

# TOUT CHEMIN GÉNÉRIQUE DE HÉRISONS RÉALISANT UN RETOURNEMENT DE LA SPHÈRE DANS $\mathbb{R}^3$ COMPREND UN HÉRISSEIN PORTEUR DE QUEUES D'ARONDE POSITIVES

YVES MARTINEZ-MAURE

**Abstract:** Hedgehogs are (possibly singular and self-intersecting) hypersurfaces that describe Minkowski differences of convex bodies in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . They are the natural geometrical objects when one seeks to extend parts of the Brunn–Minkowski theory to a vector space which contains convex bodies. In this paper, we prove that in every generic path of hedgehogs performing the eversion of the sphere in  $\mathbb{R}^3$ , there exists a hedgehog that has positive swallowtails. This study was motivated by an open problem raised in 1985 by Langevin, Levitt, and Rosenberg [3].

**2010 Mathematics Subject Classification:** 52A15, 52A20, 52A99, 53A05, 53D10, 58K35.

**Key words:** Eversion of the sphere, hedgehogs, generic metamorphosis, type of swallowtails, indices, absolute coorientation.

## 0. Introduction

En 1958, S. Smale publia un résultat abstrait dont une conséquence tout à fait étonnante était que n'importe quelle sphère de  $\mathbb{R}^3$  peut être retournée (de manière à venir présenter sa face interne vers l'extérieur) au moyen d'une homotopie régulière [10]. La démonstration de Smale permettait de comprendre pourquoi un tel retournement est possible, mais elle ne permettait pas d'imaginer une procédure effective pour le réaliser concrètement. A. Shapiro fut le premier en 1961 à concevoir une procédure permettant de réaliser effectivement un tel retournement. L'idée de Shapiro consistait à transformer la sphère en un revêtement à deux feuillets de la surface de Boy (qui est un plan projectif immergé admettant un axe de symétrie ternaire) par une homotopie régulière, puis à échanger les deux feuillets au travers de cette surface de Boy. Shapiro communiqua cette idée à B. Morin [2] mais ne la publia pas. Il fallut attendre 1966 et un article de A. Phillips dans la revue *Scientific American* pour disposer des premières illustrations du retournement de la sphère imaginé par Shapiro [9].

Dans cet article, nous nous intéressons encore au retournement de la sphère dans  $\mathbb{R}^3$  mais en changeant les règles du jeu. Nous n'exigeons plus que l'homotopie soit régulière mais nous exigerons en revanche que toutes les surfaces intermédiaires (dont certaines seront singulières) soient paramétrées par leur application de Gauss. De telles immersions (éventuellement singulières) de la sphère dans  $\mathbb{R}^3$  sont appelées *hérissons* de  $\mathbb{R}^3$  [3]. La question qui fera l'objet de notre étude sera de comprendre quelles sont les singularités qui sont inévitables lors d'un retournement de la sphère selon un chemin générique de hérissons.

Dans la section 1, nous rappellerons brièvement la notion de hérisson et nous présenterons le résultat principal : *Tout chemin générique de hérissons réalisant un retournement de la sphère dans  $\mathbb{R}^3$  comprend un hérisson porteur de queues d'aronde positives*. La section 2 sera consacrée aux singularités et métamorphoses génériques des hérissons de  $\mathbb{R}^3$  et à la présentation du problème ouvert qui a motivé cette étude : *Existe-t-il un modèle hérisson du plan projectif réel dont le lieu singulier est réduit à des arêtes de rebroussement immergées (i.e. sans queues d'aronde) ?* (Langevin–Levitt–Rosenberg, 1985 [3]). La section 3 sera consacrée à la présentation des outils qui permettront la démonstration du résultat principal dans la section 4. La clef de la démonstration sera une notion d'indice liée à la géométrie extrinsèque des hérissons et à la notion de coorientation absolue qui lui sera attachée. Pour finir, nous présenterons dans la section 5 un retournement générique et un modèle hérisson du plan projectif dont toutes les singularités sont génériques.

## 1. Rappels et présentation du résultat principal

Les (hypersurfaces) hérissons de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , ont été introduit(e)s par Langevin, Levitt et Rosenberg comme des enveloppes paramétrées par leur application de Gauss [3]. À toute fonction  $h \in C^\infty(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$ , on associe l'enveloppe de la famille d'hyperplans d'équation  $\langle x, u \rangle = h(u)$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Cette enveloppe est notée  $\mathcal{H}_h$  et appelée *hérisson de fonction support  $h$* . Elle admet pour paramétrisation l'application

$$\begin{aligned} x_h : \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ u &\mapsto (\nabla h)(u) + h(u)u, \end{aligned}$$

qui peut être vue comme la réciproque de son application de Gauss : en tout point régulier  $x_h(u)$  de  $\mathcal{H}_h$ , le vecteur  $u$  est normal à  $\mathcal{H}_h$  [3], (cf. figure 1).

