PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 33, No. 2, 1970

CLASSES DE CHERN ET THEOREME DE GAUSS-BONNET

NGÔ VAN QUÊ

La theorie des classes caractéristiques peut etrê développée de manière axiomatique dans la catégorie des espaces topologiques "admissibles", i.e., localement compacts, dénombrables á l'infini et de dimension cohomologique finie [Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer Verlag, N.Y.]. Nous allons nous restreindre à la catégorie des variétés paracompactes, différentiables de classe $\mathscr{C}^\infty$ et introduire les classes caractéristiques telles qu'clles étaient construites originalement par S. Chern [voir par exemple, S. Chern, Differential geometry of fiber bundles, Proc. Int. Congress, 1950]. P. A. Griffiths a démontré le théoremè, dû à Chern, dit de Gauss-Bonnet pour le cas des fibrés vectoriels de rang 1 [On a theorem of Chern, Illinois J. Math. 6 (1962)]. Dans le même ordre d'idées nous voulons donner dans ce travail une démonstration simple, par la théorie des connexions, du théorème de Gauss-Bonnet dans le cas des fibrés vectoriels de rang quelconque.

1. Connexion dans un fibre hermitien.

1. *Soit M une variété (différentiable).* Le fibré tangent de M sera noté par T. Le fibré $T_C^* = T^* \underset{R}{\otimes} C$ désignera le fibré des 1-formes complexes sur M.

DÉFINITION 1.1. Etant donné un fibré vectoriel complexe E sur M, une connexion dans E est la donnée d'un opérateur différentiel

$$\nabla : E \longrightarrow T_C^* \otimes E$$

(produit tensoriel de Whitney sur le corps des nombres complexes), tel que pour toute fonction f à valeurs complexes sur M

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s) ;$$

dans le cas où E est muni d'une structure hermitienne, la connexion sera dite hermitienne si

$$d\langle s, s'\rangle = \langle \nabla(s), s'\rangle + \langle s, \nabla(s')\rangle .$$

EXEMPLE. Considérons le fibré hermitien trivial

$$E = M \times C^n .$$

Toute section s de E sera un n-tuple $(f^1, \cdots, f^n)$ de fonctions sur M à valeurs complexes, et on a $T_C^* \otimes E = T_C^* \times \cdots \times T_C^*$, produit n-tuple direct de Whitney. Alors l'operateur ∇ défini par

$$\nabla(f^1, \cdots, f^p) = (df^1, \cdots, df^p)$$

est évidemment une connexion hermitienne dans E.

Par cet exemple, et de l'existence des partitions de 1' unité sur M, on démontre immédiatement (voir tout cours de géométrie différentielle) l'existence des connexions hermitiennes sur tout fibré vectoriel complexe E sur M.

Sur un ouvert U de trivialisation de E, l'ensemble des n sections $s^1, \cdots, s^n$ de E est une base locale de E si toute autre section s de E sur U est de la forme

$$s = f_i s^i \text{ avec } f_i \in \mathscr{E}^\infty(U, C)$$

(nous prenons ici comme dans toute la suite la convention d'Einstein de sommation). Alors pour une connexion ∇ dans E, on a

$$\nabla(s^i) = \omega^i_j \otimes s^j$$

ω^i_j étant des 1-formes complexes sur U. La matrice $n \times n$ $(\omega^i_j) = \omega$ dont les entrées sont des 1-formes complexes, sera dite la matrice représentative de ∇ relativement à la base locale $(s^1, \cdots, s^n)$. Cette matrice définit inversement l'opérateur ∇ restrient à U par

$$\nabla(s) = \nabla(f_i s^i) = df_i \otimes s^i + f_i \omega^i_j \otimes s^j .$$

Rappelons enfin que si E est muni d'une connexion ∇, on peut définir sur l'espace fibré vectoriel dual E^* une connexion canonique notée encore par ∇ telle que si s et s' sont respectivement des sections de E et de E^*

$$d(s, s') = (\nabla(s), s') + (s, \nabla(s')) .$$

Et soit (E_i) avec $i = 1, \cdots, p$, un ensemble de p fibrés vectoriels complexes sur M, munis respectivement des connexions ∇_i. On peut définir sur $E_1 \otimes \cdots \otimes E_p$ une connexion canonique ∇ telle que

$$\begin{aligned} \nabla\colon E_1 \otimes \cdots \otimes E_p &\longrightarrow T^*_C \otimes (E_1 \otimes \cdots \otimes E_p) \\ s^1 \otimes \cdots \otimes s^p &\longrightarrow s^1 \otimes \cdots \otimes s^{i-1} \otimes \nabla_i(s^i) \otimes s^{i+1} \otimes \cdots \otimes s^p \end{aligned}$$

en remarquant l'existence d'un isomorphisme cononique

$$T^*_C \otimes (E_1 \otimes \cdots \otimes E_p) \xrightarrow{\sim} E_1 \otimes \cdots \otimes E_{i-1} \otimes (T^*_C \otimes E_i) \otimes E_{i+1} \otimes \cdots \otimes E_p .$$

2. Tenseur de courbure. Etant donnée une connexion ∇ dans le fibré vectoriel E, on peut définir de manière générale pour tout entier p

$$\nabla : \frac{(\Lambda^p T_C^*) \otimes E}{\theta \otimes s} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \frac{(\Lambda^{p+1} T_C^*) \otimes E}{d\theta \otimes s + (-1)^p \theta \Lambda \nabla(s)} .$$

Il est immédiat par un simple calcul que

$$\nabla^2 = \nabla \circ \nabla : \frac{(\Lambda^p T_C^*) \otimes E}{\theta \otimes s} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \frac{(\Lambda^{p+2} T_C^*) \otimes E}{\theta \Lambda \nabla^2(s)} .$$

L'opérateur ∇^2 est donc un morphisme de fibrés vectoriels; en particulier:

$$\nabla^2 : E \longrightarrow (\Lambda^2 T_C^*) \otimes E$$

peut-être considéré comme une section globale Ω sur M du fibré $(\Lambda^2 T_C^*) \otimes \operatorname{End}(E)$. Ω est couramment nommé tenseur de courbure de la connexion ∇.

