

A MI-CHEMIN ENTRE ANALYSE COMPLEXE ET SUPERANALYSE

PIERRE BONNEAU ET ANNE CUMENGE

Abstract: In the framework of superanalysis we get a functions theory close to complex analysis, under a suitable condition (A) on the real superalgebras in consideration (this condition is a generalization of the classical relation $1 + i^2 = 0$ in \mathbb{C}). Under the condition (A) , we get an integral representation formula for the superdifferentiable functions. We deduce properties of the superdifferentiable functions: analyticity, a result of separated superdifferentiability, a Liouville theorem and a continuation theorem of Hartogs-Bochner type.

2010 Mathematics Subject Classification: 30E20, 32A26, 30G30, 35C15.

Key words: superspace, superdifferentiable function, integral representation, superanalysis.

0. Introduction

L'analyse complexe s'est fortement développée au 19^e siècle, en particulier avec les travaux de Cauchy, Riemann et Weierstrass. Les essais de généralisation en dimension supérieure conduisirent à la construction des quaternions et des octonions. Toutefois, ces nouveaux objets s'avèrent alors un peu décevants au niveau de l'analyse. Par ailleurs, de fortes limitations à ce type de généralisations furent obtenues, entre autres par Frobenius avec une classification des algèbres associatives réelles de division de dimensions finies, ou par Bott-Milnor et Kervaire avec le résultat suivant :

Théorème ([BM], [Ke]). *L'espace vectoriel \mathbb{R}^n possède une opération produit \mathbb{R} -bilinéaire sans diviseur de 0 seulement pour $n = 1, 2, 4$ ou 8.*

Pour $n = 4$ et 8, on retrouve, entre autres, les quaternions et les octonions.

Nous considérerons seulement dans toute la suite des algèbres associatives. Les algèbres associatives de division étant unitaires, la condition d'intégrité dans le cas de \mathbb{R}^2 est équivalente à l'existence d'un neutre multiplicatif 1 et d'un élément i de \mathbb{R}^2 tel que $1 + i^2 = 0$.

Sachant qu'il est impossible de trouver en dimensions strictement supérieures à 4 des \mathbb{R} -algèbres associatives de division, nous rechercherons des algèbres réelles (associatives) ayant de bonnes propriétés analytiques, c'est-à-dire dans lesquelles existe une théorie des fonctions analogue à l'analyse complexe. Nous essaierons d'étendre, en dimension supérieure à deux, le point de vue de Cauchy-Riemann sur l'analyse complexe (fonctions dérivables et représentation intégrale).

Des conditions de Cauchy-Riemann apparaissent naturellement en superanalyse (cf. [K], [R] par exemple). L'analyse sur les superespaces, dite "superanalyse", s'est développée dans les décennies '60 et '70, formalisant les superespaces des physiciens, espaces dans lesquels cohabitent des variables anti-commutatives avec les variables usuelles. Pour un historique et des références, nous renvoyons aux livres de F. A. Berezin [Be], A. Khrennikov [K] et A. Rogers [R].

Nos résultats sont énoncés dans le cadre des superespaces. Soulignons qu'en provenance de la superanalyse, nous utiliserons seulement les définitions de superespaces et de la superdifférentiabilité; nos méthodes sont inspirées par celles de l'analyse complexe.

Il est à noter que, contrairement à l'analyse complexe, quaternionique ou de Clifford, nous ne disposons pas d'un opérateur de conjugaison sur les algèbres $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ —où les éléments de Λ_0 (resp. Λ_1) commutent (resp. anti-commutent) entre eux— et les superespaces $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ associés à Λ que nous considérons.

Nous définirons sur certains superespaces un opérateur d'' de Cauchy-Riemann dont le noyau coïncidera avec l'espace des fonctions superdifférentiables (S-différentiables en abrégé).

Des conditions (A_j) , $j = 0, 1$ sur Λ_j , à mettre en parallèle avec la relation complexe $1 + i^2 = 0$, s'imposent alors de manière naturelle lorsque nous cherchons une solution fondamentale de cet opérateur d'' . Plus précisément :

(A_0) il existe une base $(e_0 = 1, e_1, \dots, e_p)$ de Λ_0 vérifiant $\sum_{k=0}^p e_k^2 = 0$,

(A_1) il existe une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ de Λ_1 et une suite finie $s_1 = 1 < s_2 < \dots < s_r < s_{r+1} = q + 1$ telles que, pour tout $j = 1, \dots, q$, il existe $a_j \in \Lambda_0$ vérifiant $\varepsilon_j = a_j \varepsilon_{s_k}$ si $s_k \leq j < s_{k+1}$, avec $a_{s_1} = a_{s_2} = \dots = a_{s_r} = e_0$ et $\sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} a_j^2 = 0$ pour tout $k = 1, \dots, r$.

La condition (A_0) est une condition algébrique nécessaire (et suffisante) pour l'obtention d'une solution fondamentale de notre opérateur d'' opé-

rant sur les formes définies sur Λ_0 ; quant à la condition (A_1) , elle est suffisante et “presque” nécessaire si l’on espère un caractère explicite pour une solution fondamentale de l’opérateur d'' sur Λ_1 .

Nous obtenons, à partir d’une solution fondamentale pour l’opérateur d'' , une formule de représentation des formes différentielles avec opérateurs intégraux à noyaux $K(x, y)$ explicites ; et en particulier, pour les fonctions :

Théorème 0.1. *On suppose les conditions (A_0) et (A_1) satisfaites par l’algèbre $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$. Soit D ouvert de $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ borné et à frontière C^1 et f fonction de classe C^1 au sens de Fréchet dans D , continue sur \overline{D} ainsi que df , alors pour tout $x \in D$:*

$$f(x) = \int_{\partial D} f(y)K(y, x) - \int_D d'' f(y) \wedge K(y, x).$$

Nous déduisons de la formule de représentation des fonctions qS-différentiables (i.e. vérifiant $d'' f = 0$) des propriétés de ces fonctions, comme l’harmonicité, une propriété de qS-analyticité, un théorème de Liouville, ainsi qu’un résultat de qS-différentiabilité séparée :

Théorème 0.2. *Si f est une fonction définie sur un domaine D de $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ à valeurs dans Λ séparément qS-différentiable sur D par rapport à chacune de ses “hypervariables” appartenant à Λ_0 ou Λ_1 , alors f est qS-différentiable sur D .*

Et un théorème de prolongement de type Hartogs :

Théorème 0.3. *Sous les conditions (A_0) et (A_1) , si $\partial\Omega$ est le bord connexe d’un domaine Ω borné de $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$, avec $n + m \geq 2$, et f une fonction qS-différentiable dans un voisinage connexe de $\partial\Omega$, alors f se prolonge en une fonction qS-différentiable sur Ω .*

Dans une première partie, nous précisons nos notations et rappellerons les principales notions de superanalyse. Nous fournirons aussi quelques exemples de superalgèbres.

Dans la seconde partie, suivant le point de vue “riemannien” de l’analyse complexe, nous définirons un opérateur de Cauchy-Riemann dont le noyau est constitué des fonctions super-différentiables en les variables commutatives et “quasi”-super différentiables en les variables anti-commutatives.

La troisième partie sera dévolue à la recherche de représentations intégrales pour les fonctions définies dans un super-espace et à valeurs

dans notre algèbre. C'est dans ce paragraphe qu'apparaîtront les conditions (A_0) et (A_1) , qui fourniront une superanalyse aux propriétés étonnamment voisines de l'analyse complexe. Les représentations intégrales seront alors l'outil que nous utiliserons pour étudier les propriétés des fonctions super-différentiables, ce qui fait l'objet de la quatrième partie. Dans une dernière partie, nous regroupons quelques commentaires sur les conditions algébriques (A_0) et (A_1) .

L'objectif de l'article n'est pas un recensement exhaustif des propriétés des fonctions super-différentiables ; il essaie de souligner une étrange proximité, sous certaines conditions, entre l'analyse complexe et la superanalyse. Ces résultats ont été partiellement annoncés dans [BoC].

Les auteurs tiennent à remercier le referee pour ses intéressants commentaires.

1. Superspaces

Nous noterons Λ une *superalgèbre commutative réelle (en abrégé CSA)*, dont nous rappelons ci-dessous la définition (cf. [K] ou [R] par exemple).

Un \mathbb{R} -espace vectoriel Z_2 -gradué $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ muni d'une fonction parité σ définie sur les éléments homogènes par $\sigma(a) = 0$ (resp. 1) si $a \in \Lambda_0$ (resp. si $a \in \Lambda_1$) devient une superalgèbre si on le munit d'une structure d'algèbre associative unitaire dont la multiplication vérifie la propriété $\sigma(ab) = \sigma(a) + \sigma(b) \pmod{2}$ pour tout couple (a, b) d'éléments homogènes.

Le supercommutateur est défini sur les éléments homogènes par $[a, b] = ab - (-1)^{\sigma(a)\sigma(b)}ba$ (et prolongé par bilinéarité). Une superalgèbre est dite commutative si pour tout couple (a, b) d'éléments homogènes $[a, b] = 0$.

Nous définissons le Λ_1 -annihilateur comme étant

$${}^\perp\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda : \lambda\Lambda_1 = 0\}.$$

Toutes les CSA considérées ici seront de dimensions finies. Nous noterons (e_0, e_1, \dots, e_p) une base de Λ_0 (e_0 est l'élément unité de Λ), $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q) = (e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_{p+q})$ une base de Λ_1 , et définissons les coefficients de structure (d'algèbre) Γ de Λ par

$$e_i e_j = \sum_{k=0}^{p+q} \Gamma_{i,j}^k e_k$$

pour $i, j = 0, 1, \dots, p + q$. On remarque que, d'après la définition d'une CSA, les coefficients Γ sont symétriques en (i, j) si i ou $j \in \{0, 1, \dots, p\}$, anti-symétriques si i et $j \in \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$.

On appelle *superspace sur la CSA* Λ tout \mathbb{R} -espace vectoriel

$$\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m,$$

où $n, m \in \mathbb{N}$.

Définition 1.1. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ et F une application de U dans Λ , nous disons que F est *superdifférentiable à droite* (ou *S-différentiable*) en $x \in U$ s'il existe des éléments $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)$ de Λ , $j = 1, \dots, n + m$ tels que, pour tout $h \in \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ tel que $x + h \in U$, on ait

$$F(x + h) = F(x) + \sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) h_j + o(h),$$

avec $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0$, où $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$.

Nous remarquons que $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)$ sont définis de façon unique par la condition ci-dessus, tandis que $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n+m}}(x)$ sont définis modulo ${}^\perp \Lambda_1$. La condition de S-différentiabilité de F exprime donc le fait que F est différentiable et que sa dérivée est définie par les opérateurs de multiplication par des éléments de Λ .

Exemple 1. Si $\Lambda_1 = \{0\}$ et $\Lambda_0 = \text{Vect}(e_0, e_1)$ avec $e_0 = 1$ et $e_1^2 = -e_0$, les fonctions S-différentiables sont les fonctions holomorphes et la superanalyse est alors l'*analyse complexe*.

Exemple 2. (Analyse hyperbolique). Si $\Lambda_1 = \{0\}$ et $\Lambda_0 = \text{Vect}(e_0, e_1)$ avec $e_0 = 1$ et $(e_1)^2 = e_0$, alors $f = u e_0 + v e_1$ est \mathcal{S} -diff. $\iff \frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial v}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_0}$.

Alors f , u et v vérifient l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0$.

Remarque. Soient φ et ψ fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R} . Alors $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$ définie par $f(xe_0 + ye_1) = [\varphi(x+y) + \psi(x-y)]e_0 + [\varphi(x+y) - \psi(x-y)]e_1$ est S-différentiable, mais pas plus régulière que ne le sont φ et ψ .

Exemple 3. Supposons Λ_1 et Λ_0 de dimensions 6, avec la table de multiplication suivante :

\times	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	ε_2	$-\varepsilon_1$	ε_6	ε_5	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_3$
e_2	e_2	e_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_3	e_3	$-e_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_4	e_4	e_5	0	0	e_2	e_3	ε_3	ε_2	0	ε_3	ε_6	0
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	e_3	$-e_2$	ε_2	$-\varepsilon_3$	0	ε_6	$-\varepsilon_3$	0
ε_1	ε_1	ε_2	0	0	ε_3	ε_2	0	0	0	e_2	e_3	0
ε_2	ε_2	$-\varepsilon_1$	0	0	ε_2	$-\varepsilon_3$	0	0	0	e_3	$-e_2$	0
ε_3	ε_3	ε_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ε_4	ε_4	ε_5	0	0	ε_3	ε_6	$-e_2$	$-e_3$	0	0	0	0
ε_5	ε_5	$-\varepsilon_4$	0	0	ε_6	$-\varepsilon_3$	$-e_3$	e_2	0	0	0	0
ε_6	ε_6	$-\varepsilon_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

L'ensemble des nilpotents de Λ_0 étant ici $\text{Vect}(e_2, e_3, e_4, e_5)$, l'algèbre commutative Λ_0 n'est pas semi-simple et donc n'est pas isomorphe à un produit d'algèbres $\prod_{j=1}^s L_j$, où $L_j = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

2. L'opérateur de Cauchy-Riemann en superanalyse

Soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ dans $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$; $f(x) = \sum_{k=0}^p f_k(x)e_k + \sum_{l=1}^q f_{p+l}(x)\varepsilon_l$, où f_0, \dots, f_{p+q} sont des fonctions réelles.