Le hériçon  $\mathcal{H}_h := x_h(\mathbb{S}^n)$  peut bien sûr présenter des singularités ou des auto-intersections. Il représente n'importe quelle différence formelle  $K - L$  de deux corps convexes  $K, L$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dont les fonctions de support respectives  $k$  et  $l$  sont  $C^\infty$  et telles que  $h = k - l$ . Effectuer la différence  $K - L$  pour obtenir le hériçon  $\mathcal{H}_h$  revient simplement à associer à tout  $u \in \mathbb{S}^n$ , la différence  $x_h(u) := x_k(u) - x_l(u)$  des points  $x_k(u) \in \partial K$  et  $x_l(u) \in \partial L$  en lesquels  $u$  est le vecteur normal sortant (cf. figure 2).

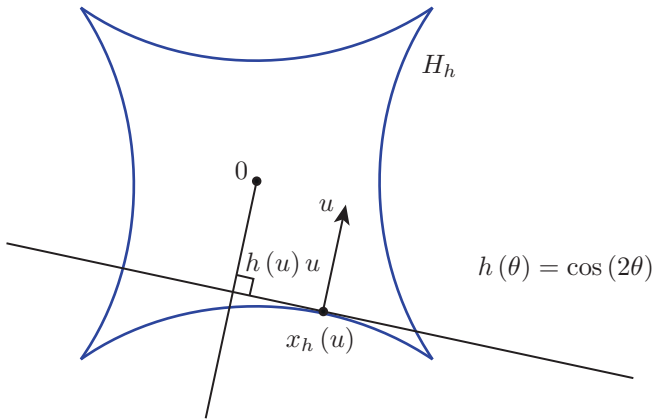


FIGURE 1. Hériçon  $\mathcal{H}_h$  paramétré par  $x_h$ .

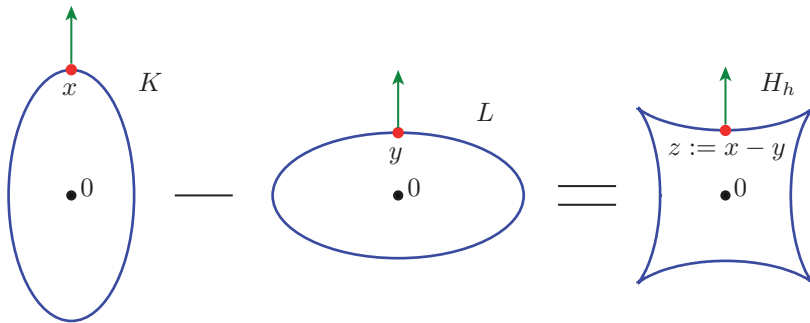


FIGURE 2. Hériçon différence de deux corps convexes  $K, L \in \mathbb{R}^2$ .

Les hériçons sont les objets géométriques les plus naturels quand on cherche à étendre certaines parties de la théorie de Brunn–Minkowski à des espaces vectoriels contenant les corps convexes (ici de fonction de support  $C^\infty$ ) [3, 7].

Comme nous le rappellerons plus loin, les hérissons sont des fronts d'onde au sens de la géométrie de contact. Ils n'admettent donc que des singularités de Legendre. En particulier, les singularités génériques des hérissons de  $\mathbb{R}^3$  sont des arêtes de rebroussement et des queues d'aronde (cf. figure 3). Le signe de la courbure de Gauss est constant sur les parties régulières du hérisson [3]. Il permet de distinguer deux types de queues d'aronde : une queue d'aronde est dite positive (resp. négative) si la courbure de Gauss est  $> 0$  (resp.  $< 0$ ) sur la partie en forme de queue qui la jouxte, c'est-à-dire si la courbe de points doubles issue de la queue d'aronde se situe au voisinage de la queue dans la région hyperbolique (resp. elliptique) jouxtant l'arête (cf. figure 3). Nous désignerons par  $\mathcal{H}^3$  l'espace vectoriel des hérissons (de fonction de support  $C^\infty$ ) de  $\mathbb{R}^3$  : il s'identifie à  $C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$  si l'on identifie tout hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$  à sa fonction de support  $h \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$ .