Si ∇ est une connexion hermitienne de E, on a

$$d\langle s, s' \rangle = \langle \nabla(s), s' \rangle + \langle s, \nabla(s') \rangle$$

donc

$$d^2\langle s, s' \rangle = d\langle \nabla(s), s' \rangle + d\langle s, \nabla(s') \rangle$$

ou

$$0 = \langle \nabla^2(s), s' \rangle - \langle \nabla(s), \nabla(s') \rangle + \langle \nabla(s), \nabla(s') \rangle + \langle s, \nabla^2(s') \rangle$$
$$0 = \langle \nabla^2(s), s' \rangle + \langle s, \nabla^2(s') \rangle .$$

Autrement dit, avec la notation habituelle.

LEMMA 1. *Si ∇ est une connexion hermitienne, on a*

$$\Omega + {}^t\bar{\Omega} = 0 .$$

D'après la fin de la section précédente, nous avons défini à partir de la connexion ∇, une connexion canonique notée encore par ∇, dans $\operatorname{End}(E) = E \otimes E^*$. Précisément si a est une section de $E \otimes E^*$ et s, une section de E,

$$[\nabla(a)](s) = \nabla[a(s)] - a[\nabla(s)]$$

avec une interprétation immédiate de notations. Ceci dit.,

LEMMA 2. (*Identité de Bianchi.*)

$$\nabla(\Omega) = 0 .$$

En effet, d'après la définition même de ∇ dans $\operatorname{End}(E)$, on a

$$\nabla(\Omega) = \nabla \circ \nabla^2 - \nabla^2 \circ \nabla = 0$$

comme opérateurs sur $\bigoplus_p \Lambda^p T_C^* \otimes E$.

REMARQUE. Donnée une base locale $(s^1, \cdots, s^n)$ de E, on a

$$\Omega(s^i) = \nabla^2(s^i) = \Omega_j^i \otimes s^j$$

avec Ω_j^i, des 2-formes complexes sur l'ouvert U de trivialisation correspondant de E. La matrice carrée n $\times$ n $(\Omega_j^i) = K$. Alors si $\omega = (\omega_j^i)$ est la matrice représentative de ∇, l'identité de Bianchi se traduit par l'identité

$$0 = dK + [\omega, K]$$

i.e.,

$$0 = d\Omega_j^i + \omega_k^i \wedge \Omega_j^k - \Omega_k^i \wedge \omega_j^k, \forall i \text{ et } j .$$

3. *Famille de connexions.* Une famille de connexions ∇_t sur E, dépendant du paramètre réel $t \in [0, 1] = I$, sera toujours entendue telle que pour toute section s de E

$$\sigma_t = \nabla_t(s)$$

est une famille différentiable $\mathscr{C}^\infty$ de sections de $T_C^* \otimes E$, i.e., l'application

$$\begin{aligned} \sigma\colon M \times I &\longrightarrow T_C^* \otimes E \\ (x, t) &\longrightarrow \sigma_t(x) \end{aligned}$$

est différentiable $\mathscr{C}^\infty$ (morphisme de notre catégorie).

Etant donnée une telle famille de connexions ∇_t, considérons l'opérateur

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_t\colon E &\longrightarrow T_C^* E \\ s &\longrightarrow \frac{\partial}{\partial_t}[\nabla_t(s)] = \dot{\nabla}_t(s) . \end{aligned}$$

On a pour toute fonction f à valeur complexe de M

$$\dot{\nabla}_t(fs) = \frac{\partial}{\partial_t}[df \otimes s + f\nabla_t(s)] = f\dot{\nabla}_t(s) .$$

Donc $\dot{\nabla}_t$ peut être considéré comme une section de $T_C^* \otimes \operatorname{End}(E)$. Comme précédemment, à la famille ∇_t, il correspond une famille de tenseurs de courbure Ω_t (i.e., une famille différentiable de sections de $\Lambda^2 T_C^* \otimes \operatorname{End}(E)$) et une famille de connexions notée encore par ∇_t dans $\operatorname{End}(E)$. Ceci dit, LEMMA 3.

$$\frac{\partial}{\partial_t}(\Omega_t) = \nabla_t(\dot{\nabla}_t) .$$

En effet, comme opérateur de E dans $\Lambda^2 T_C^* \otimes E$,

$$\frac{\partial}{\partial_t}(\Omega_t) = \frac{\partial}{\partial_t}(\nabla_t^2) = \nabla_t \circ \dot{\nabla}_t + \dot{\nabla}_t \circ \nabla_t = \nabla_t(\dot{\nabla}_t)$$

la dernière égalité provenant de la définition de ∇_t dans End (E).

II. Classes de Chern.

1. Nous pouvons évidemment considérer

$$(\Lambda^{pair} T_C^*) \otimes E = \bigoplus_p (\Lambda^{2p} T_C^*) \otimes E$$

comme fibré de modules libres sur le fibré en algèbre commutative

$$\Lambda^{pair} T_C^* = \bigoplus_p \Lambda^{2p} T_C^* .$$

Alors $\Omega = \nabla^2$ est un endomorphisme de ce fibré de modules. Donc nous pouvons considérer comme d'habitude $\det(I + (i/2\pi)\Omega)$, qui sera donc une section globale sur M du fibré $\Lambda^{pair} T_C^*$. Précisons que si E est de rang n, i.e., $\dim E_x = n$,

$$\det\left(I + \frac{i}{2\pi}\Omega\right) = 1 + c_1(\nabla) + \cdots + c_n(\nabla) = c(\nabla)$$

avec $c_i(\nabla)$, $2i$-forme complex sur M.