Il sera commode, comme dans [K], d'écrire $x \in \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ sous la forme $x = (y, \theta)$ avec $y = (y_1, \dots, y_n) \in \Lambda_0^n$ et $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Lambda_1^m$. Ainsi avec $y_i = \sum_{k=0}^p y_i^k e_k \in \Lambda_0$ et $\theta_j = \sum_{l=1}^q \theta_j^l \varepsilon_l$:

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^p \frac{\partial f}{\partial y_i^k}(x) dy_i^k + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^q \frac{\partial f}{\partial \theta_j^l}(x) d\theta_j^l.$$

Soit f S-différentiable en x (voir la Définition 1.1) et $h = (h_1, \dots, h_n, h'_1, \dots, h'_m) \in \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$; nous avons

$$\begin{aligned} df(x)(h) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(x) h_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(x) h'_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^p \frac{\partial f}{\partial y_i^k}(x) e_k dy_i^k(h) + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^q \frac{\partial f}{\partial \theta_j^l}(x) \varepsilon_l d\theta_j^l(h), \end{aligned}$$

par conséquent

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \forall k = 0, \dots, p, \quad \frac{\partial f}{\partial y_i}(x)e_k = \frac{\partial f}{\partial y_i^k}(x),$$

$$\forall j = 1, \dots, m, \quad \forall l = 1, \dots, q, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(x)\varepsilon_l = \frac{\partial f}{\partial \theta_j^l}(x);$$

ou encore, puisque $\frac{\partial f}{\partial y_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial y_i^0}(x)$:

Propriété. Une fonction f Fréchet-différentiable en ses variables réelles est S -différentiable en $x \in \Lambda$ si et seulement si

$$(2.1) \quad \frac{\partial f}{\partial y_i^k}(x) = \frac{\partial f}{\partial y_i^0}(x)e_k, \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ et } \forall k = 1, \dots, p,$$

et

$$(2.2) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_j^1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta_j^q}(x) \right) \in \Lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q) := \{(a\varepsilon_1, \dots, a\varepsilon_q), a \in \Lambda\},$$

$$\forall j = 1, \dots, m.$$

Rappelons que $\frac{\partial f}{\partial \theta_j^l}(x)$ est défini modulo ${}^\perp \Lambda_1$.

Nous sommes ainsi amenés naturellement à traiter différemment les “variables commutatives” y_1, \dots, y_n et les “variables anti-commutatives” $\theta_1, \dots, \theta_m$.

2.1. Etude dans Λ_0^n . Oublions provisoirement les variables anti-commutatives et intéressons-nous aux variables y_1, \dots, y_n . Et, d’abord, considérons le cas $n = 1$.

Soit f une fonction d’un ouvert U de Λ_0 dans Λ . Si $y = \sum_{k=0}^p y^k e_k \in U$, alors f est S -différentiable en y si $df(y) = \frac{\partial f}{\partial y^0}(y) \sum_{k=0}^p e_k dy^k$ puisque, pour tout k , $\frac{\partial f}{\partial y^k}(y) = \frac{\partial f}{\partial y^0}(y)e_k$ comme nous venons de le voir. Dans le cas général, nous décomposerons $df(y)$ en une partie Λ_0 -linéaire notée $d'f(y)$ et un reste noté $d''f(y)$:

$$df(y) = d'f(y) + d''f(y),$$

avec

$$d'f(y) = \frac{\partial f}{\partial y^0}(y) \sum_{k=0}^p e_k dy^k,$$

$$d''f(y) = \sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial f}{\partial y^k}(y) - e_k \frac{\partial f}{\partial y^0}(y) \right) dy^k.$$

Plus généralement, si ω est une forme différentielle définie dans U , à valeurs dans Λ , nous définissons

$$d'\omega = \sum_{k=0}^p e_k dy^k \frac{\partial \omega}{\partial y^0} := dY \frac{\partial \omega}{\partial y^0},$$

$$d''\omega = \sum_{k=1}^p dy^k \left(\frac{\partial \omega}{\partial y^k} - e_k \frac{\partial \omega}{\partial y^0} \right).$$

On vérifie immédiatement que $d'^2 = d''^2 = 0$ et donc $d'd' + d'd'' = 0$. Une fonction f est S-différentiable dans U si et seulement si $d''f = 0$ dans U . On généralise aisément au cas de plusieurs “variables commutatives”. Si $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Lambda_0^n$ avec $y_i = \sum_{k=0}^p y_i^k e_k$, on définit pour une forme différentielle ω de degré quelconque définie dans un ouvert U de Λ_0^n , et à valeurs dans Λ ,

$$(2.3) \quad d''\omega = d''_y \omega = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p dy_i^k \left(\frac{\partial \omega}{\partial y_i^k} - e_k \frac{\partial \omega}{\partial y_i^0} \right),$$

$$d'\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^p e_k dy_i^k \frac{\partial \omega}{\partial y_i^0} := \sum_{i=1}^n dY_i \frac{\partial \omega}{\partial y_i^0}.$$

Remarque. Dans le cas de $\Lambda_0 = \mathbb{C}$, la manière traditionnelle de définir l’opérateur de Cauchy-Riemann n’est pas la même que ci-dessus, puisque l’habitude est de faire éclater df en une partie \mathbb{C} -linéaire et une partie \mathbb{C} -antilinéaire. Cette procédure ne peut opérer ici car nous n’avons pas, dans le cas général, d’opérateur de conjugaison. Toutefois, l’opérateur de Cauchy-Riemann habituel dans \mathbb{C} et celui qui est défini ci-dessus ont le même noyau, l’ensemble des fonctions holomorphes. Et c’est ce qui nous importe, puisque notre objectif est l’étude des fonctions S-différentiables.

2.2. Etude dans Λ_1^m . Occupons-nous, maintenant, des “variables non-commutatives”, et, tout d’abord, du cas d’une seule variable anti-commutative. Soit f une fonction définie dans un ouvert U de Λ_1 , à valeurs dans Λ . Si $\theta = \sum_{l=1}^q \theta^l \varepsilon_l \in U$, f est S-différentiable en θ s’il existe un élément $\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta)$ de Λ tel que, pour tout $l = 1, \dots, q$, $\frac{\partial f}{\partial \theta^l}(\theta) = \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta) \varepsilon_l$.

Mais, contrairement au cas des “variables commutatives”, il n’existe, en général, aucun moyen canonique pour déterminer le coefficient multiplicatif $\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta)$ de l’application Λ_1 -linéaire $d'f(\theta)$; autrement dit, il n’existe, en général, aucun moyen naturel pour décomposer $df(\theta)$ en une partie Λ_1 -linéaire et un reste. Pour conserver le maximum de souplesse dans le

choix de ces projections associées de $df(\theta)$, nous supposons que nous disposons d'une norme $\| \cdot \|$ dans Λ (norme telle que $\|xx'\| \leq C\|x\|\|x'\|$) déduite d'un produit scalaire g .

Nous cherchons à définir un opérateur d'' dont le noyau contient les fonctions S-différentiables.

Nous pourrions effectuer une projection orthogonale de $(\frac{\partial f}{\partial \theta^1}(\theta), \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta^q}(\theta))$ sur $\Lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ afin de définir d'abord $d' = d - d''$ puis d'' , mais cela ne donne pas, en général, un opérateur d'' vraiment explicite et, partant, il semble difficile d'obtenir ainsi une solution fondamentale explicite pour l'opérateur d'' , ce qui sera l'objectif du paragraphe suivant.

L'opérateur d'' est bien plus explicite si nous supposons satisfaite la condition suivante :

$$(2.4) \quad \text{Il existe une suite finie } 1 = s_1 < s_2 < \dots < s_r < s_{r+1} = q+1 \text{ telle que } \\ \varepsilon_j = \varepsilon_{s_k} a_j \text{ si } s_k \leq j < s_{k+1}, \text{ où } a_j \in \Lambda \text{ et } a_{s_1} = a_{s_2} = \dots = a_{s_r} = e_0.$$

(En fait a_j est un élément de Λ_0 .) Alors :

Propriété. *Sous la condition (2.4) sur Λ_1 , une fonction f Fréchet-différentiable en θ est S-différentiable en $\theta \in \Lambda_1$ si*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \theta^{s_1}}(\theta), \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta^{s_r}}(\theta) \right) \in \Lambda(\varepsilon_{s_1}, \dots, \varepsilon_{s_r})$$

et

$$(2.5) \quad \frac{\partial f}{\partial \theta^j}(\theta) = \frac{\partial f}{\partial \theta^{s_k}}(\theta) a_j, \text{ si } s_k \leq j < s_{k+1}.$$

La plus utile des deux relations ci-dessus lorsque nous chercherons à donner des propriétés de régularité des fonctions S-différentiables sur un ouvert de Λ_1 sera (2.5). Nous sommes donc amenés à poser

$$d'' := d''_\theta := \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} d\theta^j \left(\frac{\partial}{\partial \theta^j} - a_j \frac{\partial}{\partial \theta^{s_k}} \right),$$

et

$$d' = d - d'' = \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} d\theta^j a_j \frac{\partial}{\partial \theta^{s_k}}.$$

On vérifie immédiatement que $d'^2 = d''^2 = 0$ et $d'd'' + d''d' = 0$.

On généralise au cas de plusieurs “variables anti-commutatives” : Si $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \in \Lambda_1^m$ avec $\theta_i = \sum_{j=1}^q \theta_i^j \varepsilon_j$, on définit pour une forme différentielle ω définie dans un ouvert U de Λ_1^m ,

$$(2.6) \quad \begin{aligned} d'\omega &:= d'_\theta \omega := \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} a_j d\theta_i^j \frac{\partial \omega}{\partial \theta_i^{s_k}}, \\ \text{noté } d'\omega &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r dZ_k(\theta_i) \frac{\partial \omega}{\partial \theta_i^{s_k}}, \\ d''\omega &:= d''_\theta \omega := \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} d\theta_i^j \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta_i^j} - \frac{\partial \omega}{\partial \theta_i^{s_k}} a_j \right). \end{aligned}$$

2.3. Cas général. Enfin, dans le cas d'un superspace $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ sur la CSA Λ , un élément x de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ est noté $x = (y, \theta) = (y_1, y_2, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) \in \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ avec $y_i = \sum_{j=0}^p y_i^j e_j$ et $\theta_k = \sum_{l=1}^q \theta_k^l \varepsilon_l$.

Nous pouvons définir l'opérateur de Cauchy-Riemann d'' dans $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ en posant $d'' = d''_y + d''_\theta$, où d''_y et d''_θ sont définis en (2.3) et (2.6) :

$$(2.7) \quad d'' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p dy_i^j \left(\frac{\partial}{\partial y_i^j} - e_j \frac{\partial}{\partial y_i^0} \right) + \sum_{l=1}^m \sum_{k=0}^r \sum_{t=s_k+1}^{s_{k+1}-1} d\theta_l^t \left(\frac{\partial}{\partial \theta_l^t} - \frac{\partial}{\partial \theta_l^{s_k}} a_t \right).$$

3. Solution fondamentale de d'' et formule de représentation intégrale

Si D est un ouvert de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ borné et à frontière lisse, si f est une forme différentielle continue dans \overline{D} et de classe C^1 dans D , nous cherchons une représentation intégrale de f , c'est-à-dire nous essayons d'écrire

$$f(x) = \int_{\partial D} f(u) K(u, x) - \int_D d'' f(u) K(u, x) + d'' \int_D f(u) K(u, x), \quad x \in D.$$

Soulignons que les formes différentielles intervenant, à coefficients à valeurs dans Λ , sont des formes en les coordonnées réelles $y_i^j, w_i^j, i = 1, \dots, n, j = 0, \dots, p, \theta_i^\ell, \tau_i^\ell, i = 1, \dots, m, \ell = 1, \dots, q$ de $x = (y, \theta)$, $u = (w, \tau) \in \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m \approx \mathbb{R}^N$, où $N = n(p+1) + mq$, et les intégrales sont ainsi définies sans ambiguïté.

Une telle représentation intégrale peut s'obtenir dès lors que K est à coefficients localement intégrables sur $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} \times \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ et que nous avons en termes de courants $d''K(u, x) = [\Delta]$, où $[\Delta]$ est le courant d'intégration sur la diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}\}$ (voir [HP1], [HP2] par exemple). Un noyau $K(u, x)$ vérifiant cette dernière égalité est appelé noyau fondamental de l'opérateur de Cauchy-Riemann d'' .