L'étude des 5 métamorphoses génériques des hérissons de  $\mathbb{R}^3$  (cf. figure 4) permet d'affirmer que si un chemin générique de hérissons  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}^3$ ,  $t \mapsto \mathcal{H}_{h_t}$  réalise un retournement de la sphère  $\mathbb{S}^2$  (ou plus généralement d'une surface convexe fermée de  $\mathbb{R}^3$ ), alors il existe des valeurs de  $t \in ]0, 1[$  pour lesquelles  $\mathcal{H}_{h_t}$  porte au moins une paire de queues d'aronde. Elle nous permet en outre d'affirmer que lorsque  $t$  croît continûment de 0 à 1, les "premières" queues d'aronde qui apparaissent sont nécessairement des queues d'aronde négatives. Mais rien n'indique a priori qu'un tel chemin générique  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}^3$ ,  $t \mapsto \mathcal{H}_{h_t}$  comprend nécessairement un hérisson  $\mathcal{H}_{h_t}$  porteur de queues d'aronde positives. Le principal but de cet article est précisément d'établir l'existence d'un tel  $\mathcal{H}_{h_t}$ .

**Théorème.** *Si un chemin générique de hérissons  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}^3$ ,  $t \mapsto \mathcal{H}_{h_t}$  réalise un retournement de la sphère  $\mathbb{S}^2$  (autrement dit, si  $\mathcal{H}_{h_0}$  et  $\mathcal{H}_{h_1}$  ont la sphère  $\mathbb{S}^2$  pour réalisation géométrique commune mais sont dotés de coorientations opposées), alors il existe un  $t \in ]0, 1[$  pour lequel le hérisson  $\mathcal{H}_{h_t}$  porte au moins une paire de queues d'aronde positives.*

Un exemple simple de retournement générique sera présenté dans la dernière section (voir la figure 6). Il convient de rappeler ici que tout hérisson  $\mathcal{H}_h = x_h(\mathbb{S}^2)$  de  $\mathbb{R}^3$  est muni d'une coorientation (ou orientation transverse) pour laquelle : en tout point régulier  $x_h(u)$  de  $\mathcal{H}_h$ , la normale est orientée par le vecteur  $\text{sgn}[R_h(u)]u$ , où  $\text{sgn}$  est la fonction signe et  $R_h(u)$  l'inverse  $K_h(u)^{-1}$  de la courbure de Gauss  $K_h(u)$  de  $\mathcal{H}_h$  en  $x_h(u)$ . Pour tout  $h \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{H}_h$  et le hérisson  $\mathcal{H}_{\tilde{h}}$  de fonction de support  $\tilde{h}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto -h(-u)$  ont même réalisation géométrique  $x_h(\mathbb{S}^2)$  mais sont dotés de coorientations opposées. En effet, on a  $x_{\tilde{h}}(-u) = x_h(u)$

pour tout  $u \in \mathbb{S}^2$ . Un retournement d'un hérisson  $\mathcal{H}_h = x_h(\mathbb{S}^2)$  dans  $\mathcal{H}^3$  est donc la donnée d'un chemin  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}^3, t \mapsto \mathcal{H}_{h_t}$  tel que  $\mathcal{H}_{h_0} = \mathcal{H}_h$  et  $\mathcal{H}_{h_1} = \mathcal{H}_{\tilde{h}}$ . Dans le cas d'un retournement de la sphère  $\mathbb{S}^2, h_0$  et  $h_1$  seront simplement les fonctions constantes égales à  $-1$  et  $+1$  sur  $\mathbb{S}^2$ .

### 2. Singularités et métamorphoses génériques des hérissons

Désignons par  $(u_1, \dots, u_{n+1}; x_1, \dots, x_{n+1})$  les fonctions coordonnées sur  $(\mathbb{R}^{n+1})^2$ . La restriction à  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  de la 1-forme définie sur  $(\mathbb{R}^{n+1})^2$  par  $\omega = \sum_{i=1}^{n+1} u_i dx_i$ , définit une structure de contact qui fait de  $\pi: \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, (u, x) \mapsto x$  une fibration de Legendre. Comme les  $x_h: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  forment un ouvert dense parmi les applications de Legendre de ce fibré [4], les travaux d'Arnold [1] permettent de classifier leurs singularités génériques pour tout  $n \leq 5$ . En particulier, les singularités génériques des hérissons de  $\mathbb{R}^3$  sont des arêtes de rebroussement et des queues d'aronde. Les queues d'aronde sont des points portés par les arêtes de rebroussement : en ces points, les arêtes de rebroussement ne sont plus immergées dans  $\mathbb{R}^3$  mais présentent elles-mêmes un rebroussement (cf. figure 3). Plus précisément, il existe un ouvert dense  $\mathcal{U}$  pour la topologie  $C^4$  tel que : pour tout  $h \in \mathcal{U}$ , les singularités de  $\mathcal{H}_h$  sont toutes équivalentes à l'un des trois modèles de singularités représentés à la figure 3 [4]. Régions elliptiques et régions hyperboliques d'un hérisson  $\mathcal{H}_h, (h \in \mathcal{U})$ , sont séparées par ses arêtes de rebroussement (figure 3(a)) et la courbure de Gauss de  $\mathcal{H}_h$  est infinie sur celles-ci. On distingue ainsi deux types de queues d'aronde, respectivement dites positives (figure 3(b)) ou négatives (figure 3(c)), selon que le signe de la courbure de Gauss sur la partie en forme de queue est positif ou négatif. En d'autres termes, une queue d'aronde est dite positive (resp. négative) si la courbe de points doubles qui en est issue se situe au voisinage de la queue d'aronde dans la région hyperbolique (resp. elliptique) jouxtant l'arête.

