Ernst Schröder und die „pasigraphischen Systeme“ von Peano und Peirce

Volker Peckhaus*
Institut für Philosophie
der Universität Erlangen-Nürnberg
Bismarckstr. 1, D – 8520 Erlangen
e-mail: volker.peckhaus@cnve.rrze.uni-erlangen.dbp.de

Zusammenfassung
Es wird gezeigt, daß Schröders Auseinandersetzung mit der Relativlogik Peirce-scher Prägung zu einem tiefgreifenden Wandel in seiner Auffassung von der Rolle der Logik bei der Begründung der Mathematik führte. Die Algebra und Logik der Relative wurde zum pasigraphischen Schlüssel zur Schaffung einer schon in den frühen zeichentheoretischen Schriften programmatisch geforderten wissenschaftlichen Universalsprache und zu einem Instrument für den Aufbau der „absoluten Algebra“, einer allgemeinen Theorie der Verknüpfung. Daher steht in Schröders logischen Schriften der Jahre 1895 bis 1901 nicht mehr die Anwendung mathematischer Methoden auf die Analyse der Logik im Vordergrund, sondern entsprechend der logizistischen Grundthese eine Darstellung und Analyse der Mathematik mit den Mitteln der Logik. Die Wendung Schröders zum Logizismus wird anhand veröffentlichter und bisher unveröffentlichter Zeugnisse dokumentiert. Im Anhang werden einschlägige Stücke seines Briefwechsels mit Paul Carus und Felix Klein ediert.

Abstract
It is shown that Schröder's discussion of the logic of relatives coined by Peirce led to a deep change in his conception of the rôle of logic in founding mathematics. His algebra and logic of relatives became the pasigraphic key for the creation of a scientific universal language, which he had already demanded programmatically in his early semiotic writings, and which should also become the instrument to set up an “absolute algebra”, a general theory of connexion. Therefore Schröder's logical writings in the years between 1895 and 1901 do not chiefly deal with the application

*Die Recherchen zu dieser Untersuchung wurden im Rahmen des von Christian Thiel in Erlangen geleiteten Projektes „Fallstudien zur Begründung einer Sozialgeschichte der formalen Logik“ von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert. Ich danke Christian Thiel und Thony Christie (Erlangen) für wichtige Hinweise und Anregungen.

of mathematical methods to the analysis of logic, but, rather in accordance with the basic logistic thesis, with the description and analysis of mathematics by the means of logic. Schröder's turn to logicism is documented with published and up to now unpublished testimonies. The relevant parts of Schröder's correspondence with Paul Carus and Felix Klein are edited in the appendices.

1 Einleitung: Ernst Schröder und der Erste Internationale Mathematiker-Kongreß in Zürich

Am 15. Dezember 1897 bedankte sich der Karlsruher Mathematik-Professor Ernst Schröder bei dem Philosophen Paul Carus, Herausgeber der Zeitschriften *The Monist* und *The Open Court* in La Salle, Illinois,[1] für die kostenlose Übersendung von Exemplaren des *Monist*.[2] Mit Carus stand Schröder schon seit 1892 im Briefwechsel. Damals hatte Carus Schröder angeschrieben, möglicherweise ein Rezensionsexemplar des zweiten Bandes von Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*1890a*) erbeten und Schröder bei dieser Gelegenheit zur Mitarbeit an seinen Zeitschriften eingeladen.[3] Schröder hatte ihm daraufhin seine bereits in deutscher Sprache publizierte Schrift *Über das Zeichen* (*1890b*) zur Veröffentlichung im *Monist* angeboten, eine Festrede, die er zum Antritt des Direktorats an der Technischen Hochschule in Karlsruhe gehalten hatte. Die Rede erschien dann noch im gleichen Jahr in englischer Übersetzung (Schröder *1892*), allerdings in *The Open Court*, da Carus den *Monist* noch nicht publizierten Originalarbeiten vorbehalten wollte.[4]

Fünf Jahre nach diesem ersten Briefwechsel, der den Auftakt zu einer persönlichen Freundschaft bildete, bot Schröder aus Dankbarkeit für fortgesetzte Zusendungen von Zeitschriftenheften Carus die „unentgeltliche Überlassung" eines weiteren Artikels an, den er ihm bis spätestens Ostern 1898 zu übermitteln versprach. Es handelt sich um Schröders Schrift "On Pasigraphy. Its

[1] Zur Geschichte der Zeitschriften und zur Herausgeberschaft vgl. Sugden *1987*.

[2] Schröder an Carus, dat. Karlsruhe, 15.12.1897, Open Court Archives, Southern Illinois University at Carbondale, Morris Library, Special Collections, Nr. 27/16/2. Den ersten Hinweis auf den Fundort des Briefwechsels zwischen Carus und Schröder verdanke ich Irving H. Anellis, Ames, Iowa.

[3] Vgl. die Antwort Schröders vom 17.4.1892, Open Court Archives, Nr. 32/2/2. Das offenbar auf den 23.3.1892 datierte Anschreiben von Carus konnte bisher nicht aufgefunden werden. Im Bd. 2 von *The Monist* hatte Carus eine Rezension des ersten Bandes der Schröderschen *Vorlesungen* veröffentlicht, die unter dem Rezensentenkürzel *κρσ* erschien (Carus *1892*), vgl. Carus an Schröder v. 10.1.1893, Open Court Archives, Nr. 27/5/2.

[4] Carus an Schröder v. 24.5.1892, Open Court Archives, Nr. 27/3/4.

Present State and the Pasigraphic Movement in Italy", in der Schröder Überlegungen aufnahm, die er bereits in der Festrede *Über das Zeichen* (*1890b*) und in der Einleitung zum ersten Band seiner *Vorlesungen über die Algebra der Logik*[5] angelegt hatte. Der Aufsatz wurde tatsächlich 1898 in *The Monist* veröffentlicht (Schröder *1898b*). Zur „Entstehungsgeschichte" schreibt Schröder,[6] daß er die Arbeit im August 1897 auf dem Ersten Internationalen Mathematiker-Kongreß in Zürich vorgetragen habe. Als die Idee, einen solchen internationalen Kongreß durchzuführen, erstmals aufgetaucht sei, habe er Kontakt zu den Veranstaltern gehabt.[7] Damals habe man vorgeschlagen, die englische Sprache als „neutralen Boden zwischen Deutsch und Französisch" zur offiziellen Kongreßsprache zu wählen. Schröder habe daraufhin seinen Vortrag in englischer Sprache ausgearbeitet und angezeigt. Bei dem Kongreß habe sich dann aber gezeigt, daß die meisten Engländer und Amerikaner zum *Meeting* der *British Association* nach Toronto gereist waren. Wegen der, wie es später in dem Kongreßbericht hieß (Rudio *1898*, 45), „numerisch geringen Beteiligung von Mathematikern englischer Zunge", hielt Schröder seinen Vortrag — frei sprechend — „auf mehrfachen Wunsch" in deutscher Sprache. Aus dem Bericht geht auch hervor, daß Schröder am Nachmittag des 10. August als zweiter nach Federigo Enriques in der Sektion Arithmetik und Algebra sprach, die vom zu Beginn des Kongresses gewählten Vizepräsidenten dieser Sektion, Giuseppe Peano, geleitet wurde.

Kaum ein Gegenstand, so Schröder in seinem Zürcher Vortrag, eignete sich besser zur Diskussion auf einem internationalen Mathematiker-Kongreß als die Pasigraphie, die wohl, da ist Schröder überzeugt, von den Tagesordnungen künftiger Kongresse nicht mehr verschwinden werde. Das Ziel dieser neuen Disziplin definiert er wie folgt (Schröder *1898a*, 147):

> die endgültige Festlegung einer wissenschaftlichen Universal-Sprache, die völlig frei von nationalen Eigentümlichkeiten und bestimmt ist, durch ihre Konstruktion die Grundlage zur wahren, nämlich exakten Philosophie zu liefern!

Für jede beliebige Einzelwissenschaft ergebe sich die Aufgabe (148),

> *sämtliche* Begriffe, die sie umfasst oder mit denen sie operiert, völlig angemessen (adäquat) und so knapp (konzis) wie möglich auszudrük-

[5] Schröder *1890a*, bes. 93–96.

[6] Schröder an Carus, dat. Karlsruhe, 15.12.1897, Open Court Archives, Nr. 27/6/2. Der Brief ist im Anhang 1 ediert.

[7] Zur Geschichte des Kongresses vgl. die einleitenden Abschnitte im offiziellen Kongreßbericht von Ferdinand Rudio (*1898*, 1–77); zu den ersten internationalen Mathematiker-Kongressen vgl. auch Albers/Alexanderson/Reid *1987*, 2–5.

> ken durch eine minimale Menge von fundamentalen oder *Urbegriffen*, sogenannten „Kategorieen" — und zwar vermittelst „rein logischer" Operationen, die von allgemeiner Anwendbarkeit, mithin für alle Wissenszweige die nämlichen sein werden, indem sie den Gesetzen der gewöhnlichen Logik gehorchen, einer Logik jedoch, die in ihrer vollkommensten Gestalt als ein „calculus ratiocinator" sich darstellen wird. Für die Kategorieen und Operationen dieser „lingua characteristica" oder „scriptura universalis" sind handliche Zeichen und einfache Symbole, wie etwa Buchstaben, zu verwenden; diese aber sollen — ungleich den „Wörtern" einer lebenden Sprache — mit *absoluter Konsequenz* oder mathematischer Strenge gehandhabt werden.

Die bloße Erwähnung von nur linguistischen Bestrebungen wie dem Universalsprachenprogramm der Volapükisten erscheint Schröder als Herabwürdigung seines Gegenstandes.[8] Er betont ausdrücklich, „dass die pasigraphische ‚Sprache' überhaupt nicht bestimmt ist, jemals *gesprochen* zu werden" (148).

Schröder leitet seine pasigraphische Analyse der Mathematik mit der „beiläufig" ausgesprochenen „vielleicht noch nicht allgemein geteilten persönlichen Ansicht" ein, daß ihm „die reine Mathematik bloss als ein *Zweig der allgemeinen Logik* erscheint" (149). Er sieht diese Ansicht in der Tatsache gestützt, daß die Arithmetik in pasigraphischer Hinsicht

> aller besondern Kategorieen, jeglicher eignen Urbegriffe zu entraten vermag, indem diejenigen der allgemeinen Logik schon ausreichen, um ihre sämtlichen Begriffe (wie Vielheit, Anzahl, Endlichkeit, Grenzwert, Funktion, Abbildung, Summe etc.) aufzubauen. Und ebenso kommt sie mit den „Prinzipien" der allgemeinen Logik aus und bedarf zu ihren Beweisführungen keiner „Axiome".

Das wesentliche Hilfsmittel bei der Entwicklung einer solchen Pasigraphie ist Schröder die Algebra der Relative in der Peirceschen Tradition.

Dieser Vortrag Schröders gehört zu einer ganzen Reihe von Beiträgen, mit denen er die Publikation des im Juli 1895 vollendeten und im Oktober 1895 ausgegebenen ersten Teiles des dritten Bandes der *Vorlesungen über die Algebra der Logik* mit dem Bandtitel *Algebra und Logik der Relative*[9] begleitet hat. Im folgenden sollen diese Beiträge vorgestellt werden, die seine Konzeption einer Logik der Beziehungen offenlegen. Dabei soll der von Schröder stets betonte Anwendungsaspekt besondere Berücksichtigung finden. Schließlich soll

[8] Zur damals weitverbreiteten und vieldiskutierten Universalsprache „Volapük" des Konstanzer Pfarrers Hans Martin Schleyer vgl. Couturat/Leau *1903*, 128–163.