LEMMA 1. *Si ∇ est une connexion hermitienne, $c_i(\nabla)$ sont des formes réelles sur M.*

En effet, comme $\Omega + {}^t\bar{\Omega} = 0$

$$\det\left(I + \frac{i\Omega}{2\pi}\right) = \det\left(I - \frac{i\,{}^t\bar{\Omega}}{2\pi}\right) .$$

Or évidemment,

$$\det\left(I - \frac{i\,{}^t\bar{\Omega}}{2\pi}\right) = \det\left(I - \frac{i\bar{\Omega}}{2\pi}\right) = \overline{\det\left(I + \frac{i\Omega}{2\pi}\right)} .$$

Donc

$$\overline{\det\left(I + \frac{i\Omega}{2\pi}\right)} = det\left(I + \frac{i\Omega}{2\pi}\right) .$$

2. Nous allons nous restreindre à un ouvert U de trivialisation de E. Soit donc $(s^1, \cdots, s^n)$ une base locale de E sur U. $K = (\Omega^i_j)$ étant la matrice représentative de Ω, et (δ^i_j) celle de I,

$$\begin{aligned} P[\Omega] &= \det\left(I + \frac{i}{2\pi}\Omega\right) \\ &= P\left[\delta^1_1 + \frac{i}{2\pi}\Omega^i_1, \cdots, \delta^n_n + \frac{i}{2\pi}\Omega^n_n\right] \end{aligned}$$

où $P \in A^{pair}[X^1_1, \cdots, X^n_n]$ l'algèbre de polynomes de $n \times n$ variables à coefficients dans l'algèbre A^{pair} des formes extérieures de degré pair sur U. Nous pouvons aussi considérer $P \in A[X^1_1, \cdots, X^n_n]$ où A est l'algèbre de toutes les formes extérieures complexes sur U.

Faisons cette convention: pour tout $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in A^n$, $P^i_j[\theta_i]$ est la valeur dans A du polynome P quand

$$X^k_h = \delta^k_h + \frac{i}{2\pi}\Omega^k_h \text{ si } k \neq j$$

et

$$X^j_i = \frac{i}{2\pi}\theta_i\ .$$

Alors, P étant de fait à coefficients complexes, i.e., 0-formes constantes, il est clair que $dP[\Omega^1_1, \cdots, \Omega^h_n] = P^i_j[d\Omega^j_i]$ (remarquez la sommation dûe à la convention d'Einstein).

D'autre part, $\omega = (\omega^i_j)$ étant la matrice représentative de la connexion ∇ et P étant de fait multilinéaire relativement aux variables $X^1_1, \cdots, X^h_n$, on a par l'identité de Bianchi (Lemma 2 de I et la remarque qui le suit).

$$\begin{aligned} P^i_j[d\Omega^j_i] + P^i_j[\omega^j_k \Lambda \Omega^k_i - \Omega^j_k \Lambda \omega^k_i] &= P^i_j[d\Omega^j_i + \omega^j_k \Lambda \Omega^k_i - \Omega^j_k \Lambda \omega^k_i] \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} P^i_j[0] = 0\ . \end{aligned}$$

Or d'après une propriété élémentaire du det, on a

$$P^i_j[\omega^j_k \Lambda \Omega^k_i - \Omega^j_k \Lambda \omega^k_i] = 0\ .$$

Donc

$$dP[\Omega] = P^i_j[d\Omega^j_i] = 0$$

de cette propriété locale, on a immédiatement

PROPOSITION 1.

$$dc(\nabla) = d\left[\det\left(I + \frac{i}{2\pi}\Omega\right)\right] = 0\ .$$

3. Soit donnée une famille de connexions ∇_t de E. Relativement

à la base locale donnée $(s^1, \cdots, s^n)$ de E, $(\Omega^i_j(t))$, $(\omega^i_j(t))$, $(\dot\omega^i_j(t))$ désigneront respectivement les matrices représentatives de Ω_t, ∇_t et $\dot\nabla_t$. Avec la convention précédente de notation

$$\begin{aligned} P^i_j[\dot\omega^j_i(t)] &= Q[\Omega(t), \dot\omega^1_1(t)] \\ &= Q\left[\delta^1_1 + \frac{i}{2\pi}\Omega^1_1(t), \cdots, \delta^n_n + \frac{i}{2\pi}\Omega^n_n(t), \frac{i}{2\pi}\dot\omega^1_1(t), \cdots, \frac{i}{2\pi}\dot\omega^n_n(t)\right] \end{aligned}$$

avec

$$Q \in A[X^1_1, \cdots, X^n_n, X^{n+1}_{n+1}, \cdots, X^{n+n}_{n+n}] ,$$

algèbre de polynomes de $2(n \times n)$ variables. Donc $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$ prenons la même convention: $Q^\alpha_\beta[\theta_\alpha]$ désigne la valeur de Q pour

$$X^i_j = \delta^i_j + \frac{i}{2\pi}\Omega^i_j \quad \text{si} \quad (i, j) \neq (\beta, \alpha)$$

$$X^{n+i}_{n+j} = \frac{i}{2\pi}\dot\omega^i_j \quad \text{si} \quad (n+i, n+j) \neq (\beta, \alpha)$$

$$X^\beta_\alpha = \frac{i}{2\pi}\theta_\alpha .$$

Alors

(i) $dQ[\Omega(t), \dot\omega(t)] = Q^i_j[d\Omega^j_i(t)] + Q^{n+i}_{n+j}[d\dot\omega^j_i(t)]$.

