

TEORIA DE LA CUANTIFICACION, LOGICA Y LENGUAJE
(A PROPOSITO DE LOS "SELECTED ESSAYS" DE JEAN VAN HEIJENOORT)

JESUS PADILLA-GÁLVEZ

Departamento de Filosofía y CCEE
Area de Lógica y Filosofía de la Ciencia
Universidad de León
E - 24071 Leon, Spain

Abstract. This paper proposes a critical revision of the proposal of van Heijenoort to confront a systematic logic with the natural language and questions such as the existence of a universal domain, the subject-predicative structure of sentences, and semantical problems. This paper analyses the historical context of the systematic logic.

AMS (MOS) 1980 Subject classifications (1985 revision): 03A05

Introducción. Hay libros que son encontrados de un modo extraño y sin seguir las pautas generales de bibliografía y selección de información. De algún modo estos libros quedan en la sombra y un buen día nos topamos con una referencia y vamos en su búsqueda. Esto es lo que ocurre con la interesantísima selección de trabajos de un matemático, lógico e historiador de la lógica matemática, nada común. Se trata de Jean van Heijenoort y el

libro al que nos referimos no es otro que la selección de ensayos.¹ La búsqueda comenzó al repasar la bibliografía de este lógico publicada en *Mathesis*.² Aparecen una serie de trabajos que por su temática se encuentran dentro del campo de la investigación que se podría denominar *semántica filosófica*, con claras alusiones a la historia de la lógica. Por una falta incomprensible en los índices bibliográficos no viene reseñado adecuadamente el contenido de dichos ensayos. Probablemente, esto se deba, en parte, en que ha sido publicado en una monografía bajo el título de *Historia de la lógica* por la excelente editorial Bibliopolis.

Los *Selected Essays* publican catorce manuscritos, en los que se encuentran una relación epistolar entre (Quine) y (van Heijenoort), así como trabajos inéditos y que propongo agrupar temáticamente de la siguiente manera:

Grupo I: Investigaciones acerca de la obra de G. Frege y el origen de la lógica moderna. (Este grupo viene expuesto por los trabajos: 1, 2, 7, 8, 9, 10, 11 y 12). Escritos desde 1967 hasta 1985.³

Grupo II: Propuestas alrededor de las investigaciones acerca de S. A. Kripke, en la que se encuentra incluida la correspondencia epistolar entre van Heijenoort y W.V. Quine. (Este grupo consta de los trabajos 3, 4, 5 y 6). Todos ellos redactados en 1974.⁴

¹ Se trata del libro: van Heijenoort 1985.

² Véase: Anellis 1987, pp. 85-88. En el mismo número de la revista se presenta una noticia sobre el mismo lógico de Alvarez y Ramirez 1987, pp. 73-74. Una biografía científica es publicada asimismo por Anellis 1989, pp. 353-370. Al final de este estudio aparecen detalladas referencias bibliográficas sobre la obra de J. van Heijenoort, así como una reseña sucinta de los trabajos inéditos que han quedado archivados.

³ El fuerte componente sistemático e histórico hacen que dichos trabajos tengan que ser tomados de manera sistemática en consideración aunque no podremos tratar todos y cada uno de los temas que son desarrollados en dicho ámbito.

⁴ Giran el grupo de dichos trabajos alrededor de la introducción del operador 'necesidad' y la introducción de la noción de 'mundo'.

Grupo III: Un estudio monográfico sobre el contexto histórico del trabajo de J. Herbrand (Estudio 13). Redactado en 1985. Este trabajo, por razones temáticas, va a ser incluido dentro del primer grupo.⁵

Grupo IV: Un estudio sobre Friedrich Engels y la matemática. (Trabajo número 14). Redactado en 1948.⁶

El fin es realizar una lectura sistemática de la interpretación de dichos bloques temáticos, aunque antes parece recomendable llevar a cabo unas consideraciones generales por las que he optado en subdividir los grupos temáticos de esta manera y que, claro está, incide en el título de esta nota crítica.

El interés técnico parece ser el motivo primordial que sigue el autor de estos estudios, aunque deba puntualizarse, acto seguido, que este interés es tratado desde el punto de vista histórico. El hilo conductor que subyace al ingente flujo de temas, es, dicho en pocas palabras, la transformación que se lleva a cabo desde la *Begriffsschrift* (publicada en 1879)⁷ hasta las propuestas de K. Gödel.⁸ Se plantea, por lo general, la tematización de la cuantificación, alrededor de hitos tan importantes como son las figuras de Löwenheim y Herbrand. La diversificación de los tópicos que se lleva a cabo es, pues, razonable y admisible desde dicha postura. Por lo tanto no creo necesaria una crítica a la edición, como es menester en este tipo de libros.

⁵ Existe una estrecha relación entre este trabajo, redactado en 1985 y una introducción parcial de un capítulo publicado en van Heijenoort 1976, 17-27, aunque hay que puntualizar que el trabajo de publicado en la monografía es de carácter histórico. El capítulo segundo tiene más bien un carácter monográfico.

⁶ El trabajo sobre F. Engels está redactado nueve años después del abandono de L. Trotsky, antes de que éste muriese. Véase: Alvarez y Ramírez 1987, 73. En este trabajo dejamos a parte un comentario detallado de la lectura que efectúa J. van Heijenoort de la obra de F. Engels ya que desbordaría las previsiones del mismo.

