

SUR UN THÉORÈME DE MOONEY RELATIF AUX  
 FONCTIONS ANALYTIQUES BORNÉES

ERIC AMAR

We give a short proof of the following theorem of Mooney:  
 If  $\{\phi_n\}$  is a sequence in  $L^1(-\pi, \pi)$  such that  $\lim_n \int f\phi_n = \iota(f)$   
 exists for all  $f \in H^\infty$ , then there is  $\phi \in L^1$  such that  $\iota(f) = \int f\phi$   
 for all  $f \in H^\infty$ .

NOTONS.  $H^\infty(D)$  l'algèbre uniforme des fonctions analytiques bornées dans:

$$D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

$$T = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}; \quad \text{et } L^1(T, \lambda)$$

l'espace des fonctions intégrables pour la mesure de Haar  $\lambda$  sur  $T$ .

$$A(D) = H^\infty(D) \cap C(T).$$

Le but de cette note est de donner une autre démonstration du théorème suivant dû à Mooney [4]:

THÉORÈME. Si  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $L^1(T, \lambda)$  telle que:

$$\forall f \in H^\infty(D), \iota(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f\phi_n d\lambda$$

existe, alors il existe  $\phi \in L^1(T, \lambda)$  tel que:

$$(*) \quad \iota(f) = \int f\phi d\lambda \quad \forall f \in H^\infty(D).$$

Cette démonstration est basée sur une proposition démontrée dans [3] qui permet d'appliquer à  $H^\infty(D)$  la méthode que J. P. Kahane [2] a utilisé pour démontrer (\*) lorsque  $f$  appartient à  $A(D)$ .

1. **Reduction du probleme.** Soit  $X$  la frontière de Shilov de  $H^\infty(D)$ ;  $m$  la mesure représentative unique de l'origine, alors on sait [1] que  $L^1(X, m)$  est isométriquement isomorphe à  $L^1(T, \lambda)$ .

Utilisant cet isomorphisme, les données sont alors les suivantes: Soit  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $L^1(X, m)$  telle que:

$$\forall f \in H^\infty(D); \iota(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \hat{f}\phi_n dm$$

existe; expression dans laquelle  $\hat{f}$  désigne la transformée de Gelfand de  $f$ . Il s'agit alors de trouver  $\phi \in L^1(X, m)$  telle que:

$$l(f) = \int_X \hat{f} \phi \, dm \quad \forall f \in H^\infty(D).$$

Par le théorème de Banach-Steinhaus,  $l(f)$  est une forme linéaire continue sur  $H^\infty(D)$ .

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une mesure  $\mu$  borélienne sur  $X$  telle que:

$$l(f) = \int_X \hat{f} \, d\mu.$$

Décomposons  $\mu$  par rapport à  $m$ :

$$d\mu = \eta \, dm + d\mu_s; \quad \eta \in L^1(X, m); \quad \mu_s$$

singulière par rapport à  $m$ . Posant:

$$\Phi_n = \phi_n - \eta \text{ on a: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \hat{f} \Phi_n \, dm = \int_X \hat{f} \, d\mu_s.$$

Pour démontrer le théorème il suffit alors de montrer que  $\mu_s$  est orthogonale à  $H^\infty(D)$ .

**2. Rappelons la proposition de [2].** (\*\*\*) Pour tout compact  $K$  de  $X$ , de  $m$  mesure nulle, il existe un compact  $P$  tel que:

- (i)  $K \subset P \subset X$
- (ii)  $m(P) = 0$
- (iii)  $P$  est pic pour  $H^\infty(D)$  sur  $X$ .

On en déduit le lemme suivant:

**LEMME.** Soit  $\nu$  une mesure sur  $X$ ;  $\nu$  singulière par rapport à  $m$  et telle que:

$$\nu(X) = \alpha \neq 0.$$

Alors il existe un ensemble pic  $P$  pour  $H^\infty(D)$  tel que:

$$\nu(P) \neq 0 \text{ et } m(P) = 0.$$

*Démonstration.*  $|\nu|$  est singulière donc:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \text{ compact } \subset X$$

tel que:

$$m(K) = 0; \quad |\nu|(X \setminus K) < \varepsilon.$$

Par (\*\*):

$\exists P \supset K; m(P) = 0; P$  pic pour  $H^\infty(D)$  sur  $X$ .

Donc

$$|\nu|(X \setminus P) < \varepsilon \quad \text{et} \quad |\nu(P)| \geq |\nu(X)| - \varepsilon = |\alpha| - \varepsilon.$$

D'où le lemme avec  $\varepsilon = |\alpha|/2$ .

3. Démonstration du théorème. Supposons qu'il existe  $g \in H^\infty(D)$  tel que:

$$\int \hat{g} d\mu_s \neq 0.$$

Posant:  $d\nu = \hat{g} d\mu_s$ , on peut appliquer le lemme à  $\nu$ . Donc il existe  $P$ , pic pour  $H^\infty(D)$  tel que:

$$m(P) = 0 \quad \text{et} \quad |\nu(P)| > 0.$$

Soit alors  $h \in H^\infty(D)$  une fonction qui pique sur  $P$ :

$$\begin{aligned} \hat{h}(x) &= 1 \quad \text{si} \quad x \in P \\ |\hat{h}(x)| &< 1 \quad \text{si} \quad x \notin P; \end{aligned}$$

en particulier  $|h(z)| < 1; z \in D$ . Soit enfin:

$$\Psi_n = \hat{g} \Phi_n \in L^1(X, m).$$

On a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \hat{f} \Psi_n dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \hat{f} \hat{g} \Phi_n dm = \int \hat{f} \hat{g} d\mu_s; \quad \forall f \in H^\infty(D), \text{ car } fg \in H^\infty(D).$$

De plus:

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \hat{h}^k d\nu = \nu(P) \neq 0$$

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \hat{h}^k \Psi_n dm = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \hat{h}^k \Psi_n dm = \int_X \hat{h}^k d\nu \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Posant:

$$f = \sum_0^\infty (-1)^j h^{m_j}; \quad m_j \in \mathbb{N},$$

on montre comme dans [3], que pour une suite de  $m_j$  croissant assez vite,  $f \in H^\infty(D)$ .

Reprenant exactement la méthode de J. P. Kahane [2], on arrive à la contradiction:

$$\int_x \hat{f} \Psi_n dm$$

n'est pas de Cauchy.

Donc il n'existe pas de  $g \in H^\infty(D)$  tel que  $\int \hat{g} d\mu_s \neq 0$ , et  $\mu_s$  est bien orthogonale à  $H^\infty(D)$ , ce qui achève la démonstration.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. Gamelin, *Uniform Algebras*, Prentice Hall (1969).
2. J. P. Kahane, Proc. Amer. Math. Soc., **18** (1967), 827-831.
3. A. Lederer et E. Amar, C. R. Acad. Sc. Paris, p. 1449-1452 (2 juin 1971).
4. Mooney, *A theorem on bounded analytic functions*.

Received September 13, 1972.

FACULTE DES SCIENCES 91, ORSAY, FRANCE