Or d'après le Lemma 3 de I

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \frac{\partial}{\partial t}P[\Omega(t)] &= P^i_j[d\dot\omega^j_i(t) + \omega^j_k(t)\Lambda\dot\omega^k_i(t) - \dot\omega^j_k(t)\Lambda\omega^k_i(t)] \\ &= Q^{n+i}_{n+j}[d\dot\omega^j_i(t)] + Q^{n+i}_{n+j}[\omega^j_k(t)\Lambda\omega^k_i(t) \\ &\quad - \dot\omega^j_k(t)\Lambda\omega^k_i(t)] . \end{aligned}$$

Et d'après l'identité de Bianchi, Q étant multilinéaire par rapport aux variables, on a

$$Q^i_j[d\Omega^j_i(t) + \omega^j_k(t)\Lambda\Omega^k_i(t) - \Omega^j_k(t)\Lambda\omega^k_i(t)] = 0 .$$

Donc on a de (i) et (ii)

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \frac{\partial}{\partial t}P[\Omega(t)] &= dP^i_j[\dot\omega^j_i(t)] + Q^i_j[\omega^j_k(t)\Lambda\Omega^k_i(t) - \Omega^j_k(t)\Lambda\omega^k_i(t)] \\ &\quad + Q^{n+i}_{n+i}[\omega^j_k(t)\Lambda\dot\omega^k_j(t) - \dot\omega^k_k(t)\Lambda\omega^k_i(t)] . \end{aligned}$$

Remarquons que

$$Q[\Omega(t), \dot\omega(t)] = \frac{\partial}{\partial x}P[\Omega(t) + x\dot\omega(t)]_{x=0} .$$

Donc encore d'après la propriété élémentaire déjà citée du déterminant, on a

$$Q_j^i[\omega_k^j(t)\Lambda\Omega_i^k(t) - \Omega_k^j(t)\Lambda\omega_i^k(t)] + Q_{n+j}^{n+i}[\omega_k^j(t)\Lambda\dot{\omega}_i^k(t) - \dot{\omega}_k^j(t)\Lambda\omega_i^k(t) = 0 .$$

D'où la formule importante suivante dûe à A. Weil

$$\text{(iv)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}P[\Omega_1^1(t), \cdots, \Omega_n^n(t)] = dP_j^i[\dot{\omega}_i^j(t)] .$$

Il est immédiat de vérifier que la forme $P_j^i[\dot{\omega}_i^j)]$ est indépendante du choix de la base locale. Donc $P_j^i[\dot{\omega}_i^j(t)]$ est la restriction sur U d'une forme extérieure globale notée $P[\Omega_t, \dot{\nabla}_t]$ de M.

PROPOSITION 2. *Etant une famille de connexions* ∇_t

$$c(\nabla_1) - c(\nabla_0) = d\int_0^1 P[\Omega_t, \dot{\nabla}_t]dt .$$

Cette proposition n'est autre que l'intégration de la formula (iv) de A. Weil.

4. *Classes de Chern.* On vérifie immédiatement qu'étant données deux connexions ∇_0 et ∇_1,

$$\nabla_t = t\nabla_1 + (1 - t)\nabla_0$$

est une famille de connexions reliant ∇_0 et ∇_1. Donc d'après la proposition (1) et (2), étant donnée une connexion ∇ dans E, la classe de cohomologie de $c(\nabla)$ est indépendante du choix de ∇. Nous pouvons noter cette classe par $c(E)$, nommée classe de Chern de E. Remarquons que cette classe est réelle: $c(E) \in H^{pair}(M, R) = \bigoplus_p H^{2p}(M, R)$ comme d'après le Lemma 1, on peut toujours prendre une connexion hermitienne dans E et $c(\nabla)$ est alors une forme réelle.

Si f est une application d'une variété $M' \longrightarrow M$ désignons par $f'E$ le fibré vectoriel complexe sur M' induit par f:

$$\begin{tikzcd} f'E \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ M' \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

f' transporte de façon évidente toute section s de E en une section $f's$ de $f'E$. Ceci dit, il est immédiat de vérifier que pour une connexion donnée ∇ de E, il existe une et une seule connexion ∇' sur $f'E$ telle que

$$\nabla'(f's) = (f^* \otimes f')(\nabla(s))$$

où f^* est le prolongement de f aux formes extérieures et

$$(f^* \otimes f')(\omega \otimes s) = (f^*\omega) \otimes f's, \text{ comme section de } T_C^*(M') \otimes f'E .$$

Nous avons alors

$$c(\nabla') = f^* c(\nabla)$$

ou encore par passage aux classes de cohomologie, on a la propriété universelle suivante de la classe de Chern

$$c(f'E) = f^* c(E) .$$

III. Propriétés géométriques des classes de Chern.

1. *Théorème de dualité de Whitney.* Soit $E = E_1 \oplus E_2$, somme directe de deux fibrés vectoriels complexes sur M. Si ∇_1 et ∇_2 sont des connexions respectivement dans E_1 et E_2,

$$\nabla = \nabla_1 \oplus \nabla_2 \colon E \longrightarrow T_C^* \otimes E = T_C^* \otimes E_1 \oplus T_C^* \otimes E_2$$
$$s = s_1 + s_2 \longrightarrow \nabla(s) = \nabla_1(s_1) + \nabla_2(s_2)$$

est évidemment une connexion dans E. Le tenseur de courbure Ω de ∇ est tel que

$$\Omega = \nabla^2 \colon E \longrightarrow \Lambda^2 T_C^* \otimes E = \Lambda^2 T_C^* \otimes E_1 \oplus \Lambda^2 T_C^* \otimes E_2$$
$$s = s_1 + s_2 \longrightarrow \nabla^2(s) = \nabla_1^2(s_1) + \nabla_2^2(s_2) .$$