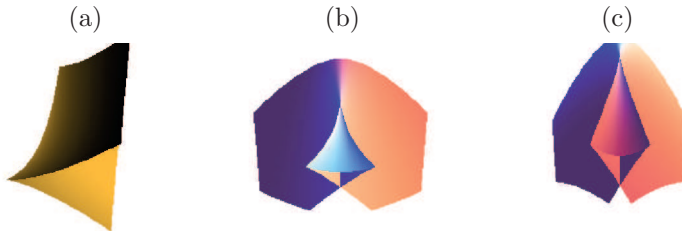


FIGURE 3. Arête de rebroussement (a), queues d'aronde positive (b) et négative (c).

Soit  $S$  la sphère  $\mathbb{S}^2$  (ou n'importe quelle surface convexe de  $\mathbb{R}^3$ ) et soit  $f$  sa fonction de support. Le hérisson de fonction de support  $\tilde{f}(u) = -f(-u)$  et le hérisson  $\mathcal{H}_f$  admettent la surface  $S$  pour réalisation géométrique commune mais sont dotés de coorientations opposées. Le chemin de hérissons  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}^3, t \mapsto \mathcal{H}_{h_t} = t\mathcal{H}_f + (1-t)\mathcal{H}_{\tilde{f}}$  peut être rendu générique, de telle sorte que lorsque  $t$  décrit continûment  $[0, 1]$ , les modifications qualitatives des singularités de  $\mathcal{H}_{h_t}$  soient toutes de l'un des 5 types décrits par Arnold [1] comme métamorphoses génériques de fronts d'onde (figure 4). Dans la suite,  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}^3, t \mapsto \mathcal{H}_{h_t}$  désignera n'importe quel chemin générique de hérissons joignant  $\mathcal{H}_f$  à  $\mathcal{H}_{\tilde{f}}$ .

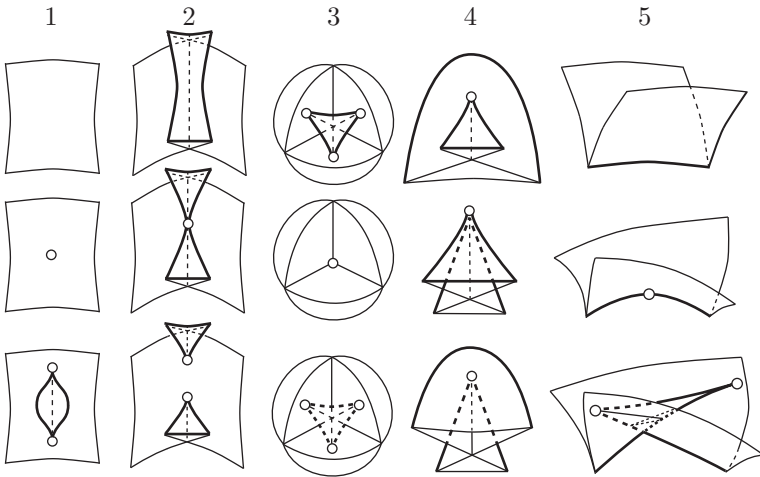


FIGURE 4. Les 5 types de métamorphoses génériques de fronts d'onde (extrait de [1]).

Le but de notre étude est donc d'établir l'existence d'un  $t \in [0, 1]$  pour lequel le hérisson  $\mathcal{H}_{h_t}$  porte au moins une paire de queues d'aronde positives. Cette étude a été en grande partie motivée par le problème des queues d'aronde (cf. ci-dessous) qui fut soulevé par R. Langevin, G. Levitt et H. Rosenberg dans [3]. Rappelons qu'un hérisson  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$  est dit projectif lorsque sa fonction de support  $h$  est antisymétrique sur  $\mathbb{S}^2$  (i.e., telle que  $h(-u) = -h(u)$  pour tout  $u \in \mathbb{S}^2$ ) et donc sa paramétrisation  $x_h: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $x_h(u) = x_h(-u)$  pour tout  $u \in \mathbb{S}^2$  (de sorte que  $x_h$  peut alors être définie sur le plan projectif réel  $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2/\text{antipodie}$ ).