[9] Schröder *1895b*; zum Erscheinungsdatum vgl. Schröder *1898c*, 306, Fn. 1.

u.a. anhand von Schröders Briefen an Felix Klein, dem er die drei wichtigsten Arbeiten bereits 1895 für eine Veröffentlichung in den *Mathematischen Annalen* angeboten hatte, gezeigt werden, daß die intensive Beschäftigung mit der Peirceschen Algebra der Relative eine Änderung von Schröders Stellung zu den Aufgaben der Logik bewirkte, die zwar nicht mit einer völligen Abkehr von der in den ersten beiden Bänden vertretenen Logikkonzeption, aber doch mit einer erheblichen Schwerpunktverschiebung verbunden war, die mit dafür verantwortlich gemacht werden kann, daß sein monumentales Werk letztlich unvollendet geblieben ist.

2 Schröders Algebra und Logik der Relative

Schon im ursprünglichen Plan seiner *Vorlesungen über die Algebra der Logik* war Schröder von einer Dreiteilung der Logik ausgegangen. Der „Gedanke einer philosophisch wissenschaftlichen *Universalsprache*" (*1890a*, 93), der in der „Verwirklichung des gedachten Ideals einer wissenschaftlichen Klassifikation und systematischen Bezeichnung alles Benennbaren" (*1890a*, 95) seine Erfüllung finden sollte, hat, so Schröder, „die vollendete Kenntnis der die Begriffselemente zu verknüpfen bestimmten Grund*operationen* und die Bekanntschaft mit deren Gesetzen" zur Voraussetzung. Die Vorarbeit zur Schaffung dieser Grundlagen habe die Logik zu leisten. In ihrem ersten Teil, „dem *Gebiete*- oder *Klassenkalkul*" untersuche sie die Verknüpfung von Begriffen. Der zweite Teil der Logik, der Aussagenkalkül, behandele die Verknüpfungen und Beziehungen zwischen Urteilen, der dritte „und schwierigste" Teil sei die „Logik der unter ‚relativem' Namen zu begreifenden Gedankendinge", die „Logik der *Beziehungen*". Erst nach deren Ausbau könne „die Disziplin der Logik den Anspruch erheben[,] die obenerwähnte Vorarbeit für die dereinstige wahre Philosophie geleistet zu haben." Diesen Teil müsse er aber „dermalen grossenteils noch unfertig lassen" (*1890a*, 95 *f*.).

Dieser Einteilung entsprechend behandelte Schröder im ersten Band der *Vorlesungen* (*1890a*) ausführlich den Klassenkalkül. Den *1891* erschienenen ersten Teil des zweiten Bandes widmete er dem Aussagenkalkül. Für diesen zweiten Band hatte Schröder ursprünglich auch Ausführungen über den Relativkalkül vorgesehen. In Folge einer eingehenderen Beschäftigung mit der Logik von Charles S. Peirce[10] wuchs die Algebra der Relative aber über das vorgesehene Maß hinaus. Schröder berichtet darüber im „Zwischenwort", mit

[10]Im Literaturverzeichnis von Bd. 1 der *Vorlesungen* (700–715, bes. 710 *f*.) hebt Schröder die folgenden Schriften von Peirce als solche hervor, die erheblichen Einfluß auf die Ausgestaltung seiner Schrift gehabt hätten: Peirce *1867*, *1870*, *1880*, *1883*, *1885*.

dem er die beiden Teile des zweiten Bandes seiner *Vorlesungen* voneinander trennen wollte. Schröder hatte nach Fertigstellung der ersten Hälfte des Bandes im Juni 1891 gehofft, die zweite Hälfte, deren Inhalt die Logik der Relative bilden sollte, noch im Herbst desselben Jahres veröffentlichen zu können, aber:

> Selten wol in meinem Leben bin ich in einer Schätzung so weit fehlgegangen, als damals bei der Beurteilung von Grösse und Schwere der Lücken meines Manuskripts. Dies kam daher, dass die mir einzig brauchbar erscheinende Arbeit des Herrn *Peirce* über Relative in [*Studies in Logic by Members of the Johns Hopkins University* (Peirce *1883*)], die auch wirklich die hauptsächliche Grundlage zu meinem Band 3 abgegeben hat, blos einen Umfang von 18 Druckseiten einnimmt, (die auf halb so viele von den unsrigen gehen würden), und dass ich wähnte, mit einem möglichst reproduzirenden Referat darüber — nicht ohne kritische Randbemerkungen — davonzukommen. Die ungeheure Tragweite dieser Abhandlung wurde mir erst bei der Detailbearbeitung klar.[11]

Über die Arbeit an seiner *Algebra und Logik der Relative* schrieb Schröder im September 1893 an die Peirce-Schülerin Christine Ladd-Franklin:[12]

> As to my book I am ignorant whether I already had told you, that the chapter on relatives developes or swells into a *third* volume, over half of which would now be ready for print — that by the by will cost me a very pinching pecuniary sacrifice (of over 1000 Mark certainly). From subjective reasons I cannot attach myself on the lighter work of ending and polishing the second vol. before being at least roughly throughout the third one. The difficulties here to overcome are such however, that as compared with it, my vols 1 and 2 will prove a mere *child's play*. Still I venture to hope that both will be accomplished next year.

Ähnlich äußerte sich Schröder im gleichen Monat auch gegenüber Paul Carus:[13]

> Ich weiss nicht, ob ich Ihnen geschrieben hatte, dass die Algebra und Logik der Relative sich zu einem dritten Bande entwickelt und dass ich für den Druck desselben empfindliche pekuniäre Opfer — etwa 1200

[11] Zit. nach der „2. Aufl.“ der *Vorlesungen*, Bd. 2, dem Reprint Schröder *1966*, XXIV.

[12] Schröder an Christine Ladd-Franklin, dat. Karlsruhe 17.9.1893, Ladd-Franklin Papers, Columbia University Library, Butler Library, New York, Box 5.

[13] Schröder an Carus, dat. Karlsruhe, 30.9.1893, Open Court Archives, Nr. 32/3/5.

> Mark unwiederbringlich in baar — zu bringen haben werde. [...] Die Schwierigkeiten nun, die bei der Ausarbeitung dieses dritten Bandes zu bewältigen sind, sind so grosse, dass ich sagen muss: mein erster und zweiter Band waren, resp. werden sein das reine Kinderspiel dagegen. Entsprechend schätze ich aber auch die Wichtigkeit des Unternehmens. Bis ich es fertig habe (nächstes Jahr hoffentlich!) lasse ich darum sogar inbezug auf mir selbst in gewissen Schriften widerfahrene Angriffe, so sehr sie objektiv eine Zurechtweisung herausfordern, ganz ruhig: „die Mäuse tanzen".

Aus Schröders Terminplanungen wurde nichts: der zweite Teil des zweiten Bandes blieb zu Schröders Lebzeiten unvollendet. Er wurde erst *1905* von Karl Eugen Müller herausgegeben.[14] Auch die Vollendung eines ersten Teiles des dritten Bandes ließ noch fast zwei Jahre auf sich warten. Schon vor dessen Fertigstellung (Juli 1895) sandte Schröder im September 1894 eine „Note über die Algebra der binären Relative" an die Redaktion der *Mathematischen Annalen*, die im darauffolgenden Jahr dort auch gedruckt wurde. Diese Note diente Schröder der Ankündigung des dritten Bandes seiner *Vorlesungen*, der „demnächst, nahe gleichzeitig mit dem letzten Teil des zweiten Bandes" erscheinen sollte, in dem er im Anschluß an Charles S. Peirce die Disziplin der Algebra der binären Relative auch *unabhängig* von den beiden ersten Bänden zu begründen versprach (*1895a*, 144). In der hier vorgelegten Einführung in die Algebra der binären Relative setzt Schröder allerdings die Ergebnisse der ersten beiden Bände voraus, denn er stellt gleich zu Beginn eine Gruppe von 31 „fundamentalen Festsetzungen" zusammen, aus denen alle Sätze der Disziplin der Algebra der binären Relative nach den „Prinzipien der allgemeinen Logik" folgen sollen.[15]

Die Disziplin geht von einem *Denkbereich* 1^1 aus, der aus Elementen $A, B, C, \ldots$ besteht, von denen nichts weiter vorausgesetzt wird, als daß sie sich gegenseitig ausschließen und von dem Nichts (0) verschieden sein sollen. Die adjunktive Verknüpfung dieser Elemente läßt sich als „identische Summe" darstellen, in der Schröderschen Symbolik:

$$1^1 = A + B + C + \ldots = \sum_i i\ .$$

Zwei beliebige Elemente i und j lassen sich als ein in einer bestimmten Beziehung stehendes Elementepaar $i : j$ symbolisieren. Die Gesamtheit dieser Elementepaare bildet den zweiten Denkbereich:

$$1^2 = \sum_{ij} i : j\ .$$

[14] Zur editorischen Arbeit Müllers vgl. Peckhaus *1988*, 50–52.

[15] Schröder *1895a*, 145; vgl. *1895b*, 17–42.

Unter einem *binären Relativ* a versteht Schröder die logische Summe von Elementepaaren in diesem zweiten Denkbereich:

$$a = \sum_{ij} a_{ij}(i:j) \ .$$

Die grundlegende logische Operation ist wie im Klassen- und Aussagenkalkül die *Subsumtion* („Einordnung"). Es bedeutet in der Klassenlogik „$a \Subset b$": „a ist untergeordnet oder identisch b."[16] Dies kann auch als Aussagen-Subsumtion gedeutet werden: „Wenn a gilt, gilt b" (*1895a*, 146). Die *Gleichheit* (*Identität*, „völlige Einerleiheit") wird auf die Subsumtion zurückgeführt:[17]

$$(a = b) = (a \Subset b)(b \Subset a) \ .$$

Der rechte Term der Gleichung ließe sich auch abgekürzt als „$(a \Subset b \Subset a)$" darstellen. Wie schon in den Bänden 1 und 2 verwendet Schröder die Symbole 0 und 1 zur Darstellung der Wertbereiche des „Nichts" und des dem Booleschen "universe of discourse" entsprechenden „All".[18] Auch *Adjunktion* („+") und *Konjunktion* („·") übernimmt Schröder aus dem früheren Werk, ebenso wie die Negation, die er aber nun nicht mehr durch einen tiefgestellten Negationsstrich darstellt („$a_{\shortmid}$" für „$\neg a$"), sondern durch den damals gebräuchlichen horizontal übergestellten Negationsstrich („$\bar{a}$"). Aus dem Aussagenkalkül übernimmt Schröder die Zeichen für das Aussagenprodukt („ein $\prod_i a_i$ [soll] bedeuten [...], dass die Aussage a_i für *jedes* (Element) i gilt") und die Aussagensumme („$\sum_i a_i$ bedeutet, dass a_i *für gewisse* i gilt, m.a.W. dass es (mindestens) i *gibt*, für welche(s) sie zutrifft").[19] Im Relativkalkül treten die folgenden Zeichen hinzu:

- Das relative Modul 1' („Einsap") steht für die Menge aller individuellen *Selbst*relative $[(i = j)(i : j)]$ des Denkbereichs 1^2 und das relative Modul 0' („Nullap") für die Menge aller individuellen *Alio*relative $[(i \neq j)(i : j)]$ dieses Denkbereiches.

- Die *relative Multiplikation* $a; b$ („a von b") bezeichnet die *Komposition* zweier Relative, z.B. läßt sich das bekannte „amans benefactoris" als „Liebender *von* einem Wohltäter (von –)" fassen.

[16]Vgl. Schröder *1890a*, 169–170.

[17]Es ist bemerkenswert, daß Schröder im Pasigraphie-Aufsatz (*1898a*, 150) nicht die Subsumtion, sondern die Identität „=" zu den fünf Fundamentalbegriffen der allgemeinen Logik hinzurechnet.

[18]Zur Unterscheidung der „identischen 0" und der „identischen 1" von den entsprechenden Zahlzeichen führt Schröder später (*1898a*, 152) eine Kennzeichnung der Zahlzeichen durch übergestellte Punkte ein: $\dot{0}, \dot{1}$.