Autrement dit,

$$\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2 ,$$

Donc

$$c(\nabla) = c(\nabla_1) \Lambda c(\nabla_2) .$$

En passant aux classes de cohomologie, nous avons le théorème suivant dit de dualité de Whitney

THEOREM. *Si $E = E_1 \oplus E_2$, nous avons dans l'algèbre de cohomologie $H^{paiR}(M, R)$*

$$c(E) = c(E_1) c(E_2) .$$

COROLLAIRE. *Si E admet une section partout non nulle on a $c_n(E) = 0$ (n étant le rang de E). En effet, si E admet une section partout non nulle $E = E_1 \oplus C$, où C est le fibré en droite trivial sur M. Donc*

$$c(E) = c(E_1) = 1 + c_1(E_1) + \cdots + c_{n-1}(E_1) .$$

REMARQUE. *Caractère de Chern.* A^{paiR} désigne l'algèbre extérieure de degré pair sur M. Donc l'algebre $A^{paiR}[X]$ des polynômes à coefficients dans A^{paiR}, posons pour une connexion ∇ dans E

$$c(\nabla)[X] = 1 + c_1(\nabla) X + \cdots + c_n(\nabla) X^n .$$

Ecrivons formellement

$$c(\nabla)[X] = (1 + \gamma_1 X)\cdots(1 + \gamma_n X)$$

alors

$$ch(\nabla) = e^{\gamma_1} + \cdots + e^{\gamma_n}$$

est un élement de A^{pairR}. Des propriétés connues sur $c(\nabla)$, on conclut immédiatement que $ch(\nabla)$ est une forme fermée, et que sa classe de cohomologie $ch(E)$, dite caractère de Chern de E, est définie indépendamment du choix de ∇. Ceci dit,

(i) la théorème de dualité se traduit alors par la relation

$$ch(E_1 \oplus E_2) = ch(E_1) + ch(E_2)$$

(ii) étant donnés deux fibrés vectoriels complexes E_1 et E_2, munis respectivement des connexions ∇_1 et ∇_2 rappelons qu'on définit sur $E_1 \oplus E_2$ une connexion canonique ∇

$$\begin{aligned} \nabla\colon E_1 \otimes E_2 &\longrightarrow T_C^* \otimes E_1 \otimes E_2 \\ s_1 \otimes s_2 &\longrightarrow \nabla_1(s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla_2(s_2) \,. \end{aligned}$$

D'où

$$\nabla^2(s_1 \otimes s_2) = \nabla_1^2(s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla_2^2(s_2)$$

ce qui entraine que si

$$c(\nabla_1)[X] = (1 + \gamma_1 X)\cdots(1 + \gamma_p X)$$

et

$$c(\nabla_2)[X] = (1 + \lambda_1 X)\cdots(1 + \lambda_q X)$$

on a

$$c(\nabla)[X) = \prod_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} [1 + (\gamma_i + \gamma_j)X] \,.$$

Donc

$$ch(\nabla) = ch(\nabla_1) \Lambda ch(\nabla_2)$$

ou encore

$$ch(E_1 \otimes E_2) = ch(E_1)\cdot ch(E_2) \,.$$

Ainsi de façon un peu plus savante, K étant le foncteur de Grothendieck de la catégorie des variétés différentiables à valeurs dans la catégorie des anneaux commutatifs, le caractère de Chern est une transformation naturelle de ce foncteur au foncteur qui associe à toute variété différentiable M l'anneau commutatif $H^{paik}(M, R)$ des classes de cohomologie de degré pair de M.

2. *Théorème de Gauss-Bonnet.*

(i) *L'indice de zéro d'une section.* Considérons le fibré vectoriel complexe trivial $C^n \times C^n$ sur C^n, muni de l'orientation canonique. Une section Z de ce fibré est une fonction différentiable

$$Z\colon C^n \longrightarrow C^n .$$

Supposons que $Z^{-1}(0) = 0$; alors Z applique $C^n - \{0\}$ dans lui-même. Or la sphère orientée $S^{2n-1} = \{(z_1, \cdots, z_n) \in C^n, |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ est un retract par déformation de $C^n - \{0\}$. Z est donc homotopiquement équivalent à une application que nous noterons encore par Z, de S^{2n-1} dans elle-même. D'où nous avons

$$\begin{array}{ccc} Z^*\colon H^{2n-1}(S^{2n-1}, Z) & \longrightarrow & H^{2n-1}(S^{2n-1}, Z) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ Z & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Z^* est une multiplication par un entier algébrique $\operatorname{Ind}(0, Z)$, appelé l'indice du zéro 0 de la section Z.

EXEMPLE. Pour $n = 1$,

$$\operatorname{Ind}(0, Z) = -\frac{i}{2\pi}\int_\gamma \frac{dZ}{Z}$$

où γ est une courbe de Jourdan simple, rectifiable quelconque orientée dans le sens positif entourant l'origine 0 de C.

Dans le cas général où E est un fibré vectoriel complexe de rang n sur une variété M orientée de dimension (réelle) $2n$, pour une section s de E sur M admettant x comme un zéro isolé, on peut toujours se ramener au cas précédent sur un voisinage U de trivialisation E, contenant x, difféomorphe à C^n avec conservation de l'orientation et tel que x corresponde à l'origine 0 de C^n. Et de cette manière, on définit l'indice $\operatorname{Ind}(x, s)$ du zéro x de la section s de E.