**Le problème des queues d’aronde.**

**Problème ouvert** (Langevin–Levitt–Rosenberg, 1985). *Existe-t-il un hérisson projectif  $\mathcal{H}_h$  de  $\mathbb{R}^3$  dont le lieu singulier est réduit à des arêtes de rebroussement immergées (i.e. sans queues d’aronde) ?*

Rappelons à ce sujet le résultat suivant [3] :

**Proposition.** *Pour tout  $h \in \mathcal{U}$ , nous avons :*

$$r_+ - r_- - \frac{q_+ - q_-}{2} = 1,$$

où  $r_+$  (resp.  $r_-$ ) désigne le nombre de régions elliptiques (resp. hyperboliques) de  $\mathcal{H}_h$  et  $q_+$  (resp.  $q_-$ ) le nombre de ses queues d’aronde positives (resp. négatives).

Pour établir ce résultat, les auteurs considèrent un chemin générique de hérissons reliant  $\mathcal{H}_h$  à un hérisson régulier (et donc convexe) et observent que la valeur de  $r_+ - r_- - (q_+ - q_-)/2$  reste inchangée lors de n’importe laquelle des 5 métamorphoses génériques. Pour une preuve n’utilisant pas les métamorphoses génériques des fronts d’onde, on pourra consulter [6].

**3. Un nouvel indice est la clef du problème**

Notre preuve repose sur une notion d’indice récemment introduite dans [8] :

**Définition.** Soit  $h \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ , on définit  $h_x \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$  par  $h_x(u) := h(u) - \langle x, u \rangle$ , ( $u \in \mathbb{S}^2$ ) :  $h_x(u)$  peut être interprété comme la distance signée du plan support coorienté par  $u$  au point  $x$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^3 - \mathcal{H}_h$ , on définit l’indice  $j_h(x)$  de  $x$  par rapport à  $\mathcal{H}_h$  par :

$$j_h(x) := 1 - c_h(x),$$

où  $c_h(x)$  est le nombre de composantes connexes de  $h_x^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{S}^2$ , c’est-à-dire le nombre de courbes sphériques formées des points  $u \in \mathbb{S}^2$  tels que le plan support en  $x_h(u)$  passe par  $x$ .

Rappelons que l’indice  $j_h(x)$  de  $x$  par rapport à  $\mathcal{H}_h$  reste constant sur toute composante connexe de  $\mathbb{R}^3 - \mathcal{H}_h$  [8]. L’indice  $j$  joue dans  $\mathbb{R}^3$  un rôle analogue au rôle joué dans  $\mathbb{R}^2$  par l’indice  $i$  (l’indice  $i_h(x)$  de  $x$  par rapport à  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2 - \{x\}$  peut être défini comme le nombre algébrique de tours que  $\mathcal{H}_h = x_h(\mathbb{S}^1)$  fait autour du point  $x$ ). Rappelons que cet indice  $i$  vérifie la relation suivante pour tout  $x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$  [5] :

$$i_h(x) = 1 - \frac{1}{2}n_h(x),$$

où  $n_h(x)$  est le nombre de droites support coorientées de  $\mathcal{H}_h$  passant par  $x$ , c'est-à-dire le nombre de zéros de

$$h_x: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}, u(\theta) := (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto h(u(\theta)) - \langle x, u(\theta) \rangle.$$

**L'orientation transverse "absolue"**. Pour tout  $h \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$ , l'indice  $j_h$  permet de doter le hérisson  $\mathcal{H}_h$  d'une nouvelle notion de coorientation (ou orientation transverse) que nous qualifierons d'*absolue* : pour tout  $u \in \mathbb{S}^2$  tel que  $x_h(u)$  est un point simple et régulier de  $\mathcal{H}_h$ , la droite normale à  $\mathcal{H}_h$  en  $x_h(u)$  sera orientée dans le sens des  $j_h(x)$  décroissants. Sauf mention explicite du contraire, nous considérerons désormais tout hérisson  $\mathcal{H}_h$  de  $\mathbb{R}^3$  muni de cette coorientation absolue. Par opposition à cette coorientation absolue, nous qualifierons la coorientation définie précédemment de *relative* (sous entendu au choix de  $h$  ou de  $\tilde{h}$  comme fonction de support).