[19]Schröder *1895a*, 146.

- Die *relative Addition* $a \dagger b$ („a piu b")[20] bezeichnet etwas, was nicht ein nicht-a von einem nicht-b ist, d.h. ein a, das etwas von allem, außer von b ist. Schröder gibt in seinem Pasigraphie-Aufsatz (*1898*, 153) das folgende Beispiel: Bedeutet t „Teiler von ...", dann bedeutet $t \dagger 0$ bei Beschränkung auf den Denkbereich der natürlichen Zahlen etwas, was Teiler von jeder Zahl ist, also die Zahl 1 und keine andere. Die relative Addition läßt sich über die relative Multiplikation definieren: $a \dagger b = \overline{\bar{a};\bar{b}}$.

- Die *Konverse* $\breve{a}$ eines Relativs a bezeichnet dasjenige binäre Relativ, das alle diejenigen binären Relative umfaßt, die zu den in a enthaltenen konvers sind. So ist z.B. die Ursache von etwas die Konverse der Wirkung von etwas.

Schröder kommt später nach Unabhängigkeitsuntersuchungen auf ein System von „fünf Kategorieen oder fundamentalen Begriffe[n] der allgemeinen Logik mit Einschluß der Arithmetik" mit insgesamt sieben Symbolen:[21]

$$\left|\begin{array}{c} = \\ 1' \end{array}\right|\begin{array}{c} \cdot \\ \Pi \end{array}\left|\begin{array}{c} ^{-} \\ \end{array}\right|\begin{array}{c} ^{\smile} \\ \end{array}\left|\begin{array}{c} ; \\ \end{array}\right|$$

Dieses System der Urbegriffe kann er schließlich noch durch Zurückführung der Konversion auf die relative Multiplikation um einen Begriff reduzieren:[22]

$$(i \Subset a; j) = (j \Subset \breve{a}; i) \; .$$

Schon in der „Note über die Algebra der binären Relative" veranschaulicht Schröder die Tragfähigkeit seiner Methode durch Anwendung seines Systems auf ein Beispiel aus der damals modernen, vieldiskutierten Mathematik. Er symbolisiert aus Richard Dedekinds Kettentheorie[23] die Sätze, die der Begründung der vollständigen Induktion (Satz 59) dienen. Der Satz der vollständigen Induktion lautet in Schröders relativlogischer Umschrift:

$$\{a; (a_0; b)c + b \Subset c\} \Subset (a_0; b \Subset c),$$

wobei „$a_0; b$" („a-Kette von b") für den Dedekindschen Ausdruck „Kette von b (inbezug auf a)" steht. Den Vorteil seiner Darstellung sieht Schröder vor allem darin, daß die Dedekindschen Sätze einen weiteren Geltungsbereich

[20] „Piu" nach dem italienischen Wort für „+".
[21] Schröder *1898a*, 150.
[22] Schröder *1898a*, 162 („Nachschrift").
[23] Formuliert in Dedekinds *Was sind und was sollen die Zahlen?* (*1888*, Schröder zitiert die 2. Aufl. von 1893).

erhalten, der über die Geltung für eindeutige Abbildungen und „Systeme" hinausgeht, sich vielmehr auf alle binären Relative erstreckt. Darüber hinaus zeigt er, daß sich die Theorie der Ketten an einigen Stellen mit seiner Symbolik vereinfachen läßt.

3 Mathematik und Pasigraphie: Schrödersches „Dampfschiff" vs. Peanosches „Segelboot"

Die Zielrichtung des Beispiels ist deutlich. Es soll die Möglichkeiten der relativlogischen Symbolik als Instrumentarium für eine alternative Darstellung von (hier mathematischen) Zusammenhängen illustrieren und die Vorteile dieser Symbolik hinsichtlich der Kürze und Übersichtlichkeit sowie der Einfachheit der Beweisführung demonstrieren. Genau diese Zielsetzung verfolgte Schröder auch in den beiden Aufsätzen „Ueber zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze" (*1898c*) und „Die selbständige Definition der Mächtigkeiten 0, 1, 2, 3 und die explizite Gleichzahligkeitsbedingung" (*1898d*), die er in den *Nova Acta* der Hallenser Deutschen Akademie der Naturforscher veröffentlichte und in denen er die Relativlogik auf die Cantorsche Mengenlehre anwendete. Die Ergebnisse der erstgenannten Schrift trug Schröder zumindest in Teilen in dem Vortrag „Ueber G. Cantorsche Sätze" bei der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte am 24. September 1894 in Frankfurt a.M. vor.[24] Im ersten Paragraphen der veröffentlichten Fassung vergleicht Schröder zunächst die Dedekindsche Definition der Unendlichkeit (I) in *Was sind und was sollen die Zahlen?* mit der drei Jahre vorher von Charles S. Peirce in der, wie Schröder schreibt, „sehr abstrus anmutenden Abhandlung" "On the Algebra of Logic. A Contribution to the Philosophy of Notation" (Peirce *1885*) formulierten. Nach Dedekind heißt ein System N

> *einfach unendlich*, wenn es eine solche ähnliche Abbildung φ von N in sich selbst gibt, daß N als Kette [...] eines Elementes erscheint, welches nicht in $\varphi(N)$ enthalten ist.[25]

Angeglichen an den Cantorschen Sprachgebrauch ist also eine Menge unendlich zu nennen, wenn sie mit einer echten Teilmenge ihrer selbst gleichmächtig ist.[26] Dieser Definition stellt Schröder die Peircesche gegenüber, als deren

[24]Der Vortrag ist in dem Bericht über die Verhandlungen von Wangerin/Taschenberg *1897*, 43, nur mit dem Titel verzeichnet. Im *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* erschien eine kurze Zusammenfassung dieses Vortrages (Schröder *1901a*).

[25]Zitat nach der 2. Aufl. Dedekind *1893*, 16.

[26]Vgl. Schröder *1898c*, 304.

hervorstechendes Merkmal Schröder den Versuch hervorhebt, den Begriff der Unendlichkeit über den der Endlichkeit zu definieren, anders als Cantor und Dedekind, die positive Merkmale für die Unendlichkeit angegeben haben. Die Peircesche Definition der Endlichkeit (II) lautet wie folgt (Peirce *1885*, 202):

> Now, to say that a lot of objects is finite, is the same as to say that if we pass through the class from one to another we shall necessarily come round to one of those individuals already passed; that is, if every one of the lot is in any one-to-one relation to one of the lot, then to every one of the lot some one is in this same relation.

Schröder zeigt nun, daß die Dedekindsche Definition I der Negation der Peirceschen Definition II äquivalent ist. Setzt man ∞ für „unendlich“, $\overline{\infty}$ für „endlich“ und z für das Zuordnungsprinzip der eindeutigen Abbildung, läßt sich die Definition I wie folgt formalisieren:

$$(a \text{ ist } \infty) = \sum_z (z;\breve{z} + \breve{z};z \mathrel{\text{⋹}} 1')(z;a \subset a \mathrel{\text{⋹}} \breve{z};z;a)\ .$$

Dargestellt als ausgezeichnetes Relativ geht daraus durch Kontraposition (beidseitige Negation) hervor:

$$(a \text{ ist } \overline{\infty}) = \prod_z \{0 \mathbin{\text{ɟ}} 0';z + 0 \mathbin{\text{ɟ}} 0';\breve{z} + \bar{\breve{a}} \mathbin{\text{ɟ}} z;a + \bar{\breve{a}};z;a + \breve{a};(\bar{\breve{z}} \mathbin{\text{ɟ}} \bar{z} \mathbin{\text{ɟ}} \bar{a})\};1\ .$$

Schröder stellt die Peircesche Definition II in der Form

$$(a \text{ ist } \overline{\infty}) = \prod_z [(z;\breve{z} + \breve{z};z \mathrel{\text{⋹}} 1') \mathrel{\text{⋹}} \{(a \mathrel{\text{⋹}} \breve{z};a) \mathrel{\text{⋹}} (a \mathrel{\text{⋹}} z;a)\}]$$

dar, bzw. als ausgezeichnetes Relativ:

$$(a \text{ ist } \overline{\infty}) = \prod_z \{0 \mathbin{\text{ɟ}} 0';z + 0 \mathbin{\text{ɟ}} 0';\breve{z} + \bar{\breve{a}} \mathbin{\text{ɟ}} z;a + \breve{a};(\bar{\breve{z}} \mathbin{\text{ɟ}} \bar{a})\};1\ .$$

Die Definitionen stimmen in der Form nicht überein, lassen sich aber ineinander überführen. Die Peircesche Definition erweist sich als die kürzere und einfachere. Schröder wollte mit dieser Anwendung offenbar nicht mehr zeigen, als daß mit der algebraisch-logischen Formalisierung ein Maß für die Einfachheit und Ökonomie mathematischer Theoreme und Definitionen gefunden ist.

Von größerer systematischer Bedeutung sind Schröders Ausführungen in den nächsten Abschnitten. Hier diskutiert Schröder Cantors Sätze A bis E aus dem Kapitel „Das ‚Grösser‘ und ‚Kleiner‘ bei Mächtigkeiten“ in dem ersten Artikel der „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“ (Cantor *1895*, 484). Aufsehen erregte vor allem Schröders Beweis des Äquivalenzsatzes B (Schröder *1898c*, § 4, 336–344), der in der Cantorschen Formulierung (Cantor *1895*, 484) lautet:

> sind zwei Mengen M und N so beschaffen, dass M mit einem Theil N_1 von N und N mit einem Theil M_1 von M äquivalent ist, so sind auch M und N äquivalent.

Stehen „a" und „b" für Mengen, dann drückt Schröder durch „$a \sim b$" die Gleichmächtigkeit der Mengen a und b aus. Die indizierte Form „$a \underset{z}{\sim} b$" bedeutet: „Das Relativ *z bildet* die Menge a *eineindeutig* auf die Menge b ab" (Schröder *1898c*, 309). In Schröders pasigraphischer Umschrift lautet dann der Äquivalenzsatz:

$$(a \underset{x}{\sim} b_1 \Subset b \underset{y}{\sim} a_1 \Subset a) \Subset (a \sim b \sim b_1 \sim a_1 \sim a)\ .$$

Nahezu zeitgleich, im Winter 1896/97, fand Felix Bernstein ebenfalls einen Beweis des Äquivalenzsatzes, der von Émile Borel *1898* (103–107) erstmals veröffentlicht wurde. Mit Schröders und Bernsteins Namen blieb dieser Satz verbunden,[27] bis Alwin Reinhold Korselt *1911* seinen schon 1902 gefundenen Nachweis, daß Schröders Beweis auf einer unzutreffenden, stillschweigend gemachten Voraussetzung beruhte, veröffentlichte. Dies hatte Schröder schon im Mai 1902 in einem Brief an Korselt eingestanden, und er hatte festgestellt, daß er „Herrn F. Bernstein die Ehre, den G. Cantorschen Satz bewiesen zu haben, allein überlasse".[28]

In einem letzten Paragraphen (§ 5) seines Aufsatzes über die Cantorschen Sätze diskutiert Schröder noch einige weitere Ergebnisse aus Cantors Theorie der geordneten Mengen. In einem Resümee am Schluß der Arbeit (189) gibt Schröder zu, daß in der Algebra der Logik bisweilen ein Ergebnis „für etwas schon a priori Einleuchtendes nicht leicht zu erbringen" sei, andererseits zeige sie sich aber fähig — hier nimmt Schröder eine briefliche Mitteilung von Aurel Voss auf —,

> in ungleich grössrer Fülle Aufschlüsse zu liefern, die dem verbalen Denken unzugänglich und für deren Gewinnung selbst die bisher üblichen mathematischen Ausdrucksformen nicht mehr ausreichend erscheinen.[29]

„Die neue *Peirce*'sche Disziplin", so schreibt Schröder, „hat hiermit [...] Gelegenheit gehabt, schon eine kleine Feuerprobe zu bestehen. Die G. *Cantor*'sche Theorie auch". Daß sich die Cantorsche Mengenlehre vollständig mit

[27]Vgl. die wenigen zusammenfassenden zeitgenössischen Darstellungen der Mengenlehre wie z.B. Schoenflies *1900* (S. 16, Fn. 2) und Hessenberg *1906* (S. 522).

[28]Schröder an Korselt v. 25. Mai 1902; Zit. nach Korselt *1911*, 295.

[29]Schröder *1898c*, 361.

dem „Bezeichnungskapital unserer algebraischen Logik pasigraphisch darstellen" lasse, hält Schröder für gesichert. Ihm sei dadurch aber eine Mehrarbeit entstanden, die das Erscheinen des zweiten Teils von Bd. 2 der *Vorlesungen* noch weiter verzögere. Aus einer begonnenen Studie über „Einfachgeordnetsein im Ringe herum" schöpfe er zudem die Hoffnung, daß sich die Algebra der Logik auch dazu eigne, die Axiome der Geometrie darzustellen (*1898c*, 361).

Eine weitere Probe seiner Versuche, die Begriffe der Mengenlehre mit den Mitteln der Algebra der Logik wiederzugeben, liefert Schröder in der zweiten in den *Nova Acta* veröffentlichten Abhandlung (*1898d*). Schröder gibt u.a. eine logische Definition des Anzahlbegriffs, insbesondere der Mächtigkeiten 0, 1, 2 und 3 von Mengen, dies sowohl „independent", d.h. ohne die Definition der jeweils niedrigeren Mächtigkeit vorauszusetzen (S. 365–369), als auch „rekurrirend", d.h. durch Definition der Nachfolgerbeziehung („Die Menge a enthält genau ein Element mehr als die Menge b").

In dem schon eingangs erwähnten Vortrag „Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien" (*1898a*), den Schröder auf dem Zürcher Internationalen Mathematiker-Kongreß hielt, setzt er seine Bemühungen, die Algebra der Relative als pasigraphisches Hilfsmittel zur Darstellung der Grundbegriffe der Mathematik einzusetzen, von denen konkurrierender Konzepte, insbesondere von dem Formalisierungsprojekt Giuseppe Peanos und seiner Schule ab. Nach den bereits zitierten einführenden Darlegungen zum Gedanken der Pasigraphie stellt er seine Symbolik vor: die sieben Grundzeichen in fünf Kategorien, ergänzt um 12 weitere Zeichen, die zwar auf die Grundzeichen zurückgeführt werden können, deren Verwendung Schröder aber aus praktischen Gründen empfiehlt, um „Schwülstigkeit zu vermeiden, Knappheit und klare Übersicht zu ermöglichen, und aus Rücksichten auf die Symmetrie" (151):

$$0, 1, +, \cdot, \sum, \prod, 0', 1', \bar{}, \breve{}, \check{\bar{}}, \dagger, ;, \in, =, \subset, \notin, \neq, \not\subset \ .$$

„Das vorgelegte Bezeichnungssystem", so schreibt Schröder (154),

> ist dasjenige, welches sich naturgemäss aus den über ein halbes Jahrhundert sich erstreckenden tiefsinnigen und ausdauernden Forschungen von *De Morgan*, *Boole* und vor allem *Charles S. Peirce* bei meiner Überarbeitung von des letzteren Schöpfung herausentwickelt hat.

Von Peirces Symbolik sei er nur in wenigen begründeten Fällen abgewichen.[30] Stärker differiere er vom Bezeichnungssystem der von Peano geführten Schule.

[30] Zu den Unterschieden der Schröderschen Notation von der Peirceschen vgl. Schröder *1895b*, 33 *f*.

Schröder weist auf Entsprechungen hin, die er in folgender Tabelle zusammenfaßt:[31]

Schröder:	0	1	$+$	$\cdot$	$\sum$	$\prod$	$\bar{a}$	⋹
Peano:	Λ	V	$\cup$	$\cap$	$\cup$‘	$\cap$‘	$-a$	$\varepsilon, \supset$

Der wichtigste Unterschied beider Notationssysteme sei, daß bei Peano die Relation „von“ fehle und damit auch die relativen Operationen „ɟ“ und „;“. Ohne zunächst auf diesen Unterschied näher einzugehen, illustriert Schröder die „Tragweite unserer neuen Relativlogik“, indem er die wichtigsten Grundbegriffe der Arithmetik pasigraphisch darstellt: den Mengenbegriff, die Anzahlen 0, 1, und 2, die Beziehungen der Gleichzahligkeit und der Gleichmächtigkeit, die Endlichkeit, die aktuale Unendlichkeit, den Funktionsbegriff, den Substitutionsbegriff, den Begriff der Ordnung[32] sowie die Größerbeziehung, die Nachfolgerbeziehung, die Teilerbeziehungen und den Begriff der Primzahl (Schröder *1898a*, 155–159). Schröder versucht hier nicht einen systematischen Aufbau von Arithmetik und Mengenlehre, es geht ihm vor allem um die sinnfällige Demonstration, daß eine Darstellung der Grundbegriffe der Arithmetik und der Mengenlehre mit Hilfe seiner Algebra der Relative möglich ist. Diesem Ziel der Demonstration dienen auch seine weiteren Beispiele aus der Geometrie („z ist ein Punkt“) und aus dem Bereich der menschlichen Verwandtschaftsbeziehungen, „die ein für Studierende der Jurisprudenz nicht unwichtiges Kapitel im Corpus juris bilden“ (159). Die Analyse von Verwandtschaftsverhältnissen war damals in der logischen Diskussion nicht ungewöhnlich. Vor allem der zunächst in Edinburgh, später an der University of Texas und der Lehigh University lehrende Alexander Macfarlane hat in zahlreichen Studien (z.B. *1879*, *1880*, *1881*) versucht, einen logischen "Calculus of Relationship" zu entwickeln, ohne sich allerdings des Mittels der Relativlogik zu bedienen.

Abschließend kommt Schröder auf Peano als „eifrigen Förderer“ der Pasigraphie und seine „verdienstvolle“ Zeitschrift *Rivista di Matematica* mit dem beigegebenen „Formulario Mathematico“ zurück. Schröder ist der Ansicht, daß Peano das, was mit dem Boole-MacCollschen Aussagenkalkül zu schaffen sei, bereits geleistet habe. Da die italienische Schule aber nicht über die Peircesche Algebra der Relative verfüge, sei sie gezwungen, zahlreiche „steno-

31 Schröder zitiert hier die Symbolik, die Peano in den *Notations de logique mathématique* (*1894*) einführte. Sie weicht von Peanos späterer Symbolik, z.B. im zusammenfassenden Bd. 5 des *Formulario Mathematico* (*1908*) ab. Die hier wiedergegebenen Zeichen entsprechen nicht ganz den Peanoschen. Das Zeichen „$\supset$“ wird in den frühen Schriften durch ein stilisiertes, an der y-Achse gespiegeltes versales „C“ dargestellt, später fett gesetzt. Schröder schreibt für die Peanoschen Zeichen „$\cup$‘“ und „$\cap$‘“ „$\cup$’“ und „$\cap$’“.

32 Über den Begriff der Ordnung trug Schröder auch im Jahr 1900 auf dem Internationalen Kongreß für Philosophie in Paris vor (Schröder *1901c*).

graphische Schlüssel" für die in der Algebra der Relative bereits enthaltenen und leidlich erforschten Kategorien zu ersinnen. Diese Kürzel böten aber nur einen „unzulänglichen Ersatz", bei deren Beurteilung Schröder es mit einem abgewandelten Gleichnis Hermann Minkowskis hält:[33] Er vergleicht die Anhänger der Peanoschen Schule mit denen, „die sich immer noch der Segelboote bedienen, während die Dampfschiffe bereits erfunden sind" (161).

4 „Konzentrisches Feuer" der Propaganda für die Algebra der Relative

Hinsichtlich der Durchsetzungskraft seiner Algebra der Relative äußert sich Schröder in seinem Zürcher Vortrag skeptisch. Die höheren Teile der Logik böten eine Fülle von „allerschwierigsten" Problemen. Andererseits sei aber die Herrschaft über die „bloß ernsten Forschern zugängliche" Algebra der Relative „so wenig leicht zu erlangen, dass sie wohl nie Gemeingut werden, sondern voraussichtlich stets ein Privilegium von nur wenigen bevorzugten Denkern bleiben wird" (Schröder *1898a*, 161 *f.*). Daß zumindest Schröder alles tun wollte, um diesen düsteren, wenngleich durchaus realistischen Zukunftsperspektiven entgegenzutreten, und daß ihm dabei gerade die hier vorgestellten, die Veröffentlichung von Bd. 3 der *Vorlesungen über die Algebra der Logik* begleitenden Aufsätze und Vorträge als „Propaganda"-Mittel dienen sollten, davon zeugen Stücke einer Korrespondenz zwischen Ernst Schröder und Felix Klein, die sich im Klein-Nachlaß in Göttingen erhalten haben.[34] Schröder hatte nämlich schon im März 1896 Felix Klein in seiner Eigenschaft als Mitherausgeber der *Mathematischen Annalen* die beiden später in den *Nova Acta* veröffentlichten mengentheoretischen Arbeiten (*1898c,d*) wie auch eine frühe Fassung des wenige Monate später in Zürich gehaltenen Pasigraphie-Vortrages für eine Veröffentlichung angeboten.

Sich an die *Annalen* zu wenden, so schreibt Schröder am 11. März 1896, zwinge ihn schon der Umstand, daß allein die Teubnersche Druckerei in Leipzig den typographischen Anforderungen dieser Arbeiten zu genügen vermöge, da dort alle benötigten Zeichen vorhanden seien. Im Falle einer Ablehnung wäre er „mundtot" gemacht, zumindest bis zum Erscheinen des zweiten Teiles von Band 3 der *Vorlesungen*, dem noch der des Bandes 2 voranzugehen habe.

[33] Schröder bezieht sich auf Hermann Minkowskis am 10. August 1897 gesprochene Einführung zur 1. Sektion über Arithmetik und Algebra auf dem Zürcher Mathematiker-Kongreß.

[34] Staats- und Universitätsbibliothek (SUB) Göttingen, Cod. Ms. F. Klein 11. Die hier einschlägigen Briefe sind im Anhang 2 ediert.

> Den *sehr erheblichen* Kampf, den ich für die Sicherung und gute Fertigung dieser Zeichen zu bestehen hatte, möchte ich mit einer anderen Offizin nicht nochmals kämpfen (wenigstens zur Zeit nicht, wo ich allzu belastet).

Klein werde wohl die beiden ersten Abhandlungen nicht ungern aufnehmen, so glaubt Schröder, die zweite Arbeit müsse dann aber unmittelbar auf die erste folgen, damit er sich einigermaßen dafür rehabilitieren könne, daß er in der ersten eigentlich nur als „Kärrner" für Georg Cantor auftrete. Die erste Arbeit sei nicht kurz, behandele aber einen Gegenstand, der in weiten Kreisen im Vordergrund des Interesses stehe: die Theorie der eineindeutigen Zuordnung. Ihm sei es darauf angekommen, praktisch zu zeigen, „dass mit dem neuen Instrument der algebraischen Logik etwas zu machen ist." Eine Ablehnung der dritten, pasigraphischen Arbeit würde ihn weniger treffen, zumal er sich denken könne, daß Bedenken gegen ihre Aufnahme bestünden, „da sie bei ihren vielen kritisch-polemischen Beigaben äusserlich an ein Pamphlet gemahnt." Die Arbeit suche, so Schröder,

> das wahre Ziel der Pasigraphie klar zu stellen (die ihrer Verwirklichung *naht*) — gegenüber einem sich breit machenden salva venia Wechselbalge, der von Beklagenswerten für das echte Kind gehalten und gehätschelt wird.