(ii) *Théorème de Gauss-Bonnet dans le cas du fibré de rang* 1. Soit donc E un fibré vectoriel complexe de rang 1 sur une surface compacte de Riemann, i.e., orientée et de dimension 2. Etant donnée une section s quelconque à zéros isolés $x_1, \cdots, x_p$ de E sur M, choisissons des voisinages de trivialization U_j, $1 \leqq j \leqq p$, de E, contenant respectivement et seulement x_j. Par une partition de l'unité, on peut choisir une connexion ∇ dans E, à courbure nulle sur les U_j. Désignons par $[M]$, la classe fondamentale d'homologie de dimension 2 de la variété orientée compacte M; nous avons

$$\langle c_1(E), [M]\rangle = \int_M c_1(\nabla) .$$

La connexion ∇ étant à courbure nulle dans U_j, $c_1(\nabla)$ est une 2-forme nulle à l'intérieur des disques $B(v_j)$ de centre x_j, contenus respectivement dans U_j (i.e., des disques par un certain difféomorphisme conservant l'orientation de U_j avec C); donc

$$\int_M c_1(\nabla) = \int_{M\varepsilon} c_1(\nabla)$$

avec $M_\varepsilon = M - \bigcup_j B(x_j)$.

Or sur M_ε, la section s donnée est partout non nulle, peut être donc prise comme une base locale de E; on a sur M_ε

$$\begin{aligned} \nabla(s) &= \omega \otimes s,\ \omega \text{ étant une 1-forme complexe sur } M_\varepsilon. \\ \nabla^2(s) &= d\omega \otimes s - \omega \Lambda \nabla(s) = d\omega \otimes s - (\omega \Lambda \omega) \otimes s \\ &= d\omega \otimes s\ . \end{aligned}$$

Donc sur M_ε,

$$c_1(\nabla) = \det\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \frac{i}{2\pi} d\omega\ .$$

Par la formule de Stokes,

$$\begin{aligned} \int_{M\varepsilon} c_1(\nabla) &= \frac{i}{2\pi}\int_{M\varepsilon} d\omega = \frac{i}{2\pi}\int_{\partial M\varepsilon} \omega \\ &= -\sum_j \frac{i}{2\pi}\int_{\gamma j} \omega \end{aligned}$$

où γ_j est la courbe de Jourdan simple orientée qui est le bord de $B(x_j)$.

D'autre part, rappelons que dans U_j, la connexion ∇ est sans courbure. On peut supposer

$$\nabla(e_j) = 0, \text{ avec } e_j \text{ une base locale de } E \text{ sur } U_j\ .$$

Dans U_j, la section s étant de la forme

$$s = z_j e_j,\ z_j \in \mathscr{C}^\infty(U_j, C)$$

on a

$$\nabla(s) = dz \otimes e_j\ .$$

Ce qui fait que sur γ_j, bord de $B(x_j)$ contenu dans U_j,

$$\nabla(S) = \omega \otimes s = \frac{dz_j}{z_j} \otimes s\ .$$

Ainsi,

$$\langle c_1(E), [M]\rangle = -\sum_j \frac{i}{2\pi}\int_{\gamma j}\frac{dz_j}{z_j}$$

nous avons démontré le théorème dit de Gauss-Bonnet dans les hypothèses indiquées de E et de M.

THÉORÈME DE GAUSS-BONNET. $\langle c_1(E), [M]\rangle = \sum_j \operatorname{Ind}(x_j, s)$, *où les* x_j *sont les zéros isolés d'une section quelconque* s *du fibré* E *de rang* 1.

Le second membre de la dernière égalité étant un entier, le corollaire suivant est immédiat,

COROLLAIRE. $c_1(E)$ *est en fait une classe de cohomologie de* M *à valeurs dans* Z

$$c_1(E) \in H^2(M, Z) .$$

EXEMPLE. Considérons l'espace projectif complexe $P_n(C)$, i.e., l'ensemble des sous espaces vectoriels x de dimension 1 de C^{n+1}. Désignons par H_n, le sous fibré vectoriel complexe de rang 1 du fibré vectoriel trivial $P_n(C) \times C^{n+1}$ sur $P_n(C)$, formé des couples (x, v) tels que v soit un vecteur de C^{n+1} contenu dans le sous espace x. Q_n dénotera le fibré vectoriel quotient

$$0 \longrightarrow H_n \longrightarrow P_n(C) \times C^{n+1} \longrightarrow Q_n \longrightarrow 0 .$$

Considérons la section s de $P_1(C) \times C^2$, telle que $s(x) = (x, v)$, où v est un vecteur fixé non nul de C^2, la section s définira au quotient une section s' de Q_1, qui adment un seul zéro $x = [v]$, le sous espace engendré par v. On peut voir facilement par un calcul direct que

$$\operatorname{Ind}([v], s') = 1 .$$

D'où par le théorème de Gauss-Bonnet,

$$\langle c_1(Q_1), [P_1(C)]\rangle = 1$$

autrement dit, $c_1(Q)$ est la classe d'orientation canonique de $P_1(C)$. Par le théorème de dualité de Whitney,

$$c_1(H_1) = -c_1(Q_1)$$

$c_1(H)$ est la classe d'orientation opposée.