⁷ Véase: Frege 1879.

⁸ Véase: Gödel 1931, 173ss.

1. G. Frege y el cambio general llevado a cabo en la lógica. El grupo I comienza con el trabajo *Logic as calculus and logic as language*. El artículo introduce la diferencia entre *calculus ratiocinator* y la *lingua characterica*⁹ de la mano de la crítica que efectúa E. Schröder a G. Frege.¹⁰ Dicha distinción presupone abordar el problema de asegurar la certeza del conocimiento en tanto que se lleva a cabo un proceso de prueba al introducir un sistema de signos determinado en el ámbito lógico y aritmético. G. Frege contesta a las críticas de E. Schröder en una conferencia con el título *Über den Zweck der Begriffsschrift*, en la cual resume las críticas de aquel, caracterizando al mismo tiempo su posición, de la siguiente manera:

Ich wollte in der That nicht einen blossen "*calculus ratiocinator*" sondern eine "*lingua characterica*" im leibnizschen Sinne schaffen wobei ich jene schlussfolgernde Rechnung immerhin als einen nothwendigen Bestandtheil einer Begriffsschrift anerkenne.¹¹

El *calculus ratiocinator* propuesto por G. Frege introduce un sistema de signos en el dominio de la lógica y de la aritmética. Dicho sistema de signos permite formular las pruebas de manera estrictamente controlable. Para ello desarrolló un lenguaje formal mediante el cual se pudiesen cumplir las mismas exigencias que precisan las pruebas matemáticas. Expuso detalladamente, para dicho programa, las leyes lógicas, independientes de la estructura específica de los juicios. Dichos elementos quedan sin ser planteados en el trabajo de J. van Heijenoort ya que su exposición comienza a un nivel más alto, al determinar el carácter universal de la *lingua characterica* mediante la universalización de la teoría de la cuantificación.¹² Como es bien sabido, G. Frege introduce por vez primera una

⁹ Sobre el origen de la escritura del término "*lingua characterica*", véase: Thiel 1965, 9 y Patzig 1966, 103ss.

¹⁰ Véase: Schröder 1880, 81ss.

¹¹ Véase: Frege 1977, 98.

¹² Véase: van Heijenoort 1985, 12.

diferenciación clave en la lógica al discernir entre predicación y cuantificación. La predicación contiene letras predicativas y variables libres, mientras que la cuantificación liga las variables, es decir la cuantificación liga el rango de las variables individuales sobre los objetos. El componente ontológico del universo Fregeano está dividido entre *objetos y funciones*. Dicho universo consiste – siguiendo la interpretación llevada a cabo por van Heijenoort – en estipular todo lo que existe, indicando que su existencia tiene carácter fijo.¹³ Dicha concepción va a tener consecuencias tanto para la forma de concebir la lógica, e influirá en la interpretación que lleva a cabo de G. Frege y B. Russell.

Según van Heijenoort, las funciones han de definirse para todos los objetos. Consecuentemente la universalidad de la lógica no se encuentra fuera del sistema. Es por esta razón por lo que aduce que Frege no plantee cuestiones *metasistemáticas* como bien pudieran ser las ligadas al problema de la consistencia, independencia de los axiomas y completud. Hasta aquí mi divergencia tiene sólo que ver con una puntualización, y que corresponde a lo que entendamos por “cuestiones metasistemáticas”. Es decir, la cuestión es correcta si caracterizamos el contenido de la noción “cuestiones metasistemáticas” en la acepción actual, es decir, como cuestiones que tienen que ver con la metalógica. Pero si entendemos dicho término en un sentido semántico, es decir, como era entendido a finales del siglo pasado, nos vemos en la obligación de plantear otros problemas que actualmente no están dentro del complejo de problemas que se vinculan a la metalógica. Esto es, si bien Frege no plantea problemas metalógicos en el sentido actual, esto no quiere decir que no cuestione temas metasistemáticos, sino que plantea cuestiones de ese ámbito en términos, que hoy no serían abordados bajo dicha rúbrica pero que son el punto de referencia para el origen de las cuestiones metalógicas.¹⁴

¹³ Cfr. van Heijenoort 1985, 13. y seguidamente afirmará más claramente dicha tesis al postular que: “Frege’s universe is fixed.” Véase más adelante en: van Heijenoort 1985, 56.

¹⁴ Esta diferenciación se debe a la hegemonía semántica con la que G. Frege abordó las cuestiones metasistemáticas. Dicha hegemonía se evidencia en la tematización de las diferencias entre axiomática y juego. La representación de la “teoría” de un juego no se puede llevar a cabo mediante otro juego más simple sino que, si se desea, ser representado por algo equivalente a lo que, a partir de K. Gödel, se denominará metateoría, sólo es posible mediante la equivalencia de una *teoría de los juegos*. Esta teoría es una teoría

Somos de la opinión que, dentro de este ámbito temático ha de empotronarse la discusión que se lleva a cabo sobre la noción de *regla*. G. Frege le dedica a dicha cuestión una parte importante del primer volumen de los *Grundgesetze der Arithmetik* y un análisis detallado en el segundo volumen.¹⁵ Las conjeturas que desarrolla y sus propuestas tienen que ver con las cuestiones metasistemáticas al plantear cuestiones concernientes a la semántica y sintaxis de los signos, al determinar la noción de regla de un modo sistemático dentro del *Grundsatz der Vollständigkeit*.¹⁶ Dicha determinación no tiene ni que ver con el aumento del contenido ni con la clarificación de los conceptos, es decir no tiene que ver ni con el *calculus ratiocinator* ni con la *lingua characteristica* sino que su ámbito de trabajo es reflexionar sobre ambos a la vez. Así pues, aunque van Heijenoort lleva a cabo una lectura correcta de G. Frege¹⁷ y está poniendo el dedo en la cuestión crucial en su recepción se queda corto al considerar exclusivamente la noción de lenguaje en su investigación.

2. La noción de "Sinn" Fregeana. En 1977, J. van Heijenoort escribe dos artículos cuyos temas centrales son del tipo lógico pero que tienen una peculiaridad, a saber, el tratar la noción de "*Sinn*" propuesto por G. Frege. De antemano ha de indicarse que va a ir desarrollando una interpretación genuina de dicho topos. Por ello vamos a exponer las directrices de su interpretación y compararla con las propuestas misma de G. Frege con el fin de corroborar o rechazar la lectura en las que se asienta y, al mismo tiempo, desarrollar las pruebas pertinentes.

Es conocido el hecho, que G. Frege lleva a cabo, en su artículo *Über Sinn und Bedeutung*, una distinción, sin dudar a dudas, compleja. Partiendo

matemática en la que se han de tematizar los elementos matemáticos, rebasándose asr los límites del juego mismo.

¹⁵ Véase: Frege 1893, XIII y 1903, 96ss., así como los estudios publicados póstumamente en: 1969, 232ss. Además véanse los estudios: Padilla-Gálvez 1990, 461ss.; 1991a, 80ss.; 1991b, 101ss.

¹⁶ Véase: Frege 1903, 69ss.

¹⁷ Véase la nota al pie de página en: van Heijenoort 1985, 13, nota 5.

de un análisis de los juicios de igualdad se apuntan una serie de dificultades que con anterioridad no habían sido tratadas de modo tan profunda. La heurística emprendida por él tiene corte negativa. Sea una proposición ' $a = b$ ', si nos refiriésemos sólo a los signos ' a ' y ' b ', nuestro interés se centraría en el modo cómo refiere la igualdad, máxime plantearíamos cuestiones alrededor de la arbitrariedad del uso de los símbolos.¹⁸ Ahora bien, si el juicio ' $a = b$ ' es verdadero, y además amplía nuestro conocimiento sin que por ello tengamos que aludir a las reglas de nuestro sistema de signos, entonces ha de desarrollarse una diferenciación más nítida a la que propone la propuesta formalista como arriba es el caso, o realista, en atención a los objetos en cuestión.¹⁹

El argumento en condicional permite pues, introducir, además de la relación del signo con lo designado (*Bedeutung*), el modo como el signo se presenta (esto es, *Sinn*). Ahora bien, acceder a la noción de "*Sinn*" supone conocer el significado del signo por lo que se encuentra en el marco de una teoría extensional más general, sin que su dependencia sea al tipo de subyugación. Dichos pasos han dejado aturridos a los estudiosos de la propuesta Fregeana que *prima facie* suponen que con la noción de "*Sinn*" acceden a un ámbito con carácter condicional del significado, y que por otra parte es bastante relativo. Ahora bien, dicha interpretación es permisible. Ahora bien, si entendemos "*Bedeutung*" de una expresión como el objeto al que nos referimos y se encuentra en el universo que abarca dicha expresión, entonces, dicho objeto se determinará mediante reglas inductivas que al mismo tiempo pone en conexión cualquier expresión con el mundo. En el caso de la noción de "*Sinn*" es difícil constatar una definición precisa.²⁰ Para ello J. van Heijenoort desarrolla una metáfora que viene a ser expresada de la siguiente manera: la noción de "*Sinn*" puede ser caracterizada de modo muy general como un árbol en cuyos nudos finales se encuentra "*Bedeutungen*" de los símbolos primitivos de un lenguaje el cual consta de símbolos primitivos. Así afirma:

¹⁸ Véase: Padilla-Gálvez 1990, 461ss.

¹⁹ Véase: Padilla-Gálvez 1991a, 80ss.

²⁰ Véase: van Heijenoort 1985, 55.

The definition of *Sinn* as a tree at whose terminal nodes are *Bedeutungen* of primitive symbols fits a language in which we have primitive symbols, hence is not well adapted to a natural language like English.²¹

J. van Heijenoort propone dos estrategias para reforzar su propuesta en la formación de conceptos de la semántica Fregeana. Primero, desarrolla el sistema Fregeano²² y, seguidamente, acopla encima de éste la construcción, adaptando su lógica combinatorial.²³ De este modo llega a las siguientes conclusiones:

- (i) El *universo* de Frege es *fijo*.
- (ii) Las entidades de dicho universo son, o bien *objetos* o bien *funciones*.
- (iii) La representación de la *semántica teórico-conjuntista*, las conectivas y los cuantificadores son *sincategoremáticos*.
- (iv) Los enunciados son nombres de la *Verdad o Falsedad*.

Seguidamente, y después de haber adaptado las funciones de los tipos de la lógica combinatoria, se desarrollan aquellos, diferenciando (i) la aserción; (ii) la negación; (iii) el condicional; (iv) la universalización; (v) la identidad; (vi) la extensión; (vii) la descripción; y, (viii) la universalización de segundo orden.

Dicha propuesta deja muchos cabos sin resolver en las propuestas Fregeanas, probablemente debido a que las tesis de trabajo están enunciadas de manera muy general. Una precisión más ajustada de sus propuestas es difícil de ser desarrollada en los términos que propone J. van Heijenoort por estar expuestas de modo sumamente general. Así pues, un aumento de

²¹ Véase: van Heijenoort 1985, 63.

²² Véase: van Heijenoort 1985, 56s.

²³ Véase: van Heijenoort 1985, 58ss.

contenido de dichas tesis pueden determinar de modo más adecuado la propuesta Fregeana. Consecuentemente, refutar algo tan clave como la propuesta global de J. van Heijenoort no implica su rechazo definitivo ya que la propuesta de G. Frege permite dichas variaciones interpretacionales.

Damos un repaso puntual a una de dichas variaciones con el fin de comprobar como la tesis de J. van Heijenoort no puede ser refutada por completo si bien modificada. Así bien, un tema central en la propuesta de G. Frege viene de la mano del enunciado propuesto en la siguiente tesis:

... sentences are names (of the True or the False), all well-formed expressions are names.²⁴

El problema que proporciona dicha cita radica en saber concretamente a lo que se refiere J. van Heijenoort. Su reconstrucción presupone demasiados pasos argumentativos que quedan sin ser planteados. Para ello se ha de repasar primeramente lo que se entiende por "*Werthverlauf*" (curso de valores), para lo que proponemos introducirlo sistemáticamente.

Dos conceptos poseen el mismo "*Bedeutung*" si, y sólo si cualquier objeto que caiga bajo uno de los conceptos, cae también bajo el otro. En el caso que se interpreten dichos conceptos como funciones especiales, entonces, dos conceptos tienen el mismo *Bedeutung* si, y sólo si toma el mismo valor de verdad para cada argumento. Así pues G. Frege afirma:

Ich brauche die Worte

“die Function $\Phi(\xi)$ hat denselben *Werthverlauf*
wie die Function $\Psi(\xi)$ ”

allgemein als gleichbedeutend mit den Worten

“die Functionen $\Phi(\xi)$ und $\Psi(\xi)$ haben für dasselbe
Argument immer denselben Werth.”²⁵

²⁴ Véase: van Heijenoort 1985, 55.

²⁵ Véase: Frege 1976, 105s.

Así pues, si se intercambian las funciones en igualdad de cursos de valores, no se altera el *Sinn* del enunciado.²⁶ Hasta aquí sólo se ha introducido un curso de valores como objeto. Ahora bien, G. Frege da un paso más allá, resultando lo siguiente: los objetos, cuyos nombres tienen la forma de los nombres de la Verdad o la Falsedad se reconocen mediante los mismos medios que los postulados para el curso de valores. Así pues, se explica que las funciones que se encuentran implícitas en la categoría de los objetos con nombres – como es el caso de $(x(\bar{\eta}\Phi(\eta)))$ – refieran, o bien lo Verdadero, o bien lo Falso. Una falta que se le pueda achacar a el trabajo es no haber llevado a cabo una descripción tan detallada de sus tesis que vienen a ser expuestas de manera muy genérica. El método del que se ayuda es la de la comparación de dos textos. Por un lado la carta a E. Husserl del 9. 12. 1906,²⁷ así como el trabajo de G. Frege con el título: *Kurze Übersicht meiner logischen Lehren* escrito en 1906.²⁸ Mediante dicha comparación se llega a la siguiente conclusión:

There Frege writes that, if sentences *A* and *B* have the same *Sinn*, the acceptance of the content of one would ‘have as an immediate consequence’ the acceptance of the content of the other.²⁹

La conclusión a la que llega J. van Heijenoort, y que viene soportada por uno de los textos que arriba hemos mencionado es, que la relación “tiene el mismo sentido” no es transitiva. Desde nuestro punto de vista la dificultad de la propuesta Fregeana no radica tanto en la violación de la transitividad, sino en un aspecto técnico, a saber, el que la igualdad entre un nombre del curso de valores en un lado y otro tipo de nombre al otro no se deduce un valor de verdad. De este modo el programa de G. Frege es

²⁶ Un análisis detallado de la noción curso de valores se encuentra en el trabajo: Thiel 1976, 287ss.

²⁷ Véase: Frege 1976, 105s.

²⁸ Véase: Frege 1969, 213s.

²⁹ Véase: van Heijenoort 1985, 69.

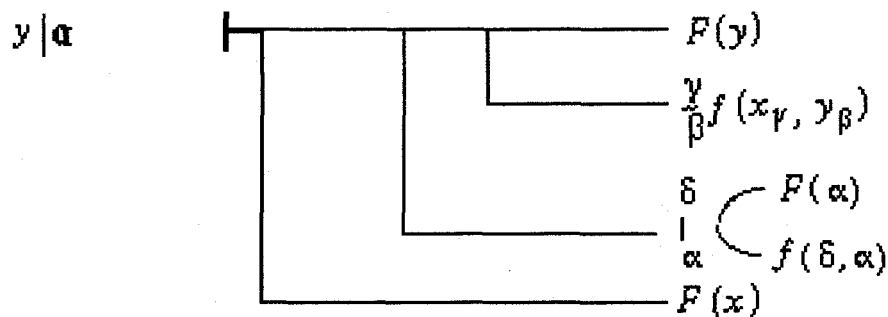
incompleto, pero su incompletud no se debe tanto por la falta de transitividad como apunta J. van Heijenoort, sino, sobre todo, por el hecho de que a pesar de que ambos nombres estén enlazados por la igualdad, esto no significa que se pueda inferir un mismo valor de verdad.

3. Vaguedad. En un trabajo posterior se enfrenta a una dificultad básica de la propuesta analítica. Para ello analiza la noción de *vaguedad*.³⁰ La investigación viene a ser dividida en diferentes fases, comenzándose en la investigación de la vaguedad de un predicado, analizándose para ello el teorema 81 de la *Begriffsschrift* en la que se afirma:³¹

Wenn x eine Eigenschaft F hat, die sich in der f -Reihe vererbt, und wenn y in der f -Reihe auf x folgt, so hat y die Eigenschaft F .³²

Expuesto, según la escritura de G. Frege viene a ser expuesto de la siguiente manera:³³

Teorema 81.



³⁰ Cfr. van Heijenoort 1985, 85-97.

³¹ Cfr. Frege 1879, Parágrafo 27, Teorema 81.

³² Cfr. Frege 1879, p.64.

³³ Véase: Frege 1879, Teorema 81 en el Parágrafo 27, p.64. Como afirma el propio G. Frege y viene a ser recogido puntualmente por J. van Heijenoort, el Teorema 81 se basa en la inducción de Bernoulli.

traduciéndose en la notación que propone van Heijenoort de la siguiente manera:³⁴

$$(1) \quad \forall x \forall y ((Px \ \& \ Rxy) \supset Py),$$

de lo que obtiene:

$$(2) \quad \forall x \forall y ((Px \ \& \ R^*xy) \supset Py)$$

En la que R^*xy es una iteración cerrada de un predicado binario Rxy , que ha de cumplir las condiciones expuestas arriba en el [Teorema 81]. G. Frege se da cuenta de las dificultades que existen al desarrollarse la iteración y no poder enjuiciar un enunciado para aquellos casos en los que se presenten la indeterminación del predicado. La definición de la iteración cerrada de Rxy contiene, como bien expone (1) y (2), una cuantificación universal sobre el rango de su predicado unitario, y dicho predicado no está incluido en el rango que el [Teorema 81] aplica a dicho predicado. La solución que propone G. Frege es la de introducir la noción de “*Unbestimmtheit*” en los enunciados “*unbeurtheilbar*”. Así pues, el [Teorema 81] genera un problema que viene a ser expuesto en la correspondencia a G. Peano de la siguiente manera:

Eine bedingte Definition eines Begriffszeichens entscheidet nur für einige Fälle, nicht für alle, ob ein Gegenstand unter diesen Begriff falle, oder nicht; sie begrenzt den Begriff also nicht vollständig und scharf. Nun kann die Logik aber nur scharf begrenzte Begriffe anerkennen.³⁵

En dicha completud que se nombra va a trabajar G. Frege en los próximos años y desembocará en el desarrollo de lo que en los *Grundgesetze der Arithmetik* va a ser denominado el principio de completud y que viene a decir:

³⁴ Véase: Frege 1879, 182s.

³⁵ Véase: Frege 1976, 182s.

Eine Definition eines Begriffes (möglichen Prädikates) muss vollständig sein, sie muss für jeden Gegenstand unzweideutig bestimmen, ob er unter den Begriff falle (ob das Prädikat mit Wahrheit von ihm ausgesagt werden könne) oder nicht.³⁶

En dicho principio se enuncian las condiciones que debe cumplir cualquier propuesta semántica. J. van Heijenoort elabora dos consecuencias directas de la determinación del principio de completud: la primera tiene que ver con un análisis de la definición parcial (*stückweisen Definieren*), mediante la cual se nombraría un caso especial. La segunda tiene que ver con el rechazo de la definición condicional (*bedingte Definitionen*) por ser incompletas, ya que sólo para algunos casos – así pues, no para todos los casos – el nuevo concepto significa lo mismo que el explicatorio. Dicho en palabras del propio G. Frege: “... alle bedingte Definitionen und alles stückweisen Definieren (sind) zu verwerfen. Jedes Zeichen muss mit einem Schlage vollständig erklärt werden, sodass es, wie wir sagen, eine Bedeutung erhält”.³⁷ La reconstrucción de J. van Heijenoort se adapta así de manera magistral a las propias propuestas de G. Frege al desarrollar la vinculación entre completud y nitidez. Ahora bien, y para acabar, dicha conexión ha de distinguir tres ámbitos que están ligados a los enunciados atómicos, a saber: (i) el problema de las descripciones vacías; (ii) el denominado “Dato de Meinong” en el que si bien se denota un objeto, dicho objeto no existe, y (iii) la aprehensión de un individual finito se aprehende mediante un individuo y la cuestión clave es la de saber si un predicado acapara su significado. Ahora bien, lo único que realmente es molesto en su propuesta es el uso del término “state of affairs” que viene ser adscrito a G. Frege, por no encontrarse en ninguna parte de su obra.³⁸ Las últimas consideraciones acerca de si la construcción gramatical propuesta por B.

³⁶ Véase: Frege 1903, 69.

³⁷ Cfr. Frege 1903, 78.

³⁸ Véase una exposición crítica sobre el término “state of affairs” en: Padilla-Gálvez 1989, Cap. I. Al mismo tiempo un análisis crítico del origen en: Padilla-Gálvez 1991c, 415ss.

Russell o la regimentación desarrollada por W.V. Quine, con el fin de reducir la vaguedad, nos conduce irremediamente al siguiente punto.

4. La teoría de los tipos. Al plantearse las cuestiones concernientes a la conexión entre completud y nitidez, que plantea Frege, es natural que se analice la modificación de la tesis de la universalidad de la lógica que se lleva a cabo en la *Principia Mathematica* al introducirse la teoría de los tipos.³⁹ En dicha propuesta, los cuantificadores se extienden sobre tipos estratificados,⁴⁰ aunque dentro de un tipo no haya restricción a un dominio específico, preservándose así la universalidad. La *Principia Mathematica* pecaba así pues al no plantear cuestiones sobre el sistema mismo y las correcciones entre la noción de demostrabilidad y la de validez basada en la teoría intuitiva de conjuntos no se llevaba a cabo. Esto se debe en parte, a que B. Russell se encuentra resolviendo los tres problemas abiertos por G. Frege, con el fin de resolver la vaguedad. La vaguedad se encuentra omnipresente en los lenguajes, en el sentido que todo término tiene un límite en su indeterminación. La propuesta de B. Russell tiene que ver con el desarrollo de un constructo artificial que sirve posteriormente a W.V. Quine para desarrollar su discurso regimentado. El primero propuso una jerarquía infinitamente estratificada que no está anclada en un dominio básicamente fijo.

Si bien los trabajos de K. Gödel marquen un hito importante en la investigación al presentar la cuestión de la *completud semántica* de las teorías de la cuantificación,⁴¹ han de considerarse – según van Heijenoort – los trabajos anteriormente desarrollados, sobre todo los de G. Frege, B. Russell y G. Peano como un intento, siempre renovador de establecer experimentalmente la completud. Con el fin de apoyar su tesis, analiza propuestas anteriores a las abordadas por K. Gödel. Para ello ha de tenerse en cuenta que L. Löwenheim enfatizó sobre el aspecto semántico en la

³⁹ Véase: Whitehead-Russell 1910/13.

⁴⁰ Véase: van Heijenoort 1985, 14.

⁴¹ Véase: Gödel 1930, 349.

teoría de la cuantificación, aplicando el cálculo de predicados de primer orden con identidad, que no tiene axiomas o reglas de inferencia a disposición. La variación que se lleva a cabo es la de reemplazar demostrabilidad por validez, basándose en la teoría intuitiva de conjuntos.⁴² Así pues, si una fórmula es válida en un universo, puede ser válida o no en algún otro universo.⁴³ Este hecho induce a pensar a van Heijenoort que se efectúa un abandono del planteamiento Fregeano-Russelliano de presentar su sistema en forma de un universo fijo.⁴⁴

5. Contextos opacos, modalidad y el rompecabezas Kripkiano.

Un segundo bloque de trabajos, consta de dos escuetas propuestas, una carta de W.V. Quine a J. van Heijenoort y la correspondiente contestación, todas llevadas a cabo en 1974.⁴⁵ En los contextos modales aparece la opacidad referencial en el uso de los términos individuales.⁴⁶ El origen del problema se remonta a la solución de la cuestión de presentar un criterio mediante el cual podamos, tanto caracterizar a un individuo, como las propiedades de dicho individuo, de tal modo que cuando nos refiramos a él siempre podamos determinarlo de manera unívoca. Ahora bien, los términos singulares, se comportan de modo anómalo, sobre todo en lo que respecta a los operadores modales. Los operadores modales como bien demostraría W.V. Quine, son referencialmente opacos ya que la substitutividad falla en los contextos modales. Esto significa en concreto, que dentro del alcance de un operador modal, al sustituir un término singular por otro que denote el mismo objeto, puede alterarse el valor de verdad del enunciado resultante. Con el fin de poder analizar dichos casos se propuso la siguiente substitución en la cual se puede comprobar el que no se puede sustituir *salva veritate* los

⁴² Habrá sin embargo que esperar algún tiempo hasta el trabajo de A. Tarski 1936, 261ss. para que se lleve a cabo una definición de la noción de validez.

⁴³ Cfr. Löwenheim 1915, 447ss.

⁴⁴ Véase: van Heijenoort 1985, 56.

⁴⁵ Véase: van Heijenoort 1985, 35-41.

⁴⁶ Véase: Quine 1976, 159.

términos en todas las situaciones, sin que con ello se altere el valor de verdad de los enunciados. Sea:

(3) Es necesario que 9 es mayor que 7.

9 = el número de los planetas.

Por lo tanto: Es necesario que el número de los planetas es mayor que 7.

El operador 'necesario' tiene un alcance sobre la relación entre dos números. En el segundo enunciado, la identidad contingente es presumiblemente verdadera, por el hecho de poder ser verificada empíricamente. La conclusión, sin embargo, es presumiblemente falsa, ya que no tiene por que ser necesario el que el número de los planetas sea mayor que 7. Con el fin de que no ocurra la opacidad referencial que aparece en el caso (3), W.V. Quine ideó un criterio al que ha de someterse la sustitución de la identidad y que supuso reconocer una posición puramente referencial.

En contra de dicha restricción, J. van Heijenoort no propone una restricción sino una semántica para las lógicas modales, llevando a cabo una propuesta de la siguiente manera: sea w el *mundo real* y $\mathfrak{R}(w, w')$ es la relación *mundo-alternativo*. Consecuentemente, se obtiene un sistema débil de segundo orden que contiene dos clases y que se caracteriza sintácticamente mediante la siguiente relación:⁴⁷

$$(4) \forall w(\mathfrak{R}(w_0, w) \supset (9(w) > 7(w))),$$

⁴⁷ Dicha fórmula se obtiene de la siguiente manera:

- | | |
|---|---|
| (1) $x = x$ | Axioma de identidad. |
| (2) $\Box(x = x)$ | (1) mediante la regla RL de la lógica modal (sea $\vdash A$, entonces $\vdash \Box A$). |
| (3) $\forall x \forall y ((x = y) \supset (F(x) \supset F(y)))$ | Principio Leibniziano. |
| (4) $\forall x \forall y ((x = y) \supset (\Box(x = x) \supset \Box(x = y)))$ | Substituimos en (3) $F(x)$ mediante (2). |
| (5) $\forall x \Box(x = x)$ | IG. |
| (6) $\forall x \forall y ((x = y) \supset \Box(x = y))$ | De la aplicación de (4) v (5). |

Como el mismo J. van Heijenoort observa, (6) es una conclusión indeseable, véase: van Heijenoort 1985, 37.

la regla de substitución para una función (variables y constantes) satisface la condición:

$$(5) \forall w (f(w) = g(w)) ,$$

y es correcto en dicho sistema, desde el momento en que se encuentra justificado mediante una semántica teórico-conjuntista (extensional) del sistema. Así pues, (3) viene a ser leído de la siguiente manera: sea $p(w)$ el número de planetas en el mundo real w , entonces:

$$(6) p(w_0) = 9(w_0);$$

pero, entonces no resulta:

$$(7) \forall w (p(w) = 9(w));$$

de modo que no se puede sustituir p por 9 en (4).

La contestación a dicha propuesta por parte de W.V. Quine no se deja esperar: la versión según la cual, los objetos aparecen interpretados como función de mundos, son un modo transparente de superar la opacidad, sin embargo queda un resto incólume de carácter *esencialista*.⁴⁸ La interpretación propuesta por J. van Heijenoort no altera el punto central de la teoría de los mundos posibles, según la cual, su característica central se asienta en la identificación de un objeto de mundo a mundo.⁴⁹

La contestación de J. van Heijenoort es sumamente interesante, ya que interpreta su propuesta. Veamos dicha interpretación escuetamente: Sean Cicerón y Virgilio, dos individuos diferentes. Tenemos en w_0 un individuo i_0 que es caracterizado como aquel, que denuncia a Catilina y es, a la vez, el padre de Tulia, y un individuo j_0 que es el autor de la Eneadas y el autor de la égloga que comienza con la frase "Tityre, tu patulae...". En

⁴⁸ Las dudas de W.V. Quine sobre la lógica modal son anteriores al desarrollo de la semántica de los mundos posibles, pero, sin embargo, adapta sus críticas a la primera contra los resultados a los que conlleva la segunda. Esta es la estrategia seguida contra el punto propuesto por J. van Heijenoort.

⁴⁹ Cfr. van Heijenoort 1985, 39.

w_1 tenemos a disposición un individuo k_1 que es el que denuncia a Catilina, y el autor de la égloga que acabamos de mencionar, y a un individuo l_1 que es el padre de Tulia y el autor de la Eneidas. La pregunta pues, es la siguiente: ¿Cuál de los individuos, caracterizados por k_1 y l_1 es el que se llama Cicerón? Según van Heijenoort, Cicerón en (w_1), en el curso de los años, puede ser k_1 y l_1 . Esta es una propuesta que se basa en una *descripción chassé-croise*, es decir una descripción en la que aparece un cambio entrecruzado de expresiones. Esto es, lo que J. van Heijenoort propone, es tener un marco referencial, sin carácter esencialista, cuyas propiedades esenciales puedan ser introducidas posteriormente mediante una asunción adicional y que dependerá de los presupuestos filosóficos que cada cual esté dispuesto a aceptar.⁵⁰ Así pues, a marcos diferentes se proponen diferentes modos de identificación a través de diferentes mundos posibles.

Conclusión. Nos referíamos arriba a la dificultad de categorizar el libro de J. van Heijenoort. Después de haber llevado a cabo un repaso crítico acentuamos dicha dificultad, pues, si bien aparecen estudios de la historia de la lógica, se presentan también cuestiones de índole sistemática. Propuestas que van más allá de la mera exposición e interpretación histórica, y que entran dentro de la reconstrucción interpretativa de una propuesta. El rótulo de historia de la lógica tampoco llega a ser el marco que engloba el libro en general, por presentar una deficiente exposición metodológica que sigue el propio autor al desarrollar sus propuestas. Sin embargo se podría hablar de una heurística lineal, con un dominante asociativo en determinados temas. Los trabajos descubren lagunas de investigación en las que se adentra de manera decidida y da soluciones puntuales a determinadas cuestiones históricas.⁵¹

⁵⁰ La introducción de la denominada (*descripción chassé-croise*) ha de ser tratada en otro trabajo extensamente, ya que su profundidad merece ser elaborada detenidamente.

⁵¹ Deseo agradecer las notas y comentarios que han realizado, tanto el Prof. Dr. Ch. Thiel, así como el Dr. V. Peckhaus de la Universidad de Erlangen-Nuremberg a este trabajo y a otros ya realizados. Al mismo tiempo quiero dejar constancia de la cordialidad con la que fui acogido durante mi estancia en su Departamento, y que fue financiado gracias a una Beca de estancias cortas del DAAD, y de las agradables discusiones en el marco del

Bibliografía

Alvarez, C. y S. Ramírez. 1987. *Jean van Heijenoort (1912-1986), de Coyoacán a Brandeis*, Mathesis, III, N° 1, pp. 73-74.

Anellis, I. H. 1987. *Bibliografía de Jean van Heijenoort*, Mathesis 3, N° 1, pp. 85-88.

– 1989. *La obra de Jean van Heijenoort en el campo de la lógica: sus aportaciones a la teoría de la demostración*, Mathesis 5, N° 3, pp. 353-370.

Frege, G. 1879. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Verlag von Louis Nebert. Halle. Repro. en: *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. 2 ed. Mit E. Husserls und H. Scholz' Anmerkungen (Ed. I. Angelelli), Hildesheim, G. Olms, 1977.

– 1893. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*. Vol. 1. Jena (Repro. Hildesheim, G. Olms, 1966).

– 1903. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*. Vol. 2. Jena (Repro. G. Olms, Hildesheim, 1966).

– 1969. *Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel*. Vol. 1. *Nachgelassene Schriften*. Felix Meiner, Hamburgo.

– 1976. *Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel*. Vol. 2. *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Felix Meiner, Hamburgo.

Gödel, K. 1930. *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatsh. Math. Phys. 37, pp. 349-360.

Erlanger logikhistorischen Kolloquium. Al mismo tiempo agradezco la posibilidad de haber trabajado en la archivo que están organizando y haber podido acceder a información sobre el programa de investigación de la historia social de la lógica.

– 1931. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatsh. Math. Phys. 38, pp. 175-198.

Löwenheim, L. 1915. *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, Math. Annalen 76, pp. 447-470.

Padilla-Gálvez, J. 1989. *Referenz und Theorie der möglichen Welten*. P. Lang, Frankfurt a.M.

– 1990. *¿Pueden aplicarse los argumentos informales contra el punto de vista formalista?* En: (Ed. A. Díaz, et. al.), *Structures in mathematical theories* (San Sebastián, Univ. País Vasco), pp. 461-467.

– 1991a. *El origen de la controversia acerca de la noción de regla*, Arbor, N° 543, Tomo 138, pp. 80-97.

– 1991b. *Wittgenstein sobre la noción de regla en Frege*, Dialogos, N° 57, pp. 101

– 1991c. *L-verdad y descripción de estados*, Actas del Encuentro de Lógica y Filosofía de la Ciencia. R. Carnap y H. Reichenbach in Memoriam (Madrid), pp. 415-422.

– 1992. *El método axiomático revisado*, Mathesis 8 N° 2. (en prensa).

Patzig, G. 1969. *Leibniz, Frege und die sogenannte "Lingua characteristica universalis"*. Akten des Int. Leibniz-Kongresses. Hannover. Vol. III, Wiesbaden, pp. 103-112.

Quine, W.V. 1976. *Three grades of modal involvement*. En: *The ways of paradox and other essays* (Cambridge, Mass., Harvard University Press), pp. 158-176.

Schröder, E. 1880. *Rezension von Frege's 'Begriffsschrift'*, Zeitschrift für Math. und Physik 25, pp. 81-94.

Thiel, Ch. 1965. *Sinn und Bedeutung in der Logik Gottlob Freges*. Meisenheim a.G., Verlag Anton Hain.

– 1976. *Wahrheit und Wertverlauf. Zu Freges Argumentation im §10 der 'Grundgesetze der Arithmetik'*. En: (Ed. M. Schirn), *Studien zu Frege 1. Logik und Philosophie der Mathematik* (Stuttgart & Bad Cannstatt, Frommann-Holzboog), pp. 287-299.

van Heijenoort, J. 1976. *El desarrollo de la teoría de la cuantificación*. UNAM. Mexico.

– 1985. *Selected essays*. Bibliopolis. Napoles.

Whitehead, A. N. y B. Russell. 1910-1913. *Principia mathematica*, Vol. 1, 2 y 3. Cambridge, Cambridge University Press.