Plus précisément, soit $\Psi: \overline{D} \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ définie par $\Psi(u, x) = u - x$. Alors $[\Delta] = \Psi^*([0])$, où $[0]$ est le courant d'évaluation en $0 \in \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$. Donc $d''_{u,x}K(u, x) = [\Delta]$ s'écrit aussi $d''_x\Omega(x) = [0]$ si l'on pose $K = \Psi^*\Omega$; chercher une formule de représentation intégrale pour d'' appelle donc à rechercher une solution fondamentale pour l'opérateur d'' .

3.1. Solution fondamentale de d'' . Comme dans le paragraphe précédent, nous allons d'abord supposer que f est une forme en $y \in \Lambda_0$ (donc $n = 1$ dans un premier temps) et fixer les variables $\theta \in \Lambda_1^m$. Dans le cas $\Lambda_0 = \mathbb{C}$, une solution fondamentale de $d''\Omega = [0]$ est $\Omega = \frac{dz}{2i\pi z}$. Mais pour $p > 1$, notre algèbre commutative Λ_0 n'est pas intègre (cf. [BM] ou le théorème de Frobenius classifiant les algèbres réelles associatives de division de dimensions finies). Nous n'avons pas non plus de conjugaison sur Λ_0 comme en analyse complexe ou quaternionique, et un noyau résolvant de type Bochner-Martinelli n'est pas envisageable.

Nous devons chercher une solution fondamentale sous une autre forme. Nous munissons Λ_0 d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$ pour laquelle (e_0, \dots, e_p) est une base orthonormée (avec e_0 l'élément unité). Nous sous-entendrons souvent les symboles \wedge dans les formes différentielles et utiliserons les notations :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \widehat{dy}^i &= dy^0 \dots dy^{i-1} dy^{i+1} \dots dy^p, & \text{et pour } i < j : \\ \widehat{dy}^i dy^j &= dy^0 \dots dy^{i-1} dy^{i+1} \dots dy^{j-1} dy^{j+1} \dots dy^p. \end{aligned}$$

Lemme 3.1. *Soit $\Omega(y) = \frac{A(y)}{\|y\|^{p+k}}$, où $A(y) = \sum_{i=0}^p (-1)^i A_i(y) \widehat{dy}^i$ est une p -forme à coefficients $A_i(y)$ à valeurs dans Λ et polynômes (en les variables réelles y^0, \dots, y^p) homogènes de degré k et vérifiant $d''\Omega = 0$ hors de 0. Alors*

$$d''\Omega = \left(\int_{\|y\| \leq 1} d''A \right) \times [0].$$

Preuve: Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda_0)$ une fonction test. Remarquons que pour tout $i = 1, \dots, p$: $dy^i \wedge \widehat{dy^0} = 0$; nous avons

$$\begin{aligned}
\langle d''\Omega, \varphi \rangle &= (-1)^{p+1} \langle \Omega, d''\varphi \rangle = (-1)^{p+1} \left\langle \Omega, \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^i} - e_i \frac{\partial \varphi}{\partial y^0} \right) dy^i \right\rangle \\
&= - \int \sum_{i=1}^p \frac{A_i}{\|y\|^{p+k}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^i} - e_i \frac{\partial \varphi}{\partial y^0} \right) dy^0 \dots dy^p \\
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|y\| \geq \varepsilon} \sum_{i=1}^p \frac{A_i}{\|y\|^{p+k}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^i} - e_i \frac{\partial \varphi}{\partial y^0} \right) dy^0 \dots dy^p \\
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|y\| > \varepsilon} d \left[\left(\sum_{i=1}^p \frac{(-1)^i A_i \widehat{dy}^i}{\|y\|^{p+k}} - \frac{A_i e_i \widehat{dy}^0}{\|y\|^{p+k}} \right) \varphi \right] - (d''\Omega)\varphi \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{p+k}} \int_{\|y\| = \varepsilon} \left(\sum_{i=1}^p A_i \widehat{dy}^i (-1)^i - A_i e_i \widehat{dy}^0 \right) \varphi \\
&= \left(\int_{\|y\|=1} \sum_{i=1}^p (-1)^i A_i \widehat{dy}^i - e_i A_i \widehat{dy}^0 \right) \varphi(0) \\
&= \int_{\|y\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial A_i}{\partial y^i} - e_i \frac{\partial A_i}{\partial y^0} \right) dy^0 \dots dy^p \varphi(0) \\
&= \left(\int_{\|y\| \leq 1} d''A \right) \varphi(0),
\end{aligned}$$

en utilisant $d''A = d''(\sum_{i=1}^p A_i \widehat{dy}^i)$ pour la dernière égalité. \square

Ainsi, grâce à ce lemme, pour obtenir une solution fondamentale pour d'' , nous allons chercher $\Omega(y) = \frac{A(y)}{\|y\|^{p+1}}$ avec $A(y)$ p -forme à coefficients à valeurs dans Λ et polynômes homogènes de degré 1 telle que $\int_{\|y\| \leq 1} d''A$ soit inversible.

Nous considérons

$$\Omega = \frac{1}{\|y\|^{p+1}} \sum_{j=0}^p (-1)^j \widehat{dy}^j \sum_{k=0}^p b_j^k y^k = \frac{A}{\|y\|^{p+1}},$$

où $b_j^k \in \Lambda$ et $x = \sum_{k=0}^p y^k e_k$. Nous allons choisir les éléments b_j^k de Λ de façon à obtenir $d''\Omega = 0$ hors de 0.

Nous pourrions choisir librement les b_0^k puisque $d''(\phi(y)\widehat{dy}^0) = 0$ sur un ouvert $U \subset \Lambda_0$ dès que $\phi: U \subset \Lambda_0 \rightarrow \Lambda$ est \mathbb{R} -différentiable sur U .

Par un calcul direct :

$$d''\Omega = \left[\sum_{j=1}^p \frac{b_j^j - e_j b_j^0}{\|y\|^{p+1}} - (p+1) \frac{y^j e_0 - y^0 e_j}{\|y\|^{p+3}} \sum_{k=0}^p b_j^k y^k \right] dy^0 dy^1 \cdots dy^p.$$

L'égalité $d''\Omega = 0$ s'écrit donc

$$\sum_{j=1}^p (b_j^j - e_j b_j^0) - \frac{p+1}{\|y\|^2} \left[\sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^p y^j y^k b_j^k - \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^p y^0 y^k e_j b_j^k \right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p (b_j^j - e_j b_j^0) - \frac{p+1}{\|y\|^2} & \left[-(y^0)^2 \sum_{j=1}^p e_j b_j^0 + \sum_{j=1}^p (y^j)^2 b_j^j \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^p y^0 y^j \left(b_j^0 - \sum_{k=1}^p e_k b_k^j \right) + \sum_{1 \leq j < k} y^j y^k (b_j^k + b_k^j) \right] = 0. \end{aligned}$$

Il faut donc annuler le polynôme obtenu en multipliant par $\|y\|^2$ le premier membre, ce qui donne :

$$(3.2) \quad \begin{cases} b_j^0 = \sum_{k=1}^p e_k b_k^j, & j = 1, 2, \dots, p, \\ b_j^k + b_k^j = 0, & j, k = 1, \dots, p, j \neq k, \\ b_j^j = -\sum_{k=1}^p e_k b_k^0 = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^p (b_k^k - e_k b_k^0), & j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Notons $b = -\sum_{k=1}^p e_k b_k^0$ la valeur commune des b_j^j , $j = 1, \dots, p$. La première ligne de (3.2) permettra de définir b_j^0 quand nous connaîtrons les b_k^j . La deuxième ligne donnera b_k^j quand nous connaîtrons b_j^k pour $j < k$. Compte tenu de ces deux lignes :

$$\begin{aligned} b &= -\sum_{k=1}^p e_k \sum_{l=1}^p e_l b_l^k = -\sum_{k,l=1}^p e_k e_l b_l^k = -\sum_{k=1}^p e_k^2 b_k^k - \sum_{k < l} e_k e_l b_l^k - \sum_{l < k} e_k e_l b_l^k \\ &= -\sum_{k=1}^p e_k^2 b - \sum_{k < l} e_k e_l (b_k^l + b_l^k) = -b \sum_{k=1}^p e_k^2, \end{aligned}$$

ou encore

$$(3.3) \quad b \sum_{k=0}^p e_k^2 = 0.$$

Alors trois cas se présentent.

Si $\sum_{k=0}^p e_k^2$ n'a pas de diviseur de 0, nécessairement $b = 0$ et donc $\int_{\|x\| \leq 1} d''A = 0$: nous n'avons pas de représentation intégrale.

Si $\sum_{k=0}^p e_k^2$ non nul a des diviseurs de 0, on prend pour b l'un de ces diviseurs et alors $\int_{\|x\| \leq 1} d''A$ est non inversible : nous n'avons pas une bonne représentation intégrale.

Enfin, si Λ_0 vérifie la condition (A_0) suivante :

(3.4)

(A_0) il existe une base $(e_0 = 1, e_1, \dots, e_p)$ de Λ_0 vérifiant $\sum_{k=0}^p e_k^2 = 0$,

nous prenons pour b un élément inversible de Λ , par exemple $b = e_0$, et choisissons $b_j^k = 0$ si $j \neq k$, $1 \leq j \leq p$; nous déduisons alors du lemme 3.1, puisque $\int_{\|x\| \leq 1} d''A = (p+1)e_0 \text{Vol}(B(0, 1))$, où $\text{Vol}(B(0, 1))$ est le volume de la boule unité de Λ_0 :

$$\Omega = \frac{1}{(p+1) \text{Vol}(B(0, 1)) \|y\|^{p+1}} \left(\sum_{j=1}^p (-1)^j (y^0 e_j + y^j e_0) \widehat{dy^j} + \sum_{k=0}^p b_0^k y^k \widehat{dy^0} \right)$$

est une solution fondamentale de d'' dans Λ_0 .

Nous allons choisir les b_0^k en sorte que $d'\Omega = 0$, ce qui simplifiera d'une part certains calculs d'autre part la formule de représentation intégrale ; ceci conduit à $b_0^0 = e_0$ et $b_0^k = -e_k$ si $k \geq 1$. La forme $dY = \sum_{k=0}^p e_k dy^k$ est en facteur dans A et nous obtenons, avec les notations (3.1) :

Proposition 3.2.

$$\Omega_0 = \frac{1}{(p+1) \text{Vol}(B(0, 1)) \|y\|^{p+1}} \sum_{j=1}^p (-1)^j (y^0 e_j + y^j e_0) \left(\sum_{k=0}^p e_k dy^k \right) \widehat{dy^0 dy^j}$$

est une solution fondamentale de d'' dans Λ_0 .

Exemples. La condition (A_0) est vérifiée dans les exemples 1 et 3. Elle ne l'est pas dans le second exemple (ce serait d'ailleurs en contradiction avec la proposition 4.3 du paragraphe 4).

Remarque. La condition (A_0) sera toujours supposée vérifiée dans la suite.

Cherchons maintenant une solution fondamentale pour l'opérateur d'' défini sur Λ_1 . De façon à disposer d'une expression explicite pour d'' , nous supposons satisfaite la condition (2.4); par conséquent, nous avons :

$$d'' = \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} d\theta^j \left(\frac{\partial}{\partial \theta^j} - a_j \frac{\partial}{\partial \theta^{s_k}} \right).$$

Nous munissons Λ_1 d'un produit scalaire en supposant que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ est une base orthonormée, notons $\| \cdot \|$ la norme associée, et cherchons une solution fondamentale de la forme :

$$\Omega = \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{j-1} \widehat{d\theta^j} \sum_{l=1}^q \frac{b_j^l \theta^l}{\|\theta\|^q}.$$

On calcule $d''\Omega$ hors de 0, et l'on note $dV = d\theta^1 \wedge \dots \wedge d\theta^q$; comme $d''(\phi(y, \theta) \widehat{d\theta^{s_k}}) = 0$ sur tout ouvert U sur lequel ϕ est \mathbb{R} -différentiable, nous pourrions choisir arbitrairement les $b_{s_k}^l$:

$$\begin{aligned} d''\Omega &= \frac{1}{\|\theta\|^q} \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} \left(b_j^j - a_j b_j^{s_k} \right) dV \\ &\quad - \frac{q}{\|\theta\|^{q+2}} \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (\theta^j - a_j \theta^{s_k}) \left(\sum_{l=1}^q b_j^l \theta^l \right) dV, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|\theta\|^{q+2} d''\Omega \widehat{dV} &= \|\theta\|^2 \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} \left(b_j^j - a_j b_j^{s_k} \right) \\ &\quad - q \left(- \sum_{k=1}^r (\theta^{s_k})^2 \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j b_j^{s_k} + \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (\theta^j)^2 b_j^j \right) \\ &\quad + q \sum_{s_k < s_{k'}} \theta^{s_k} \theta^{s_{k'}} \left(\sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j b_j^{s_{k'}} + \sum_{j=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j b_j^{s_k} \right) \\ &\quad - q \left[\sum_{k=1}^r \sum_{k'=1}^r \sum_{j=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} \theta^{s_k} \theta^j \left(b_j^{s_k} - \sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_l b_l^j \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{j < k \\ j, k \neq s_1, \dots, s_r}} \theta^j \theta^k (b_j^k + b_k^j) \right]. \end{aligned}$$

La nullité de $d''\Omega$ hors de 0 s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_j^k + b_k^j = 0, \text{ si } j \neq k, j \text{ et } k \notin \{s_1, \dots, s_r\}; \\ b_j^{s_k} = \sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_l b_l^j; \\ 0 = \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j b_j^{s_{k'}} + \sum_{j=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j b_j^{s_k}, \text{ pour } k \neq k'; \\ \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (b_j^j - a_j b_j^{s_{k_0}}) = q b_j^j = -q \sum_{j=s_{k_0}+1}^{s_{k_0+1}-1} a_j b_j^{s_{k_0}}, \text{ pour tout } k_0 \in \{1, \dots, r\}. \end{array} \right.$$

La troisième ligne est une conséquence des deux premières; en effet :

$$\begin{aligned} \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j b_j^{s_{k'}} + \sum_{j=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j b_j^{s_k} &= \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} \sum_{l=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j a_l b_l^j + \sum_{j=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} \sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j a_l b_l^j \\ &= \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} \sum_{l=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j a_l (b_l^j + b_j^l) = 0. \end{aligned}$$

D'après la quatrième ligne tous les b_j^j sont égaux à une constante $b \in \Lambda$. Dès lors, la dernière égalité de celle-ci s'écrit, en tenant compte de la seconde ligne :

$$b = - \sum_{j,l=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j a_l b_l^j = - \sum_{j < l} a_j a_l (b_j^l + b_l^j) - \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j^2 b, \quad \forall k = 1, \dots, r;$$

c'est-à-dire :

$$(3.5) \quad b \sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} a_j^2 = 0 \quad \forall k = 1, \dots, r.$$

La première égalité de la quatrième ligne nous conduit de même à (3.5).