Rappelons que nous avons la décomposition cellulaire de $P_n(C)$:

$$P_0(C) \subset P_1(C) \subset \cdots \subset P_{n-1}(C) \subset P_n(C)$$

par l'attachement à chaque étape une seule cellule de dimension $2i$

correspondante et que $P_n(C)$ est une variété Kahlérienne. Donc,

$$H^*(P_n(C), R) = R + R\omega + \cdots + R\omega^n ,$$

l'algèbre de polynômes tronquée engendrée par la classe ω de la 2-forme fondamentale Kahlérienne; et on pourrait démontrer aussi que

$$H^*(P_n(C), Z) = Z + Z\zeta + \cdots + Z\zeta^n ,$$

l'anneau de polynômes tronqué engendré par une classe ζ de degré 2, telle que ζ^n soit la classe d'orientation canonique de $P_n(C)$. La classe ζ est aussi l'unique classe de degré 2 de $P_n(C)$, qui induit sur la sous-variété $P_1(C)$ de $P_n(C)$ sa classe d'orientation canonique; autrement dit, nous avons nécessairement

$$c_1(H_n) = -\zeta .$$

Encore par le théorème de dualité de Whitney,

$$c_n(Q_n) = (-1)^n c_1(H_n)^n = \zeta^n$$

autrement dit, pour tout entier n, $c_n(Q)$ est la classe d'orientation canonique de $P_n(C)$.

(iii) *Théorème de Gauss-Bonnet dans le cas général.* Nous considérons donc plus généralement un fibré vectoriel complexe E de rang n sur une variété compacte M orientée et de dimension $2n$. Pour simplifier, nous noterons par E' le fribé vectoriel induit $\pi'E$ sur E par la fibration $\pi: E \rightarrow M$; E' n' est autre que le produit direct de Whitney $E \times_M E$, muni de la première projection sur E. Inversement si nous désignons par j la section nulle de E sur M, on a $E = j'E'$. Aussi, comme toute section s de E sur M est homotope à la section j, $s'E'$ est isomorphe au fibré E sur M. En particulier, pour toute connexion ∇' dans E' $s^*c_n(\nabla')$ définit la classe de cohomologie $c_n(E)$ de M:

$$\langle c_n(E), [M] \rangle = \int_M s^* c_n(\nabla')$$

où $[M]$ est la classe d'homologie fondamentale de dimension $2n$ de la variété compacte orientée M.

Nous supposerons donnée une section s de E sur M à zéros isolés $x_1, \cdots, x_p$[1] et choisissons comme précédemment des ouverts U_j, $1 \leqq j \leqq p$ de trivialisation de E, contenant respectivement et seulement x_j. U_j étant difféomorphe à C^n avec conservation de l'orientation, nous désignerons par $B(x_j)$ le disque de centre x_j dans U_j. Nous avons

[1] Il existe toujours en effet dans le fibré vectoriel E des sections à zéros isolés (voir N. Steenrod, *Topology of fibre bundles*), Princeton Univ. Press, 1951.

$$\int_M s^*c_n(\nabla') = \int_{M\varepsilon} s^*c_n(\nabla') + \sum_j \int_{B(x_j)} s^*c_n(\nabla')$$

où $M_\varepsilon = M - \bigcup_j B(x_j)$. Or il existe une section canonique σ dans E':

$$E' = E_M \times E$$
$$\forall e \in E,\ \sigma(e) = (e, e)\ .$$

La section σ est partout non nulle sur $E_0 = E - j(M)$, j étant la section null de E. Donc sur E_0, $E' = H \oplus Q$, ou H est le saus fibré trivial engendré par σ. En dehors d'un petit voisinage de $j(M)$, prenons $\Delta' = \Delta_H + \Delta_Q$. Si $\Delta_H(\sigma) = \omega = \omega \otimes \sigma$, on a, loin de $j(M)$,

$$c_n(\Delta') = \frac{i}{2\pi} d\omega \wedge c_{n-1}(\Delta_Q)$$
$$= \frac{i}{2\pi} d[\omega \wedge c_{n-1}(\Delta_Q)] = d\alpha$$

Par la formule de Stokes, nous avons donc

$$\int_M s^*c_n(\nabla') = \int_{\partial M\varepsilon} s^*\alpha + \sum_j \int_{B(x_j)} s^*c_n(\nabla')$$
$$= \sum_j \Big(-\int_{\gamma_j} s^*\alpha + \int_{B(x_j)} s^*c_n(\nabla')\Big)$$

où γ_j est la sphère orientée, bord de $B(x_j)$. Cette formule montre qu'il nous suffit de faire une étude locale dans U_j, sur lequel E n'est autre le fibré trivial $C^n \times U_j$ et E', le fibré $C^n \times C^n \times U_j$.

(a) Posons $C_0^n = C^n - \{0\}$. Sur C_0^n, le fibré trivial $C^n \times C_0^n$ est la somme directe de deux fibrés

$$C^n \times C_0^n = [\sigma] + \pi' Q_{n-1}\ ,$$

où $\pi' Q_{n-1}$ est le fibré induit de Q_{n-1} par la projection canonique

$$\pi: C_0^n \longrightarrow P_{n-1}(C)$$

et $[\sigma]$ est le sous fibré de rang 1 de $C^n \times C_0^n$ engendré par la section

$$\sigma: C_0^n \longrightarrow C^n$$
$$\sigma(z_1, \cdots, z_n) = (z_1, \cdots, z_n)\ .$$

Désignons par ∇_Q une connexion quelconque dans Q_{n-1} et par ∇_H la connexion dans $[\sigma]$ telle que ∂ étant la dérivation complexe de Dolbeaut

$$\nabla_H(\sigma) = \frac{\partial |z|^2}{|z|^2} \otimes \sigma$$

avec $|z|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$. Prenons dans $C^n \times C_0^n$, la connexion

$$\nabla_0 = \nabla_H + \pi' \nabla_Q\ ,$$

où $\pi'\nabla_Q$ est la connexion induite de ∇_Q. On a

$$c_n(\nabla_0) = \frac{i}{2\pi} d\left(\frac{\partial |z|^2}{|z|^2} \Lambda \pi^* c_{n-1}(\nabla_Q)\right) .$$

Vue que $c_{n-1}(\nabla_Q)$ est la classe d'orientation canonique de $P_{n-1}((C)$, il n'est pas difficile de montrer que

$$- \frac{i}{2\pi} \frac{\partial |z|^2}{|z|^2} \Lambda \pi^* c_{n-1}(\nabla_Q)$$

est la classe d'orientation de C_0^n (i.e., restreinte sur toute sphère de centre 0 dans C^n, elle définit la classe d'orientation canonique de cette sphère).