Eine Aufnahme in die *Mathematischen Annalen* liege viel weniger in seinem persönlichen Interesse, als in dem der kritisierten Logiker.

> Letztere (Peano mit Gefolge in der Rivista, Frege) sind in den gleichen Fehler verfallen wie anfangs und längere Zeit hindurch — aus Mangel an Verständniss — auch ich: die *Peirce*'sche Leistung, durch die all' ihre Bezeichnungskünsteleien (die mich heute wie die Stammelversuche eines Kindes anmuten) vorweg überholt sind, nicht hinlänglich zu würdigen, ja gar nicht zu beachten. Sie befinden sich mit ihrem „Signicismus" auf dem Holzwege. Über kurz oder lang wird niemand umhin können, auch Freund Peano nicht, die ungeheure Überlegenheit des Peirce'schen Bezeichnungssystems *und* der darauf gegründeten *Disziplin* (derengleichen den Andern noch so gut wie völlig abgeht) anzuerkennen oder wenigstens inne zu werden.

Den Eingang in die Goldmine der Algebra der Relative, den De Morgan geschaffen und Peirce forciert habe, glaubt Schröder schon durch den ersten Teil des dritten Bandes seiner *Vorlesungen* leidlich bequem und für jedermann zugänglich gemacht zu haben. Schröder betont:

> In *meinem* Interesse liegt es nicht, die Andern schnell herbeizurufen zur Teilnahme an der Ausbeute: im Gegenteil, je länger sie brauchen[,] bis sie sich recht besinnen, desto mehr werde ich Musse haben, einen erklecklichen Teil von dem, was sich noch ohne mühsameres Schürfen gewinnen lässt, mir selber zu sichern [Mitteilung 1º) und 2º) ist blos ein kleiner Echantillon davon].[35] Das läge blos im Interesse der Gesamtheit, wenn baldigst Viele in der dankbaren Richtung schürften.

Schröder erwartet sogar direkte Nachteile von dieser Arbeit. Er habe sie aus einem Pflichtgefühl heraus unternommen, so schreibt er, das ihn gedrängt habe,

> ein Quousque tandem zu rufen. Während, wenn ich blos fortfahre[,] mit meinem Instrumente positives zu leisten, mir das kein Mensch verübeln kann, wird sie mir Gegnerschaft, vielleicht Streit, Repliken zuziehn, mich zu Dupliken nötigen und in meiner Hauptarbeit stören; auch ist zu besorgen, dass unter den Fachgenossen meine lieben Landsleute dann nicht mit der gleichen Einmütigkeit zu mir stehen werden, wie die Italiener zu dem ihrigen. Wären diese Hunde und ich ein Hase, so könnte es mein Tod werden.

Er glaubt allerdings, daß es die Leserschaft nicht wenig interessieren werde,

> einmal eine Auseinandersetzung oder Abrechnung zwischen verschiednen Schulen in der Zeichenschrift, die doch nicht mehr totzuschweigen ist (die Frege'sche kommt quantitativ und qualitativ weniger in Betracht)[,] vorgenommen zu sehen.

Schröder erklärt sich allerdings bereit, zu starke oder gar verletzende Ausführungen gebenenfalls abzumildern. Mit soviel Sendungsbewußtsein hat Schröder Klein offenbar beeindruckt, dem zwar der Aufsatz nicht ganz in die *Mathematischen Annalen* zu passen schien, der ihn aber in den *Göttingischen gelehrten Anzeigen* unterzubringen versuchen wollte. Damit ist Schröder einverstanden, er gibt aber in seinem Schreiben vom 16. März 1896 zu bedenken, daß dann die beiden ersten Arbeiten zuvor oder zumindest unmittelbar danach in den *Annalen* erschienen sein müßten („Ich dachte mir von Anfang an die Kundgebung als ein konzentrisches Feuer") und daß die Druckerei der *Anzeigen* so eingerichtet sein müßte, daß sowohl seine eigenen, als auch die Peanoschen Zeichen zur Verfügung stünden („mit einem ganz schlechten Surrogat der meinigen[,] wie es etwa Rezensionen in auswärtigen Zeitschriften bringen, könnte ich mich hier nicht zufrieden geben"). Schröder schlägt

[35] Eckige Klammer im Original.

auch vor, den Titel zu ergänzen: Die Abhandlung würde treffender „Über Begriffsschrift, (falsche und wahre) Pasigraphie und das Bezeichnungssystem der Peano'schen Schule" heißen. Um „Propaganda" für sein Instrument der Relativtheorie zu machen, weist er auf die Kürze der Zeit hin, in der er eine dem Cantorschen Notationssystem ebenbürtige, wenn nicht überlegene Darstellungsform für die Mengenlehre gefunden habe:

> Herr *G. Cantor*, mit dessen Genialität ich weit entfernt bin, meine bescheidnen Anlagen in Vergleich stellen zu wollen, hat sich seit 20 Jahren mit dem Thema seiner Forschungen beschäftigt; obwohl eine Vertiefung in diese mir stets als Desideratum vorgeschwebt, bin ich erst seit dessen letztem Annalenaufsatz[,][36] der im November vorigen Jahres herauskam, dazu gekommen. Wenn ich ihn trotz solchen Vorsprungs nun in kürzester Frist in gewissem Sinne gleichsam eingeholt habe, so dürfte dadurch gerechtfertigt erscheinen, dass mein Instrument einem „Fahrrad" verglichen wird, womit sich auch der rüstigste Fussgänger rasch einholen lässt (ob dasselbe auch zum Bahnbrechen [?] geeignet, ist eine andre Frage[,] über die erst die Zukunft Entscheidung bringen kann).

5 Schluß: Schröders Traum

Im Jahr 1901, ein Jahr vor seinem Tod, wird eine launige Biographie Schröders in dem Prachtband *Geistiges Deutschland* (Schröder *1901*) veröffentlicht, die von ihm selbst verfaßt worden ist und in der er auch einen Überblick über sein wissenschaftliches Schaffen gibt. „Neigung zum Schematisieren und das Streben, die Praxis jeweils zur Theorie zu verdichten," so schreibt Schröder dort, habe ihn dazu gebracht,

> der Physik durch Vervollkommnung der Mathematik vorzuarbeiten. Dies bedingte Vertiefung — wie der Mechanik und Geometrie — so vor allem der Arithmetik, und im Anschluss hieran stellte sich ihm allmählich die Notwendigkeit heraus, erst die Quelle aller dieser Disziplinen, die Logik, zu reformieren.

In den Arbeiten zur Reform und Weiterentwicklung der Logik habe er versucht,

> die Logik zu einer rechnerischen Disziplin zu gestalten, insbesondere die relativen Begriffe einer exakten Behandlung zugänglich zu machen

[36]Cantor *1895*.

> und durch Emanzipation von den Gewohnheitsfesseln der Wortsprache fortan auch auf dem Gebiete der Philosophie der „Phrase" jeden Nährboden zu entziehen. Es soll damit eine wissenschaftliche Universalsprache angebahnt werden, die von den linguistischen Bestrebungen à la Volapük himmelweit verschieden, sich mehr als Zeichen- wie als Lautsprache darstellt.

Dieses pasigraphische Hilfsmittel dient als Handwerkszeug für die Gruppe von Arbeiten, die, wie Schröder betont, sein „ureigenstes" Forschungsgebiet repräsentieren, in dem er gleichwohl bis dahin nur wenig veröffentlicht habe. Schröder bezieht sich hier auf seine Arbeiten zur Schaffung einer „absoluten Algebra", d.h. einer „allgemeinen auch über das Assoziativgesetz hinausgehenden Theorie der Verknüpfung". Als Beiträge zu diesem Gebiet nennt er u.a. sein *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende* (*1873*), die Schulprogrammschrift *Über die formalen Elemente der absoluten Algebra* (*1874*) und den *Annalen*-Aufsatz „Ueber Algorithmen und Calculn" (*1887b*). In diesem Resümee des Jahres 1901 erscheint Schröders Werk als einheitliches Ganzes, gleich zweifach verbunden mit seinem Traum von der Schaffung einer wissenschaftlichen Universalsprache. In der Algebra der Relative glaubt er den Schlüssel zur Formalisierung jedweder Beziehung gefunden zu haben, ein Schlüssel, der ihm in systematischer Hinsicht beim Aufbau einer allgemeinen *Theorie* der Verknüpfung, eben der absoluten Algebra, dienlich ist. Die Logik erscheint ihm kurz vor seinem Tod als die „Quelle" aller mathematischen und mathematisch operierenden Disziplinen, entsprechend der schon im Pasigraphie-Vortrag ausgedrückten logizistischen These (*1898a*, 149):

> Als eine vielleicht noch nicht allgemein geteilte persönliche Ansicht möchte ich beiläufig aussprechen, dass mir die reine Mathematik bloss als ein *Zweig* der *allgemeinen Logik* erscheint.

Es gibt Grund zu der Annahme, daß auch Schröder diese Ansicht nicht zu allen Zeiten geteilt hat. Mit der formalen Logik kam er erst 1873/74 während der Ausarbeitung des Programms der absoluten Algebra in engeren Kontakt. In seiner Schulprogrammschrift von *1874* führte er bei den Grundlagen dieser neuen Disziplin die logische Addition und logische Multiplikation von Begriffen an. Die Gesetze dieser beiden Operationen seien von Robert Grassmann in der *Formenlehre oder Mathematik* (*1872*) aufgestellt worden, und, so bemerkte Schröder, „wie ich kürzlich erfahren, vorher von *George Boole* in einem klassischen Werke 'An investigation of *the laws of thought* [1854]'." Schröder machte in diesen Schriften Gebrauch vom Logikkalkül, wendete ihn also an, erhielt durch die Arbeiten aber offenbar auch den Anstoß, den

Logikkalkül selbst zu untersuchen. Eine erste Frucht dieser Bemühungen war die kleine Schrift *Der Operationskreis des Logikkalkuls* (*1877*), in der sich Schröder zwar auf eine profunde Kenntnis der Schriften Booles stützen konnte, ansonsten aber die formallogische Literatur der Zeit weitgehend ignorierte. Der Grund ist darin zu suchen, daß Schröder seine Kenntnisse über die Veröffentlichungen logischer Arbeiten damals noch ausschließlich aus den spärlichen Rezensionen dieser Werke in dem seit 1871 mit Berichtsjahr 1868 erscheinenden *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* bezog.[37]

Reform der Logik hieß für Schröder in seinen frühen Schriften noch: Anwendung mathematischer Symbolik und Methoden auf die Logik. Dies suggerieren auch die Titel der Vorlesungen über Logik, die er in jener Zeit an den Polytechnischen Schulen in Darmstadt und Karlsruhe hielt. So hielt er z.B. im Sommersemester 1876 in Darmstadt, kurz vor Veröffentlichung des *Operationskreises*, eine Vorlesung mit dem Titel „Logik auf mathematischer Grundlage". Im Sommersemester 1878 las er in Karlsruhe über „Logik als mathematische Disziplin".

Daß in den 80er Jahren des 19. Jahrhunderts der pasigraphische Gedanke so sehr in den Vordergrund rückte, mag an Schröders Beschäftigung mit Leibniz' Idee einer *lingua characteristica universalis* gelegen haben, die er wohl vor allem über die Darstellung Trendelenburgs kennengelernt hat.[38] Aber noch im Vorwort zum ersten Band der *Vorlesungen* sah er sich von einer Bewältigung der Vorarbeit zur Schaffung einer philosophisch wissenschaftlichen Universalsprache durch Ausbau einer Logik der Beziehungen noch weit entfernt. Diesen Teil müsse er aber „grossenteils noch unfertig lassen" (*1900a*, 96).

Das Projekt der Veröffentlichung seiner *Vorlesungen über die Algebra der Logik* nahm eine Wende, als er sich durch Anwendung des Peirceschen Relativkalküls auf die Cantorsche Mengenlehre von dessen Leistungsfähigkeit überzeugt hatte. Als auslösendes Ereignis gab Schröder selbst die Veröffentlichung von Cantors erstem Artikel der „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" (*1895*) an. Die Algebra der Relative wuchs sich zu einem eigenen Band aus und die Arbeit am Aussagenkalkül stockte, wegen der Fülle der neu aufkommenden Aufgaben. Bemerkenswert ist die Schwerpunktverschiebung in Schröders Stellung zur Logik. Nicht mehr die Darstellung und Analyse der Logik mit den Mitteln der Mathematik stand im Vordergrund

[37] Die erste Rezension eines mathematisch-logischen Werkes erschien dort 1874. Es handelt sich um ein kurzes Autoreferat Arthur Cayleys (*1874*) über seine "Note on the Calculus of Logic" (*1871*). Möglicherweise wurde Schröder erst durch dieses Referat auf die englischen Arbeiten zur Algebra der Logik aufmerksam gemacht.

[38] Schröder zitiert Trendelenburg *1867* (erstmals erschienen *1856*); vgl. auch Schröder *1890a*, 38–40, und ausführlicher Schröder *1890b*.

seines Interesses, sondern die Darstellung und Analyse der Mathematik mit den Mitteln der Logik.

Anhang 1: Briefwechsel Ernst Schröder – Paul Carus

Der Nachlaß von Paul Carus befindet sich in den *Open Court Archives* der Southern Illinois University at Carbondale. Die Sammlung enthält gegenwärtig 10 Schreiben von Schröder an Carus und 4 Entwürfe von Briefen Carus' an Schröder. Die Teile der Korrespondenz, die sich im Nachlaß von Ernst Schröder befanden, sind im Zweiten Weltkrieg in Münster i.W. vernichtet worden.[39]

Schröder an Carus, dat. Karlsruhe, 15.12.1897, MS., Open Court Archives, Nr. 27/6/2.[40]

(Herrn Dr. Paul Carus, La Salle, Illinois, U.S.)

Verehrter Freund!

Schon lang wollte ich Ihnen schreiben, zunächst aus egoistischem Grunde, nämlich um Ihnen zu melden, dass, nachdem ich die Nummer Ihres Monist Vol. 7, I doppelt erhalten hatte (einmal durch Ihre Güte und einmal wol im Auftrage von C.S. Peirce), die Nummer *Vol. 7, II* leider ausgeblieben ist, wogegen die folgenden Nummern bis incl. Vol. 8, I wieder richtig eintrafen und hiermit verdankt werden. Obwohl ich kein Anrecht auf den Bezug Ihrer Zeitschrift überhaupt habe, wage ich doch die Bitte, mir womöglich auch die fehlende Nummer freundlichst schicken lassen zu wollen — und noch mehr: um nämlich den Monist vollständig zu besitzen[,] fehlen mir blos noch vom Anfange die Nummern: Vol. 1 Nº *I, III, IV* und Vol. 2 Nº *I und II*.

Sofern es Ihrem Verlage ohne übergrosses Opfer möglich sein sollte[,] mir diese Nummern noch zu liefern[,] wäre ich dafür sehr dankbar und bereit, meine Dankbarkeit sogleich durch die unentgeltliche Überlassung eines Artikels *On Pasigraphy* (ev. mit dem Zusatze:, its present state and the pasigraphic movement in Italy) zu beweisen, den ich dann bis längstens Ostern 1898

[39] Vgl. zum Bestandsnachweis das Inventar des Schröder-Nachlasses von Friedrich Bachmann, *Der wissenschaftliche Nachlass von Ernst Schröder* (1936), TS, 10 S. (Nachlaß Heinrich Scholz, Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung, Münster i.W.), S. 7. Zum Schicksal des Nachlasses vgl. Peckhaus *1988*, 52–54.

[40] Von Schröder gelegentlich verwendete abkürzende oder altertümliche Schreibweisen wie „Num̄er" für „Nummer" oder „kͤnnen" für „können" wurden stillschweigend in heutige Schreibweise übertragen. In den Vorlagen unterstrichene Textteile werden allgemein durch kursive Schrift hervorgehoben.

einzusenden mich verpflichte. Freilich werde ich dann immer noch in Ihrer Schuld bleiben und dessen auch später gelegentlich eingedenk sein. |[2]

Die Entstehungsgeschichte dieses auf c$^{\underline{a}}$ 20 Druckseiten zu schätzenden Artikels ist zunächst die folgende (die es auch wol in einer Fussnote zum Titel, oder in einer klein gedruckten Vorbemerkung, zur Einleitung, kurz anzudeuten verlohnen würde).[41]

Im August dieses Jahre [1897] hat in Zürich ein erster Internationaler Mathematiker-Congress stattgefunden;[42] der zweite soll 1900 in Paris tagen. Er war von über 230 Mathematikern und Mathematikerinnen besucht,[43] natürlich ungerechnet deren etwa anwesende Familienmitglieder. Jahre zuvor, als die Idee (in Frankfurt a.M.) zuerst auftauchte,[44] hatte ich mit den Veranstaltern Fühlung, und damals hiess es, die namhaftesten Franzosen seien mit der Annahme der Englischen Spache als der offiziellen auf dem Congresse und als neutraler Boden zwischen Deutsch und Französisch einverstanden. Darnach aber, als es zur Verwirklichung der Idee kam, verlor ich jene Fühlung. Und so kam es, dass ich meinen Vortrag auf Englisch ausarbeitete und anzeigte. Da zu dem Meeting der British Association nun die meisten Engländer und Amerikaner zur Zeit des Congresses sich bereits auf dem Wege nach Toronto befanden, so war die Anzahl der Teilnehmer und Teilnehmerinnen englischer Zunge eine unter Erwarten geringe; sie betrug noch nicht 2 % nämlich 4 Personen (2 Damen, 2 Herren).[45] Einen von diesen, den Prof. Dr. W. F. Osgood, Cambridge, U.S.[,] einen sehr sympathischen Herrn, habe ich, beiläufig gesagt, näher kennen gelernt. |[3]

Unter diesen Umständen war es gewiss zu billigen, dass ich den Bitten meiner Landsleute nachgab, damit wenigstens sie etwas von dem Vortrag hätten, und denselben — frei sprechend — in deutscher Sprache hielt. Für den Druck der

[41] Die folgenden Ausführungen sind in die einleitenden Vorbemerkungen der Veröffentlichung aufgenommen (Schröder *1898b*, 44).

[42] Vgl. den Kongreßbericht Rudio *1898*; dort zur Vorgeschichte und zum Verlauf 1–77.

[43] Die Teilnehmerliste (Rudio *1898*, 65–77) weist 242 Teilnehmer nach.

[44] Schröder spricht hier die Geschäftssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung an, die am 24.9.1896 im Rahmen der 68. Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Frankfurt a.M. stattfand (vgl. Wangerin/Taschenberg *1896*, Tl. 2.1, 46). Bei der Versammlung wurden allerdings frühere Anregungen und Pläne aufgenommen. Vgl. den „Bericht über die Jahresversammlung zu Frankfurt a.M.", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 5 (1901), Heft 1, erschienen 1897, 3–7, bes. 7.

[45] In der Teilnehmerliste sind allerdings zehn Personen aus Großbritannien und USA, darunter eine Frau, genannt: C.L. Bouton, St. Louis; James Harkness, Bryn Mawr, Penn.; E. W. Hobson, Cambridge, England; Joseph Larmor, Cambridge, England; John S. Makay, Edinburgh; G.R. Ohlhausen, St. Louis; William Fogg Osgood, Cambridge, Mass.; James Pierpont, New Haven, Conn.; René de Saussure, Washington, D.C.; Charlotte Angas Scott, Bryn Mawr, Penn.

Verhandlungen, der in extenso bei Teubner erfolgt, hatte ich später ziemliche Mühe, den Vortrag auch noch Deutsch in's Reine zu schreiben. Die Ausarbeitung desselben in feinstem Englisch (wo ich ihn übrigens für Sie auch noch einmal in's Reine schreiben müsste) hatte ich mich zuvor ziemlich kosten lassen, indem ich mich der Mitwirkung und Superrevision eines (wenn auch nur literarisch) hochgebildeten bejahrten Engländers versicherte. Sie würden die Mitteilung also telle quelle drucken können und müsste ich sogar darum bitten, wonicht darauf bestehen, da einseitig vorgenommene Abänderungen fast unfehlbar auf eine „Verschlimmbesserung" hinauslaufen müssten.[46] Der Aufsatz weist allerdings gegen $1\frac{1}{2}$ Druckseiten voll Formeln auf, die mit den eigentümlichen, in Bd. 3,I m[ei]n[e]r Algebra der Relative [Schröder *1895b*] vorkommenden Zeichen, wie $a \notin \breve{\bar{b}} \dagger \bar{c}\breve{d}$, zu drucken wären und einen nur wenig durch Text unterbrochenen, beinah zusammenhängenden Block bilden. Hier wäre es wol am einfachsten und billigsten, wenn ich der Firma Teubner den Auftrag gäbe, Ihnen von jeder Sorte der erforderlichen Zeichen (darunter die die über verschiedne Buchstaben zu setzenden $\bar{}$, $\breve{}$, $\breve{\bar{}}$ drei gute samples zu schicken, wovon Ihr Verlag dann leicht die erforderlichen Abgüsse machen könnte. (?)[47]

Wesentlich zeige ich in dem Vortrage, dass sämtliche Begriffe der reinsten Math[ematik] (Arithmetik) sowol als der allgemeinen Logik sich „pasigraphisch" aus fünf Urbegriffen („Kategorieen") aufbauen lassen — deren Zahl ich seitdem noch auf *vier* reduziert habe, und dass mit denselben Ausdrucksmitteln („Bezeichnungskapital") wie der Begriff der „Menge", „Anzahl", „Unendlichkeit" und des „grössten gemeinsamen |[4] Divisors", etc. etc. auch z.B. der Begriff der „Schwiegermutter" darstellbar (NB. falls man blos die für die Verwandtschaftsverhältnisse nötigen Relative m = männlich, und c = Kind von, child of, noch hinzunimmt). Zu letzterem Thema wird natürlich auf Prof. A. Macfarlane's Leistungen[48] eingegangen.

Ich weiss nun nicht, ob Sie dieses hinlänglich reizt, und bemerke einstweilen nur noch, dass ich, wenn damit auch ein gewisser Zeitverlust verbunden, gern eine Korrektur der Mitteilung haben möchte. Ich würde überhaupt nicht wünschen, dass die Mitteilung im Monist dem Erscheinen der Verhandlungen des Kongresses wesentlich zuvorkäme, wohl aber dürfte sie ungefähr gleichzeitig herauskommen.[49] —

[46]Carus sah sich daraufhin zu der folgenden Fußnote gezwungen: „The editors have been careful to preserve all the stylistic and typographical details of the original MS. of Professor Schröder" (Schröder *1898b*, 44, Fn. 1).

[47]Carus beschaffte sich in der Tat die Drucktypen bei Teubner. Vgl. Schröder an Carus, Postkarte, dat. Karlsruhe, 28.2.1898, Open Court Archives Nr. 27/17/1.

[48]Vgl. u.a. Macfarlane *1879*, *1880*, *1881*.

[49]Die Abhandlung erschien im *Monist* erst nach dem bereits Mitte 1898 veröffentlichten

Die geringe Menge der Urbegriffe ist mir selbst erstaunlich; einer derselben heisst: „identisch mit –“, ein andrer heisst: „*nicht*“. —

So weit das Pourparler! —

Dass ich in meinem letzten Briefe, den Sie[,] wie ich hoffe[,] s[einer] Z[eit] richtig erhalten haben, als too intent on Mr. Peirce's paper on the regenerated Logic,[50] Ihres in der gleichen Nummer enthaltenen interessanten Artikels Panlogism [Carus *1896*] nicht auch gedachte, müssen Sie mir nicht übel nehmen. —

Wir hatten in den letzten 2 Jahren an der Techn[ischen] Hochschule mit steigender Frequenz Neubauten, Examinationen, Habilitationen und Berufungen etc., für mich so unruhige Zeiten, dass meine literarische Arbeit so ziemlich stehen geblieben ist. Hoffentlich kommt sie bald wieder in guten Zug. —

Ich freue mich der Gelegenheit, Ihnen hiernächst vergnügte Weihnachtsfeiertage und ein glückliches neues Jahr zu wünschen und verbleibe

Ihr treu ergebener

Karlsruhe in Baden, E. Schröder.
15. Dez. 1897

(Gottesauerstrasse 9)

Anhang 2: Briefwechsel Ernst Schröder – Felix Klein

Im Nachlaß Felix Kleins in der Staats- und Universitätsbibliothek in Göttingen befinden sich 5 Briefe Schröders, die dieser an Felix Klein in dessen Eigenschaft als Mitglied der Redaktion der *Mathematischen Annalen* in den Jahren 1886–1896 gerichtet hat.[51] Die ersten drei Briefe (dat. Karlsruhe, 15.12.1886, 11.1.1887, 14.1.1887) betreffen Schröders in den *Mathematischen Annalen* gedruckte Abhandlung „Tafeln der eindeutig umkehrbaren Functionen zweier Variabeln auf den einfachsten Zahlengebieten“ (*1887a*) sowie den Aufsatz „Ueber Algorithmen und Calculn“, der im *Archiv der Mathematik und Physik* veröffentlicht wurde (*1887b*). Die beiden anderen Briefe beziehen sich auf Arbeiten aus dem Gebiet der Algebra der Logik und sind hier vollständig abgedruckt.

Kongreßbericht (Rudio *1898*); vgl. Schröder an Carus, dat. 4.7.1898, Open Court Archives, Nr. 27/18/2.

[50]Schröder spricht hier den ersten Teil einer Rezension des dritten Bandes seiner *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*1895b*) durch Charles S. Peirce an (Peirce *1896*). Der zweite Teil dieser Rezension erschien im darauffolgenden Jahr unter dem Titel "The Logic of Relatives" (Peirce *1897*).

[51]SUB Göttingen, Cod. Ms. F. Klein 11.

1. Schröder an Klein, MS, 4 S., dat. Karlsruhe, 11.3.1896, Cod. Ms. F. Klein, 11.

(Herrn Professor Felix Klein, Redaktion der Math. Annalen in Göttingen)

Verehrter Herr Kollege!

Nach meinem oft jahrzehntelangen Stillschweigen in den Math. Annalen ist es vielleicht doch nicht unbescheiden, wenn ich auch einmal mit *drei* Mitteilungen zugleich anrücke mit der Bitte, denselben womöglich Aufnahme in jene zu gewähren. Dieselben hängen innerlich zusammen und sind an die Reihenfolge gebunden, in der ich die Titel anführe:[52]

1º) *Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze* (36 Blatt mit 1 Figur).
2º) *Selbständige Definition der Mächtigkeiten 0, 1, 2, 3 und die explizite Gleichzahligkeitsbedingung.* (7 Blatt)
3º) *Über Begriffsschrift, Pasigraphie und das Bezeichnungssystem der* PEANO *'schen Schule.* (24 Blatt)

Mich an die Annalen zu wenden[,] zwingt mich schon der Umstand, dass allein die Teubner'sche Offizin in Leipzig den typographischen Anforderungen zu genügen vermag; die gebrauchten Zeichen sind dort alle vorrätig. Ich wäre im Falle eines Refüs einfach mundtot gemacht — so wenigstens bis zur Fertigstellung meines Bd. 3, II, dem erst noch Bd. 2, II voranzugehen hat! Den *sehr erheblichen* Kampf, den ich für die Sicherung und gute Fertigung dieser Zeichen zu bestehen hatte, möchte ich mit einer anderen Offizin nicht nochmals kämpfen (wenigstens zur Zeit nicht, wo ich allzu belastet).

Ich denke mir auch, dass Sie die zwei ersten Mitteilungen nicht ungern aufnehmen[,] zumal die zweite sehr kurz ist. Von dieser wünschte ich, dass sie unmittelbar auf die erste folge — um mich so einigermassen davon zu rehabilitieren, dass ich in der ersten gewissermassen nur als „Kärrner" für Herrn G. Cantor arbeite.

Die erste ist allerdings nicht kurz (gegen 50 Druckseiten), betrifft jedoch einen Gegenstand der in weiten Kreisen gerade im Vordergrund des Interesses steht; und welches *Thema* könnte man auch in der Mathematik für wichtiger halten, |[2] als die Theorie der eineindeutigen Zuordnung?

Ich habe dieselbe auf eine rein logische, rechnerische Basis gestellt, den Sätzen A bis E Cantor's einen sechsten, 62), hinzugefügt und davon viere bewiesen,

[52] Kapitälchen in der Vorlage doppelt unterstrichen.

die zwei noch unbewiesenen auf *einen* in seiner einfachsten Form reduzirend.[53] Es lag mir daran[,] möglichst bald praktisch zu zeigen, dass mit dem neuen Instrument der algebraischen Logik etwas zu machen ist.

Um das Volum zu vermindern (inhaltlich könnte es kaum geschehen[,] ohne den Wert des Ganzen in Frage zu stellen) habe ich reichlich den kleineren Druck des Kontextes vorgeschlagen, hoffend[,] dass dies nicht etwa als Präcedenz Bedenken errege oder beim Verleger Schwierigkeiten mache. Ich bitte dieserhalb die obenauf liegende „Notiz etc." nicht übersehen zu wollen.

Die dritte Mitteilung mag — wenn überhaupt — dann später folgen. Eine Ablehnung würde ich mir weniger zu Herzen nehmen. Da sie bei ihren vielen kritisch-polemischen *Beigaben* äusserlich an ein Pamphlet gemahnt, kann ich mir wohl vorstellen, dass Bedenken gegen ihre Aufnahme sich aufdrängen mögen. Sie sucht das wahre Ziel der Pasigraphie klar zu stellen (die ihrer Verwirklichung *naht*) — gegenüber einem sich breit machenden salva venia Wechselbalge, der von Beklagenswerten für das echte Kind gehalten und gehätschelt wird.

Die Aufnahme liegt viel weniger in meinem persönlichen Interesse, als in dem der Andern. Letztere (Peano mit Gefolge in der Rivista, Frege) sind in den gleichen Fehler verfallen wie anfangs und längere Zeit hindurch — aus Mangel an Verständniss — auch ich: die *Peirce*'sche Leistung, durch die all' ihre Bezeichnungskünsteleien (die mich heute wie die Stammelversuche eines Kindes anmuten) vorweg überholt sind, nicht hinlänglich zu würdigen, ja gar nicht zu beachten. Sie befinden sich mit ihrem „Signicismus" auf dem Holzwege. Über kurz oder lang wird niemand umhin können, auch Freund Peano nicht, die ungeheure Überlegenheit des Peirce'schen Bezeichnungssystems *und* |[3] der darauf gegründeten *Disziplin* (derengleichen den Andern noch so gut wie völlig abgeht) anzuerkennen oder wenigstens inne zu werden.

Darf ich ein Bild gebrauchen, so hat — wie ich die Sache ansehe — Peirce den Eingang zu einer unerschöpflichen Goldmine (an Erkenntnissen), den schon De Morgan suchte, forcirt. Der Zugang blieb so schwierig, dass faktisch sonst niemand dazu gelangte; durch meine Arbeit Bd. 3, I[54] habe ich den Eingang schon leidlich bequem und — gewiss — für jedermann zugänglich gemacht, und bin noch sehr mit Festigung der Richtstollen, Ausbau des Schachtes in Beschlag genommen. In *meinem* Interesse liegt es nicht, die Andern schnell

[53]Schröder bezieht sich auf die Sätze A bis E in Cantor *1895*, 484. Der von Schröder hinzugefügte Satz 62 (*1898c*, 344 *f.*) sagt aus, daß die Mächtigkeit einer Teilmenge nie größer ist als die der Gesamtmenge: $(a ⋹ b)^{\bullet} ⋹ (\mathsf{a} \leq \mathsf{b})$ bzw. $(a \subset b) ⋹ (\mathsf{a} \leq \mathsf{b})$. Die Mengensymbole a und b führt Schröder für die Rede von Mengengleichheit (statt Gleichmächtigkeit) ein.

[54]Schröder *1895*.

herbeizurufen zur Teilnahme an der Ausbeute: im Gegenteil, je länger sie brauchen[,] bis sie sich recht besinnen, desto mehr werde ich Musse haben, einen erklecklichen Teil von dem, was sich noch ohne mühsameres Schürfen gewinnen lässt, mir selber zu sichern [Mitteilung 1º) und 2º) ist blos ein kleiner Echantillon davon].[55] Das läge blos im Interesse der Gesamtheit, wenn baldigst Viele in der dankbaren Richtung schürften. Ich kann also diesem Teile Ihrer Entscheidung mit Gleichmut entgegensehen.

Ich erwarte sogar von meiner Arbeit 3º) direkte Nachteile und unternahm sie aus Pflichtgefühl, das mich drängt[,] ein Quousque tandem zu rufen. Während, wenn ich blos fortfahre[,] mit meinem Instrumente positives zu leisten, mir das kein Mensch verübeln kann, wird sie mir Gegnerschaft, vielleicht Streit, Repliken zuziehn, mich zu Dupliken nötigen und in meiner Hauptarbeit stören; auch ist zu besorgen, dass unter den Fachgenossen meine lieben Landsleute dann nicht mit der gleichen Einmütigkeit zu mir stehen werden, wie die Italiener zu dem ihrigen. Wären diese Hunde und ich ein Hase, so könnte es mein Tod werden.

Was Ihre Leser betrifft, so glaube ich allerdings, dass es nicht wenige derselben lebhaft interessiren wird, einmal eine Auseinandersetzung oder Abrechnung zwischen den verschiednen Schulen in der Zeichenschrift, die doch nicht mehr totzuschweigen ist (die Frege'sche kommt quantitativ |[4] und qualitativ weniger in Betracht)[,] vorgenommen zu sehen.

Sollten Sie blos einige meiner Aufstellungen noch zu stark oder gar verletzend finden, so wäre ich eventuell dankbarst bereit, sie in der Form zu mildern.

Geneigter Nachricht entgegensehend zeichne mit bestem Grusse hochachtungsvollst

Ihr
Dr. Ernst Schröder
Prof.

Karlsruhe in Baden,
11. März 1896.

P.S. Die erste Mitteilung liegt bei; die zweite und dritte gehen gleichzeitig in einem besondern Briefumschlag (ohne Begleitschreiben) ab.

D.O.

[55] Eckige Klammer im Original.

2. Schröder an Klein, MS, 3 S., dat. Karlsruhe, 16.3.1896, Cod. Ms. F. Klein, 11.

(Herrn Prof. Dr. F. Klein, Göttingen)

Hochgeehrter Herr Kollege!

Im Besitz Ihrer werten Karte vom 15. d. gebe ich Ihnen *sehr gerne* die Ermächtigung, meinen Aufsatz № 3 „Über Begriffsschrift, (falsche und wahre)* Pasigraphie und das Bezeichnungssystem der Peano'schen Schule" — wenn möglich — anstatt in den Math. Annalen — in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen unterzubringen. Die geringfügigen redaktionellen Änderungen, die dieser Wechsel bedingte, könnte ich leicht während des Druckes anbringen. Doch müssten № 1 und 2 — in den Annalen — vorangegangen sein oder wenigstens a tempo erscheinen. Und ferner müsste sich die Druckerei der Anzeigen auf den Satz von *Peirce*'s resp. meinen Zeichen ⋹, ⋹̸, ⊂, ⊄, ɟ, ¯, ˘, ˘̄, ≠ *und* der *Peano*'schen -, ⊃, ∩, ∪ einrichten (mit einem ganz schlechten Surrogat der meinigen, wie es etwa Rezensionen in auswärtigen Zeitschriften bringen, könnte ich mich hier nicht zufrieden geben). Ich dachte mir von Anfang an die Kundgebung als ein $|^2$ konzentrisches Feuer — ansonst ich № 1 und 2 früher eingeschickt haben würde.

Gedachte Einrichtung der Anzeigen-Druckerei würde auch den Vorteil bringen, mir anderweite kritische, antikritische oder rein wissenschaftliche Mitteilungen in Hinkunft zu ermöglichen. Ich könnte z.B. sofort, als vom letztgenannten Genre, eine Mitteilung von 2..3 Seiten „über *Dedekind*'s Satz der Definition durch Rekursion" bringen, den in seiner besten Gestalt noch niemand gesehen hat, u.a.m.

Gestatten Sie mir, zugunsten meines Instrumentes der Relativtheorie, für das ich Propaganda mache, dessen grundlegende Ideen von *Peirce* herrühren, zu dessen Ausbau und Vervollkommnung ich aber auch meinerseits viel wenigstens gearbeitet habe, Ihnen gegenüber noch auf Eines aufmerksam zu machen. Herr *G. Cantor*, mit dessen Genialität ich weit entfernt bin, meine bescheidnen Anlagen in Vergleich stellen zu wollen, hat sich seit 20 Jahren mit dem Thema seiner Forschungen beschäftigt; obwohl eine Vertiefung in diese mir stets als Desideratum vorgeschwebt, bin ich erst seit dessen letztem Annalenaufsatz[,][56] $|^3$ der im November vorigen Jahres herauskam, dazu gekommen. Wenn ich ihn trotz solchen Vorsprungs nun in kürzester Frist in gewissem Sinne gleichsam eingeholt habe, so dürfte dadurch gerechtfertigt erscheinen, dass mein Instrument einem „Fahrrad" verglichen wird, womit sich

*Die eingeklammerten Worte würden sich dem Titel noch treffend zufügen lassen. Doch kann er auch bleiben wie er ist [Anmerkung Schröders].

[56]Cantor *1895*.

auch der rüstigste Fussgänger rasch einholen lässt (ob dasselbe auch zum Bahnbrechen [?] geeignet, ist eine andre Frage[,] über die erst die Zukunft Entscheidung bringen kann).

Inbezug auf Ihren Freund, Herrn Cantor, denke ich mir, dass er nichts dagegen haben wird, wenn ihm vonseiten der algebraischen Logik eine Bundesgenossenschaft erwächst. Wie Sie bei genauerer Prüfung bestätigt finden werden, bemühe ich mich, ihm voll und ganz das Seinige zuzubilligen, auch da, wo ich mir nur eben denken kann, dass er Einzelnes auf dieselbe oder ähnliche Weise, wie ich es im Detail ausführe, sich selbst zurechtgelegt haben wird. —

Ich vergass noch zu bemerken, dass ich mir etwa je 120 Abzüge auf meine Kosten auf dem Imprimaturbogen auszubitten gedenke. — Für weitre Nachricht dankbar

Ihr
Dr. E. Schröder
Prof.

Karlsruhe in Baden
16. März 1896.

(Gottesauerstr. 9)

Quellenverzeichnis

Ladd-Franklin Papers, Columbia University Library, Butler Library, New York: Briefe Ernst Schröders an Christine Ladd-Franklin, Box 5.

Nachlaß Heinrich Scholz, Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung, Münster i.W.: Friedrich Bachmann, *Der wissenschaftliche Nachlass von Ernst Schröder* (1936), TS, 10 S., Nachlaß Heinrich Scholz.

Open Court Archives, Southern Illinois University at Carbondale, Morris Library, Special Collections: Briefwechsel zwischen Paul Carus und Ernst Schröder, Nrn. 27/3/4, 27/5/2, 27/16/2, 27/17/1, 27/18/2, 32/2/2, 32/3/5.

Literaturverzeichnis

ALBERS, Donald J./G.L. ALEXANDERSON/Constance REID *1987* *International Mathematical Congresses. An Illustrated History 1893–1986*, New York/ Berlin/Heidelberg.

„Bericht über die Jahresversammlung zu Frankfurt a.M. Am 21. bis 26. September 1896", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **5** (1901), Heft 1 [erschienen 1897], 3–7.

BOOLE, George *1854 An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, London.

BOREL, Émile *1898 Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris.

CANTOR, Georg *1895* „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Artikel)", *Mathematische Annalen* **46**, 491–512.

CARUS, Paul *1892* $\kappa\rho\sigma$, Rezension von Schröder *1890a*, *The Monist* **2** (1891–92), H. 4 [Juli 1892], 618–623.

— *1896* "Panlogism", *The Monist* **7** (1896–97), H. 1 [Oktober 1896], 82–99.

CAYLEY, Arthur *1871* "Note on the Calculus of Logic", *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **11**, 282-283.

— *1874* Cly, Rezension von Cayley *1871*, *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* **3** (1871) [erschienen 1874], 13.

COUTURAT, Louis/L. LEAU *1903 Histoire de la langue universelle*, Paris.

DEDEKIND, Richard *1888 Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, 2. Aufl. 1893.

GRASSMANN, Robert *1872 Die Begriffslehre oder Logik. Zweites Buch der Formenlehre oder Mathematik*, Stettin.

HESSENBERG, Gerhard *1906* „Grundbegriffe der Mengenlehre. Zweiter Bericht über das Unendliche in der Mathematik", *Abhandlungen der Fries'schen Schule* N.F. **1**, Heft 4, 479–706.

KORSELT, Alwin *1911* „Über einen Beweis des Äquivalenzsatzes", *Mathematische Annalen* **70**, 294–296.

MACFARLANE, Alexander *1879* "On the Calculus of Relationship", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **10** (1878–80) [read 19 May 1879], 224–232.

— *1880* "On the Calculus of Relationship. — Part II", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **11** (1880–82) [read 6. Dec. 1880], 5–13.

— *1881* "On the Calculus of Relationship. Part III", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **11** (1880–82) [read 7 March 1881], 162–163.

PEANO, Giuseppe *1894 Notations de logique mathématique. Introduction au Formulaire de Mathématique*, Turin.

— *1908 Formulario Mathematico. Editio V (Tomo V de Formulario completo)*, Turin.

PECKHAUS, Volker *1988* „Karl Eugen Müller (1865–1932) und seine Rolle in der Entwicklung der Algebra der Logik", *History and Philosophy of Logic* **9**, 43–56.

PEIRCE, Charles S. *1867* "On an Improvement in Boole's Calculus of Logic", *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences* **7** (1865–1868) [presented 12 March 1867], 250–261.

— *1870* "Description of a Notation for the Logic of Relatives, Resulting from an Amplification of the Conceptions of Boole's Calculus of Logic", *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences*, n.s. **9**, Tl. 2, 317–378.

— *1880* "On the Algebra of Logic", *American Journal of Mathematics* **3**, 15–57.

— *1883* "A Theory of Probable Inference. Note B. The Logic of Relatives", in: *Studies in Logic by Members of the Johns Hopkins University*, Boston, Mass., 187–203.

— *1885* "On the Algebra of Logic. A Contribution to the Philosophy of Notation", *American Journal of Mathematics* **7**, 180–202.

— *1896* "The Regenerated Logic", *The Monist* **7** (1896–97), H. 1 [Oktober 1896], 19–40.

— *1897* "The Logic of Relatives", *The Monist* **7** (1896–97), H. 2 [Januar 1897], 161–217.

RUDIO, Ferdinand (Hg.) *1898 Verhandlungen des Ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897*, Leipzig.

SCHOENFLIES, Arthur *1900* „Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **8**, Heft 2, 1–250.

SCHRÖDER, Ernst *1873 Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende*, Bd. 1 [mehr nicht erschienen]: *Die sieben algebraischen Operationen*, Leipzig.

— *1874 Über die formalen Elemente der absoluten Algebra*, Beilage zum Programm des Pro- und Realgymnasiums Baden 1873/74, Stuttgart.

— *1877 Der Operationskreis des Logikkalkuls*, Leipzig.

— *1887a* „Tafeln der eindeutig umkehrbaren Functionen zweier Variabeln auf den einfachsten Zahlengebieten", *Mathematische Annalen* **29**, 299–317.

— *1887b* „Ueber Algorithmen und Calculn", *Archiv der Mathematik und Physik* 2. R., **5**, 225–278.

— *1890a Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)*, Bd. 1, Leipzig.

— *1890b Über das Zeichen. Festrede bei dem feierlichen Akte des Direktorats-Wechsels an der Grossh. Badischen Technischen Hochschule zu Karlsruhe am 22. November 1890 gehalten von dem Direktor des Jahres 1890/91*, Karlsruhe.

— *1891 Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)*, Bd. 2, Tl. 1, Leipzig.

— *1892* "Signs and Symbols", *The Open Court* **6**, 3431–3434, 3441–3444, 3463–3466.

— *1895a* „Note über die Algebra der binären Relative", *Mathematische Annalen* **46**, 144–158.

— *1895b Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)*, Bd. 3: *Algebra und Logik der Relative*, Abt. 1, Leipzig.

— *1898a* „Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien", in: Rudio *1898*, 147–162.

— *1898b* "On Pasigraphy. Its Present State and the Pasigraphic Movement in Italy", *The Monist* **9** (1899), H. 1 [erschienen 1898], 44–62, Corrigenda, 320.

— *1898c* „Ueber zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze", *Nova Acta Leopoldina. Abhandlungen der Kaiserlich Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher* **71**, Nr. 6, 301–362.

— *1898d* „Die selbständige Definition der Mächtigkeiten 0, 1, 2, 3 und die explizite Gleichzahligkeitsbedingung", *Nova Acta Leopoldina. Abhandlungen der Kaiserlich Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher* **71**, Nr. 7, 364–376.

— *1901a* „Über G. Cantorsche Sätze", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **5** (1901), 81-82.

— *1901b* „Grossherzoglich Badischer Hofrat Dr. phil. Ernst Schröder ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Karlsruhe i. Baden", in: *Geistiges Deutschland. Deutsche Zeitgenossen auf dem Gebiete der Litteratur, Wissenschaften und Musik*, Berlin-Charlottenburg, unpag.

— *1901c* „Sur une extension de l'idée d'ordre", in: *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie*, Bd. 3: *Logique et Histoire des Sciences*, Paris, 235–240.

— *1905 Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)*, Bd. 2, Tl. 2, hg. v. Karl Eugen Müller, Leipzig.

— *1966 Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)*, Bd. 2, hg. v. Eugen Müller, 2. Aufl., Bronx, New York.

SUGDEN, Sherwood J.B. *1987* "Historical Introduction", zu: *Open Court. A Centennial Bibliography 1887–1987*, zusammengestellt v. Ralph E. McCoy, La Salle, Ill., 11–26.

TRENDELENBURG, Adolf *1856* „Ueber Leibnizens Entwurf einer allgemeinen Charakteristik", *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften*, Berlin, 36-69.

— *1867* „Ueber Leibnizens Entwurf einer allgemeinen Charakteristik", in: Ders., *Historische Beiträge zur Philosophie*, Bd. 3: *Vermischte Abhandlungen*, Berlin, 1–47.

WANGERIN, Albert/Otto TASCHENBERG (Hgg.) *1896 Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. 68. Versammlung zu Frankfurt a.M. 21.–26. September 1896*, Tl. 2.1, Leipzig.