On veut, tout comme dans Λ_0 , que b soit un élément inversible de Λ , afin d'obtenir une bonne formule de représentation intégrale; nous sommes ainsi amenés à imposer à Λ_1 , en tenant compte de (2.4) la condition suivante :

(3.6)

(A₁) il existe une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ de Λ_1 et une suite finie $s_1 = 1 < s_2 < \dots < s_r < s_{r+1} = q + 1$ telles que, pour tout $j = 1, \dots, q$, il existe $a_j \in \Lambda_0$ vérifiant $\varepsilon_j = a_j \varepsilon_{s_k}$ si $s_k \leq j < s_{k+1}$, avec $a_{s_1} = a_{s_2} = \dots = a_{s_r} = e_0$ et $\sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} a_j^2 = 0$ pour tout $k = 1, \dots, r$.

Dès lors que la condition (A₁) est satisfaite, nous pouvons écrire une solution fondamentale explicite pour l'opérateur d'' sur Λ_1 ; par exemple, prenant $b = e_0$ et $b_j^k = 0$ si $j \neq k$, $j, k \geq 2$, nous obtenons comme candidat :

(3.7)

$$\Omega = \frac{1}{q \text{Vol}(B(0, 1)) \|\theta\|^q} \sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} (-1)^{j-1} (\theta^j e_0 + \theta^{s_k} a_j) \widehat{d\theta^j} + \sum_{l=1}^q b_{s_k}^l \widehat{d\theta^{s_k}} \right).$$

Nous imposons de plus, comme dans l'étude concernant Λ_0 , $d'\Omega = 0$, ce qui conduit à choisir pour tout $k = 1, \dots, r$: $b_{s_k}^{s_k} = e_0$; $b_{s_k}^l = -a_l$ si $s_k < l < s_{k+1}$; $b_{s_k}^l = 0$ si $l < s_k$ ou $s_{k+1} < l$.

Nous obtenons alors, avec ces choix, le noyau suivant :

$$(3.8) \quad \Omega_1 = \frac{1}{q \text{Vol}(B(0, 1)) \|\theta\|^q} \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} (-1)^{j-1} (\theta^j e_0 + \theta^{s_k} a_j) \times \left(\sum_{\ell=s_k}^{s_{k+1}-1} a_\ell d\theta^\ell \right) \widehat{d\theta^{s_k} d\theta^j}.$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une solution fondamentale de d'' dans Λ_1 , nous devons étudier la singularité en 0, ce qui se fait de façon identique au cas de Λ_0 , à l'aide de l'analogie du lemme 3.1 (voir aussi, ci-dessous, la démonstration dans $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$, dont le cas présent est un cas particulier).

Exemple. Si l'on prend $\Lambda_1 = \varepsilon_1 \Lambda_0$, alors la condition (A₁) se ramène à la condition (A₀) si l'on pose $\varepsilon_j = \varepsilon_1 e_{j-1}$.

Remarque. La condition (A₁) sera supposée satisfaite dans toute la suite.

Désormais, il reste à chercher une solution fondamentale pour d'' défini sur un superespace $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$. Nous supposons toujours satisfaites les conditions (A₀) et (A₁) en sorte que l'opérateur de Cauchy-Riemann sur $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ est défini comme en (2.7).

Nous allons utiliser les résultats précédents obtenus pour Λ_0 et Λ_1 .
Notons

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega(y_i) = dy_i^0 \cdots dy_i^p := dy_i^0 \wedge \cdots \wedge dy_i^p, \text{ pour } i = 1, \dots, n; \\ \lambda(\theta_i) = d\theta_i^1 \cdots d\theta_i^q, \text{ pour } i = 1, \dots, m; \\ \eta(y_i) = \sum_{j=1}^p (-1)^j (y_i^0 e_j + y_i^j e_0) dY_i dy_i^1 \cdots dy_i^{j-1} dy_i^{j+1} \cdots dy_i^p, \\ \text{pour } i = 1, \dots, n, \text{ où } dY_i = \sum_{k=0}^p e_k dy_i^k; \\ \nu(\theta_i) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{j-1} (\theta_i^j e_0 + \theta_i^{s_k} a_j) dZ_k(\theta_i) d\theta_i^1 \cdots \\ \quad \cdots d\theta_i^{s_k-1} d\theta_i^{s_k+1} \cdots d\theta_i^{j-1} d\theta_i^{j+1} \cdots d\theta_i^q, \\ \text{pour } i = 1, \dots, m, \text{ où } dZ_k(\theta_i) = \sum_{\ell=s_k}^{s_{k+1}-1} a_\ell d\theta_i^\ell, k = 1, \dots, r; \\ dV = \bigwedge_{j=1}^n \omega(y_j) \bigwedge_{\ell=1}^m \lambda(\theta_\ell). \end{array} \right.$$

Comme les formes différentielles dY_i et $dZ_k(\theta_i)$ définies dans (3.9) sont à coefficients dans Λ_0 , nous avons :

$$\begin{aligned} dY_i \wedge dY_i &= 0, & \forall i = 1, \dots, n, & \text{ et} \\ dZ_k(\theta_i) \wedge dZ_k(\theta_i) &= 0, & \forall i = 1, \dots, m, \forall k = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Tenant compte de la condition (A_0) (cf. (3.4)), nous pouvons écrire pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} d\eta(y_i) &= d''\eta(y_i) = (p+1)e_0\omega(y_i) & \text{ et} \\ \frac{1}{2}d\|x\|^2 \wedge \eta(y_i) \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega(y_j) \bigwedge_{\ell=1}^m \lambda(\theta_\ell) \\ &= \frac{1}{2}d''_{y_i}(\|x\|^2) \wedge \eta(y_i) \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega(y_j) \bigwedge_{\ell=1}^m \lambda(\theta_\ell) \\ &= (-1)^{(p+1)^2(i-1)} \|y_i\|^2 e_0 dV. \end{aligned}$$

Tenant compte de (A_1) (cf. (3.6)), nous obtenons pour tout $i = 1, \dots, m$:

$$d\nu(\theta_i) = d''\nu(\theta_i) = qe_0\lambda(\theta_i) \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} (3.11) \quad & \frac{1}{2}d\|x\|^2 \wedge \nu(\theta_i) \bigwedge_{j=1}^n \omega(y_j) \bigwedge_{\ell \neq i} \lambda(\theta_\ell) \\ &= \frac{1}{2}d''_{\theta_i}(\|x\|^2) \wedge \nu(\theta_i) \bigwedge_{j=1}^n \omega(y_j) \bigwedge_{\ell \neq i} \lambda(\theta_\ell) \\ &= (-1)^{nq(p+1)+q^2(i-1)}\|\theta_i\|^2 e_0 dV. \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} (3.12) \quad \tilde{\Omega} &= \frac{\tilde{A}}{\|x\|^{n(p+1)+qm}}, \quad \text{où} \\ \tilde{A} &= \sum_{i=1}^n (-1)^{(p+1)^2(i-1)} \eta(y_i) \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega(y_j) \bigwedge_{\ell=1}^m \lambda(\theta_\ell) \\ &+ \sum_{i=1}^m (-1)^{nq(p+1)+q^2(i-1)} \nu(\theta_i) \bigwedge_{j=1}^n \omega(y_j) \bigwedge_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^m \lambda(\theta_\ell) \\ &= \sum_{i=1}^n dY_i \sum_{j=1}^p (-1)^j (y_i^j e_0 + y_i^0 e_j) \widehat{dy_i^0 dy_i^j} \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r dZ_k(\theta_i) \sum_{\ell=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{\ell-1} (\theta_i^\ell e_0 + \theta_i^{s_k} a_\ell) \widehat{d\theta_i^{s_k} d\theta_i^\ell}, \end{aligned}$$

où l'on a noté, en accord avec (3.9) :

$$\begin{aligned} (3.13) \quad \widehat{dy_i^0 dy_i^j} &= \omega(y_1) \cdots \omega(y_{i-1}) dy_i^1 \cdots dy_i^{j-1} dy_i^{j+1} \cdots \\ &\quad \cdots dy_i^p \omega(y_{i+1}) \cdots \omega(y_n) \lambda(\theta_1) \cdots \lambda(\theta_m); \\ \widehat{d\theta_i^{s_k} d\theta_i^\ell} &= \omega(y_1) \cdots \omega(y_n) \lambda(\theta_1) \cdots \lambda(\theta_{i-1}) d\theta_i^1 \cdots d\theta_i^{s_k-1} d\theta_i^{s_k+1} \cdots \\ &\quad \cdots d\theta_i^{\ell-1} d\theta_i^{\ell+1} \cdots d\theta_i^q \lambda(\theta_{i+1}) \cdots \lambda(\theta_m). \end{aligned}$$

Nous déduisons des calculs (3.10) et (3.11) précédents :

$$(3.14) \quad d''\tilde{A} = d\tilde{A} = (n(p+1) + mq)e_0 dV;$$

$$(3.15) \quad d\tilde{\Omega} = d''\tilde{\Omega} = 0 \quad \text{hors de } \{0\}.$$

Il reste maintenant à étudier la singularité de $\tilde{\Omega}$; remarquons que les coefficients de Ω sont de classe C^∞ hors de 0 et localement intégrables; si $\varphi = \varphi(y, \theta)$ est une fonction C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$, alors, en notant $N = n(p+1) + mq$:

$$\begin{aligned}
\langle d''\tilde{\Omega}, \varphi \rangle &= (-1)^N \langle \tilde{\Omega}, d''\varphi \rangle = (-1)^N \langle \tilde{\Omega}, d\varphi \rangle = (-1)^N \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \tilde{\Omega} \wedge d\varphi \\
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x\| \geq \varepsilon} d(\tilde{\Omega}\varphi) && \text{d'après (3.15)} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\|x\| = \varepsilon} \tilde{A}\varphi \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(0)}{\varepsilon^N} \int_{\|x\| = \varepsilon} \tilde{A} && \text{car } \|\tilde{A}\| \lesssim \|x\| \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(0)}{\varepsilon^N} \int_{\|x\| \leq \varepsilon} d\tilde{A}
\end{aligned}$$

et, en tenant compte de (3.14) :

$$(3.16) \quad \langle d''\tilde{\Omega}, \varphi \rangle = (n(p+1) + mq) \text{Vol}(B(0,1)) e_0 \varphi(0).$$

Par suite, $\Omega := [(n(p+1) + mq) \text{Vol}(B(0,1))]^{-1} \tilde{\Omega}$ est une solution fondamentale pour l'opérateur d'' dans $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$.

Remarque. On vérifie aisément, grâce à (3.10), (3.11) et (3.12) l'égalité au sens des courants $d'\Omega = 0$.

Nous pouvons résumer les résultats de ce paragraphe dans le théorème 3.3 suivant. Rappelons que les conditions (A_0) et (A_1) sont définies en (3.4) et (3.6), l'opérateur d'' sur $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ en (2.7).

Théorème 3.3. *Si Λ_0 vérifie la condition (A_0) et Λ_1 la condition (A_1) , l'opérateur de Cauchy-Riemann d'' dans $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ admet une solution fondamentale Ω donnée par :*

$$\begin{aligned}
(3.17) \quad \Omega(x) &= \frac{c(n, m, p, q)}{\|x\|^N} \left(\sum_{i=1}^n dY_i \sum_{j=1}^p (-1)^j (y_i^j e_0 + y_i^0 e_j) \widehat{dy_i^0 dy_i^j} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r dZ_k(\theta_i) \sum_{\ell=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{(\ell-1)} (\theta_i^\ell e_0 + \theta_i^{s_k} a_\ell) \widehat{d\theta_i^{s_k} d\theta_i^\ell} \right),
\end{aligned}$$

où $N = n(p+1) + mq$, $c(n, m, p, q) = -(N \text{Vol}(B(0,1)))^{-1}$, $\widehat{dy_i^0 dy_i^j}$ et $\widehat{d\theta_i^{s_k} d\theta_i^\ell}$ étant définis en (3.13).

3.2. Formule de représentation intégrale pour les fonctions (et les formes différentielles). Soit D un ouvert de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ borné à frontière lisse, soit $\Psi: \overline{D} \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ définie par $\Psi(x, x') = x - x'$. Définissons, avec les notations (3.9) et (3.13) :

$$\begin{aligned}
 (3.18) \quad & K(x, x') = \Psi^* \Omega \\
 &= \frac{c(n, m, p, q)}{\|x' - x\|^N} \left(\sum_{i=1}^n (dY_i - dY'_i) \right. \\
 &\quad \times \sum_{j=1}^p (-1)^j ((y_i^j - y'^j) e_0 + (y_i^0 - y'^0) e_j) \overbrace{d(y_i^0 - y'^0) d(y_i^j - y'^j)} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r dZ_k(\theta_i - \theta'_i) \\
 &\quad \left. \times \sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{l-1} ((\theta_i^l - \theta'^l) e_0 + (\theta_i^{s_k} - \theta'^{s_k}) a_l) \overbrace{d(\theta_i^{s_k} - \theta'^{s_k}) d(\theta_i^l - \theta'^l)} \right).
 \end{aligned}$$

Les coefficients de K sont de classe C^∞ hors de la diagonale Δ de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} \times \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ et localement intégrables sur $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} \times \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$. Le noyau K vérifie au sens des courants, si l'on pose $d = d_x + d_{x'}$ et $d'' = d''_{x'} + d''_x$:

$$\begin{aligned}
 (3.19) \quad & d'' K(x, x') = d'' \Psi^* \Omega(x) = \Psi^* d'' \Omega = \Psi^* [0] = [\Delta] \quad \text{et} \\
 & dK(x', x) = \Psi^* d\Omega = [\Delta].
 \end{aligned}$$

Précisons ce que nous entendons par bidegré d'une forme. Toute forme différentielle en les N variables réelles y_i^j , $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq p$, et θ_i^ℓ , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq q$, peut s'écrire de manière unique en fonction des 1-formes (dites de bidegré $(1, 0)$) de l'ensemble

$$\mathfrak{F} = \{dY_i, i = 1, \dots, n\} \cup \{dZ_k(\theta_i), i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, r\}$$

et des 1-formes dites de bidegré $(0, 1)$ appartenant à l'ensemble

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{H} = \{ & dy_i^j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p\} \\
 & \cup \{d\theta_i^\ell, i = 1, \dots, m, \ell = 1, \dots, q, \ell \neq s_k, \forall k = 1, \dots, r\}.
 \end{aligned}$$

Une forme f de degré d est dite de bidegré $(a, d-a)$ si dans chacune de ses composantes apparaissent exactement a 1-formes appartenant à \mathfrak{F} .

Corollaire 3.4. *Sous les hypothèses du théorème précédent :*

- (a) *Si f est une fonction de classe C^1 dans D , continue sur \bar{D} ainsi que df , alors, pour tout $x' \in D$, nous avons :*

$$f(x') = \int_{\partial D} K(x, x')f(x) - \int_D d''f(x) \wedge K(x, x').$$

- (b) *Plus généralement, si f est une forme de degré d de bidegré $(a, d-a)$, de classe C^1 dans D et continue sur \bar{D} ainsi que df , nous avons pour tout x' de D :*

$$f(x') = \int_{\partial D} f(x)K_{(a, d-a)}(x, x') + (-1)^{d-1} \int_D d''f(x) \wedge K(x, x') \\ + (-1)^d d'' \int_D f(x)K(x, x'),$$

où $K_{(a, d-a)}$ désigne la composante de K de bidegré $(a, d-a)$ en x' .

Comme nous utiliserons uniquement le résultat du (a) dans la suite de l'article, nous reportons en appendice la preuve du (b).

Preuve du (a): Nous en proposons ici une preuve élémentaire. Il suffit, vu la régularité des intégrales, de prouver l'égalité au sens des distributions. Supposons f de classe C^∞ dans D ; soit $g(x')$ une N -forme de classe C^∞ à support compact dans D , où N est la dimension de $\mathbb{R}_\Lambda^{n, m}$.

D'après (3.19), nous avons hors de Δ :

$$d_{x, x'} [f(x)K(x, x')g(x')] = df(x) \wedge K(x, x')g(x').$$

Or $K(x, x')g(x') = L(x, x')g(x')$ avec

$$(3.20) \quad L(x, x') = c(n, m, p, q) \|x' - x\|^{-N} \tilde{B},$$

où, avec les notations (3.9) et (3.13),

$$\tilde{B} = \sum_{i=1}^n dY_i \sum_{j=1}^p b_{i,j}(y_i, y'_i) \widehat{dy_i^0 dy_i^j} \\ + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r dZ_k(\theta_i) \sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}-1} \beta_{k,l}(\theta_i, \theta'_i) \widehat{d\theta_i^{s_k} d\theta_i^l},$$

les $b_{i,j}$ et les $\beta_{k,l}$ étant des fonctions à valeurs dans Λ (cf. la définition (3.18) de K).

Pour tout $\ell = 1, \dots, n$: $dY_\ell \wedge \tilde{B} = 0$ et pour tout $\ell = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, r$: $dZ_k(\theta_\ell) \wedge \tilde{B} = 0$, par suite $d'f(x) \wedge L(x, x') = 0$.

Nous avons donc hors de Δ :

$$d_{x,x'}[f(x)K(x,x')g(x')] = d''f(x) \wedge K(x,x')g(x').$$

Par la formule de Stokes, nous obtenons pour $0 < \varepsilon \ll 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D \times D} f(x)K(x,x')g(x') - \int_{\substack{\|x'-x\|=\varepsilon \\ x,x' \in D}} f(x)K(x,x')g(x') \\ = \int_{\substack{D \times D \\ \|x-x'\| \geq \varepsilon}} d''f(x) \wedge K(x,x')g(x'). \end{aligned}$$

Puisque $K(x,x')g(x') = L(x,x')g(x')$, nous avons :

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &:= \int_{\substack{\|x'-x\|=\varepsilon \\ x,x' \in D}} f(x)K(x,x')g(x') \\ &= (N \operatorname{Vol} B(0,1))^{-1} \varepsilon^{-N} \int_D \left(\int_{\partial B(x',\varepsilon)} f(x) \tilde{B}(x,x') \right) g(x') \\ &= (N \operatorname{Vol} B(0,1))^{-1} \varepsilon^{-N} \int_D \left(\int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x'+w) \tilde{A}(w) \right) g(x'), \end{aligned}$$

où \tilde{A} est défini en (3.12).

Raisonnant alors comme dans la preuve de (3.16), nous obtenons $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = \int_D f(x')g(x')$. Une régularisation standard permet de conclure. \square

Notations. Lorsque $n = 1$ et $m = 0$ (resp. $n = 0$ et $m = 1$) nous noterons

$$(3.21) \quad K_0 = \Psi^* \Omega_0 \quad (\text{resp. } K_1 = \Psi^* \Omega_1),$$

où Ω_0 et Ω_1 sont définis dans la proposition 3.2 et en (3.8).

4. Quelques propriétés des fonctions qS-différentiables

Une application f Fréchet-différentiable sur D domaine de Λ_0^n à valeurs dans Λ est S-différentiable si et seulement $d''f \equiv 0$ sur D . Nous avons déjà vu, au troisième paragraphe, que la situation n'est pas tout à fait la même lorsque les variables sont dans Λ_1 .

Définition. $f: D \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m \rightarrow \Lambda$ est quasiment S-différentiable (*qS-différentiable* en abrégé) si elle est Fréchet-différentiable sur D et telle que $d''f \equiv 0$ sur D .

Si f est S-différentiable, alors elle est qS-différentiable. Si $m = 0$, f est S-différentiable si et seulement si elle est qS-différentiable.

On suppose toujours vérifiées les conditions (A_0) et (A_1) sur Λ .

4.1. Une formule de représentation intégrale sur la frontière distinguée $\partial_0 P$ d'un polydisque.

Proposition 4.1. *Soit D un ouvert de Λ_0 ou Λ_1 ; si une suite (f_k) de fonctions qS -différentiables sur D converge vers f uniformément sur tout compact de D , alors f est qS -différentiable sur D .*

Ce résultat se démontre de façon classique dès lors que l'on peut valider une différentiation sous le signe somme. Et ce fait découle des estimations $|D^\alpha K_0(x, y)| \lesssim \|x - y\|^{-|\alpha| - p}$ uniformément en $x \in G \Subset \Omega$ ouvert relativement compact dans D et $y \in D \setminus \bar{\Omega}$.

L'estimation analogue $|D^\alpha K_1(x, y)| \lesssim \|x - y\|^{-|\alpha| - q + 1}$ donne le résultat lorsque $D \subset \Lambda_1$.

Proposition 4.2. *Soit $P = \prod_{j=1}^{n+m} \Delta_j(a_j; r_j)$, où chaque Δ_j , $j = 1, \dots, n$, (resp. $j = n + 1, \dots, m$) est un polydisque de Λ_0 (resp. Λ_1) ouvert non vide. Si f est continue sur \bar{P} et séparément qS -différentiable sur $\Omega \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ avec $\bar{P} \subset \Omega$, alors pour tout $x = (y, \theta) = (y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) \in P$:*

$$(4.1) \quad f(y, \theta) = \int_{\partial_0 P} f(w_1, \dots, w_n, \tau_1, \dots, \tau_m) \prod_{j=1}^n K_0(w_j, y_j) \prod_{j=n+1}^m K_1(\tau_j, \theta_j).$$

On déduit tout d'abord aisément de la proposition 4.1 que $y_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, y_j, \dots, a_n, b)$ est qS -différentiable sur Δ_j dès que $a_j \in \bar{\Delta}_i$, $\forall i \neq j$ et $b_i \in \bar{\Delta}_i$, $\forall i = 1, \dots, m$ (et mutatis mutandis pour $\theta_j \mapsto f(a, b_1, \dots, b_{j-1}, \theta_j, \dots, b_m)$).

Nous pouvons écrire, en supposant $n \neq 0$, par exemple

$$f(y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) = \int_{\partial \Delta_1} f(w_1, y_2, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) K_0(w_1, y_1).$$

Puisque $y_2 \mapsto f(w_1, y_2, \dots, y_n, \theta)$ reste qS -différentiable pour $w_1 \in \partial \Delta_1$, on peut itérer le processus, et appliquer le théorème de Fubini (f étant continue sur \bar{P}).

4.2. Harmonicité ; un théorème de Hartogs de qS -différentiabilité séparée. Établissons tout d'abord quelques propriétés (harmonicité, principe du maximum) qui sont les analogues en super-analyse de propriétés des fonctions holomorphes.

Proposition 4.3. *Soit D un domaine de $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$. Si $f : D \rightarrow \Lambda$ est qS -différentiable sur D , alors elle est harmonique sur D , donc \mathbb{R} -analytique sur D .*

Preuve: Soit un polydisque $P = \prod_{i=1}^n P_i(a_i, r_i) \prod_{j=1}^m P_j(b_j, \rho_j) \Subset D$ de frontière distinguée $\partial_0 P$. D'après (4.1), pour $x = (y, \theta) = (y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) \in \frac{1}{2}P$,

$$f(x) = f(y, \theta) = \int_{\partial_0 P} f(z, \zeta) \prod_{j=1}^n K_0(z_j, y_j) \prod_{j=1}^m K_1(\zeta_j, \theta_j).$$

Pour tout $z_j \in \partial P_j(a_j, r_j)$, (resp. tout $\zeta_j \in \partial P_j(b_j, \rho_j)$) le noyau $K_0(z_j, y_j)$ (resp. $K_1(\zeta_j, \theta_j)$) est Fréchet- C^∞ sur $\{y_j / \|y_j - a_j\| < r_j/2\}$ (resp. $\{\theta_j / \|\theta_j - b_j\| < \rho_j/2\}$) et l'on a, pour tous les multi-indices α_j et β_j , avec ces conditions sur z_j, ζ_j, y_j et θ_j :

$$\|D_{y_j}^{\alpha_j} K_0(z_j, y_j)\| + \|D_{\theta_j}^{\beta_j} K_1(\zeta_j, \theta_j)\| \leq \text{Cte}(r_j, \rho_j).$$

On déduit alors de (4.1) que f est de classe C^∞ au sens de Fréchet sur $\frac{1}{2}P$. Nous avons

$$\forall j = 1, \dots, n; \quad \forall k = 0, \dots, p; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial (y_j^k)^2} = \frac{\partial}{\partial y_j^k} \left(e_k \frac{\partial f}{\partial y_j^0} \right) = e_k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (y_j^0)^2}$$

$$\forall j = 1, \dots, m; \quad \forall \ell = 1, \dots, r;$$

$$\forall k, s_\ell \leq k < s_{\ell+1} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial (\theta_j^k)^2} = a_k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (\theta_j^0)^2}.$$

Comme $\sum_{k=0}^p e_k^2 = \sum_{k=s_1}^{s_2-1} a_k^2 = \dots = \sum_{k=s_r}^q a_k^2 = 0$, f est harmonique. \square

Remarque. En utilisant l'hypoellipticité du laplacien, nous aurions pu prouver l'harmonicité de f sans avoir recours à une représentation intégrale.

Une fonction f séparément holomorphe par rapport à chaque variable z_j de \mathbb{C}^n , $j = 1, \dots, n$, sur un domaine Ω de \mathbb{C}^n est holomorphe sur Ω sans autre hypothèse de régularité globale sur f mais ce théorème de Hartogs n'est plus valable pour les fonctions \mathbb{R} -analytiques. Nous déduisons toutefois de la proposition 4.3 et d'un résultat de P. Lelong [L] :

Théorème 4.4. *Une fonction f définie sur un domaine D de $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ à valeurs dans Λ , séparément qS -différentiable sur D par rapport à chacune de ses variables appartenant à Λ_0 ou Λ_1 , est qS -différentiable sur D :*

Preuve: La fonction f est séparément harmonique en les variables $y_j \in \Lambda_0 \approx \mathbb{R}^{p+1}$, $j = 1, \dots, n$ et $\theta_j \in \Lambda_1 \approx \mathbb{R}^q$, $j = 1, \dots, m$ au voisinage de tout point de D donc est globalement harmonique en $(y_1, \dots, y_n,$

$\theta_1, \dots, \theta_m$) d'après [L, p. 561] ; par suite elle est de classe C^1 au sens de Fréchet sur D d'où le résultat d'après la définition (2.7) de d'' . \square

Corollaire 4.5. *Soit f une fonction qS-différentiable sur un domaine D de $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ et à valeurs dans Λ . Si f admet (en norme) un maximum local en un point de D , f est constante sur D .*

Preuve: On déduit de l'harmonicité des composantes f_j de $f = \sum_0^{p+q} f_j e_j$ que la fonction continue $\|f\|^2$ est sous-harmonique, donc localement constante dès qu'elle admet un maximum local. D'où le résultat puisqu'alors $0 = \Delta\|f\|^2 = 2 \sum_0^{p+q} |\nabla f_j|^2$. \square

Remarque. La présence de diviseurs de zéro interdit la généralisation de théorèmes de type zéros isolés ou application ouverte.

Si l'on considère la CSA Λ_0 de l'exemple 3 et la fonction f S-différentiable d'une variable y appartenant à Λ_0 définie par $f(y) = ye_2$, l'ensemble des zéros de f contient entre autres $\{e_3 + \frac{e_2}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ et par ailleurs $f(\Lambda_0) = \text{Vect}(e_2, e_3)$ est non ouvert dans Λ_0 .

4.3. Analyticité. Pour $j = 1, \dots, m$ et $\theta_j = \sum_1^q \theta_j^i \varepsilon_i$ notons :

$$Z(\theta_j) = \sum_{i=1}^q a_i \theta_j^i$$

et, pour tout $k = 1, \dots, r$:

$$(4.2) \quad Z_k(\theta_j) = \sum_{i=s_k}^{s_{k+1}-1} \theta_j^i a_i.$$

Une fonction f qS-différentiable sur $D \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ est donc analytique réelle en les variables $(y_1^0, \dots, y_1^p, \dots, y_n^0, \dots, y_n^p, \theta_1^1, \dots, \theta_1^q, \dots, \theta_m^1, \dots, \theta_m^q)$. En fait, une fonction qS-différentiable possède une propriété d'analyticité bien plus forte puisqu'elle est localement développable en série entière des variables $y_1 = \sum_{k=0}^p y_1^k e_k, y_2, \dots, y_n, Z_1(\theta_1), \dots, Z_r(\theta_1), \dots, Z_1(\theta_m), \dots, Z_r(\theta_m)$.

Proposition 4.6. *Soit $f: D \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m \rightarrow \Lambda$ une fonction qS-différentiable sur D . Pour tout $(b, \beta) = (b_1, \dots, b_n, \beta_1, \dots, \beta_m) \in D$, il existe $r > 0$ et des scalaires $A_{I,J} \in \Lambda$, où I et $J = (J_1, \dots, J_r)$ sont des multi-indices de \mathbb{N}^n et $(\mathbb{N}^m)^r$ respectivement, tels que pour $\|y_j - b_j\| < r, j = 1, \dots, n$, et $\|\theta_j - \beta_j\| < r, j = 1, \dots, m$, nous ayons avec les notations (4.5) :*

$$(4.3) \quad f(y, \theta) = \sum_{I, J_1, \dots, J_r} A_{I,J} (y - b)^I (Z_1(\theta - \beta))^{J_1} \dots (Z_r(\theta - \beta))^{J_r}$$

avec absolue convergence de la série. De plus :

$$(4.4) \quad I!J_1! \cdots J_r!A_{I,J} = \frac{\partial^{|I|+|J_1|+\cdots+|J_r|} f}{\partial y^I \partial(Z_1\theta)^{J_1} \cdots \partial(Z_r\theta)^{J_r}}(b, \beta).$$

Le développement (4.3) est valable sur tout polydisque P de centre (b, β) relativement compact dans D . Réciproquement, toute fonction de la forme (4.3) est qS -différentiable sur le domaine de convergence de la série.

Nous avons noté :

$$(y - b)^I = (y_1 - b_1)^{i_1} \cdots (y_n - b_n)^{i_n}, \text{ si } I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n;$$

$$Z_k(\theta - \beta) = \left(Z_k(\theta_1 - \beta_1), \dots, Z_k(\theta_m - \beta_m) \right),$$

où $Z_k(\theta_i)$ est défini en (4.2). Si $J_k = (j_k^1, \dots, j_k^m) \in \mathbb{N}^m$,

$$(4.5) \quad \left(Z_k(\theta - \beta) \right)^{J_k} = \left(Z_k(\theta_1 - \beta_1) \right)^{j_k^1} \cdots \left(Z_k(\theta_m - \beta_m) \right)^{j_k^m}, \text{ et}$$

$$\frac{\partial^{|J_k|}}{\partial(Z_k\theta)^{J_k}} = \frac{\partial^{|J_k|}}{\partial(\theta_1^{s_k})^{j_k^1} \cdots \partial(\theta_m^{s_k})^{j_k^m}}.$$

Remarque 4.7. Un théorème de Gadea-Muñoz (cf. [GMu]) établit que pour une \mathbb{R} -algèbre commutative A de dimension finie, l'égalité entre l'espace des fonctions A -différentiables sur D ouvert non vide de A^n et celui des fonctions A -analytiques sur D (au sens de notre proposition) est réalisée si et seulement si A est une \mathbb{C} -algèbre. Notre proposition 4.6 est-elle en accord avec ce résultat de [GMu] lorsque $m = 0$ et donc, $\Lambda = \Lambda_0$ algèbre commutative? Oui, et nous prouvons dans la section suivante que la condition (A_0) implique pour Λ_0 d'être une \mathbb{C} -algèbre.

Lemme 4.8. *Soit $f: \Lambda_0 \rightarrow \Lambda$ un polynôme en les variables réelles (y^0, \dots, y^p) à coefficients dans Λ ; f est qS -différentiable si et seulement si f est un polynôme en la variable $y = \sum_{j=0}^p y^j e_j$.*

Preuve: Il suffit de prouver la condition nécessaire pour les polynômes homogènes car la partie homogène d'ordre k d'un polynôme qS -différentiable est qS -différentiable. On raisonne par récurrence sur le degré d .

Si $d = 1$, f est \mathbb{R} -linéaire (à une constante près) et S -différentiable donc de la forme $f(y) = ay + f(0)$, où $a \in \Lambda$.

Soit f polynôme homogène en les variables réelles (y^0, \dots, y^p) de degré $d \geq 2$ et S -différentiable. En tant que polynôme, f est lisse au sens de Fréchet, et l'on a pour tout $k = 0, \dots, p$ et pour tout j :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^j \partial y^k} = \frac{\partial}{\partial y^k} \left(e_j \frac{\partial f}{\partial y^0} \right) = e_j \frac{\partial}{\partial y^0} \left(\frac{\partial f}{\partial y^k} \right);$$

les $\frac{\partial f}{\partial y^k}$ sont donc S-différentiables, homogènes de degré $d - 1$, donc, par récurrence, il existe $b \in \Lambda_0$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y^0} = b(y)^{d-1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y^k} = e_k b(y)^{d-1}$; par intégration $f(y) = \int_0^1 df(ty)y dt = \frac{b}{d}(y)^d$. \square

Lemme 4.9. *Soit $f: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda$ un polynôme en les variables réelles $(\theta^1, \dots, \theta^q)$ à coefficients dans Λ ; f est qS-différentiable si et seulement si f est un polynôme en les variables $Z_1(\theta), \dots, Z_r(\theta)$.*

Preuve: La condition est clairement suffisante. On raisonne encore par récurrence sur d pour la preuve de la nécessité de la condition. Pour un polynôme homogène de degré $d = 1$, le résultat découle de la définition de la qS-différentiabilité. Il est aisé de vérifier la qS-différentiabilité de $\frac{\partial f}{\partial \theta^{s_j}}$ pour $j = 1, \dots, r$ si f est homogène de degré $d \geq 2$; par hypothèse de récurrence

$$\frac{\partial f}{\partial \theta^{s_j}}(\theta) = \sum_{k_1 + \dots + k_r = d-1} b_K^{(j)} (Z_1(\theta))^{k_1} \dots (Z_r(\theta))^{k_r},$$

où $b_K^j \in \Lambda$, $j = 1, \dots, r$. D'où le résultat en appliquant la formule de Taylor et les relations $\frac{\partial f}{\partial \theta^k} = a_k \frac{\partial f}{\partial \theta^{s_j}}$ pour $s_j \leq k < s_{j+1}$, $k = 1, \dots, q$. \square

Lemme 4.10. *Soit $f: \Lambda_0 \times \Lambda_1 \rightarrow \Lambda$ un polynôme de degré d en les variables réelles $y^0, \dots, y^p, \theta^1, \dots, \theta^q$; f est qS-différentiable si et seulement si f s'écrit sous la forme :*

$$f(y, \theta) = \sum_{\substack{|K|=0 \\ K=(k_0, k_1, \dots, k_r)}}^d A_K y^{k_0} (Z_1(\theta))^{k_1} \dots (Z_r(\theta))^{k_r},$$

où $A_K \in \Lambda$, $\forall K \in \mathbb{N}^{r+1}$.

Et nous avons un énoncé analogue pour un polynôme à valeurs dans Λ en les variables réelles $y_1^0, \dots, y_1^p, \dots, y_n^0, \dots, y_n^p, \theta_1^1, \dots, \theta_1^q, \dots, \theta_m^1, \dots, \theta_m^q$.

La preuve du lemme s'effectue par récurrence sur le degré du polynôme et repose sur les deux lemmes précédents.

Retour à la proposition 4.6: Soulignons ici que, en dehors de la diagonale, le noyau reproduisant $K_0(x, y)$ des fonctions S-différentiables sur un domaine de Λ_0 est lisse au sens de Fréchet, mais n'est pas S-analytique; nous ne pouvons donc pas raisonner exactement comme dans le cas holomorphe de une ou plusieurs variables, même pour passer du cas $n = 1$ au cas n quelconque. Et la même remarque vaut pour le noyau K_1 .

La qS-différentiabilité (sur le domaine de convergence de la série) d'une fonction admettant un développement de type (4.3) découle du lemme 4.10.

La preuve de (4.3) et (4.4) sous l'hypothèse de qS-différentiabilité étant un peu longue et technique, nous la reportons en appendice. \square

Inégalités de type Cauchy. Lorsque f est continue sur \bar{P} (ou seulement bornée en norme sur P) et qS-différentiable sur $P = \prod_j \Delta_j(a_j; r_j)$, elle est de classe C^∞ au sens de Fréchet sur P et on peut prendre les dérivées dans la formule (4.1) pour $\|y_j - a_j\| < r_j/2$ pour tout $j = 1, \dots, n$ et $\|\theta_j - a_{n+j}\| \leq r_{n+j}/2$ pour $j = 1, \dots, q$.

Rappelons que $\frac{\partial f}{\partial y_j} = \frac{\partial f}{\partial y_j^0}$ et $\frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial (Z_k(\theta))^\beta} = \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial (\theta_1^{s_k})^{\beta_1} \dots \partial (\theta_m^{s_k})^{\beta_m}}$. Nous obtenons :

Proposition 4.11. *Pour f qS-différentiable sur un polydisque $P = \prod_{j=1}^{n+m} \Delta_j(a_j; r_j)$ et continue sur \bar{P} , nous avons :*

$$(4.6) \quad \left\| \frac{\partial^{|I|+|J_1|+\dots+|J_r|} f}{\partial y^I \partial (Z_1(\theta))^{J_1} \dots \partial (Z_r(\theta))^{J_r}}(a) \right\| \leq c_{I, J_1, \dots, J_r} \sup_{\bar{P}} \|f\| r^{-[I, J_1, \dots, J_r]},$$

où $c_{I, J_1, \dots, J_r} \sim I! J_1! \dots J_r!$ lorsque $\min(|I|, |J_1|, \dots, |J_r|) \rightarrow +\infty$.

Nous avons noté pour $I = (i_1, \dots, i_n)$ et $J_k = (j_1^k, \dots, j_m^k)$, $k = 1, \dots, r$:

$$r^{-[I, J_1, \dots, J_r]} = r_1^{-i_1} \dots r_n^{-i_n} (r_{n+1})^{-j_1^1 - \dots - j_1^r} \dots (r_{n+m})^{-j_m^1 - \dots - j_m^r}.$$

Nous déduisons de ces inégalités et de la proposition 4.6 un résultat de type Liouville :

Corollaire 4.12. *Une fonction qS-différentiable et bornée en norme sur $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ est constante.*

4.4. Un théorème de prolongement de type Hartogs-Bochner.

Grâce à la formule de représentation intégrale des fonctions qS-différentiables donnée par le corollaire 3.4 et aux propriétés de l'opérateur d'' , nous obtenons :

Théorème 4.13. *Sous les conditions (A_0) et (A_1) , si $\partial\Omega$ est le bord connexe d'un domaine Ω borné de $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$, avec $n + m \geq 2$, et f une fonction qS-différentiable dans un voisinage connexe de $\partial\Omega$, alors f se prolonge en une fonction qS-différentiable sur Ω .*

L'opérateur d'' et le noyau K vérifient hors de la diagonale de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$: $d''_x K^{(0)}(w, x) = -d''_w K^{(1)}(w, x)$, où $K^{(j)}(w, x)$ désigne la composante de degré j en x et $n(p+1) + mq - 1 - j$ en w du noyau K . Par suite, si D_1, D_2 sont des domaines à frontière de classe C^1 par morceaux, $D_1 \Subset \Omega \Subset D_2$ avec $\partial D_j \subset V, j = 1, 2$, où V est un voisinage ouvert de $\partial\Omega$ sur lequel f est qS-différentiable, les fonctions $F_j = \int_{\partial D_j} f(w) K^{(0)}(w, x)$, $j = 1, 2$ sont qS-différentiables respectivement sur $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} \setminus \partial D_1$ et sur $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} \setminus \partial D_2$. Supposant par exemple $n \neq 0$, en appliquant le corollaire 4.12 à la fonction $(y_1, a', b) \in \Lambda_0 \times \Lambda_0^{n-1} \times \Lambda_1^m \mapsto F_1(y_1, a'; b)$ pour chaque (a', b) tel que $\Lambda_0 \times \{(a', b)\} \cap \partial D_1 = \emptyset$, on montre ensuite, par prolongement analytique, que la fonction F_1 est nulle sur la composante connexe non bornée de $\overline{D_1}$. Par suite, la fonction F_2 est qS-différentiable sur Ω et prolonge f . La preuve du théorème est alors analogue à celle du Kugelsatz de Hartogs-Bochner donnée dans [LiMi] par exemple.

5. Commentaires sur les conditions (A_0) et (A_1)

Nous avons déjà souligné, dès l'introduction, que la condition (A_0) est nécessaire et suffisante si l'on veut obtenir une solution fondamentale pour l'opérateur d'' opérant sur les formes différentielles définies sur un ouvert de $\Lambda_0^n, n \geq 1$.

La nécessité de conditions algébriques pour obtenir une représentation intégrale de fonctions satisfaisant une équation $\delta f = 0$ pour un opérateur différentiel δ défini sur un certain type d'espaces peut paraître à première vue surprenante mais elle est "raisonnable" et dépend de l'opérateur étudié δ .

De telles conditions algébriques ont été, par exemple, mises en évidence par J. Ryan dans [Ry]; dans cet article l'auteur obtient comme condition nécessaire et suffisante pour l'obtention d'une formule "généralisée" de représentation intégrale de type Cauchy le fait que A contienne une sous-algèbre complexe isomorphe à une algèbre de Clifford de dimension finie.

Soulignons que tant dans [GMu] (cf. remarque 4.7) que dans [Ry], deux articles où des conditions de nature algébrique découlent de résultats d'analyse, les auteurs ne se placent pas dans le contexte de la super-analyse.

Que peut-on dire d'une super-algèbre Λ telle que Λ_0 vérifie (A_0) ?

L'algèbre donnée au premier paragraphe par sa table (cf. exemple 3) apparaît comme une \mathbb{C} -algèbre (notons que dans ce cas $\Lambda_0 = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} B_0$, où B_0 est la sous-algèbre réelle monogène (donc associative et commutative) engendrée par l'élément $b = e_4$ de polynôme minimal X^3 , et $\Lambda = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}}$

B , où B est une sous-algèbre réelle de Λ admettant pour base comme \mathbb{R} -espace vectoriel $(e_0, e_2, e_4, \varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

En fait, on peut démontrer :

Proposition 5.1. *Toute super-algèbre Λ réelle unitaire de dimension finie telle que la sous-algèbre Λ_0 vérifie la condition (A_0) possède une structure de \mathbb{C} -algèbre compatible avec sa structure de \mathbb{R} -algèbre.*

Preuve: Dans une CSA Λ , la sous-algèbre Λ_0 est contenue dans le centre de Λ , par suite la proposition découle des deux lemmes suivants :

Lemme 5.2. *Toute algèbre A réelle commutative unitaire de dimension finie et vérifiant (A_0) possède un élément a tel que $a^2 = -1$.*

D'après le théorème principal de structure de Wedderburn pour les algèbres associatives de dimensions finies (cf. [A] ou [Pi] par exemple), la \mathbb{R} -algèbre A est une somme directe (de sev) $A = S \oplus \mathcal{N}$, où \mathcal{N} est le radical de A et S une sous-algèbre semi-simple de A isomorphe à A/\mathcal{N} ; S étant commutative est isomorphe à un produit $\prod_{j=1}^s K_j$, où $K_j = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ; le neutre multiplicatif e de A appartient à S ; en effet, $e = \sigma + \nu$ avec $\sigma \in S$ et $\nu \in \mathcal{N}$; on déduit de l'idempotence de e , l'égalité $\sigma^2 = \sigma$, puis $\nu^2 = \nu$, d'où $\nu = 0$ par nilpotence de ν .

S'il existe une base (e, e_1, \dots, e_p) de A telle que $e + \sum_{k=1}^p e_k^2 = 0$ avec pour tout $k = 1, \dots, p$, $e_k = b_k + \nu_k$, où $b_k \in S$ et $\nu_k \in \mathcal{N}$, nous obtenons l'égalité $e + \sum_{k=1}^p b_k^2 = 0$, et cette dernière égalité est possible seulement si tous les K_j sont égaux à \mathbb{C} .

Nous avons, en identifiant S et $\prod_{j=1}^s K_j$ pour simplifier les notations, $e = (1, \dots, 1) \in S$; il suffit de choisir $a = (i, \dots, i)$ pour conclure.

Lemme 5.3. *Si A est une algèbre réelle unitaire, d'unité e , de dimension finie possédant dans son centre un élément ι tel que $\iota^2 = -e$, alors A est une \mathbb{C} -algèbre.*

Le cas $\dim_{\mathbb{R}} A = 2$ étant immédiat, supposons A de dimension $n > 2$. On construit alors une suite strictement croissante de sous-espaces V_k stables par multiplication par ι , avec

$$V_0 = \text{Vect}(e, \iota), \dots, V_k = \text{Vect}(e, \iota, b_1, \iota b_1, \dots, b_k, \iota b_k)$$

(en effet, si $z \notin V_k$, la famille $(e, \iota, b_1, \iota b_1, \dots, b_k, \iota b_k, z, \iota z)$, est \mathbb{R} -libre). Nécessairement n est pair et si $n = 2p + 2$, $A = V_p$. Posant alors pour $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ et $x \in A$: $\lambda x = \alpha x + \beta \iota x$, A peut être regardée comme une \mathbb{C} -algèbre, l'application $(x, y) \in A \mapsto xy$ devenant \mathbb{C} -bilinéaire puisque ι commute avec tous les éléments de A . \square

En ce qui concerne la condition (A_1) , qui n'a pas été utilisée dans la preuve de la proposition 5.1, signalons que le résultat d'analyticité énoncé dans la proposition 4.6 est d'autant plus intéressant que les $Z(\theta_j)$ regroupent un plus grand nombre de variables réelles θ_j^k .

Ainsi dans l'exemple 3, à condition de bien choisir les "tranches" $\varepsilon_{s_j}, \dots, \varepsilon_{s_{j+1}-1}$, $1 \leq j \leq r$, il n'apparaît pas dans le développement (4.3) uniquement des $Z(\theta_j)$ faisant intervenir seulement deux variables réelles. Plus précisément, puisque $\varepsilon_1 \varepsilon_4 = e_2 \neq 0$, il n'existe pas d'élément $\eta \in \Lambda_1$ tel que $\Lambda_1 = \eta \Lambda_0$; donc nous devons déterminer deux "tranches" minimum.

La condition (A_1) est vérifiée puisque $\Lambda_1 = \varepsilon_1 \text{Vect}(e_0, e_1, e_4, e_5) + \varepsilon_4 \text{Vect}(e_0, e_1)$; posant $a_{s_1} = e_0$, $a_{s_2} = e_1$, $a_{s_3} = e_4$ et $a_{s_4} = e_5$, nous avons alors $Z(\theta_1) = \sum_{k=1}^4 \theta_1^k a_{s_k}$. Remarquons également que $\text{Vect}(e_0, e_1, e_4, e_5)$ n'est pas une sous-algèbre de Λ ; donc a fortiori les "tranches" de Λ_1 ne sont pas nécessairement associées à des \mathbb{C} -algèbres.

6. Appendice

6.1. Preuve du corollaire 3.4(b). Toute forme différentielle à coefficients à valeurs dans Λ en les $N = n(p+1) + mq$ variables réelles y_i^j , $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq p$ et θ_i^ℓ , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq \ell \leq q$ peut donc s'écrire de manière unique en fonction des 1-formes de l'ensemble

$$\mathfrak{F} = \{dY_i, i = 1, \dots, n\} \cup \{dZ_k(\theta_i), i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, r\},$$

que nous dirons 1-formes de bidegré $(1, 0)$ et des 1-formes dites de bidegré $(0, 1)$ appartenant à l'ensemble

$$\mathfrak{H} = \{dy_i^j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p\} \\ \cup \{d\theta_i^\ell, i = 1, \dots, m, \ell = 1, \dots, q, \ell \neq s_k, \forall k = 1, \dots, r\}.$$

Une forme homogène f de degré d s'écrit $f = \sum_{|I|=0}^{n+mr} f^I$, où pour chaque multiindice I , la forme f^I est de bidegré $(|I|, d-|I|)$; chaque composante $\sum_{|I|=k} f^I$ est une forme "pure" de bidegré $(k, d-k)$. Les formes $\lambda(\theta_i) = dZ_1(\theta_i) d\theta_i^2 \dots d\theta_i^{s_2-1} dZ_2(\theta_i) d\theta_i^{s_2+1} \dots dZ_r(\theta_i) d\theta_i^{s_r+1} \dots d\theta_i^q$ sont de bidegré $(r, q-r)$ et les formes $\omega(y_i) = dY_i dy_i^1 \dots dy_i^p$ sont de bidegré $(1, p)$. Notons que le noyau $K(x, x')$ est de bidegré total (i.e. relativement à (x, x')) $(n+mr, N-n-mr-1)$. On désigne par $K_{(\alpha, \beta)}$ la composante de K de bidegré (α, β) relativement à la variable x' avec la convention $K_{(\alpha, -1)} \equiv 0$.

Montrons en un premier temps la formule suivante : si f est une forme de degré d de classe C^∞ dans D continue ainsi que df sur \bar{D} , nous avons

pour tout $x' \in D$:

$$(6.1) \quad f(x') = \int_{\partial D} f(x)K(x, x') + (-1)^{d-1} \int_D df(x) \wedge K(x, x') \\ + (-1)^d \int_D f(x)K(x, x').$$

Il suffit de tester f contre une forme $g(x')$ de degré $N - d$, de classe C^∞ à support compact dans D . Calculons :

$$(6.2) \quad \int_{\partial(D \times D)} g(x')f(x)K(x, x') \\ = \int_{\partial D_{x'} \times D_x + (-1)^N D_{x'} \times \partial D_x} g(x')f(x)K(x, x') \\ = (-1)^N \int_D g(x') \int_{\partial D} f(x)K(x, x') \\ = \int_{D \times D} \left[dg(x')f(x)K(x, x') \right. \\ \left. + (-1)^{N-d} g(x')df(x)K(x, x') + (-1)^N g(x')f(x)[\Delta] \right] \\ = (-1)^{N-d+1} \int_D g(x')d_{x'} \int_D f(x)K(x, x') \\ + (-1)^{N-d} \int_D g(x') \int_D df(x)K(x, x') \\ + (-1)^N \int_D g(x')f(x').$$

En identifiant les membres de droite de la troisième et des dernières lignes de (6.2), on obtient (6.1).

Si f est une forme de bidegré (a, b) , en égalant dans (6.1) les composantes de bidegré (a, b) , nous obtenons la formule du (b) du corollaire. \square

6.2. Preuve de la proposition 4.6. Si $f: D \subset \Lambda_0 \rightarrow \Lambda$ est qS-différentiable sur D , elle est réelle analytique et pour tout $a \in D$, il existe des réels $r_k > 0$ tels que

$$(6.3) \quad f(y) = \sum_{J=(j_0, \dots, j_p) \in \mathbb{N}^{p+1}} \alpha_J (y^0 - a^0)^{j_0} \cdots (y^p - a^p)^{j_p}, \text{ où } \alpha_J \in \Lambda,$$

avec absolue sommabilité pour $|y^k - a^k| < r_k$. Chaque composante homogène de la série étant S-différentiable, d'après le lemme 4.8 il existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ un élément $c_k \in \Lambda$ tel que

$$\sum_{\substack{|J|=k \\ J=(j_0, \dots, j_p)}} \alpha_J (y^0 - a^0)^{j_0} \dots (y^p - a^p)^{j_p} = c_k (y - a)^k;$$

d'où par associativité des familles sommables :

$$(6.4) \quad f(y) = \sum_0^\infty c_k (y - a)^k,$$

avec convergence en norme de la série pour $\|y - a\| < \min_j r_j$.

En dérivant terme à terme le second membre de (6.3), on obtient, puisque e_0 est le neutre de Λ , en tenant compte de (6.2) où nous avons $c_k = \alpha_{(k, 0, \dots, 0)}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial (y^0)^k}(a) = k! c_k$$

soit encore

$$\frac{\partial^k f}{\partial y^k}(a) = k! c_k.$$

Remarque. Tout revient donc à dériver terme à terme (6.4).

Soit f qS-différentiable sur $D \subset \Lambda_0^n$, $n \geq 2$; pour alléger l'écriture supposons $n = 2$ et notons w et y les deux variables appartenant à Λ_0 . Au voisinage d'un point $(a, b) \in D$:

$$\begin{aligned} f(w, y) &= \sum_{\substack{I, J \in \mathbb{N}^{p+1} \\ I=(i_0, \dots, i_p), \\ J=(j_0, \dots, j_p)}} \gamma_{I, J} (w^0 - a^0)^{i_0} \dots (w^p - a^p)^{i_p} (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p} \\ &= \sum_J \left[\sum_I \gamma_{I, J} (w^0 - a^0)^{i_0} \dots (w^p - a^p)^{i_p} \right] (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p} \end{aligned}$$

avec sommabilité pour $\|w - a\| < r$, $\|y - b\| < \rho$.

Par propriétés des séries entières, pour tout J fixé, la famille $(\gamma_{I, J} (w^0 - a^0)^{i_0} \dots (w^p - a^p)^{i_p})_I$ est sommable, de somme $\sum_{k=0}^\infty (\sum_{|I|=k} \gamma_{I, J} (w^0 - a^0)^{i_0} \dots (w^p - a^p)^{i_p})$; f est S-différentiable sur D , et donc la somme $\sum_I \gamma_{I, J} (w^0 - a^0)^{i_0} \dots (w^p - a^p)^{i_p}$ est S-différentiable sur $\{w, \|w - a\| <$

$r\}$; appliquant le lemme 4.8 aux composantes homogènes de cette somme, nous obtenons

$$\begin{aligned} f(w, y) &= \sum_{J \in \mathbb{N}^{p+1}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_{k,J} (w-a)^k \right] (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p} \\ &= \sum_{J,k} c_{k,J} (w-a)^k (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p} \end{aligned}$$

avec $c_{k,J} = \gamma_{(k,0,\dots,0),J}$.

Les familles $(c_{k,J} (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p} (w-a)^k)_J$ sont sommables, mais $(w-a)^k$ peut être diviseur de zéro lorsque $k \neq 0$, et nous devons justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la sommabilité de $(c_{k,J} (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p})_J$.

Nous avons $(w-a)^k = (w^0 - a^0)^k e_0 + \sum'$; la famille $(c_{k,J} (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p} (w^0 - a^0)^k e_0)_J$ est sommable et il en sera de même pour $(c_{k,J} (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p})_J$ dès que $w^0 \neq a^0$ ce qui est toujours vérifié pour un w proche de a convenablement choisi. Les sommes $\sum_J c_{k,J} (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p}$ étant S-différentiables, on conclut grâce au lemme 4.8 :

$$f(w, y) = \sum_{\ell, k=0}^{\infty} A_{k,\ell} (w-a)^k (y-b)^\ell, \quad \text{avec } A_{k,\ell} = \gamma_{(k,0,\dots,0),(\ell,0)}.$$

Et l'on obtient par dérivation :

$$\ell!k!A_{k,\ell} = \frac{\partial^{\ell+k} f}{\partial (w^0)^k \partial (y^0)^\ell} (a, b)$$

soit encore

$$\ell!k!A_{k,\ell} = \frac{\partial^{\ell+k} f}{\partial w^k \partial y^\ell} (a, b).$$

Soit f qS-différentiable sur un domaine $D \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$; supposons $n = m = 1$, le cas général étant analogue. La proposition 4.3 permet d'écrire au voisinage de $(a, \beta) \in D$:

(6.5)

$$\begin{aligned} f(y, \theta) &= \sum_{\substack{I=(i_0,\dots,i_p) \in \mathbb{N}^{p+1} \\ J=(j_1,\dots,j_q) \in \mathbb{N}^q}} \gamma_{I,J} (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p} (\theta^1 - \beta^1)^{j_1} \dots (\theta^q - \beta^q)^{j_q} \\ &= \sum_I \left(\sum_J \gamma_{I,J} (\theta^1 - \beta^1)^{j_1} \dots (\theta^q - \beta^q)^{j_q} \right) (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p}. \end{aligned}$$

Pour tout multi-indice $I \in \mathbb{N}^{p+1}$, la série $\sum_J \gamma_{I,J} (\theta^1 - \beta^1)^{j_1} \dots (\theta^q - \beta^q)^{j_q}$ est absolument sommable, de somme $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|J|=k} \gamma_{I,J} (\theta^1 - \beta^1)^{j_1} \dots (\theta^q - \beta^q)^{j_q}$; par qS-différentiabilité de chaque partie homogène dans cette série, on déduit du lemme 4.9 l'écriture suivante de f au voisinage de (a, β) :

$$f(y, \theta) = \sum_I \left(\sum_{k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}} \alpha_{I, (k_1, \dots, k_r)} (Z_1(\theta - \beta))^{k_1} \dots (Z_r(\theta - \beta))^{k_r} \right) \times (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p},$$

où $\alpha_{I, (k_1, \dots, k_r)} = \gamma_{I, (j_{s_1}, 0, \dots, 0, j_{s_2}, 0, \dots, 0, j_{s_r}, 0, \dots, 0)}$.

On vérifie, comme précédemment, la sommabilité de chaque famille $(\alpha_{I, k_1, \dots, k_r} (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p})_I$; si $k_1 + \dots + k_r \neq 0$; choisissons $\theta = \beta + \sum_{\ell=1}^r \eta_\ell \varepsilon_{s_\ell}$, η_ℓ réel, $0 < \eta_\ell \ll 1$; alors $(Z_1(\theta - \beta))^{k_1} \dots (Z_r(\theta - \beta))^{k_r} = \eta_1^{k_1} \dots \eta_r^{k_r} e_0$ est inversible ; la famille $(\alpha_{I, k_1, \dots, k_r} (Z_1(\theta - \beta))^{k_1} \dots (Z_r(\theta - \beta))^{k_r} (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p})_{I=(i_0, \dots, i_p)}$ étant sommable pour η_1, \dots, η_r suffisamment petits, il en est de même de $(\alpha_{I, (k_1, \dots, k_r)} (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p})_I$. Chaque somme $\sum_I (\alpha_{I, (k_1, \dots, k_r)} (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p})_I$ est S-différentiable, ainsi que ses composantes polynomiales homogènes, il découle du lemme 4.8 le développement cherché :

$$f(y, \theta) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\substack{|K|=0 \\ K=(k_1, \dots, k_r)}}^{\infty} A_{\mu, K} (y - a)^\mu (Z_1(\theta - \beta))^{k_1} \dots (Z_r(\theta - \beta))^{k_r},$$

avec $A_{\mu, K} = \alpha_{(\mu, 0, \dots, 0), K}$.

Dérivant terme à terme dans (6.5), on obtient ensuite par unicité du développement en série entière :

$$\begin{aligned} \mu! k_1! \dots k_r! A_{\mu, (k_1, \dots, k_r)} &= \frac{\partial^{\mu+k_1+\dots+k_r} f}{\partial (y^0)^\mu \partial (\theta^{s_1})^{k_1} \dots \partial (\theta^{s_r})^{k_r}} (a, \beta) \\ &= \frac{\partial^{\mu+k_1+\dots+k_r} f}{\partial y^\mu \partial (\theta^{s_1})^{k_1} \dots \partial (\theta^{s_r})^{k_r}} (a, \beta). \end{aligned}$$

L'avant-dernière assertion de la proposition découle de (4.4), de la proposition 4.11 et du théorème de prolongement des fonctions analytiques de variables réelles. \square

Références

- [A] A. A. ALBERT, “*Structure of algebras*”, Revised printing, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **XXIV**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.
- [Be] F. A. BEREZIN, “*Introduction to superanalysis*”, Edited and with a foreword by A. A. Kirillov. With an appendix by V. I. Ogievetsky. Translated from the Russian by J. Niederle and R. Kotecký. Translation edited by Dimitri Leites. *Mathematical Physics and Applied Mathematics* **9**, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
- [BoC] P. BONNEAU ET A. CUMENGE, Entre analyse complexe et superanalyse, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **347(13–14)** (2009), 743–746. DOI : 10.1016/j.crma.2009.04.019.
- [BM] R. BOTT ET J. MILNOR, On the parallelizability of the spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** (1958), 87–89. DOI : 10.1090/S0002-9904-1958-10166-4.
- [GMu] P. M. GADEA ET J. MUÑOZ MASQUÉ, A -differentiability and A -analyticity, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124(5)** (1996), 1437–1443. DOI : 10.1090/S0002-9939-96-03070-5.
- [HP1] R. HARVEY ET J. POLKING, Fundamental solutions in complex analysis. I. The Cauchy-Riemann operator, *Duke Math. J.* **46(2)** (1979), 253–300. DOI : 10.1215/S0012-7094-79-04613-1.
- [HP2] R. HARVEY ET J. POLKING, Fundamental solutions in complex analysis. II. The induced Cauchy-Riemann operator, *Duke Math. J.* **46(2)** (1979), 301–340. DOI : 10.1215/S0012-7094-79-04614-3.
- [Ke] M. A. KERVAIRE, Non-parallelizability of the n -sphere for $n > 7$, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **44(3)** (1958), 280–283.
- [K] A. KHRENNIKOV, “*Superalysis*”, Translated from the 1997 Russian original. Revised by the author. *Mathematics and its Applications* **470**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [L] P. LELONG, Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables réelles, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **11** (1961), 515–562.
- [LiMi] I. LIEB ET J. MICHEL, “*The Cauchy-Riemann complex. Integral formulae and Neumann problem*”, *Aspects of Mathematics* **E34**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2002.
- [Pi] R. S. PIERCE, “*Associative algebras*”, *Graduate Texts in Mathematics* **88**, *Studies in the History of Modern Science* **9**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

- [R] A. ROGERS, “*Supermanifolds, Theory and applications*”, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007. DOI : 10.1142/9789812708854.
- [Ry] J. RYAN, Hypercomplex algebras, hypercomplex analysis and conformal invariance, *Compositio Math.* **61(1)** (1987), 61–80.

Equipe Emile Picard
Institut de Mathématiques
UMR 5219
Université Paul Sabatier
31062 Toulouse Cedex 9
France

E-mail address: pierre.bonneau@math.univ-toulouse.fr

E-mail address: anne.cumenge@math.univ-toulouse.fr

Primera versió rebuda el 13 de juliol de 2010,
darrera versió rebuda el 13 d'octubre de 2011.