(b) Dans le fibré trivial $C^n \times C^n$ sur C^n, la connexion triviale sera notée par ∇_1. Soit φ une fonction positive sur C^n telle que

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= 1 \quad \text{si} \quad |z| > r \\ \varphi(z) &= 0 \quad \text{si} \quad |z| < 1/2r . \end{aligned}$$

De façon évidente, $\nabla_t = \varphi\nabla_0 + (1 - \varphi)\nabla_1$ définit une connexion dans le fibré $C^n \times C^n$. Désignons par $e^1, \cdots, e^n$ la base canonique du fibré trivial

$$\nabla_t^2(e^i) = [d(\varphi\omega_j^i) - \varphi^2\omega_k^i \Lambda \omega_j^k] \otimes e^j$$

(ω_j^i) étant la matrice représentative de le connexion ∇_0, i.e.,

$$\nabla_0(e^i) = \omega_j^i \otimes e^j ,$$

ω_j^i des 1-formes complexes sur C_0^n. Ainsi

$$c_n(\nabla_t) = \det\left(\frac{i}{2\pi}[d(\varphi\omega_j^i) - \varphi^2\omega_k^i \Lambda \omega_j^k]\right) .$$

(c) Rappelons que sur U_j, $E' = C^n \times C^n \times U_j$. Nous pouvons supposer par une partition de l'unité que la connexion ∇' choisie dans E', restreinte sur U_j, est la connexion naturelle induite par ∇_t dans $C^n \times C^n$ sur $C^n \times C^n \times U_j$. Alors la section s donnée n'est autre qu'une application $s\colon U_j \longrightarrow C^n$. Supposons que la fonction φ précédente soit choisie telle que

$$s^{-1}(\{|z| < r\}) \subset B(x_j) .$$

Nous avons

$$\int_{\gamma_j} s^*\alpha = - \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_j} s^*\left(\frac{\partial |z|^2}{|z|^2} \Lambda \pi^* c_{n-1}(\nabla_Q)\right) .$$

Donc, vue la remarque de la fin de la section (a) de notre démonstration

$$\int_{\gamma_j} s^*\alpha = \mathrm{Ind}\,(x_j, s)\,.$$

D'autre part

$$\int_{B(x_j)} s^* c_n(\nabla') = \int_{B(x_j)} s^* \det\left(\frac{i}{2\pi}[d(\varphi\omega^i_j) - \varphi^2\omega^i_k \Lambda \omega^k_j]\right)\,.$$

Tout en sachant qu'on doit choisir la fonction φ telle que $1 - \varphi$ soit à support dans $B(x_j)$, il est immédiat de montrer que

$$\lim \int_{B(x_j)} s^* \det\left(\frac{i}{2\pi}[d(\varphi\omega^i_j) - \varphi^2\omega^i_k \Lambda \omega^k_j]\right) = 0$$

quand $B(x_j)$ parcourt un filtre de voisinages de x_j. Autrement dit nous avons prouvé que

$$\langle c_n(E), [M]\rangle = \sum_j \mathrm{Ind}\,(x_j, s) + \varepsilon$$

avec ε aussi petit qu'on veut. D'où le théorème

THÉORÈME GÉNÉRAL DE GAUSS-BONNET. *E étant un fibré complexe de rang n sur une variété compacte orientée M de dimension $2n$*

$$\langle c_n(E), [M]\rangle = \sum_j \mathrm{Ind}\,(x_j, s)$$

où les x_j sont les zéros (isolés) d'une section s de E sur M.

COROLLAIRE. *Les classes de Chern sont des classes rationnelles:*

$$\forall_p,\ c_p(E) \in (H^{2p}(M, Q))\,.$$

En effet, d'après les résultats de R. Thom, la cohomologie rationnelle de M peut être définie à partir des cycles fermés qui soient des sous variétés de M. Soit donc donné un tel cycle N de dimension $2p$. Pour tout fibré E sur M, $E|N$ est "stablement équivalent" à un fibré E' de rang p sur N:

$$\langle c_p(E), [N]\rangle = \langle c_p(E'), [N]\rangle\,.$$

Or d'après le théorème de Gauss-Bonnet, le second membre est un entier.

REMARQUE. (1) Nous avons développé la théorie des classes caractéristiques de Chern dans la catégorie des variétés différentiables. Il est à rappeler que tout espace fibré sur un espace topologique paracompact de dimension cohomologique finie est l'induit par une application continue d'un fibré différentiable E sur une variété Grassmanienne. Vue la propriéte universelle des classes de Chern, précisée dans II–4, il est alors immédiat d'étendre la théorie à la catégorie des espaces topologiques "admissibles" au sens de Hirzebruch (voir notre introduction).

(2) De fait le dernier corollaire n'est qu'un résultat partiel. On pourrait en effet démontrer à l'aide d'un argument de A. Borel (voir Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*) que les classes de Chern sont intégrales:

$$c(E) \in H^*(M, Z) .$$

Received November 11, 1969.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL