Конструктивная математика А.А. Маркова: некоторые размышления
(Светлой памяти Андрея Андреевича Маркова)

Б.А. КУШНЕР

Department of Mathematics
University of Pittsburgh at Johnstown
Johnstown, PA 15904, USA

А. А МАРКОВ

Встают чредой из прошлого печали,
Я счет веду всему, что было жаль,
И будто жизнь опять в своем начале -
Я вновь плачу за каждую печаль.

(В. Шекспир. Сонет 30,
пер. Б.А. Кушнера.)

Abstract. *A.A. Markov's constructive mathematics: some reflections*. A review of constructive mathematics in the Markovian sense is presented, with particular attention to constructive analysis. An account is given of the basic methodological principles of constructive mathematics and of expectations connected with them. A number of results of constructive mathematical analysis, including basic facts of constructive continuum theory and functions on the constructive continuum are presented. Additional questions of constructive analysis, including problems of topology and functional analysis, are considered as well. It is pointed out that although the initial revolutionary intentions are, perhaps, behind us now, the constructive direction still provides a valuable experience of development of mathematics on a purely syntactic and effectivist basis. The last two circumstances are of special importance in the light of recent developments in computer science.

AMS (MOS) subject classifications: 01A70, 01A60, 03F50, 26A03

1. Зарождение советского конструктивного направления в математике можно приблизительно отнести к концу 40-х началу 50-х годов нынешнего столетия. Многие общие черты роднят это течение математической мысли с его непосредственным предшественником интуиционизмом, столь же радикально противопоставившим себя всему остальному математическому миру. История показывает, что революционные идеи, как правило, возникают в связи с яркими и оригинальными личностями, в темпераменте и духовной мощи которых они черпают свою энергию и убедительную силу. Для интуиционизма такой решающей личностью был Л. Брауэр (1881-1966), для конструктивного направления - Андрей Андреевич Марков (мл., 1903-1979). Можно было бы много говорить об Андрее Андреевиче как о математике а еще больше как о человеке необычайного обаяния и душевной чистоты. Сейчас, когда время всё более отодвигает его от нас, неумолимо стирая живые черты нашего общения, необходимость таких воспоминаний становится совершенно настоятельной. Автор надеется, что недалекое будущее доставит коллегам и ученикам Андрея Андреевича возможность выполнить этот их долг.* Тем временем представляется важным философско-методологическое осмысление научного наследия А.А. Маркова и в этом отношении созданное им новое направление в математике является объектом особого интереса.

В настоящей работе автор попытался изложить некоторые свои мысли о конструктивной математике, развитие которой ему довелось наблюдать с начала 60-х годов. Следует подчеркнуть, что как выбор сюжетов, так и расстановка акцентов целиком отражают личную точку зрения автора, ответственность за которую полностью ложится на него одного.

2. Конструктивная математика[1] представляет собою систему математического мировоззрения, отличающуюся от традиционного теоретико-множественного подхода, прежде всего характером допускаемых идеализаций. Любая математика основана на явных или подразумеваемых идеализациях. Например, математический треугольник является результатом абстрагирования от многих конкретных более или менее грубых рисунков или расположений реальных объектов. Такое абстрагирование, воспринимаемое сейчас чуть ли не как тривиальность, в действительности требовало огромных интеллектуальных усилий, а сама способность человека создавать идеальные понятия и оперировать с ними представляется удивительной. В результате наслаивающихся идеализаций, последовательно фиксируемых и обращаемых в повседневность актов воображения постепенно создавался своеобразный математический мир, объекты которого лишь смутно напоминали свои реальные прототипы, а порою и вовсе отрывались от них. Достаточно, например,

* Данная работа написана в 1988 году когда автор еще я жил в Москве. Уже находясь в США, он в какой-то мере постарался выполнить свой долг перед памятью учителя, написов эсса «Марков и Бишоп» [0].

[1] В настоящее время известен ряд конструктивистских течений и соответственно смысл прилагательного «конструктивный» в контекстах, касающиься оснований математики, не вполне однозначен. В настоящей статье этот термин употребляется (если не оговорено противное) только в связи с конструктивной математикой А.А. Маркова.

задуматься о геометрическом мире Евклида, где точка не имеет измерений, прямая ширины, плоскость толщины и т.д., соотнести его с повседневной реальностью, где все «весомо, грубо, зримо», чтобы ещё раз поразиться творческой силе нашего разума и его способности, отталкиваясь от непосредственной прагматики, приходить к великолепным абстрактным конструкциям, обретающим свою реальность в нашей духовной жизни. Канторовская теоретико-множественная концепция математики представляет собой апофеоз этой творческой способности человека. Сам процесс математической идеализации предполагается как бы завершенным, осуществившимся в некотором математическом универсуме, имеющем абсолютный духовный статус бытия. Характерной чертою канторовского подхода, основанного на безграничной вере в творческую мощь человеческого духа[2], является решительное допущение актуально бесконечных математических объектов. Сама актуальная бесконечность становится предметом математического исследования, открывающего в ней удивительные грани и нюансы. Как хорошо известно (см., например, [2], оптимизм Кантора встретился с трагическими разочарованиями, а многовековые сомнения в способности разума безопасно пользоваться полной интеллектуальной свободой оказались, к несчастью небезосновательными. Мы не можем сейчас излагать историю дискуссий и возникновения различных математических направлений, связанных с кризисом теоретико-множественного подхода, разразившимся в конце 19-го начале 20-го века (см., например, [2]). Вряд ли также целесообразно рассматривать возникновение конструктивистской установки, предлагающей альтернативные построение математики, как простую реакцию на затруднения теории множеств. Сомнения в интеллектуальной допустимости центральных теоретико-множественных концепций (таких как онтологический статус математического универсума, актуальная бесконечность, неограниченная применимость аристотелевской логики и т.д.) не были связаны непосредственно с вопросами фактического успеха[3], а носили более глубокий характер. С другой стороны построение математики (или хотя бы центральных её разделов) на основе более скромных, чем теоретико-множественные, идеализаций позволило бы обойти эти сомнения и достичь всех тех преимуществ, которые простой подход имеет перед сложным. К сожалению, сегодня нельзя сказать, что конструктивное или интуиционистткое направления вполне решили эту проблему. При всей значительности и непреходящей ценности их достижений теоретико-

---

[2] Здесь можно напомнить прекрасные слова Кантора: «Математика в своем развитии совершенно свободна и связана лишь тем само собой разумеющимся условием, что ее понятия должны быть непротиворечивы.... Сущность математики заключается именно в её свободе» (см. [1: стр. 80]).

[3] Как раз с этой стороны дела теоретико-множественной математики обстояли совсем неплохо, поскольку парадоксы удавалось локализовать и практически устранить в рамках аксиоматического подхода, сохранив для работающих математиков все доставляемые теорией множеств удобства и вернув им при этом (возможно иллюзорное) чувство безопасности.

множественная математика всё еще имеет существенное превосходство как по разнообразию, так и по гибкости и гармоничности своих теорий. Математик, отклоняющий теоретико-множественный подход в пользу одного из нетрадиционных, подвергает себя, по крайней мере при взгляде со стороны, некоторому духовному самоограничению со всей свойственной такому самоограничению двойственностью. Вопрос о том является ли указанное соотношение между теоретико-множественной математикой и альтернативными течениями закономерным, проявляется ли в нем существенная необходимость рискованных начальных абстракций или же конструктивисткие концепции просто не имели времени, чтобы достаточно себя проявить, представляется интересным и сложным. Автор не берется сколько-нибудь однозначно на него отвечать.

3. В отличие от теоретико-множественной математики, исходящей из способности человека объединять некоторые различимые объекты мысли в новые интеллектуальные образования, называемые множествами, конструктивная математика исходит из первоначальных конструктивных способностей человека, состоящих в умении комбинировать некоторые ясно различимые объекты, составлять сложные объекты из простых, разбирать их, производить копирование и т.д. Именно идеализация этих простых практических умений человека приводит к двум первоначальным и важнейшим концепциям конструктивной математики - понятию конструктивного процесса и конструктивного объекта. Характерной чертой конструктивных процессов является протекающее по отдельным шагам оперирование в рамках некоторых четко указанных правил с элементарными, заведомо отличимыми друг от друга объектами, считающимися неразложимыми в ходе этих процессов. Возникающие в результате фигуры, составленные из исходных элементарных объектов, и считаются конструктивными объектами. Примерами конструктивных процессов могут служить сборка часов на конвеере, полная или частичная их разборка в ремонтой мастерской, набор текстов (с корректурами) в типографии, копирование тех или иных элементарных знаков (происходящее, в частности, при письме) и т.д. Таким образом, конструктивные процессы весьма разнообразны и соответствующее общее понятие может показаться необозримым. К счастью. для нужд конструктивной математики оказывается вполне достаточным гораздо более узкий тип конструктивных процессов (и объектов). Мы имеем ввиду процесс написания слов в данном алфавите, то есть процесс, состоящий в копировании элементарных знаков (букв) из некоторого набора (алфавита)[4] и в последовательном начертании этих копий друг за другом ввиде прямолинейных цепочек. Возникающие таким образом конструктивные объекты называются словами в данном алфавите. Разумеется приведенный только что текст трудно считать математическим определением соответствующих понятий; сами эти понятия следует рассматривать как первоначальные, непосредственно предстоящие нашей интуиции. При обращении со словами конструктивная математика

[4]Все знаки этого набора предполагаются уверенно отличимыми друг от друга. Впрочем, в принципе можно было бы обойтись даже одним небольшим (двухбуквенным) алфавитом.

принимает ряд идеализаций, состоящих, в частности, в допущении способности человека читать, т.е. уверенно опознавать предъявляемые слова как одинаковые или различные по написанию (см. об этом подробнее в [3-4]). На эту способность как минимальную предпосылку всякой научной деятелсности указывал ещё Д. Гильберт. Менее непосредственной является принимаемая конструктивистами так называемая абстракция потенциальной осуществимости, близкая к хорошо известной математико-философской концепции потенциальной бесконечности и состоящая согласно А.А. Маркову «в отвлечении от реальных границ наших конструктивных возможностей, обусловленных ограниченностью нашей жизни в пространстве и времени» ([3, стр. 15]). Именно абстракция потенциальной осуществимости позволяет перейти от конструктивных процессов, развертывающихся от начала и до конца на наших глазах, к воображаемым конструктивным процессам, завершаемость которых усматривается лишь в результате соответствующих интеллектуальных усилий. В частности, становится возможным считать, что к любому слову можно приписать любое другое слово, рассматривать очень большие натуральные числа[5], считать всегда выполнимыми сложение и уможение натуальных чисел. и т.д. Уже из сказанного ясно какую важную роль играет обсуждаемая идеализация в построении самых начальных математических структур и насколько далеко уводит она от непосредственной конструктивной реальности. Вместе с тем эта идеализация представляется в интуитивном отношении заметно более прозрачной, нежели концепция актуальной бесконечности, позволяющая рассматривать завершенные, бесконечные совокупности одновременно существующих объектов (скажем, совокупность всех «сразу написанных» слов в том или ином алфавите). С другой стороны следует подчеркнуть, что различие между актуальной и потенциальной (становящейся) бесконечностью всё же скорее интеллектуальное, нежели практическое. Если человек стоит, скажем, перед рядом телеграфных столбов, уходящих за горизонт, то весь его жизненный опыт подсказывает, что линия эта где-то кончается. Вместе с тем без особых усилий он допускает, что при необходимости можно изготовить еще некоторое количество столбов (не все материалы были исчерпаны при стоительстве линии) и продолжить наблюдаемый им ряд. Абстракция потенциальной осуществимости опирается в сущности на ту часть опыта индивида, которая соединяет его с обществом: если индивидуальная мощь человека сугубо конечна, то взаимодействие его с себе подобными позволяет сколь угодно далеко отодвигать границу этой мощи. Само родовое бессмертие человека (при оптимистическом взгляде в будущее) содержит в себе идею потенциальной, становящейся бесконечности. Возращаясь к нашему примеру, заметим, что поэтическое усилие, знакомое многим, позволяет преодолеть приземленный жизненный опыт и вообразить, что телеграфная линия, уходящая за горизонт вообще нигде не кончается, что столбов бесконечно

---

[5]Например, существование натурального числа $(100!)^{100!}$ как десятичной его записи несомненно факт интеллектуального характера, поскольку вряд ли кто-либо сможет реально выписать цифры этого числа.

много и притом именно в переживаемое индивидом мгновение. Подобное же чувство вызывает у нас звездное небо. Таким образом, идея актуальной бесконечности сама по себе не чужда нашему восприятию, хотя отчётливое осознание её требует помимо поэтического воображения также и интеллектуальных усилий. Интересно отметить, что восприятие больших конечных чисел в некотором смысле затруднительнее: например, сообщение о том, что упомянутых столбов в действительности имеется 285 375 вызывает лишь смутное ощущение, что столбов очень много. Тоже чувство возникнет, если вместо числа 285 375 написать 138 931 или что-нибудь в этом роде. Однако, при развитии математики интеллектуальное различие между потенциально и актуально бесконечным становится весьма существенным фактором, в особенности усугубляемым экстраполяцией в область актуально бесконечного законов классической логики.

Природа конструктивных объектов как результатов выполнения конструктивных процессов непосредственно приводит к следующей трактовке экзистенциальных суждений: утверждение о существовании конструктивного объекта считается установленным в том и только в том случае, когда предъявлен потенциально выполнимый конструктивный процесс, завершающийся построением искомого объекта. Такой подход существенно отличается от классического, при котором существование объекта может быть доказано без малейшего намека на его построение, например приведением к нелепости гипотезы, что искомый объект невозможен. Из сказанного ясно, что двойное отрицание суждения с конструктивной точки зрения, вообще говоря, не равносильно этому суждению (в частности, в случае экзистенциального высказывания оно заведомо менее информативно). Таким образом, конструктивная математика нуждается в особой логике, отличной от традиционной и учитывающей природу конструктивных процессов и объектов. В частности в такой логике не могут быть в сколько-нибудь полной форме приняты законы исключенного третьего и снятия двойного отрицания. Далее, употребление воображаемых, потенциально выполнимых конструктивных процессов приводит к рассмотрению процессов, задаваемых предписаниями. Следующим шагом на этом пути является введение алгорифмов, т.е. общепонятных, элементарных предписаний, определяющих конструктивные процессы, могущие начинаться от варьируемых начальных данных. Например, можно рассмотреть такое предписание: «к произвольному слову в алфавите $\{0, 1\}$ приписать справа букву |». Конструктивный процесс, задаваемый этим предписанием, может начинаться с любого слова в указанном алфавите. Ясно, что он всегда заканчивается за один шаг и в применении к слову **P** даст слово **P**|. Нетрудно указать гораздо более сложные примеры алгорифмов.[6] При этом мы быстро столкнемся с тем фактом, что в некоторых случаях предписание приводит к разворачиванию конструктивного процесса, который заведомо не

[6] Впрочем и приведенный тривиальный пример не так уж бессмыслен: соответствующий алгорифм задаст операцию прибавления единицы к любому натуральному числу, при определенной трактовке натуральных чисел (см. ниже).

может быть закончен, так как после каждого очередного шага предписание обязывает нас совершить следующий. Ясно, что в такой ситуации мы, в сущности, не имеем никакого конструктивного процесса в соответственном смысле слова. Здесь однако, оказывается удобной эллиптическая терминология, позволяющая говорить о предписаниях, задающих незавершаемые конструктивные процессы. Существенной чертой конструктивной математики является переход от интуитивного понятия алгорифма к современным точным концепциям. Весьма удобным для этих целей оказалось понятие нормального алгорифма, предложенное А.А. Марковым (см. [3-4]), поскольку с одной стороны нормальные алгорифмы специально приспособлены к оперированию со словами, являющимися основным типом конструктивных объектов, рассматриваемых конструктивной математикой, а с другой именно на язык нормальных алгорифмов А.А. Марковым была построена (и притом впервые) стройная и математически безупречная общая теория алгорифмов.

Итак, конструктивную математику можно охарактеризовать следующими основными чертами.

А. Предметом изучения являются конструктивные процессы и возникающие в результате выполнения этих процессов конструктивные объекты. При этом особое значение имеют конструктивные объекты специального вида - слова в алфавитах, возникающие в результате последовательных актов копирования знаков (букв) соответствующих алфавитов.

Б. Используется специальная конструктивная логика, учитывающая природу конструктивных процессов и объектов. В частности, не принимаются в сколько-нибудь полном объеме законы исключенного третьего и снятия двойного отрицания.

В. Допускается абстракция потенциальной осуществимости, но полностью исключается концепция актуальной бесконечности.

Г. Идея интуитивной эффективности, вычислимости и т.д. отождествляется с одним из точных понятий алгорифма (в качестве такого понятия в конструктивной математике чаще всего используется понятие нормального алгорифма).

Возникает вопрос о том, какую математику можно построить в рамках столь скромных, по сравнению с обычными, предпосылок. С точки зрения математических стереотипов прежде всего кажется весьма ограничительным и даже странным математический универсум, состоящий из слов в алфавитах. Отметим правда, что развитие информатики на глазах меняет этот стереотип. Действительно, современные компьютеры представляют собой высокоэффективные орудия для обработки знаковой информации, т.е., в сущности, для выполнения знаковых конструктивных процессов. Соответственно сопутствующие их использованию теоретические построения существенно ориентированы именно на синтаксические конструкции, с четким разделением синтаксических и семантических аспектов. Такой подход, развившийся ранее в результате внутренних потребностей математической логики (в особенности гильбертовской теории доказательств) и поставленный во главу угла конструктивной установкой, несвойственен традиционной математике. Интересно наблюдать как в информатике неожиданно приобретают непосредственное практическое значение многие понятия и конструкции математической логики, еще не так давно казавшиеся сугубо абстрактными и теоретическими. В качестве простого примера можно привести польскую, бесскобочную нотацию, которая еще на памяти автора была известна узкому кругу специалистов, да и ими воспринималась как любопытный курьёз. Однако сегодня эта нотация используется в операционных системах многих типов микрокалькуляторов и, таким образом, стала достоянием миллионов пользователей. Столь же интересно встретить черты марковского анализа понятия алгорифма из [3] - книги весьма необычной для математического мышления своего времени - в совершенно практическом руководстве с по микропроцессорам [5].

С другой стороны синтактический подход соответствует часто выражавшемуся в связи с дискуссиями по основаниям теории множеств стремлению рассматривать только такие математические объекты, которые допускают индивидуальные определения в конечное число слов. Подобного рода требования, высказывавшиеся крупнейшими французскими математики (Пуанкаре, Борель, Лебег и др.), представляются вполне естественными и обоснованными.

Из сказанного ясно, что развитие математики на базе синтаксического, «словарного» универсума представляет значительный общенаучный интерес. Менее непосредственной кажется необходимость развития особой, конструктивной логики, хотя и здесь информатика дает неожиданные подтверждения практической полезности соотвестствующих логических систем.

По мнению автора именно синтаксический характер математического универсума наиболее существенным образом отличает конструктивное понимание природы математики от традиционного и интуиционистского. Другой важной стороной конструктивной установки, на сей раз родственной интуционистским устремлениям, является вытекающий непосредственно из начальных методологических концепций акцент на эффективность математических конструкций. Трактовка экзистенциальных суждений, которую мы обсуждали выше и которую можно кратко выразить формулой «существует то и только то, что может быть построено», очень ясно отражает «эффективистский» стиль конструктивного математического мышления.

4. Мы попытаемся проиллюстрировать высказанные выше соображения, сжато описав конструктивное построение действительного числового континуума и (совсем конспективно) теории функций над ним. Пример этот представляется принципальным по ряду причин.

Во-первых, понятие действительного числа занимает одно из самых центральных мест в математике, как с точки зрения архитектуры этой науки, так и с точки зрения её приложений в естествознании. Многие поколения ученых отдавали свой труд, талант и вдохновение построению математического анализа и превратили его в одно из самых мощных интеллектуальных орудий познания окружающего нас мира. Между тем тот математический анализ, который сложился к началу 20-го века и который представляет собой в настоящее время важнейший элемент нашей математической цивилизации, является по существу просто-напросто глубоко разработанной теорией действительных чисел.

Во-вторых, этим понятием по существу завершается процесс построения всё более сложных числовых систем, отправляющихся от простого счета и приходящих (в теории действительных чисел) к идее числового измерения непрерывного. Синтез дискретного и непрерывного представляет собой одну из самых глубоких методологических проблем, решаемых в теории действительного числового континуума (ср. [6]).

В-третьих, переход от натуральных чисел к действительным связан с глубокими логическими проблемами, поскольку здесь впервые появляются объекты второго порядка - функции и отношения (свойства) над натуральными числами. Будем ли мы определять действительные числа как последовательности (по Кантору) или как некоторые множества (свойства) рациональных чисел (по Дедекинду) - в любом случае нам придется столкнуться с самыми общими понятиями закона, «свойства» и т.д. Между тем понятия эти представляются необозримыми и попытка рассмотреть их во всем объеме немедленно приводит к парадоксам. Следуя Г. Вейлю [7], приходится признать соответствующие общие понятия необъемноопределенными.

В четвертых, континуум играет совершенно особую роль в теории множеств, доставляя первый естественный пример несчетной бесконечности (т.е. бесконечности, существенно отличной от актуально бесконечного натурального ряда). Теорема Кантора (1873 г.) о том, что интервал действительной прямой не может быть поставлен во взаимно-однозначное соответствие с натуральным рядом, несомненно открыла принципиально новую главу в развитии математического знания. Нельзя обойти стороной и существенные методологические трудности, сопровождающие наше постижение природы математической бесконечности. Например, можно поставить неожиданный вопрос о том, является ли континуум (да и любая несчетная совокупность вообще) множеством в смысле Кантора. Действительно, в программной работе Кантора 1895 г. можно прочесть: «Под «множеством» мы понимаем соединение в некое целое M определенных хорошо различимых предметов m нашего созерцания или нашего мышления (которые будут называться «элементами» множества M)» ([1: стр. 173]). Идея ясной интеллектуальной обособленности элементов корректно заданного множества друг от друга является характерной чертой теории Кантора (см., например, [1: стр. 50, 269, 270, 298]). Вместе с тем в случае несчетного множества языковое различение всех его элементов заведомо невозможно, поскольку языковых описаний (включая и бессмысленные) для этого попросту нехватает. Возможно ли внеязыковое интеллектуальное различение любых двух действительных чисел? Даже если и допустить такую возможность, то, по-видимому, придется относить её всякий раз исключительно к индивидуальной жизни каждого субъекта, поскольку неязыковое научное общение между различными индивидами трудно себе представить. Действительно, пусть некий математик интуитивным, неязыковым усилием выделил из континуума некоторое действительное число x. Каким способом может он передать это своё знание x коллегам? Существует ли такой способ? Сомнительно.

Мы могли бы без труда продолжать наш перечень замечательных свойств континуума и связанных с ним проблем, но уже из сказанного ясно, что теория действительных чисел находится на перекрестке главных математических дорог и, следовательно, может рассматриваться как пробный камень для тех или иных методов построения математики. Несколько огрубляя ситуацию, можно выделить три современных трактовки континуума: традиционную, интуиционистскую, конструктивную. Первый подход общеизвестен, о втором можно прочесть, например, в [2, 6-9]. Откладывая до конца статьи все сравнения, мы перейдем к краткому описанию конструктивной теории действительных чисел.

5. Конструктивное определение натуральных, целых и рациональных чисел не составляет проблем. Под натуральными числами мы понимаем слова вида 0, 01, 011 ... в двухбуквенном алфавите $\{0, 1\}$. Добавляя к этому алфавиту букву - , мы определяем целые числа как натуральные числа или слова вида-n, где n - натуральное число. Наконец, присоединив к последнему алфавиту еще знак /, мы определяем рациональные числа как целые числа или слова вида a/b, где a - целое число, b - натуральное число, причем $b \not\doteq 0$. (Мы используем следующие обозначения. Запись $P \doteq Q$ означает, что слова P и Q графически равны, т.е. совпадают по написанию. Соответственно $P \not\doteq Q$ означает, что P и Q графически различны, т.е. не совпадают по написанию).

Определение отношений равенства, порядка и алгорифмических арифметических операций над натуральными, целыми и рациональными числами также не вызывает никаких затруднений. Ниже через N мы обозначаем свойство слова в алфавите $\{0, 1\}$ быть натуральным числом. Соответственно, через R мы обозначим свойство слова в соответствующем алфавите быть рациональным числом. Мы будем использовать привычную и удобную запись вида $P \in C$ чтобы выразить то обстоятельство, что слово P обладает свойством C. В таких ситуациях мы будем также говорить, что P принадлежит множеству C. Отметим, что при этом не делается никакой уступки теоретико-множественной установке. Для нас употребление множеств это просто *façon de parler*, удобный и лаконичный способ выражаться. «Множество» и «свойство» - синонимы и никакого представления о совокупности одновременно существующих объектов с тем или иным свойством не предполагается. Сами же свойства могут задаваться как синтаксические конструкции в тех или иных логико-математических языках. Впрочем, в рамках данной статьи нет особой потребности в рассмотрении свойств (множеств) вообще, поскольку мы будем иметь дело с очень небольшим числом конкретных случаев употребления введенного только что способа обозначений.

6. Приступая к определению действительных чисел, мы сразу попадаем другой ландшафт. С традиционной точки зрения действительное число это рациональное число или последовательность рациональных чисел α, удовлетворяющая условию фундаментальности

$$(1) \qquad \forall n \exists m \forall ij\ (i, j \geq m \supset |\alpha(i) - \alpha(j)| < 2^{-n})$$

Прежде чем перейти к конструктивному пересмыслению условия (1) и понятия последовательности, сделаем некоторые замечания об алгорифмах и условимся о связанных с ними обозначениях.

Все рассматриваемые нами алгорифмы считаются нормальными алгорифмами. При этом, не теряя общности, можно ограничиться нормальными алгорифмами в некотором фиксированном небольшом алфавите. Упоминания об этом алфавите будут ниже, как правило, опускаться. Как известно, нормальные алгорифмы задаются схемами, которые в свою очередь однозначно кодируются словами в алфавите $\{0, 1\}$, называемыми записями соответствующих алгорифмов. Запись алгорифма α обозначается посредством α^3. Пусть M_1, M_2 - два множества слов. Мы называем алгорифм α алгорифмом типа $M_1 \xrightarrow{\cdot} M_2$, если он перерабатывает всякое слово из M_1, к которому применим, в слово из M_2. Если сверху того, α применим к любому слову из M_1, то α называется алгорифмом типа $M_1 \rightarrow M_2$.

В традиционной математике под последовательностью элементов данного множества понимают везде определенную функцию натурального аргумента со значениями из этого множества. Другими словами, имеется некоторое соответствие (закон), сопоставляющее каждому натуральному числу надлежащей элемент из множества значений. В рамках конструктивной математики речь может идти только о последовательностях конструктивных объектов и тогда упомянутое выше соответствие естественно представлять себе ввиде общего конструктивного процесса, начинающегося с любого натурального числа и завершающегося построением искомого конструктивного объекта. Мы приходим, поэтому, к следующему определению: конструктивной последовательностью слов из множества M называется алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в слово из M. Говоря короче, конструктивные последовательности элементов - это просто алгорифмы типа $N \rightarrow M$. Соответственно конструктивные последовательности натуральных (рациональных) чисел суть алгорифмы типа $N \rightarrow N$ ($N \rightarrow R$). Отметим, что систематическое построение конструктивной математики производится изначально и независимо от другух течений. Конструктивная математика в этом аспекте не рассматривается как часть более общей математической науки и сама образует математический универсум для соответствующим образом настроенного исследователя. Конечно, в таком контексте непоследовательно употреблять прилагательное «конструктивный» в только что приведенном определении (и в ряде предстоящих определений). Ничего «неконструктивного» ведь нет! Однако в данной статье конструктивная математика трактуется именно как одно из математических течений и именно в сопоставлении с другими течениями. Поэтому возникает необходимость различать аналогичные понятия, терминологию. Впрочем, в безопасных случаях мы будем опускать прилагательное «конструктивный».

Условие (1) трактуется конструктивно в том же духе, что и понятие последовательности. Именно, с конструктивной точки зрения оно выражает существование алгорифма β типа $N \to N$, называемого регулятором фундаментальности α такого, что

$$(2) \qquad \forall n \forall ij\, (i, j \geq \beta(n) \supset |\alpha(i) - \alpha(j)| < 2^{-n})$$

Теперь мы готовы сформулировать наше центральное определение.

Конструктивным действительным числом (к.д.ч.) называется рациональное число или слово вида $\alpha^3 * \beta^3$, где α - конструктивная последовательность рациональных чисел, β - конструктивная последовательность натуральных числа, причем выполняется условие (2).

Введённое только что понятие принадлежит Н.А. Шанину [10], употреблявшему термины «*FR*-число», «дуплекс». Еще ранее А.А. Марков предлагал несколько другое понятие конструктивного действительного числа, при котором такое число задается фундаментальной конструктивной последовательностью рациональных чисел с фиксированной скоростью сходимости в себе. Оба упомянутых понятия приводят к изомофным теориям действительных чисел, но принятое нами определение выглядит более естественным и гибким. Ниже множество к.д.ч. обозначается посредством D.

С традиционной точки зрения к.д.ч. соответствуют представлениям о вычислимых действительных числах, поскольку под последними обыкновенно подразумевают действительные числа, для которых можно эффективно находить сколь угодно точные рациональные приближения. В самом деле, как синтаксический объект, к.д.ч. представляет собою кодированную информацию, позволяющую для каждого n находить приближение к x с точностью 2^{-n}. Для $x \mathrel{\overline{\overline{\cdot}}} \alpha^3 * \beta^3$ таким приближением является рациональное число $\alpha(\beta(n))$.

Отметим, что несмотря на всю естественность сформулированного выше понятия к.д.ч., его осознание отнюдь не было простым делом. Например очень соблазнительно рассматривать систематические (скажем, десятичные) дроби, задаваемые алгорифмами (при каждом n соответствующий алгорифм находит n-й разряд дроби). Именно на этом пути Тьюринг [11] предложил одно из первых определений вычислимого действительного числа. Однако при более детальном изучении подход, основанный на систематических дробях, оказался неудобным с точки зрения специфических требований, предъявляемых к структурам, ориентированным на эффективное обращение с математическими объектами. Например, невозможен алгорифм сложения «десятично-вычислимых чисел» (конечно, эта ситуация не изменится при переходе к другой системе счисления). Невозможен также эффективный переход от к.д.ч. к десятичным дробям: алгорифм, строящий для каждого к.д.ч. его десятичное разложение (в указанном выше смысле), не существует. Кстати, осознание этого факта восходит ещё к Брауэру [13]. Можно отметить также, что различные системы счисления оказываются неравноценными с эффективистской точки зрения: например, эффективный переход от десятичных дробей к двоичным возможен, а наоборот - нет. Неудивительно, что Тьюринг [12] вскоре отказался от своего первоначального определения и сформулировал новое понятие вычислимого действительного числа, в некоторых отношениях близкое к нашему понятию к.д.ч.[7]

Внимательный читатель отметил, по-видимому, что наше прочтение классического условия (1) основано на совершенно эффективистской трактовке встречающейся тем комбинации кванторов. Возможна и более либеральная (с традиционной точки зрения) трактовка, при которой условие (1) заменяется конструктивным условием

$$\forall n \neg\neg \exists m \forall ij\ (i, j \geq m \ \supset |\alpha(i) - \alpha(j)| < 2^{-n}), \qquad (3)$$

где α - конструктивная последовательность рациональных чисел. Условие (3) не предполагает существования регулятора фундаментальности α - для установления этого условия достаточно чисто отрицательных рассуждений, не связанных с умением эффективно находить искомое m по n. Именно, при каждом n достаточно привести к противоречию гипотезу

$$\neg \exists m \forall ij\ (i, j \geq m \ \supset |\alpha(i) - \alpha(j)| < 2^{-n}).$$

Изложенная трактовка условия фундаментальности (1) приводит к еще одной нетрадиционной концепции действительного числа - к так называемым псевдочислам (см. [10] и [14]). Приведем точное определение. Под псевдочислами мы понимаем рациональные числа или слова вида α^3, где α - конструктивная последовательность рациональных чисел, удовлетворяющая условию (3).

Система псевдочисел, обозначаемая ниже посредством D_1, дает еще один пример чисто синтаксического континуума. Интересно, однако, что и этим возможности различных конструктивных прочтений условия (3) не исчерпаны. При небольшом размышлении приходят в голову еще два своеобразных синтаксических варианта понятия конструктивного действительного числа. Именно, назовем F-числом (квазичислом) рациональное число или слово вида α^3, где α - конструктивная последовательность рациональных чисел, для которой существует (не может существовать) регулятор фундаментальности. Обозначим систему F-чисел через D^F и систему квазичисел через D^K. Таким образом, в данный момент (если отвлечься от систематических дробей) мы рассматриваем четыре варианта конструктивного континуума. Для того чтобы быстрее и яснее сравнить эти варианты друг с другом мы пойдем на

[7] Определение Тьюринга (и ряда других авторов) находятся в рамках традиционной математики: они выделяют некоторые действительные числа, называемые вычислимыми. Наше определение носит начальный характер и не предполагает никакого «внешнего» понятия действительного числа.

несколько незаконную (с конструктивной точки зрения) вещь, а именно до конца абзаца будем рассматривать все упомянутые понятия действительного числа как частные случаи соответствующего классического понятия. Ясно, что все эти четыре континуума вложены в классический континуум и, следовательно, можно говорить «запасе» классических точек, выделяемых тем или иным из рассмотренных конструктивных определений. При этом выясняется интересный факт: конструктивные действительные числа, F-числа и квазичисел выделяют одни и те же точки на действительной прямой, тогда как псевдочисла образуют более широкое подмножество классического континуума. Точнее говоря, существуют псевдочисла, отличные от всех к.д.ч., F-чисел и квазичисел. Этот факт устанавливается не очень просто и тесно связан со знаменитой теоремой Шпекера [E. Specker], о которой мы будем говорить ниже. Во всяком случае разница между псевдочислами и к.д.ч. достаточно очевидна и обнаруживается уже в простом различии «платонистских» объемов этих понятий. Различие между континуумом D с одной стороны и континуумами D^F и D^K к другой стороны с традиционной точки зрения уже своеобразно, хотя все еще достаточно очевидно. Дело в том, что к.д.ч. имеют другую синтаксическую природу, нежели F- и квазичисла. А именно, индивидуальное задание к.д.ч. содержит в себе информацию о последовательности рациональных чисел и о её регуляторе фундаментальности, тогда как в индивидуальном задании F-числа (или квазичисла) никакой информации о регуляторе фундаментальности нет. Ясно, что эти синтаксические объекты, рассматриваемые как исходные данные для алгорифмической обработки, совершенно неравноценны. Это вполне очевидное соображение может быть подкреплено теоремой о том, что эффективное восполнение информации, недостающей в F- и квазичислах как синтаксических объектах, невозможно (см. [14]). Все приведенные рассуждения однако недостаточны, чтобы уловить разницу между F- и квазичислами. И действительно здесь мы вступаем на почву, где своеобразная конструктивная методология сказывается в полной мере. Начнем с простого примера. Пусть $\ddot{\alpha}$ - алгорифм такой, что при любом натуральном n

$$\alpha \doteqdot \begin{cases} 1 \text{ , если среди чисел } 2i+1, \text{ где } i \le n, \text{ встречается совершенное число ,} \\ 0 \text{ , в противенное случае} \end{cases}$$

Ясно, что α является конструктивной последовательностью рациональных чисел, причем эта последователсность состоит из одних нулей, если нечетных совершенных чисел не существует. Если же нечетные совершенные числа существуют и $2i+1$ наименьшее такое число, то

$$\alpha(k) \doteqdot \begin{cases} 0 \text{, при } k < i \quad , \\ 1, \text{ при } k \ge i \end{cases}$$

Рассмотрим теперь слово $\overline{\alpha}^3$. Нетрудно видеть, что мы имеем дело с квазичислом. Действительно, пусть $P(n)$ есть предикат «число $2n$+1 - совершенное». Тогда в предположении, что $\overline{\alpha}$ не имеет регулятор фундаментальности мы без труда получаем $\neg\exists P(n)$ и $\neg\neg\exists P(n)$, т.е. противоречие. Вместе с тем мы не в состоянии утверждать, что $\overline{\alpha}^3$ является F-числом. Для обоснования последнего утверждения мы должны были бы предъявить регулятор фундаментальности α. Вместе с тем, располагая таким регулятором $\overline{\beta}$, мы бы рассмотрели член последовательности $\overline{\alpha}\,(\overline{\beta}\,(1))$. Тогда, согласно (2),

$$\forall i\, j\, (i, j \geq \overline{\beta}(1) \supset | \overline{\alpha}\,(i) - \overline{\alpha}\,(j) | < 2^{-1}) .$$

Отсюда следует, что при $i \geq \overline{\beta}(1)$,

$$\overline{\alpha}\,(i) \div \overline{\alpha}\,(\overline{\beta}\,(1)) .$$

Следовательно нечетные совершенные числа существуют тогда и только тогда, когда $\overline{\alpha}\,(\overline{\beta}\,(1)) \div 1$. И так, вполне невинная на первый взгляд задача построения регулятора фундаментальности оказалась эквивалентной одной из самых знаменитых и самых безнадежных (во всяком случае до сего дня не решенных) математических проблем. Если читатель подумает, что не менее знаменитая проблема Ферма также может быть представлена ввиде задачи построения регулятора фундаементальности некоторой конструктивной последовательности рациональных чисел, то он окажется прав. Число такого рода примеров можно было бы увеличить.

Приведенное только что рассуждение (кстати сказать вполне интуиционистское по своей стилистике) показывает, что убеждение в том, что всякое квазичисло является F-числом, тесно связано с платонистской убежденностью в возможности решить любую корректно поставленную математическию проблему. В системах математического мировоззрения, признающих математические истины не сами по себе, а только в связи с нашей непосредственной способностью их устанавливать, такого рода убежденность недопустима как основание для математических рассуждений. Конструктивная математика идет ещё дальше, устанавливая следующую парадоксально звучащую теорему: неверно, что всякое квазичисло является F-числом. Парадоксальность этого утверждения проявляется в том, что, очевидно, невозможно квазичисло, про которое мы доказали бы, что оно не является F-числом. Возникает даже ощущение, что мы находимся в непосредственной близости от противоречия. Однако, на самом деле вся ситуация решается очень просто: с конструктивной точки зрения утверждение «всякое квазичисло является F-числом» означает то же самое, что «существует алгорифм, строящий для каждого квазичисла α^3 регулятор фундаментальности α».[8] Последний же алгорифм, как уже упоминалось, попросту невозможен и это является не философским, а чисто математическим фактом (в том числе и для традиционной математики). Более того, можно привести пример конструктивной последовательности квазичисел, не являющейся последовательностью F-чисел (см. [14]). Точный смысл этого утверждения читатель легко восстановит сам в духе вышеприведенных соображений. После сказанного уже оказывается не удивительным, что континуумы D^K и D^F обладают существенно различными математическими свойствами. Достаточно лишь принять во внимание, что у этих числовых систем различается запас конструктивных последовательностей их элементов. К сожалению, в рамках данной статьи мы не можем углубляться в этот вопрос. Отметим только, что с теоретико-множественной точки зрения D^K является двойным дополнением D^F и потому эти множества должны были бы совпадать. Однако в рамках эффективистских концепций такое совпадение отнюдь не обязательно (поскольку неприемлем общий закон снятия двойного отрицания) и в рассмотренном случае оно действительно места не имеет.

Мы надеемся, что рассмотренная нами проблема конструктивной интерпретации классического понятия фундаментальной последовательности хорошо иллюстрирует специфику конструктивного подхода. В частности, очень своеобразно расщепление классических понятий, возникающее из-за сочетания синтаксических и эффективистских соображений. Там, где классическая математика кладет один решительный мазок, конструктивист склонен различать многие нюансы, оказывающиеся весьма существенными в его суровом эффективистском мире. В частности, с традиционной точки зрения достаточно необычным является различение равнообъемных континуумов, отличающихся лишь своей синтаксической структурой (и, следовательно, информацией, заключенной в их словахэлементах). Еще необычнее выглядит различение однородных синтаксических структур, предполагающих всего лишь нашу неодинаковую информированность об элементах структур. Здесь проявляет себя своеобразная, но стройная конструктивная методология с одной стороны и вытекающая из неё конструктивная логика с другой. В этой логике, специально ориентированной на эффективность и не предполагающей никаких философских предпосылок платонистского толка об истинах, существующих в некоем абсолютном, независимом от человеческого знания смысле, можно, в частности, наблюдать любопытное разделение «положительных» и «отрицательных» математических суждений.

7. Хотя каждая из рассмотренных нами числовых систем представляет самостоятельный интерес, непосредственно ясно, что именно понятие конструктивного действительного числа наиболее гармонично и естественно

---

[8] Таким образом, суждения $\neg\exists x\,(x\in D^K\ \&\ x\notin D^F)$ и $\neg\forall x\,(x\in D^K \supset x\notin D^F)$, образующие две взаимо-исключающие альтернативы в платонистском мире классической логики, имеют в конструктивной логике разную интерпретацию и не противостоят друг другу (ср. сходную интуиционистскую ситуацию, описанную в [6: стр. 241]).

со всех точек зрения. Соответственно, именно D мы и будем назывaеть конструктивным континуумом, сосредоточив на нем в дальнейшем наше внимание.

Как устроен конструктивный континуум? Прежде всего мы пока что имеем дело с числовой системой, лишенной всякой привычной структуры: не определены отношения равенства и порядка, а также арифметические операции. Ликвидировать этот пробел нетрудно. Остановимся вкратце на введении отношений порядка, точнее распространении этих отношений с рациональных чисел (для которых соответствующие построения практически не отличаются от классических) на D. Пусть $x_1 \overset{=}{\cdot} \alpha_1{}^3 * \beta_1{}^3$, $x_2 \overset{=}{\cdot} \alpha_2{}^3 * \beta_2{}^3$ - два к.д.ч. Тогда

$$x = y \underset{\mathrm{df}}{\leftrightarrow} \forall n\,(|\alpha_1\,(\beta_1(n)) - \alpha_2(\beta_2(n))| \le 2^{-n+1})\ ,$$

$$x > y \underset{\mathrm{df}}{\leftrightarrow} \exists n\,(\alpha_1\,(\beta_1(n)) - \alpha_2(\beta_2(n)) > 2^{-n+1}\ )\ ,$$

$$x < y \underset{\mathrm{df}}{\leftrightarrow} y > x\ ,$$

$$x \le y \underset{\mathrm{df}}{\leftrightarrow} \neg(x > \mathrm{y})\ ,$$

$$x \ge y \underset{\mathrm{df}}{\leftrightarrow} \neg(y \le \mathrm{x})\ .$$

(Не следует в дальнейшем путать знак действительного равенства = со знаком графического равенства $\overset{=}{\cdot}$).

Далее можно было бы построить алгорифмы, задающие арифметические операции на D (см. [14]). Практически все обычные свойства отношений равенства и порядка, а также арифметических операций могут быть систематически установлены (что и сделано, например, в [14]). Некоторые нюансы приносит здесь лишь конструктивная логика с её бескомпромиссным пониманием дизъюнкции и существования. Например, непривычно для «классического» уха прозвучали бы следующие конструктивистские теоремы:

(4) $$\neg\forall x\,(x = 0 \vee x \neq 0),$$
$$\neg\forall x\,(x < 0 \vee x = 0 \vee x > 0),$$
$$\neg\forall x\mathrm{y}(x \ge \mathrm{y} \supset (x = y \vee x > y))\ ,$$

и т.д. Тем более, что наряду с этими утверждениями конструктивно доказываются следующие результаты:

$$
\begin{aligned}
&(5) \qquad && \forall x\ (\neg\neg(x = 0 \vee x \neq 0)),\\
& && \forall x\ (\neg\neg\ (x < 0 \vee x = 0 \vee x > 0)),\\
& && \forall xy(x \geq y \supset \neg\neg(x = y \vee x > y)) \ .
\end{aligned}
$$

Однако, весь этот феномен повидимому уже ясен читателю из предыдущего пункта. Например, парадоксальное (особенно в сочетании с (5)) утверждение (4) означает всего лишь невозможность алгорифма, решающего проблему равенства произвольного к.д.ч. нулю. Не очень продолжительных размышлений вполне достаточно, чтобы понять, что никаких подходов к построению такого алгорифма не видно. А потому и теорема о его в невозможности (см. например, [14]) кажется вполне естественной. Чтобы подкрепить эти слова приведем простой пример, показывающий насколько сложной может быть задача распознавания равенства к.д. ч. нулю. Пусть $\overline{\alpha}$ - конструктивная последовательность рациональных чисел, построенная в п. 6. Постромы алгорифм γ так, чтобы при любом натуральном n выполнялось

$$\gamma(0) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} 0 \ ,$$

$$\gamma(n + 1) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \begin{cases} 2^{-n-1}, & \text{если} \quad \overline{\alpha}\,(n + 1) \mathrel{\underset{\cdot}{\neq}} \overline{\alpha}\,(n) \ , \\ \gamma(n) \ , & \text{елси} \quad \overline{\alpha}\,(n + 1) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \overline{\alpha}\,(n) \ . \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что конструктивная последовательность рациональных чисел γ устроена следуюшим образом. Если не существует нечетные совершенных чисел, то

$$\forall i\ (\gamma(i) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} 0) \ .$$

Если же нечетные совершенные числа существуют и $2k + 1$ наименьшее такое число (очевидно, $k \neq 1$), то

$$\gamma(i) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} \begin{cases} 0, \text{ при } \ i < k \ , \\ 2^{\ k} \ , \text{ при } i \ \geq k \ . \end{cases}$$

Ясно, что тождественный алгорифм **Id** такой, что

$$\forall n\ (\mathbf{Id}(n) \mathrel{\underset{\cdot}{=}} n) \ ,$$

является регулятором фундаментальности γ. Следовательно, слово

$$\bar{x} = \gamma^3 * \mathbf{Id}^3$$

является к.д.ч., причем утверждение, $\bar{x} = 0$ равносильно тому, что нечетных совершенных чисел не существует. Таким образом, задача распознавания равенства 0 конкретного к.д.ч. $\bar{x}$ эквивалентна одной из самых знаменитых нерешенных проблем теории чисел.

Но вернёмся к общим свойствам конструктивного континуума. Сам термин «континуум» указывает на какую-то непрерывность. И, действительно, наша интуиция представляет себе континуум ввиде некоторой «сплошной» геометрического протяженности. При всей смутности этих представлений возникает вопрос о том, в какой мере может им удовлетворить такое чисто синтаксическое образование как D. В частности, с точки зрения классического континуума D является лишь его весьма «дырявым» счетным подмножеством. Быть может D, в сущности, мало чем отличается от множества рациональных чисел, которое, хотя и обладает свойствами плотности (между любыми двумя числами можно вставить рациональное), все же имеет обнаруженные еще пифогорейцзми пробелы? Оказывается, что здесь имеют место существенные различия, дающие D с конструктивной точки зрения право именоваться континуумом. В самом деле, пробелы во множестве рациональных чисел могут быть обнаружены следующим образом. Мы можем, построить (и притом эффективно!) последовательность рациональных сегментов $|r_n, s_n|$ такую что

(6) $$\forall n(|r_{n+1}, s_{n+1}| \subseteq |r_n, s_n|) \quad ,$$

(7) $$\forall n(|s_n - r_n| < 2^{-n}) \quad ,$$

и не существует рационального числа, принадлежащего всем сегментам этой последовательности (в качестве r_n и s_n могут быть взяты десятичные приближения по недостатку и избытку, например, для $\sqrt{2}$). Таким образом, эти вложенные сегменты как бы стягиваются в пустоту, что и рождает ощущение нарушения непрерывности, «сплошности» множества рациональных чисел. С точки зрения конструктивного мира естественно рассматривать конструктивные последовательности сегментов, удовлетворяющие условиям типа (6) - (7) (с соответствующими изменениями в обозначениях; при этом под конструктивными сегментами понимаются слова вида $x_1\Delta x_2$ где x_1, $x_2 \in D$ и $x_1 \leq x_2$). Тогда оказывается, что для всякой такой последовательности конструктивных сегментов можно указать (и притом эффективно!) к.д.ч., принадлежащее всем сегментам этой последовательности. Соответствующая классическая теорема, иногда называемая принципом вложенных отрезков Кантора, выражает непрерывность классического континуума. Соотвественно в круге конструктивных принципов, можно считать непрерывной, сплошной - другими словами континуальной числовую систему D.

Конструктивный принцип вложенных отрезков (как и его классический прототип) допускает интересную эквивалентную переформулировку, подчеркивающую пригодность соответствующего континуума для построения теории сходимости. Поскольку к.д.ч. являются словами, мы очевидным образом можем рассматривать конструктивные последовательности к.д.ч. Понятие регулятора фундаментальности для такой последовательности определяется точно также, как и выше. В том же порядке идей определяется понятие конструктивной сходимости. Именно, мы говорим, что конструктивная последовательность к.д.ч. α сходится к к.д.ч. x, если существует алгорифм β типа $N \to N$ такой, что

$$\forall n\, i\ (i \geq \beta(n) \supset | \alpha(i) - x | \leq 2^{-n}) \ .$$

Имеет место следующая теорема о полноте конструктивного континуума: всякая фундаментальная конструктивная последовательность к.д.ч. сходится к некоторому к.д.ч. Более подробно: существует алгорифм, находящий по каждому слову $\alpha^3 * \beta^3$, где α - конструктивная последовательность к.д.ч., β - её регулятор фундаментальности, к.д.ч., к которому сходится α.

Теорема о полноте аналогична известной классической теореме Коши и, также как и последняя, позволяет развить глубокую и богатую теорию сходимости.

Еще одно замечательное свойство классического континуума, подчеркивающее его принципиальное отличие от дискретных образований, состоит в том, что континуум несчетен, т.е. не может быть поставлен во взаимно-однозначное соответствие с натуральным рядом. Это открытие, сделанное в 1873 г. Г. Кантором, по своему значению вполне может быть сопоставлено с открытием пифагорейцами (приблизительно в пятом веке до н.э.) иррациональных чисел. Результат Кантора можно сформулировать следующим образом: для всякой последовательности действительных чисел существует действительное число, отличное то всех членов этой последовательности. Другими словами, континуум не может быть (в отличие от натуральных и рациональных чисел) исчерпан последовательностью. На первый взгляд это свойство классического континуума не может иметь конструктивных аналогов, поскольку континуум будучи подмножеством счетного множества (а именно множества всех слов в соответствующем алфавите), сам счетен. Однако с точки зрения конструктивиста само понятие счетности, апеллирующее к общей концепции функции, неудовлетворительно. В конструктивном мире вместо счетности естественно говорить о перечислимости, т.е. о возможности получить данное множество в качестве множества значений какой-нибудь конструктивной последовательности его элементов. Иными словами, вместо произвольных последовательностей рассматриваются последовательности алгорифмические. В таком случае подмножество перечислимого множества уже не обязано автоматически быть перечислимым. Во вяском случае это совершенно неочевидно. Интересно, что соображения подобного рода высказывались задолго до появления конструктивной математики - их можно найти, в частности, в монографии Э. Бореля [15]. Оказывается, что конструктивный континуум неперечислим. Имеет место даже ещё более сильный результат: по всякой конструктивной последовательности к.д.ч. можно (эффективно) найти к.д.ч., отличное (в смысле отношения равенства к.д.ч.) от всех членов этой последовательности.

Таким образом, конструктивный континуум обладает с точки зрения конструктивиста двумя важнейшими чертами, отличающими его от «неконтинуальных» множеств, - полнотой и неперечислимостью.

8. Мы не рассматривали пока группу важных свойств классического континуума, связанных с его компактностью. Приведем некоторые известные результаты этого рода (мы не касаемся вопросов взаимной силы и зависимости этих результатов).

(1) Всякое ограниченное множество действительных чисел имеет точные границы.

(2) Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.

(3) Всякая ограниченная последовательность действительных чисел имеет предельную точку.

(4) Из всякой ограниченной последовательность действительных чисел можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

(5) Из всякого интервального покрытия сегмента можно выбрать конечное подпокрытие.

Следует отметить, что все эти свойства интуитивно менее осязаемы, чем рассмотренные выше (ср., например, интересное примечание на стр. 16 монографии Г.Е. Шилова [16], относящееся к существованию точных границ ограниченных множеств). Не имея, как правило, непосредственного выхода в прикладные вопросы, свойства компактности оказывают значительное влияние на классическую теорию функций действительной переменной, в большой степени определяя лицо этой теории. С этими свойствами связаны, например, такие известные результаты, как теорема об ограниченности непрерывной на сегменте функции, теорема о равномерной непрерывности такой функции и т.д. И именно в этих чертах конструктивный континуум существенно отличается от классического. В отличие от рассмотренных ранее результатов естественные контруктивные аналоги теорем (1) - (5) оказываются неверными, причем все соответствующие общие утверждения даже опровергаются на примерах (можно было бы ведь ожидать и такой ситуации: скажем, невозможно покрытие, не допускающее конечного подпокрытия, однако алгорифм, всякий раз находящий искомое подкрытие невозможен). Для утверждений (1) - (4) это следует из замечательной теоремы Э. Шпекера (1949 г.), которая в рамках нашей системы понятий звучит следующим образом: можно построить возрастающую конструктивную последовательность рациональных чисел S такую, что $\forall n\ (0 < S(n) < 1)$ и S не является фундаментальной (т.е. не допускает регулятора фундаментальности). Отсюда следует, что S не сходится не к какому к.д.ч. Соответственно, множество значений S не имеет точной верхней грани в D, S не имеет предельной точки в D и из нее нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности. Интересно, однако, заметить, что S, как и всякая монотонная, ограниченная последовательность, обладает свойством псевдофундаментальности (см. (3)). Таким образом, слово S^3 является псеводчислом, существенно отличным от всех элементов D (о существовании таких нсевдочисел мы уже упоминали). Следовательно, S сходится с точки зрения континуума D_1, что открывает интересный путь, на котором можно пытаться в каком-то смысле восстановить свойства компактности, а также получить более полную информацию о необычно ведущих себя конструктивных образованиях. В этом направлении действительно получены важные результаты, на чем мы здесь не можем, к сожалению, останавливаться. Отметим лишь, что дело обстоит не так просто как может на первый взгляд показаться: например, существует конструктивная монотонная ограниченная последовательность элементов D_1, не имеющая предела в D_1.

Весьма тонкий контрпример к теореме о выборе конечного покрытия (так называемая лемма Бореля) был построен в 1955 г. И.Д. Заславским (см. также [14]).

9. Следующим естественным шагом в развитии конструктивного математическкого анализа явилось бы, очевидно, определение функций над D. Выбор соответствующего конструктивного понятия, конечно, также неоднозначен и связан со значительной ответственностью. Нам представляется весьма гармоничным понятие конструктивной функции, предложенное А.А. Марковым в 1954 г. Это понятие находится в том же круге идей, что и определение конструктивных действительных чисел и также достигается эффективистской трактовкой терминов «закон», «соответствия» и т.д. в классической концепции функции в смысле Дирихле. Конструктивные функции реализуют идею именно точечного (а не аппроксимационного) соответствия, что хорошо согласуется с точечной природой конструктивного континуума. Кроме того такой подход позволяет во многих отношениях сохранить гибкий и выразительный язык, выработанный в классической теории функций. Повидимому именно свойственное точечному подходу обособление сложных аппроксимационных процессов в отдельные, цельные сущности, рассматриваемые сами по себе, и обеспечивает стимулирующие качества упомянутого языка, поскольку при этом появляется возможность отвлекаться от многослойных предельных переходов, скрытых за многими объектами математического анализа. Конечно, аппроксимационный подход имеет очевидные методические достоинства, особенно в контексте оснований математики, однако достоинства эти достигаются отнюдь не даром. Чтобы убедиться в этом достаточно, как нам кажется, познакомиться с изложением элементарных и хорошо знакомых читателю вопросов математического анализа в рамках чисто аппроксимационной трактовки Р. Гудстейна [17].

Предметом наших рассмотрений является именно конструктивный континуум, поэтому мы коснемся конструктивных функций лишь вкратце, тем более что тема эта (в особенности вопросы, группирующиеся вокруг свойств непрерывности) вполне заслуживает отдельной статьи. По тем же соображениям мы ограничимся рассмотрением лишь везде определенных конструктивных функций.

Определение конструктивной функции звучит очень просто: алгорифм f типа $D \to D$ называется конструктивной функцией (к.ф.), если для любых x_1, x_2 из D имеет место

$$x_1 = x_2 \supset ((f(x_1) = (f(x_2)) .$$

Следует сразу же заметить, что в терминах к.ф. могут быть вполне успешно развиты все прикладные разделы математического анализа, включая элементарные и специальные функции, дифференциальное и интегральное исчисление и т.д. (см. [14]). Вместе с тем в общих теоретических аспектах имеются существенные отличия. Прежде всего указанное в предыдущем пункте нарушение свойств компактности для D приводит к появлению патологических с точки зрения классической математики конструктивных функций: например, возможна к.ф. непрерывная и неограниченная на единичном констурктивном сегменте. Иногда в связи с этим обстоятельством приходится слышать отрицательные отзывы в адрес конструктивного анализа. Автор полагает, что они столь же обоснованны, как и то раздражение, которое вызывал в свое время построенный Вейерштрассом пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции (ср. [18: стр. 26]). Мир (в том числе и мир математики) не всегда устроен так, как нам хочется, и наши теоретические построения, ясные и гармоничные в своей основе, сплошь и рядом обнаруживают неожиданные и порой неприятные черты на окраинах соответствующих теорий.

Своеобразие конструктивных функций проявляется не только в отрицательных контрпримерах. Эти функции обладают еще одним свойством, на сей раз положительного характера, удивительным со всех точек зрения. Мы имеем ввиду непрерывность конструктивных функций. Первый шаг в направлении установления этого факта был сделан А.А. Марковым (1954 г.), доказавшим, что никакая к.ф. не может иметь конструктивного разрыва. И, наконец, до своего логического конца этот результат был доведен в замечательной теореме Г.С. Цейтина (1956 г.), согласно которой всякая к.ф. конструктивно непрерывна в каждой точке (в которой она определена). Последнее означает, что по каждой такой функции f и $x \in D$ мы можем эффективно построить алгорифм δ типа $N \to \mathrm{N}$ (регулятор непрерывности f в точке x) такой, что

$$\forall n x_1 (x_1 \in D \;\&\; |x_1 - x| < 2^{-\delta(n)} \supset |f(x_1) - f(x)| < 2^{-n}).$$

Чтобы осознать полную неочевидность этого факта, достаточно обратить внимание на то, что непрерывность (и притом эффективная!) извлекается лишь из самого факта вычислимости функции и аргумента без привлечения какой бы то ни было дополнительной информации. Теорему Цейтина можно рассматривать как своего рода математическое подтверждение давно высказывавшихся соображений о том, что непрерывность заключена в природе вычислимого. Возможно одним из оснований для таких соображений являются предложения вроде (4), не позволяющие получить разрывные вычислимые функции разбором случаев типа $x = 0, x \neq 0$. В интуиционистском анализе непрерывность практически постулируется (на основе интуиционистской гносеологии) ввиде принципа Брауэра. Еще раньше требование непрерывности упоминалось Борелем, предложившим повидимому первый подход к определению вычислимой действительной функции (см. [15], где имеются ссылки на более ранние работы).[9]

10. Итак, мы упоминали три современных подхода к построению континуума - классический, интуиционистский и конструктивный. Какой континуум лучше? На этот вопрос вряд ли можно дать однозначный ответ. Как известно, недостатки являются продолжением достоинств и наоборот. Например, чрезвычайная общность классического понятия действительного числа делает его необычайно гибким и мощным математическим орудием. Однако та же самая общность вызывает и сомнения (даже опасения) как философского, так и математического характера. С другой стороны «бедный» точками, чисто синтаксический конструктивный континуум имеет зато весьма прозрачный и надежный фундамент. И это является его достоинством, тем более, что он обеспечивает математику вполне замкнутую вычислительную среду для обычных прикладных задач. Совершенно оригинальным концептуально является интуиционистской континуум. В то время, как классическое и конструктивное построения следуют атомистической линии, утвердившейся в трактовке континуума после работ Дедекинда и Кантора, интуиционистский континуум пытается математически реализовать восходящие к Аристотелю концепции протяженного, неразложимого на точки континуума, складывающегося из подобных ему неограниченно делимых частей.[10] С этой целью Брауэр предложил и стал систематически использовать совершенно оригинальное понятие, находящееся за пределами как классической, так и конструктивной математики, - свободно становящиеся последовательности (см. [6], где указана дальнейшая литература). Возникший в результате интуиционистский математический анализ удивительным образом сочетает в себе родственную конструктивизму установку на эффективность с применением совершенно новых, не лишенных даже таинственности понятий. Во всяком случае концепция свободно становящейся последовательности всегда подвергалась критике как недостаточно осязаемая интуитивно, а практически все современные теории, употребляющие это понятие, носят аксиоматический характер (аксиоматическая трактовка привела, кстати сказать, к расщеплению исходного брауэровского понятия, введя в рассмотрение свободно становящиеся последовательности разных типов). Между тем

---

[9]Отдавая должное пионерской роль работ Э. Бореля и его замечательной проницательности, мы все же не находим никаких серьезных оснований для именования теоремы Цейтина теоремой Бореля-Цеийтина, как это сделано в [19]. Результаты, аналогичые теореме Цейтина, были также независимо получены Крайзелем, Лакомбом и Шенфилдом.

[10]Впрочем, предложение (4) и ему подобные можно также воспринимать как утверждения о неразложимости конструктивного континуума.

аксиоматический метод, помимо известных всем достоинств, таит в себе и определенную опасность. В своей современной форме он состоит фактически в полном отделении структуры от её субстрата. Мы изучаем определенные связи, не интересуясь, вообще говоря, субстанцией, на которой они могли бы реализоваться и нашей способностью сколько-нибудь внятно таковую субстанцию представить. В такой ситуации отсутствие ясной генетической теории интуиционистского континуума (в отличие от классического и конструктивного) не может не вызывает определенных сомнений. Сказанное, однако, не означает отрицания красоты и оригинальности интуиционистской теории. В этих её качествах автор полностью отдает себе отчет. Повидимому, сегодня нет безупречной теории континуума, да и вряд ли такая теория возможна. Вместе с тем, по мнению автора, все три упомянутых подхода представляют собою достижения непреходящего общечеловеческого значения.

Сказанное только что применимо и к конструктивной математике вообще. Хотя первоначальные революционные притязания конструктивистов сейчас уже, повидимому, позади, на смену им приходит спокойное осознание духовной ценности проделанного эксперимента по построению математики на чисто эффективистской и синтаксической основе. Последняя черта (синтаксический универсум), отличающая конструктивную математику как от классической, так и от интуиционистской, может приобрести значение в свете современного развития информатики.

ЛИТЕРАТУРА

0. КУШНЕР, Б.А. Марков и Бишоп, Вопросы Истории Естествознание и техники 1 (1992), 70-81. English translation to appear in 1993 in *The Golden Years of Russian Mathematics* to be published by the American Mathematical Society.

1. КАНТОР, Г. Труды по теории множеств (пер. с. нем), М., «Наука», 1985.

2. ФРЕНКЕЛЬ, А.А. и БАР-ХИЛЛЕЛ, И. 1966. Основания теории множеств (пер. с. англ.), М., «Мир».

3. МАРКОВ, А.А. 1954. Теории алгорифмов, Труды матем. ин-та АН СССР им В.А. Стеклова 42 (М.-Л.); English translation: Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem/New York, 1961.

4. МАРКОВ, А.А. и НАГОРНЫЙ, Н.М. 1984. Теория алгорифмов, М., «Наука»; English translation by M. Greendlinger: Dordrecht/Boston/London, Kluwer Academic Publishers, 1988.

5. ШИЛЕЙКО, А.В. и ШИЛЕЙКО, Т.И. 1986. Микропроцессовы, М.

6. КУШНЕР, Б.А. 1987. Ппринцип бар-индукции и теория континуума у Брауэра. В сб. Закономерности развития современной математики, М., стр. 230-250.

7. ВЕЙЛЬ, Г. 1934. О философии математики. Сб. работ., пер. с нем., М,-Л., ОГИЗ.

8. ГЕЙТИНГ, А. 1965. Интуиционозм. Введение. Пер с англ. под ред. и с комментариями А.А. Маркова, М. «Мир».

9. КЛИНИ, С.К. и ВЕСЛИ, Р. 1978. Основания интуиционистской математики с точки зрения теории рекурсивных функций. Пер. с англ., М.

10. ШАНИН, Н.А. 1962. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова 67 (М.-Л., Издат. АН СССР), стр. 15-294.

11. TURING, A.M. 1936. *On computable numbers, with an application to the Entscheidungs-problem*, Proceedings of the London Mathematical Society (ser. 2) 42, 230-265.

12. TURING, A.M. 1937. *A correction* ‹to *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*›, Proceedings of the London Mathematical Society (ser. 2) 43, 544-546.

13. BROUWER, L.E.J. 1920. *Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung?*, Koninklijke Akademie van wetenschappen te Amsterdam **29 (1921)**, 803-812, and Proceedings of the section of sciences **23** (1922), 955-964. Also reprinted in Mathematische Annalen **83** (1921), 201-210.

14. КУШНЕР, Б.А. 1973. Лекции по конструктивному математическому анализу, М., «Наука».

15. **BOREL, E. 1928. *Leçons sur la théorie des fonctions*, 3rd edition, Paris, Gauthier-Villars.**

16. ШИЛОВ, Г.Е. 1969. Математический анализ. Функции одного переменного, ч. No. 1-2, М.

17. ГУДСТЕЙН, Р. 1970. Рекурсивнный математикческий анализ. Пер с англ. М.

18. БУРБАКИ, Н. 1963. Очерки по истории математики. Пер с франц., М.

19. УСПЕНСКИЙ, В.А. и СЕМЕНОВ, А.Л. 1987. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения, М.