Il est important de noter que la coorientation absolue de  $\mathcal{H}_h$  peut s'inverser lorsque l'on traverse une courbe d'auto-intersection de  $\mathcal{H}_h$ . Le point fondamental de notre démonstration sera qu'une telle inversion de la coorientation ne pourra se produire que le long d'une courbe de points doubles hyperboliques. Si  $x_h(u)$  est un point simple et régulier de  $\mathcal{H}_h$ , on définit  $\varepsilon_h(u) \in \{-1, 1\}$  de telle sorte que le vecteur unitaire

$$\nu_h(u) = \varepsilon_h(u) \operatorname{sgn}[R_h(u)]u$$

dirige la normale à  $\mathcal{H}_h$  (muni de sa coorientation absolue) en  $x_h(u)$ . Rappelons que  $R_h(u)$  désigne la fonction de courbure de  $\mathcal{H}_h$  en  $x_h(u)$ . Par conséquent,  $\varepsilon_h(u) = 1$  (resp.  $\varepsilon_h(u) = -1$ ) si le vecteur normal  $\nu_h(u)$  correspond (resp. ne correspond pas) à la coorientation relative du hérisson  $\mathcal{H}_h = x_h(\mathbb{S}^2)$  en  $x_h(u)$ . Si  $x_h(u)$  n'est pas un point simple et régulier de  $\mathcal{H}_h$ , alors on pose  $\varepsilon_h(u) = 0$ .

Lorsque  $x_h(u)$  est un point elliptique de  $\mathcal{H}_h$ , c'est-à-dire tel que  $R_h(u) > 0$ , le sens du vecteur normal  $\nu_h(u)$  est donné par le sens de la concavité de  $\mathcal{H}_h$  en  $x_h(u)$  [8] : il pointe du côté de  $\mathcal{H}_h$  dans lequel se situe le plan tangent au voisinage de  $x_h(u)$ . Le signe de  $\varepsilon_h$  ne change donc pas sur l'image sphérique  $\Omega$  d'une région elliptique  $x_h(\Omega)$ . Dans le cas de l'image sphérique  $\Omega$  d'une région hyperbolique  $x_h(\Omega)$ , il en va tout autrement : le signe de  $\varepsilon_h$  peut alors s'inverser quand on traverse l'image sphérique d'une courbe de points doubles hyperboliques comme le montre l'exemple du hérisson de fonction de support  $h(x, y, z) := x(x^2 - 3y^2) + 2z^3$ , où  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  (cf. figure 5). Il s'agit ici d'un hérisson projectif. Dans cet exemple, où les points de  $x_h(\mathbb{S}^2)$  apparaissant comme doubles sont en fait quadruples, l'indice  $j_h(x)$  est égal à  $-2$  pour tout  $x$  d'une composante connexe bornée de  $\mathbb{R}^3 - \mathcal{H}_h$  (et naturellement égal à 0 pour



tout  $x$  de la composante connexe non bornée). Par conséquent, le signe de  $\varepsilon_h$  s'inverse quand on traverse l'image sphérique de n'importe laquelle des courbes de points doubles hyperboliques. Lorsque le signe de  $\varepsilon_h$  s'inverse quand on traverse l'image sphérique d'une courbe donnée de points doubles hyperboliques, nous dirons de cette courbe qu'elle est une *courbe d'inversion de la coorientation* de  $\mathcal{H}_h$ . Cette notion de courbe d'inversion de la coorientation permet de distinguer deux types de queues d'arondes positives : celles dont est issue une courbe d'inversion de la coorientation de  $\mathcal{H}_h$  et les autres. La nature d'une queue d'aronde positive est en fait fonction de la position qu'elle occupe par rapport à la région hyperbolique de  $\mathcal{H}_h$  qui la jouxte. Découpons sur un hériss  $\mathcal{H}_h$ , le voisinage d'une queue d'aronde positive tel que celui qui est représenté à la figure 3(b). La courbe de points doubles partage cette portion de  $\mathcal{H}_h$  en deux parties : une partie  $A$  en forme de queue et une partie  $B$  qui n'est constituée que de points hyperboliques. La partie  $B$  a deux côtés : celui de  $A$  et le côté opposé. Si l'indice  $j_h$  décroît lorsqu'on traverse  $B$  (hors la courbe de points doubles) en direction de  $A$ , il apparaît que la courbe de points doubles hyperboliques n'est pas une courbe d'inversion de la coorientation de  $\mathcal{H}_h$ . Par contre, si  $j_h$  croît lors d'une telle traversée, alors il apparaît que la courbe de points doubles est bien une courbe d'inversion de la coorientation de  $\mathcal{H}_h$ . Pour ces raisons, nous dirons qu'une queue d'aronde positive est *sortante* (resp. *rentrante*) si la courbe de points doubles qui en est issue est (resp. n'est pas) une courbe d'inversion de la coorientation de  $\mathcal{H}_h$ . Dans l'exemple considéré (figure 5), toutes les queues d'aronde positives sont sortantes.



FIGURE 5.  $\mathcal{H}_h$ , où  $h(x, y, z) := x(x^2 - 3y^2) + 2z^3$ .

#### 4. La démonstration

*Démonstration du théorème:* Considérons un chemin générique de hérissons  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}^3$ ,  $t \mapsto \mathcal{H}_{h_t}$  réalisant un retournement de la sphère, ou plus généralement d'une surface convexe  $S$ , dans  $\mathbb{R}^3$  :  $\mathcal{H}_{h_0} = \mathcal{H}_f$  et  $\mathcal{H}_{h_1} = \mathcal{H}_{\bar{f}}$ , où  $f$  est la fonction de support de  $S$ . Comme la fonction  $\varepsilon_{h_t}$  est constante égale à 1 (resp.  $-1$ ) pour  $t = 0$  (resp.  $t = 1$ ), il existe nécessairement des valeurs de  $t \in ]0, 1[$  pour lesquelles les courbes sur lesquelles  $\varepsilon_{h_t}$  change de signe disconnectent  $\mathbb{S}^2$ . Or, l'étude conjointe des métamorphoses génériques des hérissons de  $\mathbb{R}^3$  et de la coorientation absolue nous permet d'affirmer que :

1. Les courbes d'inversion de la coorientation sont des courbes de points doubles hyperboliques ;
2. Lorsque  $t$  croît continûment de 0 à 1, une telle courbe d'inversion de la coorientation ne peut apparaître que dans deux cas de figure : si deux régions hyperboliques de  $\mathcal{H}_{h_t}$  entrent en contact à un instant  $t$  ou s'il apparaît sur  $\mathcal{H}_{h_t}$  une paire de queues d'aronde positives sortantes.

Or, si deux régions hyperboliques de  $\mathcal{H}_{h_t}$  entrent en contact à l'instant  $t$ , cela ne peut être qu'en l'image commune par  $x_{h_t}$  de deux points antipodaux  $-u$  et  $u$  de  $\mathbb{S}^2$  :  $x_{h_t}(-u) = x_{h_t}(u)$ . Mais dans ce cas, on a nécessairement  $\varepsilon_{h_t}(-u) = -\varepsilon_{h_t}(u) \neq 0$ , ce qui suppose qu'il existait déjà une courbe disconnectant  $\mathbb{S}^2$  sur laquelle  $\varepsilon_{h_t}$  change de signe. Par conséquent, lorsque  $t$  croît continûment de 0 à 1, la première apparition d'une courbe d'inversion de la coorientation de  $\mathcal{H}_{h_t}$  est nécessairement concomitante à l'apparition d'une paire de queues d'aronde positives sortantes, ce qui démontre le théorème.  $\square$

#### 5. Compléments

La figure 6 décrit le retournement générique le plus simple que l'on puisse imaginer. Il est donné par le chemin de hérissons  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  défini par :

$$h_t(x, y, z) := t\sqrt{x^2 + y^2 + 3z^2} - (1-t)\sqrt{3x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ce chemin de hérissons symétriques par rapport à l'origine relie deux ellipsoïdes dotés de coorientations opposées. La figure se lit de gauche à droite et de haut en bas. On part du premier ellipsoïde. Deux paires de queues d'aronde négatives naissent selon des métamorphoses de type 1 (cf. figure 4). Elles évoluent et meurent selon des métamorphoses de type 2 pour arriver au dernier hérisson de la première ligne. Celui-ci

comprend une région hyperbolique en forme d’anneau et deux régions elliptiques. Ensuite, deux paires de queues d’aronde positives naissent selon des métamorphoses de type 1 et évoluent pour aboutir au “hérisson central” lors de métamorphoses de type 4. La seconde moitié du retournement consiste simplement à passer de ce hérisson central au second ellipsoïde par des opérations inverses de celles qui viennent d’être décrites.

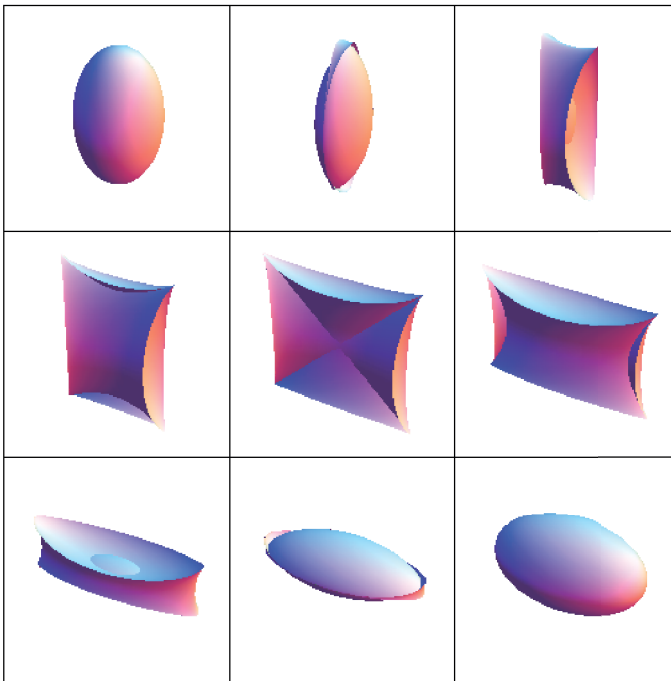


FIGURE 6. Un retournement générique.

Pour finir, indiquons comment il est possible de déformer le hérisson projectif représenté à la figure 5 pour obtenir un hérisson projectif ne portant que des singularités génériques. Comme la surface romaine de Steiner, le hérisson projectif représenté à la figure 5 admet un axe de symétrie ternaire et trois courbes d’auto-intersection dont les extrémités sont trois queues d’aronde positives et trois singularités de type  $D_4$  (cf. la figure centrale de la métamorphose de type 4). Bien sûr, tous ces nombres doivent être doublés si l’on considère que ce hérisson projectif est couvert deux fois. L’idée est naturellement de réaliser une métamorphose de type 4 tout en conservant l’axe de symétrie ternai-

re pour obtenir un hériisson projectif générique porteur d'exactly 6 queues d'aronde positives. Cela peut par exemple être réalisé à l'aide de la perturbation

$$h(x, y, z) := x(x^2 - 3y^2) + 2z^3 + 2y(y^2 - 3x^2)z^2, \text{ où } (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3.$$

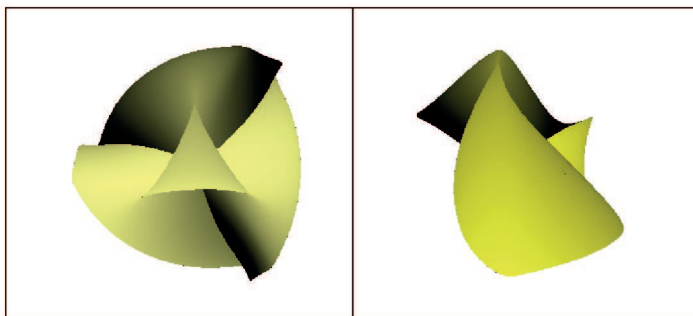


FIGURE 7. Deux vues de ce hériisson projectif générique.

### Références

- [1] V. I. ARNOL'D, Critical points of smooth functions, in: *“Proceedings of the International Congress of Mathematicians”* (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 1, Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975, pp. 19–39.
- [2] G. K. FRANCIS ET B. MORIN, Arnold Shapiro’s eversion of the sphere, *Math. Intelligencer* **2(4)** (1979/80), 200–203. DOI: 10.1007/BF03028603.
- [3] R. LANGEVIN, G. LEVITT ET H. ROSENBERG, Hériissons et multihériissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss), in: *“Singularities”* (Warsaw, 1985), Banach Center Publ. **20**, PWN, Warsaw, 1988, pp. 245–253.
- [4] Y. MARTINEZ-MAURE, Feuilletages des surfaces et hériissons de  $\mathbb{R}^3$ , Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Université Paris 7, France (1985).
- [5] Y. MARTINEZ-MAURE, Indice d’un hériisson : étude et applications, *Publ. Mat.* **44(1)** (2000), 237–255. DOI: 10.5565/PUBLMAT\_44100\_09.
- [6] Y. MARTINEZ-MAURE, Sommets et normales concourantes des courbes convexes de largeur constante et singularités des hériissons, *Arch. Math. (Basel)* **79(6)** (2002), 489–498. DOI: 10.1007/PL00012476.

- [7] Y. MARTINEZ-MAURE, Geometric study of Minkowski differences of plane convex bodies, *Canad. J. Math.* **58(3)** (2006), 600–624. DOI: 10.4153/CJM-2006-025-x.
- [8] Y. MARTINEZ-MAURE, New notion of index for hedgehogs of  $\mathbb{R}^3$  and applications, *European J. Combin.* **31(4)** (2010), 1037–1049. DOI: 10.1016/j.ejc.2009.11.015.
- [9] A. PHILLIPS, Turning a sphere inside out, *Sci. Amer.* **214** (1966), 112–120.
- [10] S. SMALE, A classification of immersions of the two-sphere, *Trans. Amer. Math. Soc.* **90** (1959), 281–290. DOI: 10.2307/1993205.

Institut Mathématique de Jussieu  
UMR 7586 du CNRS  
Bâtiment Sophie Germain  
Case 7012  
75205 Paris Cedex 13  
France  
*E-mail address:* yves.martinez-maure@imj-prg.fr

Primera versió rebuda el 8 de gener de 2014,  
darrera versió rebuda el 10 de febrer de 2014.