conjuntos A y B son disjuntos.) Consideremos pues la classe $\mathcal{K}: = \{\emptyset \neq Y \subseteq B$: A $\cup$ Y es finito$\}$.

Es claro que, para todo $b \in B$, $\{b\} \in \mathcal{K}$, en virtud de 2.

Supongamos ahora que $Y \in \mathcal{K}$, $Y \subseteq B$. Entonces $A \cup Y$ es finito y, por consiguiente, si $b \notin Y$, $(A \cup Y) \cup \{b\}$ tambien es finito. De ahí se sigue que $Y \cup \{b\} \in \mathcal{K}$ y, aplicando 3, resulta que $B \in \mathcal{K}$ y, por fin, $A \cup B$ es finito.

[205] El recíproco requiere del A.C. (véase [Cavaillés *1932*,148]).

[206] Dugac [*1970*,107] nos dice que hay que situar este trabajo allá por el año 1871 y con anterioridad al 1872.

Dedekind halló grandes dificultades cuando quiso publicar, con los niveles de rigor que le exigía su fino espíritu, la teoría del potencial de Dirichlet.[207] Para ello elaboró un esbozo "*ab ovo*" que "evitara la intuición geométrica." Este esbozo debe considerarse el primer texto matemático sobre la *teoría de los espacios métricos*.

Ante todo nos ofrece una definición [Dedekind *1871a*; *1930-32*, II, 353]: "Un conjunto P de puntos p, p',... es un *cuerpo* [un abierto; *Körper*] ssi, para todo punto $p \in P$, hay un δ tal que todos los puntos que disten de p menos que δ pertenezcan a P."[208] Esta definición es absolutamente igual a la actual, salvo en los formalismos. Y sigue diciendo : "los puntos p, p',... son *interiores* a P" [Dedekind *1871a; 1930-32*, II, 353: "Die Punkter p, p',... liegen innerhalb P"]. Seguidamente establece la definición [Dedekind *1871a*; *1930-32*, II, 353, §3] de parte de un abierto en otro y seguidamente establece que "toda bola es un abierto." Dice que "los puntos que distan de un punto fijo p menos que una cierta distancia δ, forman un cuerpo."[209] La demostración es impecable.[210]

Seguidamente nos ofrece la idea de *punto exterior* a un abierto: "Si P es un abierto y m es un punto en cuyo entorno es posible describir una esfera cuyos puntos son todos ellos no interiores a P, decimos que el punto m es *exterior* a p [Dedekind *1871a*; *1930-32*, II, 353;"Die Punkt m liege außerhalb P"].

Ahora enuncia un teorema básico en sus desarrollos de topología [Dedekind *1871a*; *1930-32*, II, 354]: "Si P es un abierto y existe un punto m exterior a P, entonces existe una infinidad de puntos exteriores a P y estos forman un abierto."[211]

---

[207] Dugac [*1962*, 177] nos ofrece una carta a Heine en la que Dedekind exponía las dificultades que le presentó la "demostración incompleta *del* principio de Dirichlet" (véase Dieudonné y otros [*1986*, 144-145]; [Kline *1972*, 659-660; 684-686 y 704-705]).

En una carta a Cantor (19 de enero de 1879) Dedekind dice que "seria bueno desarrollar una teoría de los dominios [*Gebiet*] evitando sin embargo la intuición geométrica" [Cavailles *1962*, 225]. Nos hallamos de nuevo con la obsesión, por parte de Dedekind, de evitar la intuición geométrica. Esta pretensión lo llevó, de nuevo, a la *teoría de conjuntos*.

[208] Hemos visto ya que, en 1871, utilizó esta palabra para designar los cuerpos ***algebrsicos***. Ello nos hace pensar en la posibilidad, dice Dugac, de que este texto sea anterior al de 1871.

[209] Este cuerpo lo denomina *bola* [*Kügel*] de centro p y radio δ.

[210] La demostración de Dedekind es la actual. Si $pp' < \delta$ (Dedekind indica la distancia $d(p, p')$ o $|p-p'|$ por medio de pp'), tomamos $\delta' < \delta - pp'$. Seguidamente elegimos un punto p'' tal que $p'p'' < \delta'$. Entonces $pp'' < \delta$ y, por lo tanto, p'' pertenece a la bola B (ya que $pp'' \leq pp' + p'p''$).

Asi pues, para Dedekind, la ***desigualdad triangular de la distancia*** es un hecho indudable.

[211] Si $m \in E(P)$, existe una bola K tal que $K \subseteq E(P)$. Si $\delta = \rho(K)$, entonces $mm' < \delta$ para todo $m' \in K$. Sea ahora K' la bola centrada en m' y cuyo radio $\delta' < \delta - mm'$. Es claro que $K' \subseteq K \subseteq E(P)$ y por consiguiente m' es exterior a P. Así pues el conjunto de lospuntos exteriores a P forma un abierto.

Sigue el concepto de *punto frontera* [*Grenzpunkt*] de P que "son los puntos que no son ni interiores ni exteriores a P" y en §8 llamará frontera [*Begrenzung*] al conjunto de todos los puntos frontera de P. Por fin establece el teorema [Dedekind *1871a*; *1930-32*, II, 354]:[212]

> Si existe un punto exterior, entonces existe una infinidad y su totalidad forma un abierto.
>
> Los puntos frontera de un abierto P constituyen un conjunto, el conjunto frontera, que no es abierto.

En esta memoria, Dedekind nos of rece un texto excelente de topología métrica, absolutamente impecable, aunque elemental. Este texto, sin embargo, pone de manifiesto una cuestión que conviene precisar. Por lo que a la topología se refiere la actitud de Dedekind y Cantor se invierte. Las importantes aportaciones de Cantor en el terreno de la topología están intimamente ligadas a las *invectigaciones concretas de análisis*, sobretodo en relación con cuestiones de *convergencia en series de Fourier.*[213] En cambio, este trabajo de Dedekind que acabamos de exponer, si bien según nos dice el propio Dedekind, es fruto de la necesidad de rigorizar la teoría del potencial, es un trabajo de una abstracción absoluta, muy próximo en la presentación—aunque no en la profundidad y la complejidad—a la primera lección de los *Elements d'Analyse* de Jean Dieudonné [*1972*].

La segunda memoria *Demostración y aplicaciones de un teorema general en las dominios continuos de dimensión n*[214] es una obra cuya inspiración hay que buscarla precisamente en *Stetigkeit und irrationale Zahlen* de 1858 y de una forma particular en su *Principio* [*Princip*] del §5 de este texto [Dedekind *1858*; *1930-32*, III, 356; *1901*, 19] que resume con estas palabras

---

[212] Constituyen los §8 y §9. Si $\pi \in \Pi$, entonces, por definición, π no es interior a P. Entonces, si Π fuese abierto, todos los puntos $\pi \in \Pi$ serían exteriores a P y esto contradice la defincíón de punto frontera.

[213] Véase [Dieudonné y otros *1978*, 336-380].

Cabe indicar que Cantor fue el primero que introdujo—en la recta real, primeramente, y en el espacio n-dimensional, depués las nociones de punto *de acumulación*, de *conjunto derivado*, de *conjunto cerrado*, de *conjunto perfecto* y también fue el primero que obtendría resultados esenciales sobre estos conjntos en la recta real (véase (Gómez *1991*]).

La teoría de la dimensión surge asímismo en la discusión entre Cantor y Dedekind en relación con la naturaleza profunda del significado de la posibilidad de establecer biyecciones entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.

Sería realmente muy interesante disponer de una aproximación histórica a la *topoloía conjuntista.*

[214] Dugac [*1976*, 108] situa este texto en 1892, basándose en una nota de la página 356-357 en la que Dedekind nos dice que recientemente [*kürzlich*] acaba de aparecer la "segunda edición de su libro *Stetigkeit und irrationale Zahlen.*"

> Si partimos $\mathbb{R}$ en tos clases de forma que cualquier número de la primera sea menor que cualquier número de la segunda, entonces o bien existe el máximo de la primera clase, o bien el minimo de la segunda. [Dedekind *1876-77*; *1930-32*, II, 356]

Enseguida nos recuerda que los métodos utilizados por Weierstrass y Cantor relativos a los principios del análisis, que había podido conocer a través de la memoria de Heine de [*1872*], no son lo directos que sería de desear. Seguidamente nos habla del *método de la bisección* [*Halbierungsmethode*; *1892*; *1930-32*, II, 356] debido a Bernhard Bolzano[215] y cita explícitamente el teorema siguiente [Dedekind *1892*; *1930-32*, II, 356-357; Bolzano *1817*; traducción inglesa *1980*,170-172]:[216]

> Si una serie de cantidades
>
> $$F_1x, F_2x, F_3x, ..., F_nx, F_{n+r}x, ...$$
>
> tiene la propiedad de que la diferencia entre su término n-ésimo F_nx y uno de posterior como $F_{n+r}x$, suficientemente alejado del primero, se mantiene por debajo de una cierta cantidad dada cuando n es grande, entonces existe sempre una cierta cantidad y sólo una a la cual tienden los términos de la serie y a la cual tienden de forma tal que se llegan a hacer tan próximos como se quiera, siempre que la serie siga indefinidamente.

Y a renglón seguido afirma que la demostración del teorema **no** es correcta y que sólo podrá establecerse si "previamente se establece la continuidad del dominio de los números reales" ["Diese...der ohne vorgängige Feststellung der Stetigkeit de reellen Zahlgebietes aus gar nicht gelingen kann; *1892*; *1930-32*, II, 356-357].[217] Estas consideraciones son las que llevan a Dedekind [*1876-77*; *1930-32*, II, 355] a elaborar este nuevo texto de topología

---

[215] Dedekind conoció esta obra de Bolzano porque se la prestó H.A. Schwarz en 1888.

[216] De hecho Bolzano afirma que *toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente.*

[217] La demostración de Bolzano es realmente sorprendente: "...no hay nada que nos impida suponer la existencia de la cantidad X a la cual se acercan indefinitunente los términos de la serie, siempre que no la supongamos ni *única* ni *invariable*. Ahora bien la hipótesis de invariabilidad no es imposible puesto que, en virtud de la hipótesis establecida, es posible determinar dicha cantidad *tan aproximadamente como queramos...*" [Bolzano *1817*; traducción inglesa de S.B. Russ *1980*, 171].

Es interesante obsenrar que es precisamente con este teorema y sus limitaciones que Jean Cavaillés [*1962*, 31-34] pone de manifiesto la *necesidad de una cosntrucción rigurosa de los números reales*, necesidad que, de alguna manera, contribuirá a la creación—conjuntamente con otros hechos y otras preocupaciones, naturalmente—de la teoría de conjuntos.

en el que enunciará, "como ejemplo de su método de demostración, un teorema más general que se aplica a gran cantidad de casos conocidos."

Este texto consta de dos partes (§§1,2 y 3) y §4 bien diferenciadas desde nuestro punto de vista. Los tres primeros parágrafos—la primera parte—es absolutamente coniuntista y empieza con algunas definiciones de su obra *Was sind und was sollen die Zahlen?*, añadiendo ahora, sin embargo, ciertas definiciones de cariz *más topológico*.[218] Estos conceptos son los de conjunto, subconjunto, intersección de una familia de conjuntos e unión de una familia de conjunto [Dedekind *1892*; *1930-32*, II, 357-358]. Seguidamente Dedekind [*1892*; *1930-32*, II, 358] nos ofrece "una nueva definición," definición que constituye la base de este nuevo texto de Dedekind. Es el concepto de *subcortadura* [*Teilschnitt*]. Dice [Dedekind *1892*; *1930-32*, II, 358]:

> Una subcortadura φ de un conjunto *S* consiste en una partición de los subconjuntos de *S* en partes propias [*reine Teil*] y partes impropias [*unreine Teil*] que satisfacen tres condiciones:[219]
>
> 1. Toda parte de *S* es propia o impropia, pero jamás es las dos cosas a la vez.
> 2. Toda parte de una parte propia es una parte propia.
> 3. La reunión—Dedekind la llama suma—de dos partes propias es, a su vez, una parte propia.[220]

No obstante es posible reducir las condiciones **2** y **3** a una única condición **4** [Dedekind *1892*; *1930-32*, II, 358]: "La reunión de dos partes es propia ssi ambas partes son propias."[221]

Esta condición **4**, asociada a las propiedades del producto—"si a todo subconjunto *A* de *S* le hacemos corresponder $\varphi(A) = 1$ o $= 0$, según que *A* sea propio o impropio"—, resulta que

[218] De esta parte del texto existe ademáo un *manuscrito* [Dugac *1976*, 309-315, apéndice LVII].

[219] Esta clasificación es la que constituye la preocupación inicial del manuscrito citado.

[220] Dedekind [*1892*; *1930-32*, II, 358] ha definido, en redidad, el concepto actual de *ideal de partes de un conjunto*. Es claro que, *cualquier topología* $\mathcal{T}$ *sobre S, permite definir una subcortadura en la cual* "$X \subseteq S$ es una parte propia de *S* ssi se puede recubrir con un número finito de abiertos *T* de la topología $\mathcal{T}$."

[221] Aquí Dedekind nos dice, además, que esto equivale a que "la reunión de dos partes es impropia si una de ellas lo es" que constituye una dualización lógica correcta de la expresión $P(A \cup B) \leftrightarrow P(A) \wedge P(B)$ equivale a $\neg P(A \cup B) \leftrightarrow \neg P(A) \vee \neg P(B)$, en donde $\wedge$, $\vee$ designan, respectivamente, la "y" y la "o" lógicas.

Este hecho le sugiere, además, la propiedad del producto $x \cdot y = 0$ ssi $x = 0 \vee y = 0$.

5. $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$ [Dedekind *1892*; *1930-32*, II, 359].

Recíprocamente, si a cada parte A de S le hacemos corresponder un número $\varphi(A)$ que cumpla **5**, entonces φ es una subcortadura de S.

Seguidamente Dedekind [*1892*; *1930-32*, II, 358-359] nos ofrece dos conceptos relacionados con las subcortaduras:

• el concepto de *subcortadura engendrada* [*erzeugt*] *por una parte T de S*:

toda parte T de S engendra una subcortadura de S que se define por:

> una parte A de S será propia o impropia según que A sea o no parte de T. De ahí que T sea parte propia.

Seguidamente Dedekind nos hace notar que la reunión de "todas las partes propias, en general, no es una parte propia".[222] Y a continuación nos ofrece [Dedekind *1892*; *1930-32*, II, 359-360]

• la noción de *prolongación de una subcortadura*:

> (a) Si $T \subseteq S$ entonces, toda subcortadura φ de S contiene [*enthalten*] una subcortadura ψ de T tal que
> toda parte A de T es propia o impropia según sea propia o impropia en φ (es decir: $\varphi(A) = \psi(A)$).

Recíprocamente,

> (b) si $T \subseteq S$, toda subcortadura ψ de T se puede *prolongar* [*der Weise ermeitet*] en una subcortadura φ de S de manera que ψ esté contenida en φ:
>
> si A es una parte de S, diremos que es impropia ssi existe una parte de $A \cap T$ que sea impropia para ψ.

Dedekind cierra §1 ligando las *subcortaduras* y de S y las aplicaciones h de S. Antetodo considera $S' = h(S)$ y, seguidamente, clasifica las partes de S' en propias e impropias de acuerdo con

[222] Dedekind coge S infinito y dice que A es una parte propia si es finita e impropia si es infinita.

$P \subseteq S'$ es impropia ssi existe $U \subseteq S$ impropia y $U' = h(U) \subseteq P$.

Dedekind aplicará todas estas nociones primeramente a $\mathbb{R}$ (§2) y después a $\mathbb{R}^n$ (§3).

En el caso $S = \mathbb{R}$ introduce unas pocas notaciones y definiciones que conviene precisar [Dedekind *1892*; *1930-32*, II, 361]:

1. $[c] = (-\infty, c] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq c\}$, $c \in \mathbb{R}$.[223]
2. La *envolvente* [*Hülle*] de C: $(c)_h = [c-h, c+h] = \{x \in \mathbb{R}: c-h \leq x \leq c+h\}$, $h > 0$, $c \in \mathbb{R}$, h es el radio y c es el centro.
   Es claro que $[c+h] = [c-h] + (c)_h$.
3. Si $T \subseteq \mathbb{R}$, decimos que $c \in T$ es un *punto adherente* [*Beizahl*] de T ssi en toda envolvente de c hay un punto, por lo menos, de T.

Es claro, dice Dedekind [*1892*; *1930-32*, II, 361], que "todo punto de T es adherente a T. Ahora bien, si todo punto adherente de T pertenece a T, diremos que T es un *conjunto cerrado* [*selbständiges System heiβen*]."[224]

Por fin establece que un conjunto $T \subseteq \mathbb{R}$ *está acotado* [*begrenztes System*] si existe un número positivo M tal que, para todo $x \in T$, $|x| \leq M$.

Con todas estas definiciones puede establecer ya el *teorema fundamental* que sigue [Dedekind *1892*; *1930-32*, II, 361-362]:

> Si todas las partes de un conjunto acotado $T \subseteq \mathbb{R}$ se clasifican, por medio de una subcortadura ψ, en propias e impropias y si T es impropia, entonces existe el mínimo c tal que cualquier envolvente de c contiene una parte impropis de T.

La demostración de Dedekind utiliza la prolongación de ψ a una subcortadura φ de $\mathbb{R}$.[225]

---

[223] Los complementarios—los impropios—constituyen una base de *filtro libre* ($\bigcap \mathbf{B}$). El *filtro que genera* es el *filtro de Fréchet* de $\mathbb{R}$.

[224] Nos hace observar que "sus puntos adherentes" y el conjunto de adherentes" son distintos de los *puntos de acumulaión* [*Grenzpunkt*] y del conjunto de todos los puntos de acumulación, introducidos por Georg Cantor (véase [Cantor *1872*,122-132]).

[225] De hecho se demuestra que "existo el menor número c tal que todas sus envolventes son impropias y, además, c es adherente a T."

Este teorema es central en la demostración del teorema del §4 que contiene los *teoremas fundamentales de existencia de los teoremas de funciones*.

Disponemos de una sucortadura ψ en T. Ahora, en $\mathbb{R}$, definimos la subcortadura $\varphi(A) = 0$ ssi $\exists B(B \subseteq A \cap T \wedge \psi(B) = 0)$.

Ahora dividimos $\mathbb{R}$ en dos clases

En el caso $S = \mathbb{R}^n$, además de introducir conceptos análogos a los que había introducido en el caso $S = \mathbb{R}$ como, por ejemplo, la *envolvente de un punto* $\mathfrak{a} = (a_1, ..., a_n)$, $\mathfrak{a}_h = \{\mathfrak{x}: a_i-h \leq x_i \leq a_i + h, \text{i} = 1, ..., n\}$, el concepto de *punto adherente* y de *conjunto acotado y cerrado*, introduce el *orden lexicográfico entre dos puntos* $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$. Así pues, $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ ssi el primer elemento de la sucesión $(b_i - a_i)_{i=1, ..., n}$ no nulo es positivo (Dedekind [*1892*; *1930-32*, II, 363] dice: "$\mathfrak{a}$ es más bajo [*tiefer*] y $\mathfrak{b}$ es más alto [*höher*]") e introduce las nociones de punto más bajo y de punto más alto de una parte de $\mathbb{R}^n$, cuando existen [*der tiefste, der höchste*].

Seguidamente establece el teorema *general* que sigue [Dedekind *1892*; *1930-32*, II, 364]:

> **I.** Si T es un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ y si todas las partes de T se hallan clasificadas por medio de una subcortadura ψ en propias e impropias, entonces si T es impropia, existe el punto más bajo c tal quer toda envolvente de c contiene una parte impropia de T.

Como antes, si se recurre a la técnica de prolongar la subcortadura ψ de T a una cortadura φ de S, el teorema se transforma en [Dedekind *1892*; *1930-32*, II, 364]:

> **I'.** *Si T es una parte acotada de S y, si todas las partes de S se han clasificado en propias e impropias de forma que T ses impropia y que toda parte con intersección vacía con T sea propia, entonces existe un punto c para el cual todas las envolventes son impropias y, además, c es el punto más bajo que posee esta propiedad.*

Y lo demuestra por inducción sobre n. Para $n = 1$, remite a la demostración del §2. Para verlo en el caso n, considera las proyecciones $\mathfrak{a}' = (a_1, ... ,a_{n-1})$ de los puntos $\mathfrak{a} = (a_1, ..., a_{n-1}, a_n)$ y llama T' a la proyección de T y $S' = \mathbb{R}^{n-1}$. Entonces supone que el

---

$$A = \{x \in \mathbb{R}: [x] \text{ es propia}\};$$
$$B = \{x \in \mathbb{R}: [x] \text{ es impropia}\}.$$

Pero, pueato que T está acotado, existe un número real $c > 0$ tal que $T \subseteq [-\varepsilon, +\varepsilon]$ y entonces $-\varepsilon \in A$ y $+\varepsilon \in B$.

Además todo $a \in A$ es menor que todo $b \in B$. Tenemo, pues, una cortadura y el *principio de continuidad* nos proporciona un punto c que es máximo en A o mínimo en B ya que, para todo $h \geq 0$, $c-h \in A$ y $c + h \in B$. Ahora bien, puesto que $[c + h] = [c-h] + (c)_h$, resulta que, para todo $h > 0$, $(c)_h$ es impropia.

Si $a < c$, entonces existe un $h > 0$ tal que $a + h \in A$ y entonces $[a+h] = [a-h] + (a)_h$ que implica que $(a)_h$ es propia.

teorema es cierto en el caso $n-1$. Seguidamente recorre a la proyección que transforma la subcortadura y de $\mathbb{R}^n$ en una cortadura φ de $\mathbb{R}^{n-1}$ y obtiene el teorema deseado.[226]

Dedekind aplica este resultado general a las funciones de dos variables.[227] De hecho son resultados de *Anáilisis Real.* Previamente establece los corolarios siguientes:

II. *Si U es una parte de T, cerrada y acotada en* $\mathbb{R}^n$, *existe d punto más bajo con la propiedad de que cada una de sus envolventes contenga, por lo menos, un punto de U.*

Todo descansa en aplicar adecuadamente **I** y, para ello hay que disponer de una subcortadura de *T.* Entonces Dedekind establece que una parte *U* de *T* será impropia o propia según que contenga o no un punto de la parte *U.*

Y a continuación establece teoremas relativos a funciones reales de dos variables reales h: $T \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ [Dedekind *1892*; *1930-32*, II, 367]:

III. *Existe un punto más bajo* (a, b) *tal que, si* $c \in T' = h(T)$, *entonces en toda envolvente de* (a, b), *existe por lo menos un punto P tal que* $h(P) = P' \leq c$.

Todo descansa en aplicar adecuadamente **I** y, para ello, es preciso disponer de una subcortadura de *T.* Entonces establece que una parte *U* de *T* será propia o impropia según que T' contenga o no un elemento más bajo que todos los de U'.

IV. *Si c es un punto adherente de* $T' = h(T)$, existe *el punto más bajo* (a, b) *tal que, si H es una envolvente de* (a, *b*), *c* también es adherente a H'.

Todo descansa en aplicar adecuadamente **I** y, para ello, hay que disponer de una subcortadura de *T.* Entonces establece que una parte *U* de *T* será impropia o propia según que c sea o no adherente a U'.

Por fin, utilizando las envolventes, establece la *continuidad de una función* [Dedekind *1892*; *1930-32*, II, 367]:[228]

> Una función es continua en un punto *P* ssi, para todo $k > 0$, existe una enlvolvente *H* de *P* tal que todos los puntos de H' distan de P' menos que *k*.

Con esta definición y los corolarios precedentes dispone de toda la artillería necesaria para desarrollar cuestiones de *análisis matemático*, utilizando *metodologlía topológica* y, por consiguiente, teoría de conjuntos:

---

[226] En el manuscrito se limita al caso $n = 2$.

[227] En realidad basta la generalidad del manuscrito, puesto que las aplicaciones se limitan al dos variables.

[228] En este texto Dedekind utiliza *Funktion* como sinónimo de *Abbildung*, que es el nombre que daba al concepto de función en *Was sind und was sollen die Zahlen?*

V. *Una función continua admite un valor mínimo y existe un punto más bajo en el que se alcanza dicho valor mínimo.*

Basta aplicar **III**.

VI. *Si la función es continua en T, entonces todo punto adherente c de T′ pertenece a T′ y existe el punto más bajo (a, b) en el cual la función toma este valor c = (a, b)′.*

Basta aplicar **IV**.

VII. *Si una función continua en T toma tanto valores positivos como negativos, existe un punto en el cual se anula.*[229]

Dedekind termina, pues, su desarrollo con el *teorema de Bolzano*—que, en cierta forma, como hemos indicado ya, constituia el *leit motiv* de toda su exposición—. Emmy Noether nos da una aplicación más de la teoría topológica de Dedekind. Nos ofrece la demostración del *teorema de Borel-Lebesgue:*

• *Si T es cerrado y acotado, entonces de todo recubrimiento abierto de T se puede extraer un recubrimiento finito.*[230]

Nuevamente vemos el *poder creador de la mente*—construyendo en cada ocasión la subcortadura adecuada de *S*—para lograr establecer con *toda generalidad* y con *absoluto rigor* resultados matemáticos, algunos ya conjeturados y aún establecidos, pero no con una unidad de criterio—unidad de criterio que pasa por el recurso de la teoría de conjuntos—como la que nos ofrece Dedekind.

8. A modo de conclusión. En estas páginas que, a veces podrán parecer excesivamente detalladas y en otras ocasiones pueden mostrársenos quizás demasiado superficiales, ha

---

[229] En realidad, al igual que había hecho en el manuscrito [Dugac *1976*, 310], Dedekind se limita al cuadrado unidad cerrado $[\mathbf{0}, \mathbf{1}] = \{(x,y)\colon 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. En este caso usa la notación $\begin{pmatrix} x-h & y-h \\ x+h & y+h \end{pmatrix}$ para designar la envolvente del punto (x, y). Afirma, demás, que $\mathbf{0} = (0, 0)$ es el punto más bajo y $\mathbf{1} = (1, 1)$ es el punto más alto de $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

Para establecer la demostración, Dedekind supone excluído por trivial el caso $(0, 0)' = \mathbf{0}$. Supone entonces que $(0, 0)' > 0$ y aplica la alternativa **I′**, considerando que $U \subseteq T$ es una parte propia si contiene elementos positivos; en caso contrario, U es impropia. Entonces afirma que el punto (a, b) cuya existencia garantiza **I′** cumple $(a, b)' = 0$. Para ello analiza los dos casos posibles $(a, b)' > 0$ y $(a, b)' < 0$ y ambos llevan a contradicción. (La primera desigualdad contradice la definición misma de subcortadura y la segunda la propiedad que caracteriza al punto (a, b).)

[230] [Dedekind *1892*]; comentario de Emmy Noether [Dedekind *1930-32*, II, 370]. Para ello precisa de la definición siguiente: Un subconjunto *U* de *T* es propio o impropio según que se pueda recubrir o no por un número finito de conjuntos abiertos.

quedado expuesto con todo detalle un hecho que me parece incontrovertible: *Dedekind entiende el quehacer matemático como una actividad lógica que hay que* crear *por medio del poder creador de la mente humana.* Sin embargo Dedekind no explicita en que consiste este poder creador. No obstante una lectura atenta de sus trabajos y aportaciones matemáticas, realmente importantes, nos permite observar que el poder creador de la mente humana que preconiza Dedekind es precisamente la *capacidad creadora que posee el matemático para* 'crear'*—fabncar, si se prefiere,—conjuntos* a partir de otros conjuntos mediante unas leyes lógico matemáticas precisas que, aun cuando no las precise siempre explícitamente con toda claridad, están ahí y son utilizadas por Dedekind con precisión y claridad. Como ya hemos indicado en otra parte (véase el texto de Jean Dieudonné [*1987*, 144], citado en en el parágrafo marcado con el n^o 202), Dedekind es uno de los matemáticos que inaugura el nuevo estilo de "hacer matemáticas;" este estilo consiste en recurrir al lenguaje preciso, mínimo pero necesario, de los conjuntos. Así los números—ya sean naturales o reales—son conjuntos bien establecidos y determinados. Su totalidad constituye, a su vez, conjuntos precisos y como tales poseen *propiedades topológicas* que sólo pueden establecerse con rigor en términos conjuntistas.[231] Así el *Análisis Matemático* adquiere un rigor que, al prescindir de la teoría de conjuntos, había que depositar necesariamente en la *intuicion geométrica*,[232] peligro que según Dedekind había que evitar si se pretendía alculzar una presentación lógica y rigurosa del corpus matemático.

---

[231] Cabe indicar que Dedekind no es, en absoluto, el único matemático que se ve ante la neceaidad de recurrir al lenguaje de los conjuntos. Ya otros matemáticos anteriores a él, como Bernhard Bolzano, Karl Weierstrass, etc., habían recurrido a esta técnica. Y entre los de su época son muchos—, Cantor, Heine, Kronecker, Frege, etc.,—los que recurrirán a la teoría incipiente de conjuntos para impulsar la investigación matemática, dotándola de rigor. Sin embargo, es Dedekind quien con mayor rigor, evitando sin embargo crear una nueva rama de las matemáticas en sí misma—a diferencia de Cantor—, llevari a término esta nueva filosofía —epistemología—de las matemáticas.

[232]Aquí nos encontramos con una de tantas paradojas(?)—quiebras históricas. La geometría había constituído desde los *Elementos* de Euclides (siglo III aC.) el *paradigma del rigor matemático*, al extremo que los matemáticos eran llamados *geómetras*.

Con la aparición de la *geometría analítica*—una geometría basada en el número y la medida—y del *cálculo infinitesimal*—una rama basada en el concepto de infinito y de limite—, el rigor que hallaba su fundamento en la intuición geométrica, aun cuando esta intuición geométrica estuvie e aparentemente, a su vez, fundamentada en el rigor de los *Elementos*, se quebró y fueron apareciendo lentamente, al principio, pero muy rápida nente con el avance del nuevo enfoque de los matemáticos de los siglos XVII y XVIII, las *profundas limitaciones*—limitaciones como base y fundamento rigurosos de las matemáticas de esta geometría, aparentemente incuestionable y hasta entonces incuestionada.

Dedekind clamará enérgicamente por una rigorización del *Análisis Matemático* que evite la "*intuición geométrica*," simplemente porque esta intuición geométrica no se ha logrado fundamentar lógicamente. Recordemos sus palabras "la suposición de esta propiedad de la línea recta no es otra cosa que un axioma en virtud del cual atribuyo a la línea recta la continuidad...." [Dedekind *1872*; *1930-32*, III, 323]. Véanse las páginas 224-225 del presente trabajo.

Esta manera de pensar las matemáticas le permite a Dedekind profundizar el álgebra y la teoría de números con una herramienta tan poderosa con la cual puede alcanzar resultados que hasta él se habían mostrados renuentes al rigor. Y lo consigue además, y esta una de las caracteristicas de esta nueva manera de hacer matemáticas como nos muestra Richard Dedekind [*1930-32*, III, 400], *unificado*—"era preciso para ligar el álgebra y la teoría de números por medio de lo que tienen de más íntimo y profundo"—y obteniendo *con naturalidad* objetos y resultados matemáticos que, sin este nuevo lenguaje y metodología, podían perecer harto artificiales y artificiosos y así ocurría con anterioridad a sus aportaciones.[233]

Logra asímismo precisar el sentido matemático de las palabras *infinito* y *finito*, tantas veces utilizadas por los filósofos y matemáticos, tantas veces usadas y nunca precisadas, clarificadas ni aún definidas matemáticamente—con anterioridad a Bolzano, Cantor y él mismo.

Todos estos logros serían más que suficientes para poder afirmar sin ningún género de dudas que Dedekind es "con Cantor, uno de los fundadores de la teoría de conjuntos." Pero hay más y no quisiera terminar estas páginas sin referirme a esta cuestión que creo de una gran importancia para el devenir de la teoría misma de conjuntos y su ulterior concreción y formalización en manos de matemáticos eminentes como Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel, Thoralf Skolem, John von Neumann, Kurt Gödel, por citar algunos de los nombres más notables. Esta aportación de Dedekind la considero realmente notable y sorprende que haya encontrado tan poco eco en la literatura relativa a la tarea de Dedekind.[234]

Dedekind a lo largo de sus trabajos matemáticos, además de poner de manifiesto la enorme importancia del concepto de *aplicación* y de observar como las aplicaciones permiten *transportar estructuras*, *establecer definiciones*, *definir nuevos conjuntos*, etc., nos muestra cuales son las *operaciones y relaciones conjuntistas mínimas que* **hay que aceptar** si se quiere que este nuovo lenguaje matemático posea una *semántica* suficientemente rica. Y así vamos encontrando, uno aquí, otro allá, todos y cada uno de los *axiomas* que, unos años más tarde, señalarían Zermelo, Skolem, Fraenkel y otros. Vemos que Dedekind acepta con toda naturalidad el hecho de que dos conjuntos son iguales ssi son *extensionalmente* iguales. Admite como conjunto el conjunto vacío, los conjuntos unitarios, las parejas (ordenadas), la unión e intersección de una colección arbitraria de conjuntos, el conjunto de partes de un conjunto y el hecho de que la imagen de un conjunto por una aplicación es tambien un conjunto.

---

[233] Piénsese en los *números ideales* de Kummer y en los ideales de Dedekind.

[234] Dugac [*1976*, 137-143] nos ofrece un capitulo realmente notable acerca de los influencia de la matemática de Dedekind en la propia sociedad matemática tanto en lo que se refiere a la propia matemática como a la lógica, así como una nota acerca de la *unidad de la matemática dedekiniana*, pero mi observación no va en ninguna de estas direcciones.

Observa que es preciso aceptar la existencia de conjuntos infinitos—una vez precisado este concepto—y que es posible manejarlos con toda normalidad.

Por fin, cuando un problema matemático o su resolución lo requiere, recurre a construcciones de conjuntos utilizando la *elección* en su sentido más platónico de la palabra; es decir, recurre al *axioma de la elección* tanto para familias numerables como para familias arbitrarias.

De todo ello debemos concluir que Dedekind debe ser considerado uno de los primeros matemáticos que creó lo que hoy conocemos con el nombre de teoría de conjuntos. Sin embargo, a diferencia de Cantor, no creó una teoría en y por sí misma, como objeto de estudio. La creó como un lenguaje, como una herramienta—indipensable, eso sí—que le había de permitir hacer progresar las matemáticas en la línea de progreso que iban imponiendo los nuevos problemas aparecidos a partir del gran empuje de los siglos XVII y XVIII y que requerían a voz en grito nuevas intuiciones, nuevas estructuras, nuevas perspectivas.

Dedekind halló estas nuevas intuiciones, estructuras y perspectivas en el seno de la *teoría de conjuntos* y para probarlo fuera de cualquier duda razonable hemos creído necesario y conveniente releer—desde este punto de vista y con este objeto—algunos de sus trabajos más notables y así lo hemos hecho.

BIBLIOGRAFÍA

BIERMANN, Kurt R. 1971. *Zu Dirichlets geplantem Nachruf auf Gauss*, NTM-Schrift. Gesch. Naturwiss. Technik Medizin Leipzig 8, 9-12.

BOLZANO, Benrhard. 1817. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewärhren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Prague, Gottlieb Hasse. Traducción inglesa en [*1980*].

— 1851. *Paradoxien des Unendlichen* (F. Přihonský, redactor), Leipzig, C.H. Reclam.

— 1980. (S.B. Russ, trad.) *A translation of Bolzano's paper on the Intermediate Value Theorem*, Historia Mathematica 7, 156-185.

BOURBAKI, Nicolas. 1969. *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann.

BUNN, Robert. 1980. *Developments in the foundation of mathematics from 1870 to 1910*, en Ivor Grattan-Guinness (redactor), *From the calculus to set theory, 1630-1910. An introductory history* (London, Duckworth), 221-255; traducción castellana de Mariano Martínez Pérez (Madrid Alianza Universidad, 1984), 283-328.

CANTOR, Georg. 1870. *Über einen die trigronometrische Reihen betreffenden Lehrsatz*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 72, 130-138.

— 1872. *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Mathematische Annalen 5, 123-132.

— 1878. *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 84, 242-258.

— 1883. *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*. V, Mathematische Annalen 21, 545-591.

— 1895. *Beiträge zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre.* I, Mathematische Annalen **46**, 481-512.

— 1932. *Gessamelte Abhandlungen mathematischen und philosphischen Inhalts* (E. Zermelo, redactor), Berlin, Julius Springer.

CASSINET, Jean y GUILLEMOT, Michel. 1983. *L'Axiome du choix dans les mathématiques de Cauchy a Gödel*, I, Toulouse, Université Paul Sabatier, Thèse.

CAUCHY, Augustin. 1821. *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, Paris, Imprimerie Royale.

CAVAILLÉS, Jean. 1932. *Sur la deuxième définition des ensembles finies donnée par Dedekind*, Fundamenta Mathematicae **19**, 143-148.

— 1962. *Philosophie mathématique*, Paris, Hermann.

DAUBEN, Joseph W., Jr. 1979. *Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite*, Cambridge, Mass., Harvard University Press; reimpreso por Princeton, Princeton University Press, 1990.

DEDEKIND, Richard. 1855-58. *Aus den Gruppen-Studien. Komposition*, en [*1930-32*, III, 439-445].

— 1857. *Abriß einer Theorie der höheren Congruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus*, Journal für reine und angewandte Mathematik **54**, 1-26; en [*1930-32*, I, 40-66].

— 1858. *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Niedersächische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. Dedekind, III, 17. En [Dugac *1976*], apéndice **XXXII**, 203-209.

— 1871. *Über die Composition der binären quadratischen Formen.* Es el *Supplement X* a [Leujene-Dirichlet *1871*, 423-462; v. *1986*, 387-433]. En [*1930-32*, III, 223-261].

—1871a. *Allgmeine Sätze über Räume*, en [*1930-32*, II, 353-355].

— 1872. *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1. Aufl. 1872; 5. Aufl. 1927; en [*1930-32*, III, 315-334].

— 1872-78. *Was sind und was sollen die Zahlen?*; en [Dugac *1976*, apéndice **LVI**, 293-309].

— 1876-77. *Sur la théorie des nombres entieres algèbriques*, Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques (1) **11** (2) (1876), 278-288; (2) **1** (1) (1877), 17-41; 69-92; 144-164; 207-248. Parcialmente en [*1930-32*, III, 262-296].

— 1877. *Über die Anzahle der Ideal-Classen in den verschieden Ordnungen eines endlichen Körpers*, Festschrift der Technische Hochschule Braunschweig zur Säkularfeier des Geburtstages von C.F. Gauß (Braunschweig, Vieweg und Sohn), 1-55. En [*1930-32*, I, 105-157].

— 1877-97. *Gefahren der Systemlehre* (*Was sind und was sollen die Zablen?* citirt mit Z), en [Sinaceur *1971*].

— 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, Vieweg und Sohn; en [*1930-32*, III, 335-390].

— 1889. *Zweite Definition der Endlichen und Unendlichen*, en [*1930-32*, III, 450-458].

— 1892. *Beweis und Anewndung eines allgemeinen Satze über mehrfach ausgedehnte stetige Gebeite*, en [*1930-32*, II, 356-369].

— 1894. *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen.* Es el *Supplement XI* a [Lejeune-Dirichlet *1894*; v. *1986*, 434-657] y en [*1930-32*, III, 2-222].

— 1901. *Essays on the theory of numbers* (traducción de W.W. Beman), Chicago, Open Court Publishing Co.; reimpreso por New York, Dover Publishing, 1963.

— 1926. *Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali.* Traducción italiana de O. Zariski. Roma, Stock.

—1930-32. *Gesammelte mathematische Werke* (Robert Fricke, Emmy Noether y Öystein Ore, redactors), tomos I a III, Braunschweig, Veiweg und Sohn.

— 1982. *Scritti sui Fondamenti della Matematica* (traducción de Francesco Gana), Napoli, Bibliopolis Edizioni.

DESCARTES, René. 1637. *La Géométrie* en *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dsns les sciences. Plus la Dioptrique, les Météors et la Géométrie Qui sont des assais de cette Méthode*, Leyden.

DIEUDONNÉ, Jean. 1969. *Richard Dedekind*, Encyclopædia Universalis **5**, 373-375.

— 1972. *Éléments d'analyse*, **1**. Paris, Gauthier-Villars.

— y otros. 1978. *Abrégé d'histoiredes mathématiques, 1700-1900*, 2 volúmenes. Paris, Hermann.

— y otros. 1986. *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, 1 volumen. Paris, Hermann, nouvelle edition.

—. 1987. *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques d'aujourd'hui*. Paris, Hachete. Paris.

DROEVEN, Enrique. 1990. *Génesis y desarrollo de los numeros reales en la obra de Cantor en el siglo XIX*, Tesis doctoral, Barcelona, Publicacions de la Universitat de Barcelona.

DU BOIS-REYMOND, Paul. 1882. *Die allgemeine Funktionenlehre I*, Tübingen, Laupp.

DUGAC, Pierre. 1970. *Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite*, Revue d'histoire des sciences **23**, 333-350.

— 1976. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques (avec de nouveaux textes inédits)*, Paris, Vrin.

— 1978. *Fondements de l'analyse*, en [Dieudonné y otros *1978*, vol. **I**, 335-392].

EDWARDS, Harold M. 1980. *The genesis of ideal theory*, Archive for History of Exact Sciences **23**, 321-378.

— 1983. *Dedekind's invention of ideals*, Bulletin of the London Mathematical Society **15**, 8-17.

—. 1987. *Dedekind's invention of ideals*, en [Phillips *1987*, 8-20].

Euclides. 1970. *Los Elementos* (traducción castellana y comentarios de Francisco Vera), *Científicos Griegos*, I, Madrid, Aguilar.

FRAENKEL, Abraham A. 1964. *Extensions of the number-concept*, New York, Scripta Mathematica.

FRÁPOLLI, M. José. 1987. *La matematización del infinito: La emergencia de la teoría de conjuntos en la obra de Georg Cantor*, Tesis doctoral, Granada, Universidad de Granada.

FREGE, Gottlob. 1884. *Grundlagen der Arithmetik. Ein logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, Koebner.

GAUSS, Carl Friedrich. 1801. *Disquisitiones Arithmeticae*. Leipzig.

— 1832. *Theoria residourum biquadratorum*, en [*1863*, 2, 93-148; 165-178].

— 1863. *Gesammelte Werke*, 2 Bde. Göttingen, Königlichen Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

— 1880. *Briefweschel*, Leipzig, Engelmann.

GÓMEZ, Carlos. 1991. *La teoría de conjuntos en Georg Cantor*, Tesis doctoral; en preparacion.

HEINE, Eduard. 1872. *Die Elemente der Funktionelehre*, Journal für die reine und angewadte Mathematik **74**, 172-188.

HELMHOLTZ, Hermann von. 1887. *Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet*, en *Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctor-Jubiläum gewidmet*, (Leipzig, Fues's Verlag), 14-52.

HESSENBERG, Gerhard. 1906. *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht.

HILBERT, David. 1897. *Die Theorie der algebrasichen Zahlenkörper*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **4**, 175-546.

— 1899. *Grundlangen der Geometrie*, Leipzig, B.G. Teubner.

— 1926. *Über das Unendlichen*, Mathematischen Annalen **95**, 161-190. Traducido al francés por André Weil [Hilbert *1926a*].

— 1926a. *Sur l'infini*, Acta Mathematica **48**, 91-122.

JOURDAIN, Philip E.B. 1916. *Richard Dedekind*, The Monist **26**, 416-427. Reimpreso: este número de Modern Logic, 107-114.

KLEENE, Stephen C. 1952. *Introduction to metamathematics*, Amsterdam, North-Holland.

KLINE, Morris. 1972. *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, Oxford University Press.

KRONECKER, Leopold. 1887. *Über der Zahlbegriff*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **101**, 337-355.

KUMMER, Ernst Eduard. 1847. *Sur les nombres complexes qui sont formés avec les nombres entiers réels et les racines de l'unité*, Journal de Mathématiques **12**, 185-212.

— 1847. *Zur Theorie der complexen Zahlen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **35**, 319-326.

— 1851. *Mémoire sur les nombres complexes composés de racines de l'unité et des nombres entiers*, Journal de Mathématiques **16**, 377-498.

LEBESGUE, Henri. 1905. *Sur la théorie des ensembles*, pp. 264-269 en René Baire, Emile Borel, Jacques Hadamard y Henri Lebesgue, *Cinq lettres sur la théorie des ensembles*, Bulletin de la Société Mathématique de France **33** (1905), 261-273.

LEJEUNE-DIRICHLET, Peter Gustav. 1863. *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1ª edición.

— 1871. *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig, Vieweg und Sohn, 2ª edición.

— 1879. *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig, Vieweg und Sohn, 3ª edición.

—. 1894. *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig, Vieweg und Sohn, 4ª edición. Reeditada en [*1968*].

—. 1968. *Vorlesungen über Zahlentheorie*, New York, Chelsea Publishing Co.

MEDVEDEV, F.A. 1965. Развитие теории множеств в XIX веке [El desarrollo de la teoría de conjuntos en el siglo XIX; en ruso], Москва, «Наука».

MÉRAY, Charles. 1869. *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables donnés*, Revue des Societés des Savants (Sciences mathématiques, Physiques et Naturelles) (2) **4**, 28~289.

MESCHKOWSKI, Herbert. 1967. *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*, Braunschweig, Vieweg und Sohn.

MOORE, Gregory H. 1982. *Zermelo's axiom of choice: its origins, development and influences*, New York/Heidelberg/Berlin, Springer-Verlag.

NOETHER, Emmy y CAVAILLÉS, Jean. 1937. *Briefweschel Cantor-Dedekind*, Paris, Hermann.

PHILLIPS, Esther R. (editor). 1987. *Studies in the history of mathematics*, Washington, D.C., Mathematical Association of America.

PLA, Josep. 1984. *Els orígens de la teoria de conjunts*, en Manuel Castellet, *El desenvolupament de la matemàtica del segle XIX*, Arxiu de la Secció de Ciències LXXX (Barcelona, Institut d'Estudis Catalans), 9-21.

— 1987. *La "Géométrie" de Descartes com un exemple del "Méthode"*, Actas del III congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales, III, 821-863.

— 1988. *El teorema d'equivalència*, Actes del Sisè Congrés Catslà de Lògica, 101-106.

— 1989. *Alfred Tarski i la teoria de conjunts*, Theoria (IV) **11**, 343-417.

— 1991. *Lliçons de lògica Matemàtica*, Barcelona, Publicaciones y Promociones Universitarias.

RIEMANN, Georg Friedrich Bernhard. 1854. *Über die Darsstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Abhandlungen der mathematischen Classe der Königlichen Gesselschaft der Wissenschaften zu Göttingen **13**, 87-132. En [*1876*, 227-265].

RUSSELL, Bertrand. 1903. *Principles of mathematics*, Cambridge, Cambridge University Press.

SCHRÖDER, Ernst. 1873. *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende. Erster Band: Die sieben algebraischen Operationen*, Leipzig, B.G. Teubner.

SIERPIŃSKI, Wacław. 1918. *L'Axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse*, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques, Série A, 97-152.

— 1928. *Leçons sur les nornbres transfinis*, Paris, Gauthier-Villars.

SINACEUR, M.A. 1971. *Appartenance et inclusion. Un inédit de Richard Dedekind*, Revue d'Histoire des Sciences, 24, 247-254.

TARSKI, Alfred. 1924. *Sur les ensembles finis*, Fundamenta Mathematicae 6 (1924-25), 45-95.

—1930 *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften, I*, Monatshefte für Mathematik und Physik 37, 361-404.

THOMAS, Ivo (editor). 1939. *Selections illuminating the history of Greek mathematics*, I, Cambridge, Mass., Harvard University Press.

VAN HEIJENOORT, Jean (editor). 1967. *From Fege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Cambridge, Mass., Harvard University Press.

VITALI, Giuseppe. 1905. *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Bologna, Tipografia Gamberini e Parmeggiani.

WEBER, Heinrich. 1893. Leopold Kronecker, Mathematische Annalen 43, 1-25.

WUSSING, Hans-Arnold, Wolfgang. 1979. *Biographien bedeutender Mathematiker. Volk und Wissen Volkseigener*, Berlin, Verlag DDR-Berlin.

ZARISKI, Oscar. 1926. *Traduzione e note storico-critiche*, en [Dedekind *1926*].

ZERMELO, Ernst. 1908. *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, Mathematische Annalen 65, 107-128.