PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol 70, No. 1, 1977

STRIKT FAST GLEICHGRADIG-STETIGE UND EIGENTLICHE AKTIONEN

P. STRANTZALOS

The strictly almost equicontinuous actions (SAE-actions) are characterized with notions from the theory of proper actions (P-actions). Roughly speaking we prove that every SAE-action is a restriction of a P-action. Through this characterization we are able:

(1) To improve known results of the theory of SAE-actions and to get new ones concerning the structure of the acting group and the (phase) space.

(2) To classify all SAE-actions, which extend a given equicontinuous action.

The more general assumptions on the space, under which the theory of SAE-actions works, provided the motivation to refine and improve upon the corresponding assumptions of the theory of P-actions.

1. Einleitung. In der vorliegenden Arbeit wird eine Charakterisierung einer strikt fast gleichgradig-stetigen Aktion (SFGS-Aktion, vgl. 2.1) mit Hilfe von Begriffen aus der Theorie der eigentlichen Aktionen (genauer: Fast eigentlichen (FE-) Aktionen, vgl. 2.2) angegeben. Der entsprechende Satz (vgl. 2.5) besagt im wesentlichen, daß eine SFGS-Aktion Einschränkung einer FE-Aktion ist, wenn die Aktionsgruppe mit der kompakt-offenen Topologie versehen wird (es werden nur effektive Aktionen betrachtet). Dieses Resultat erlaubt:

(a) Bekannte Sätze aus der Theorie der SFGS-Aktionen (zum Teil wesentlich) zu verbessern und neue (Struktur-) Aussagen in dieser Theorie zu gewinnen (vgl. 3.), wobei manche schon gestellten Voraussetzungen aus einer neuen Richtung gesehen und vielleicht besser verstanden werden (vgl. 2.14 und 3.7.(a)), und

(b) alle SFGS-Aktionen zu klassifizieren, die eine vorgegebene gleichgradig-stetige Aktion fortsetzen (vgl. 4.).

Daraus ist also zu entnehmen, daß die Theorie der eigentlichen Aktionen der Theorie der SFGS-Aktionen bei ihrer Weiterentwicklung helfen kann. Aus dem gegenwärtigen Stand beider Theorien ist anzunehmen, daß die Theorie der SFGS-Aktionen zur Theorie der eigentlichen Aktionen in der Richtung beitragen könnte, die Voraussetzungen über den betreffenden Raum abzuschwächen; diese Bemerkung führt zur Kritik über die Voraussetzungen in der Theorie der lokal kompakten eigentlichen Aktionen (vgl. 5.).

Auf Grund der Beweisführung ist anzunehmen, daß uniforme, statt metrische, Räume ohne wesentliche Veränderung der Resultate betrachtet werden können (vgl., z.B., [**1**; 1, Prop. 1], [**16**], [**17**], [**20**]).

Es sei schließlich bemerkt, daß die Tatsache, daß die Gruppe der Isometrien eines zusammenhängenden, lokal kompakten, metrischen Raumes lokal kompakt ist und eigentlich auf diesem Raum operiert [**22**; Lemma 2], Angelpunkt in dieser Arbeit ist.

2. Vergleich der FE- und der SFGS-Aktionen.

Während der ersten vier Paragraphen sei X ein zusammenhängender, lokal kompakter, metrischer Raum mit der Eigenschaft Z [**2**]: Jedes $x \in X$ besitzt eine zusammenhängende, kompakte Umgebung (z.B. wenn X lokal zusammenhängend ist). Die Eigenschaft Z ist für einige Beweise nicht nötig und kann durch eine schwächere aber "ästhetisch schlechtere" Voraussetzung ersetzt werden (vgl. 5.). Es werden nur zulässige (d.h. mit der Topologie verträgliche) Metriken betrachtet. $H(X)$ bzw. $I_d(X)$ bezeichnet die Gruppe der Homöomorphismen bzw. die Gruppe der Isometrien von X bezüglich der Metrik d mit der kompakt-offenen Topologie ($I_d(X)$ ist also eine lokal kompakte (topologische) Gruppe). Für $A \subset X$ sei $d_A = d \mid A \times A$. $G \subseteq I_d(X)$ oder schlechthin G bedeutet, daß die topologische Gruppe G die Spurtopologie aus $I_d(X)$ trägt. Es ist egal, ob man effektive oder nicht effektive Aktionen in dieser Arbeit betrachtet; deshalb werder hier, der Einfachheit halber, ausschließlich effektive Aktionen betrachtet.

DEFINITION 2.1 [**18**; 1]. Sei (G, X) eine Aktion und $x_0 \in X$; G bzw. die Aktion heißt *gleichgradig-stetig (equicontinuous) in x_0 bezüglich der Metrik d auf X* (kurz $GS(d)$ in x_0), wenn folgendes gilt: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß $d(gx_0, gx) < \epsilon$ für jedes $x \in X$ mit $d(x_0, x) < \delta$ gilt. G bzw. die Aktion heißt $GS(d)$ schlechthin, wenn G bzw. die Aktion $GS(d)$ in jedem $x \in X$ ist.

Sei Y lokal kompakt und zusammenhängend; die Aktion (G, Y) (genauer (G, Y, X)) heißt *fast gleichgradig-stetig (almost equicontinuous) bezüglich der Metrik d auf Y* (kurz $FGS(d)$), wenn es einen zusammenhängenden Raum $X \subset Y$ derart gibt, daß

(a) $N(Y) = Y - X \neq \emptyset$ total-unzusammenhängend ist,

(b) (G, X) eine $GS(d_X)$-Aktion ist (also X G-invariant ist), und

(c) G in keinem Punkt von $N(Y)$ $GS(d)$ ist.

Jeder Punkt aus X heißt *regulär* und jeder aus $N(Y)$ *nicht regulär*.

Die $FGS(d)$-Aktion (G, Y) heißt *strikt fast gleichgradig-stetig (strictly almost equicontinuous) bezüglich d* (kurz $SFGS(d)$), wenn $\overline{Gz} \subset Y$ kompakt für jedes $z \in N(Y)$ ist. (Wegen [**18**; 1.5.(2)] und des Zusammenhangs von X ist [**18**; 1.6.(c)] automatisch erfüllt.)

Obwohl G bei der vorigen Definition keine Topologie zu tragen braucht, wird G im folgenden als topologische Gruppe betrachtet; in diesem Zusammenhang bezeichnet G_T die Gruppe G versehen mit der Topologie T derart, daß (G_T, Y) eine stetige Aktion ist (wie alle in dieser Arbeit auftretende Aktionen).

DEFINITION 2.2. Sei H eine lokal kompakte Gruppe; die Aktion (H, X) heißt *eigentlich* (*E-Aktion*), wenn folgendes gilt: Für $x, y \in X$ gibt es Umgebungen U_x, U_y von x *bzw.* y derart, daß $(U_x, U_y) =: \{g : gU_x \cap U_y \neq \emptyset\} \subset G$ relativ-kompakt ist. In Analogie zu 2.1 heißt (H, Y) (genauer (H, Y, X)) *fast eigentlich* (*FE-Aktion*), wobei Y wie in 2.1 ist, wenn

(a) $Y - X$ total-unzusammenhängend und abgeschlossen ist, und

(b) (H, X) eine E-Aktion (also X H-invariant) ist (vgl. [**5**; 3.2]).

Aus (a) folgt wie in 2.9, daß $\bar{X} = Y$ gilt. Durch (a) und (b) ist X nicht eindeutig bestimmt; im folgenden ist mit einer FE-Aktion (H, Y) auch X gegeben. Die Punkte von $Y - X$, die Häufungspunkte von Orbits der Aktion (H, X) sind, heißen *Grenzpunkte* (*der Aktion*) und ihre Menge wird mit $R_0 = R_0(Y)$ bezeichnet (vgl. [**3**; 6.1]); diese Menge hängt nicht von X ab.

LEMMA 2.3. (Vergleich der GS- und E-Aktionen): (G_T, X) *ist eine* (*stetige*) *$GS(d)$-Aktion genau dann, wenn es eine* (G-invariante) *Metrik d^* auf X mit $d(x, y) \leqq d^*(x, y)$ für jedes $x, y \in X$ und eine abgeschlossene* (*also lokal kompakte*) *Untergruppe H $(= \bar{G})$ von $I_{d^*}(X)$ derart gibt, daß $Id: G_t \to G \subset H \subset I_{d^*}(X)$ stetig ist* (d.h. jede GS-Aktion läßt sich durch eine Aktion von Isometrien faktorisieren).

BEMERKUNGEN 2.4. (a) Da $(I_{d^*}(X), X)$ eine E-Aktion nach [**22**; Lemma 2] ist und H abgeschlossen in $I_{d^*}(X)$ ist, bedeutet 2.3, daß *jede GS-Aktion (G, X) Einschränkung einer E-Aktion (H, X) mit $\bar{G} = X$ ist.*

(b) Auf dem Weg, den Hauptsatz 2.5 zu beweisen, wird auch folgendes bewiesen: *Sei (H, X) eine E-Aktion und $G \subset H$; dann gibt es eine Metrik d auf X derart, daß (G, X) eine $GS(d)$-Aktion ist.* (Für einen Beweis vgl. 2.8).

(c) Das Lemma 2.3 ist ein Schritt des Beweises des nachfolgenden Satzes:

SATZ 2.5. (*Vergleich der $SFGS$- und FE-Aktionen*): *Bezeichnung und Voraussetzungen über X und Y wie in* 2.1 *und* 2.2. *Die Aktion (G_T, Y) ist eine $SFGS(d)$-Aktion genau dann, wenn folgendes gilt*:

(a) *Es gibt eine Metrik d^* auf X derart daß die Aussage von* 2.3 *für d_X, statt d, gilt, wobei H nicht kompakt ist*;

(b) *Y ist eine 0-dimensionale Kompaktifizierung von X* (: *Kompak-*

tifizierung von X *mit 0-dimensionalem Restraum* $Y-X$), *es sei denn* $Y-X$ *besteht aus einem Fixpunkt der Aktion* (G_T, Y) *und* Y *ist nicht kompakt*;

(c) (H, X), *vgl.* 2.3, *setzt sich zu einer FE-Aktion* (H, Y, X) *fort, bei der* $R_0 = N(Y) = Y - X$, *vgl.* 2.2, *gilt.*

BEMERKUNGEN 2.6. (a) Nach 2.4 und 2.5.(c) ist *jede SFGS-Aktion* (G, Y) *Einschränkung einer FE-Aktion* (H, Y) *mit* $\bar{G} = H$, denn (H, Y) ist auch Fortsetzung von (G, Y).

(b) In Analogie zu 2.4.(b) gilt folgendes: *Ist* (G, Y) *Einschränkung einer FE-Aktion* (H, Y), *d.h.* $G \subset H$, *so gibt es einen (maximalen eigentlichen) Unterraum* $Z \subset Y$ *mit* $X \subset Z$ *und eine Metrik* d *auf* Z *derart, daß* (G, X) *eine* $GS(d)$*-Aktion ist.* Der Beweis ist wie in 2.8.1 durchzuführen. Im allgemeinen gilt $Z \neq X$; der Grund dafür ist, daß bei E-Aktionen (H, X), die sich in einer 0-dimensionalen Kompaktifizierung Y von X fortsetzen lassen, der Raum $(Y-X)-R_0$ im allgemeinen nicht leer ist (vgl., z.B., [**2**; 3.6., Bem.]).

Der Rest dieses Paragraphen beinhaltet den Beweis von 2.5.

2.7. *Beweis von* 2.3. Nach [**6**; IX, 1.2] darf angenommen werden, daß d beschränkt ist. Durch $d^*(x, y) =: \sup\{d(gx, gy), g \in G\}$ wird eine (zulässige) Metrik d^* auf X definiert, wie leicht zu sehen ist. Da

$$\begin{aligned} d^*(g_0x, g_0y) &= \sup\{d(gg_0x, gg_0y), g \in G\} \\ &= \sup\{d(tx, ty), t \in G\} = d^*(x, y), \end{aligned}$$

gilt $G \subset I_{d^*}(X)$. Nach [**6**; X, 3.4, Cor. 1] ist $Id\colon G_T \to G \subset I_{d^*}(X)$ stetig. Damit ist die Notwendigkeit bewiesen.

Die andere Richtung folgt aus $d(x, y) \leqq d^*(x, y)$, aus der Voraussetzung, aus der Tatsache, daß die Metriken d, d^* die Topologie von X definieren und aus der Tatsache, daß jede Untergruppe von $I_{d^*}(X)$ eine $GS(d^*)$-Aktion definiert.

2.8. *Beweis von* 2.4.(b). Die Behauptung folgt aus der Nachfolgenden:

2.8.1. *Jede* E*-Aktion* (H, X) *ist eine Aktion durch Isometrien bezüglich einer Metrik* d *auf* X *(äquivariant-) äquivalent, folglich ist* H *abgeschlossen in* $I_d(X)$.

Beweis. X ist σ-kompakt (: lokal kompakt, zusammenhängend und metrisierbar), d.h. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ mit $\bar{X}_n \subset X_{n+1}$, wobei jedes X_n offen und relativ-kompakt ist [**8**; XI, 7.2]; daraus folgt, daß der Orbitraum $X/H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} p(\bar{X}_n)$ lokal kompakt und σ-kompakt ist [**8**; XI, 7.3]. Damit ist [**16**; 1, 4, Th. 3] hier anwendbar und die Behauptung folgt aus der Tatsache, daß jede Gruppe, die eigentlich auf einem lokal kompakten Raum operiert, notwendigerweise lokal kompakt ist (: Für $x_0 \in X$ ist $H \to X$ mit $h \mapsto hx_0$ eigentlich, folglich ist Hx_0 abgeschlossen in X und damit lokal kompakt und das Gewünschte folgt aus der Eigentlichkeit von $H \to Hx_0$).

HILFSSATZ 2.9. *Bezeichnung und Voraussetzungen wie in* 2.5 (*insbesondere ist* (G, Y) *eine* $SFGS(d)$*-Aktion*). *Sei* X^+ *bzw.* Y^+ *die Endenkompaktifizierungen von* X *bzw.* Y [**2**; 2]; *dann ist* Y^+ *eine* 0*-dimensionale Kompaktifizierung von* X *also gibt es eine surjektive Abbildung* $f: X^+ \to Y^+$, *die die Identität von* X *fortsetzt* [**2**; 2.1.a)].

Beweis. Sei $z \in Y - X$ mit $z \in Y - \bar{X}$; dann gibt es eine Umgebung U von z in Y mit $U \cap X = \emptyset$. Da $N(Y) \neq \emptyset$ total-unzusammenhängend ist, ist $N(Y) = Y - X$ 0-dimensional nach [**18**; 1.3]. Folglich gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ von z in $N(Y)$ und damit in Y, die gleichzeitig auch abgeschlossen ist. Da $Y = V \cup (Y - X)$ und Y zusammenhängend ist, muß V leer sein, d.h. $z \in Y - \bar{X}$ ist nicht möglich also $\bar{X} = Y$ und Y^+ ist eine Kompaktifizierung von X. Aus $Y^+ - X = (Y^+ - Y) \cup (Y - X)$, aus der Tatsache, daß $Y^+ - Y$ abgeschlossen nach [**8**; XI, 8.3] (: Ein Raum ist genau dann lokal kompakt, wenn er offen in jeder seiner Kompaktifizierungen ist) ist, und aus der Tatsache, daß sowohl $Y^+ - Y$ als auch $Y - X = N(Y)$ 0-dimensional ist, folgt die Nulldimensionalität von $Y^+ - X$ nach [**11**; II, 3, Cor. 2] (: Ein Raum ist 0-dimensional, wenn er Vereinigung von zwei 0-dimensionalen Teilräumen ist und der eine davon abgeschlossen ist).

2.10. (H, Y^+) *als Fortsetzung von* (G, Y). Bezeichnung wie in 2.5. Da X zusammenhängend ist, läßt sich (H, X) zu einer Aktion (H, X^+) nach [**2**; 2.3] fortsetzen. Dasselbe gilt auch für (G, Y), womit (G, Y^+) definiert wird. Sei $F: H \times Y^+ \to Y^+$ mit Hilfe von f aus 2.9 durch $F(h, f(a)) = f(ha)$ definiert; dann gilt:

(1) F ist wohldefiniert, d.h. aus $f(a_1) = f(a_2)$ folgt $f(ha_1) = f(ha_2)$;
(2) F ist stetig;
(3) (H, Y) ist eine Teilaktion von (H, Y^+), die sowohl (G, Y) als auch (H, X) fortsetzt.

Beweis von (1). $x \in X \subset X^+$ sei als Punkt von $X \subset Y^+$ mit x^* bezeichnet; ferner sei $\{x_n, n \in \mathbf{N}\}$ eine Folge in X mit $x_n \to a \in X^+ - X$. Wegen der Invarianz von X und $f | X = Id$ gilt $f(ga) = \lim (gx_n)^* = g \lim x_n^* = gf(a)$ für $g \in G$. Aus $f(a_1) = f(a_2)$ folgt also $f(ga_1) = f(ga_2)$, d.h. die Abbildungen $F_i: H \to Y^+$ mit $F_i(h) = f(ha_i)$,

$i = 1, 2$, stimmen auf G und damit auf $H = \bar{G}$ überein. Daraus folgt die Behauptung und gleichzeitig, daß f eine H-Abbildung ist, d.h. daß das nachfolgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} H \times X^+ & \xrightarrow{Id \times f} & H \times Y^+ \\ \downarrow & & \downarrow F \\ X^+ & \xrightarrow[f]{} & Y^+ \end{array}$$

Beweis von (2). Im obigem Diagramm sind alle Abbildungen surjektiv und die Abbildung $Id \times f$ ist abgeschlossen, weil die Räume X^+, Y^+ kompakt sind; daraus folgt, daß F^{-1} abgeschlossene Mengen in abgeschlossenen Mengen abbildet, d.h. die Stetigkeit von F.

Der Beweis von (3) ist in den Beweisen von (1) und (2) enthalten.

LEMMA 2.11. *Ist* (G, Y) *eine SFGS-Aktion wie in* 2.1, *so ist H nicht kompakt.*

Beweis. Sei H kompakt; dann ist $(H, Y) \hookrightarrow (H, Y^+)$ einer Aktion durch Isometrien bezüglich einer Metrik d^* äquivalent; die Menge $N^*(Y)$ der nicht regulären Punkte bezüglich d^* dieser Aktion ist leer, obwohl $N(Y) \subset N^*(Y)$ nach [**18**; 1.1.(2)] gilt; Widerspruch!

2.12. *Die Grenzpunkte der SFGS-Aktionen.* Lemma 2.11 erlaubt, die Ergebnisse von [**2**] für (H, X) hier anzuwenden: Nach [**2**; 4.11.4] ist $R_0 = R_0(Y^+)$ (vgl. 2.2) entweder einpunktig oder besteht aus zwei Punkten order ist perfekt; im letzteren Fall ist R_0 dem Cantorschen Diskontinuum D homöomorph (: kompakt [**2**; 4.11.1], metrisierbar [**12**; VI, 42], total-unzusammenhängend und ohne isolierte Punkte). Darüber hinaus gilt das nachfolgende

LEMMA. *Falls* (G, Y) *eine SFGS-Aktion ist, ist jeder Punkt von* $Y^+ - X$ *Grenzpunkt, d.h. die E-Aktion* (H, X) *ist in keinem Punkt von* $Y^+ - X$ *eigentlich fortsetzbar* (vgl. [**2**; 4.7 und 3.6. Bem.]).

Beweis. Zuerst gilt $Y - X \subset R_0$: Sei $x \in Y - X$ kein Grenzpunkt; dann gibt es einen (maximalen) Raum $Z \subset Y^+$ mit $X \subset Z$ $(Z - X \neq \emptyset)$ derart, daß (H, Z) eine E-Aktion ist und Z die Eigenschaften von X hat [**2**; 4.7]; daraus und aus 2.8.1 folgt die Existenz einer Metrik d auf Z mit $H \subset I_d(Z)$ (: Z ist metrisierbar nach [**12**; VI, 42]); das widerspricht aber [**18**; 1.1.(2)] wie im Beweis von 2.11, also $Y - X \subset R_0$. Nun sei $a \in Y^+ - Y$ kein Grenzpunkt; dann gilt $R_0 \subset \overline{Ha}$ nach [**2**; 4.11.6–4.11.7] also $Y - X \subseteq \overline{Ha}$; da Y invariant und offen in Y^+ ist, folgt daraus $Ha \subset Y$ im Widerspruch zu $a \in Y^+ - Y$ und der Beweis ist beendet.

2.13. *Beweis des Hauptsatzes* 2.5. Sei (G_T, Y) eine $SFGS(d)$-Aktion. Die Aussage 2.5.(a) folgt aus 2.3 und aus 2.11. Da (H, Y^+) die Aktionen (G, Y), (H, X) nach 2.10.(3) fortsetzt und $Y^+ - X = R_0(Y^+)$ nach dem Lemma in 2.12 gilt, treten, gamäß 2.12, nur die drei nachfolgenden Fälle auf:

(1) $R_0 = \{a\}$; in diesem Fall muß $N(Y) = \{a\}$ wegen $N(Y) \neq \emptyset$ also $Y^+ = Y$ gelten.

(2) $R_0 = \{a_1, a_2\}$; in diesem Fall gilt (i) oder (ii):

(i) $N(Y) = \{a_1\}$ also $Y = Y^+ - \{a_2\}$, wobei die Punkte a_1, a_2 Fixpunkte der Aktion (H, Y^+) sind (: a_1 wegen der Aktion (H, Y));

(ii) $N(Y) = R_0$ also $Y^+ = Y$.

(3) $R_0 \simeq D$ (: R_0 ist dem Cantorschen Diskontinuum D homöomorph); in diesem Fall gilt $N(Y) = R_0$ (vgl. nachfolgenden Beweis) also $Y^+ = Y$.

In allen Fällen gilt offensichtlich $N(Y) = R_0(Y^+) \cap Y$. Der Beweis von 2.5.(b) und 2.5.(c) wird beendet sein, wenn die Behauptung in (3) gezeigt wird: Da $R_0 = Y^+ - X$ nach dem Lemma in 2.12 gilt, genügt zu zeigen, daß $Y = Y^+$ gilt. Nach [**2**; 4.11.6 und 4.11.10] ist ein $a \in R_0$ entweder (der einzige) Fixpunkt der Aktion oder es gilt $R_0 \subset \overline{Ha}$. Wenn a Fixpunkt der Aktion ist, muß $a \in Y$ gelten, weil $\overline{GZ}$, für jeden Punkt $z \in R_0$, kompakt nach Voraussetzung ist und a (in diesem Fall) Häufungspunkt eines jeden Gz ist (genauer gesagt: a ist Häufungspunkt von Hz und G liegt dicht in H also a ist auch Häufungspunkt von Gz [**2**; 4.11.2]. Wenn a kein Fixpunkt der Aktion ist, gilt $a \in Y$, wie es analog dem letzten Teil des Beweises in 2.12 zu zeigen ist (: Y ist offen und invariant in Y^+). Damit ist die Notwendigkeit bewiesen.

Umgekehrt seien 2.5.(a)–.(c) erfüllt. Wegen 2.5.(a) und 2.3 ist (G, X) eine $GS(d_X)$-Aktion. Falls Y nicht kompakt ist, ist der einzige Punkt von $Y - X$ Fixpunkt der Aktion also nicht regulär. Nun sei Y kompakt; in diesem Fall ist die Bedingung "$\overline{Gz}$ ist kompakt für jedes $z \in N(Y)$" automatisch erfüllt; es bleibt also zu zeigen, daß alle Punkte von $Y - X$ nicht regulär bezüglich der Metrik d sind:

Sei $a \in Y - X$ regulär; dann gilt $Y - X = R_0 \simeq D$, denn sonst bestünde R_0 aus höchstens zwei Punkten also ausschließlich aus nicht regulären Punkten; daraus folgt, daß $Y - X$ minimal bei der Aktion von G (eventuell bis auf einen Fixpunkt $b \in R_0$ der Aktion) ist; sei $M = Y - X$ (bzw. $M = (Y - X) - \{b\}$); aus [**17**; 1.6.(1)] (: Eine minimale Menge besteht entweder ausschließlich aus regulären oder ausschließlich aus nicht regulären Punkten) folgt, daß M dann aus regulären Punkten besteht; folglich gibt es nach 2.3 eine Metrik d' auf $X \cup M$ mit

$G \subset I_{d'}(X \cup M)$; H' (wie H in 2.3) operiert eigentlich auf $X \cup M$; nach Konstruktion gilt $d'|X \times X \leqq d^*$ (wie in 2.3) und (G, X) ist Einschränkung sowohl von (H, Y) wie auch von (H', Y); bei der Aktion von H' gilt folgendes: Für $x \in X$ und $g_n \in G$, $n \in \mathbf{N}$ konvergiert keine Folge $\{g_n, n \in \mathbf{N}\}$ gegen $m \in M$, falls $\{g_n, n \in \mathbf{N}\}$ keine Häufungspunkte in G und in H' (beide Gruppen sind nicht kompakt) hat (: H' operiert eigentlich auf $X \cup M$); dagegen gilt $g_n x \to m$, für geeignetes $m \in M$, wenn man die Aktion (H, Y) betrachtet, weil G dicht in H liegt und 2.5.(c) gilt. Aus diesem Widerspruch folgt, daß jedes $a \in Y - X$ nicht regulär ist, und der Satz ist bewiesen.

BEMERKUNG 2.14. Die Voraussetzung "$\overline{Gz}$ ist kompakt für jedes $z \in N(Y)$" hat als Folgerung eine gewisse "Starrheit" von $N(Y)$, wenn man verschiedene Metriken (: uniforme Strukturen) betrachtet (vgl. [**18**; 1.1.(1)]). Die Tatsache, daß man die Struktur von $N(Y)$ genau angeben kann (vgl. 3.1), ist eher darauf zurückzuführen, daß $H = \bar{G}$ nicht kompakt nach 2.11 ist.

3. Die SFGS-Aktionen aus der Sicht der FE-Aktionen. Aus 2.5 ist klar, daß die Theorien der *SFGS*-Aktionen und der *FE*-Aktionen (zumindest unter der gemachten Voraussetzungen) sich gegenseitig in ihrer Weiterentwicklung helfen können. In diesem Paragraphen werden mit Hilfe von Ergebnissen aus der Theorie der *FE*-Aktionen

(a) bekannte Resultate aus der Theorie der *SFGS*-Aktionen verschärft bzw. verallgemeinert (vgl. 3.1, 3.2, 3.5, 3.6) und

(b) neue Aussagen über *SFGS*-Aktionen gewonnen (vgl. 3.3, 3.4).

Im nächsten Paragraphen wird dieselbe Richtung zu einer Klassifizierung der möglichen *SFGS*-Aktionen führen, die eine gegebene *GS*-Aktion fortsetzen, und in 5. wird in der entgegengesetzten Richtung (: *SFGS*-Aktionen für *FE*-Aktionen) angedeutet, wie die Voraussetzungen über den betrachtenden Raum in der Theorie der *E*-Aktionen abzuschwächen sind. *Die Voraussetzungen von* 2. *gelten hier weiter* (vgl. 5.).

SATZ 3.1. *Sei* (G, Y) *eine SFGS-Aktion; dann gilt:*

(a) $N(Y)$ *ist kompakt* (vgl. 2.6.(a) und [**2**; 4.11.1]).

(b) *Die* (mögliche) *Struktur von* $N(Y)$ *ist wie folgt zu beschreiben:*

(1) $N(Y)$ *besteht aus einem Fixpunkt der Aktion oder*

(2) $N(Y)$ *besteht aus* 2 *Punkten, die entweder Fixpunkte der Aktion sind oder einen 2-punktigen Orbit bilden, oder*

(3) $N(Y)$ *ist dem Cantorschen Diskontinuum D homöomorph und besitzt höchstens einen Fixpunkt der Aktion.*

Nur im Falle (1) *kann Y nicht kompakt sein* (vgl. [**18**; 1.28]).

(c) *Die Struktur von H* (wie in 2.5) *ist für die obigen Fälle in* [**5**; 3.4] *beschrieben; G is demnach dichte Untergruppe einer Gruppe mit der Struktur von H (alle dichte Untergruppen von H kommen in Frage).*

(d) *Daß alle Fälle in* (b) *tatsächlich auftreten, folgt aus den Beispielen in* [**5**; 3.5].

(*Bis jetzt war nur* (a) *und* (b) *bekannt* (vgl. [**18**; 1.7], [**10**], [**19**])).

Der Beweis folgt aus 2.5, 2.13.(1)–.(3), aus [**2**; 4.11] und aus [**5**; 3.4 und 3.5]. Was die Fußnote in [**18**; p. 182] anbetrifft, sei folgendes bemerkt: Falls der Fall 3.1.(b).(3) auftritt und es keinen Fixpunkt der Aktion gibt, ist G dichte Untergruppe von $H = G_1^* {}_k G_2$ (vgl. [**3**; 5.7]); da K offen in H ist, enthält G eine offene Untergruppe $Q = G \cap K$ und es gilt $G = \bigcup_s sQ$, wobei s den Elementen von H/K entspricht; falls ein Fixpunkt der Aktion existiert, gilt ein Analogon für $H = K_\alpha^*$ (vgl. [**3**; 5.7]), wobei $\alpha : K \to K$ ein injektiver Homomorphismus ist, und das ist charakteristisch für die Existenz eines Fixpunktes für den betrachtenden Fall [**5**].

Proposition 3.2. *Sei (G, Y) eine SFGS-Aktion und G entweder*

(1) *zusammenhängend oder*

(2) *abelsch;*

dann besteht $X^+ - X$ (vgl. 2.9) *höchstens aus 2 Punkten.*

Beweis. Falls (1) erfüllt ist, folgt die Behauptung aus [**22**; Kor. von Lemma 1] (vgl. auch [**2**; Satz A]). Nun sei (2) erfüllt; dann ist $H = \bar{G}$ abelsch; die Aktion (H, X^+) erfüllt die Voraussetzungen von [**2**; 4.11]; da in H die Links- mit den Rechts-Translationen übereinstimmen, läßt H die Grenzpunktmenge punktweise fix und die Behauptung folgt aus 2.5 und aus [**2**; 3.5].

(Es sei bemerkt, daß Y bzw. die Einpunktkompaktifizierung Y^∞ von Y eine 0-dimensionale Kompaktifizierung von X nach 3.1.(b) ist, also daß die Mächtigkeit $|Y - X|$ von $Y - X$ höchstens gleich jener von $X^+ - X$ ist; damit ist in der obigen Aussage auch [**10**; Cor. 3] enthalten.)

Proposition 3.3. *Sei $|X - X| = 2$ und $(G, Y = X^+)$ eine SFGS-Aktion; dann tritt genau eine der nachfolgenden Fälle auf:*

(a) $H_0 = (\bar{G})_0$ (: die Einskomponente von H aus 2.5) *ist nicht kompakt; dann gilt:*

(1) *$X \simeq \mathbf{R} \times C$, wobei C kompakt ist.*

(2) *H_0 ist zu $\mathbf{R} \times K$ isomorph, wobei K eine kompakte Gruppe ist.*

(3) *G ist* (irgendeine) *dichte Untergruppe eines semidirekten Produktes von $\mathbf{R}$ nach einer kompakten Gruppe.*

(b) *H_0 ist kompakt; dann ist G dichte Untergruppe einer Gruppe Γ*

wie folgt: *Γ enthält eine offene Untergruppe vom Index höchstens* 2, *die semidirektes Produkt einer kompakten Gruppe nach* $\mathbf{Z}$ *ist.*

Der Beweis folgt aus 2.5, aus [**23**; 3.1.(a) und 5.1] und aus [**22**; Kor. von Lemma 1].

SATZ 3.4. *Y (mit den betrachtenden Eigenschaften) läßt eine SFGS-Aktion einer zusammenhängenden Gruppe G genau dann zu, wenn $X \simeq \mathbf{R} \times Z$ und folgendes gilt: Entweder ist Z nicht kompakt und $Y \simeq X^{\infty}$* (3.2) *oder Z ist kompakt und es gilt entweder $Y^{\infty} = X^{+}$ oder $Y = X^{+} = X \cup \{a_1, a_2\}$.*

Der Beweis folgt aus 2.5 und aus [**22**; Satz und Kor. von Lemma 1].

BEMERKUNG 3.5. In 3.4 sei Z nicht kompakt; dann ist H eine zuszammenhängende, lokal kompakte Gruppe also als Raum zu $\mathbf{R}^n \times K$ homöomorph; in diesem Fall gilt $X \simeq \mathbf{R}^n \times S$ nach [**4**; 0.1].

PROPOSITION 3.6. *Sei (G, X) diskontinuierlich* (: Für jedes $x \in X$ existiert eine Umgebung U von x derart, daß $gU \cap U \neq \emptyset$ für $g \neq e$ (Einselement) gilt), *$X^{+} - X = \{a_1, a_2\}$ und die SFGS-Aktion (G, X^{+}) derart, daß $N(X^{+}) = X^{+} - X$ gilt. Dann ist G semidirektes Produkt $E \cdot \mathbf{Z}$ einer endlichen Gruppe E nach $\mathbf{Z}$ oder eine Erweiterung davon nach $\mathbf{Z}_2$. Falls G torsionsfrei ist, ist G zu $\mathbf{Z}$ isomorph* (vgl. [**9**; Th. 8]).

Beweis. Nach [**14**; Lemma 2] ist G diskontinuierlich im Sinne von [**15**: 1]. Andererseits ist leicht zu sehen, daß auch die Umkehrung davon gilt. Da $G \subset I_{d^*}(X)$ nach 2.3 gilt, sind die Voraussetzungen von [**15**; Lemma 3] erfüllt, folglich ist G diskret (es gilt auch die Umkehrung davon nach [**15**; Satz 3]). Daraus folgt $G = \bar{G}$ also G ist lokal kompakt und nicht kompakt, folglich ist hier 3.3 für G, statt H, anwendbar, woraus die erste Behauptung folgt. Nun sei G torsionsfrei; da $E \cdot \mathbf{Z}$ Untergruppe von G ist, gilt $E = \emptyset$ also $G = \mathbf{Z}$ oder $G/\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_2$; daraus und aus [**21**; Bew. von 5.2] folgt die letzte Behauptung.

BEMERKUNGEN 3.7. (a) Aus dem vorigen Beweis geht hervor, daß der Grund für Aussagen der Art von [**9**; Th. 8] eher in der Tatsache liegt, daß diskontinuierliche Gruppen auf X diskret sind.

(b) In diesem Paragraphen ist bis jetzt angedeutet worden, wie man den Charakterisierungssatz 2.5 anwenden kann, um Aussagen über *SFGS*-Aktionen zu gewinnen; damit dite Arbeit nicht unnötig länger wird, wird in dieser Richtung nur noch der Klassifizierungssatz im nächsten Paragraphen bewiesen.

4. Klassifizierung der SFGS-Aktionen, die eine GS-Aktion fortsetzen. In diesem Paragraphen wird folgende Frage behandelt: *Sei (G, X) eine GS-Aktion (Bezeichnung und Voraus-*

setzungen wie in 2.1); *welche sind alle SFGS-Aktionen* (G, Y) *mit* $N(Y) = Y - X$, *die die Aktion* (G, X) *fortsetzen?* Die Menge der Äquivalenzklassen dieser Aktionen sei mit $\mathfrak{K}(G, X)$ bezeichnet; die Menge derjenigen Klassen von ihnen, bei denen Y kompakt ist, sei mit $\mathfrak{C}(G, X)$ bezeichnet. Sei $U^+ = :\{B \subset X: \partial B$ ist kompakt$\}$ die in [**3**; 1] definierte Boolesche Algebra und $G(U^+)$ die Menge der G-stabilen Unteralgebren von U^+, die das Ideal R der relativ-kompakten Teilmengen von X enthalten; ferner sei $\mathfrak{M}(U)$ die Menge der maximalen Ideale der Unteralgebra U von U^+, die R enthalten (in U stimmen die Primideale mit den maximalen Idealen überein, vgl. auch [**7**; II, 4.3, Cor. 6]); schließlich sei $\mathfrak{A}(U) = :\{A \in U: A \subset X$ offen und $A \not\in R\}$. Mit dieser Bezeichnung gilt der nachfolgende

SATZ 4.1. (a) *Es gibt eine bijektive Zuordnung zwischen den Elementen von* $\mathfrak{C}(G, X)$ *und den Unteralgebren* U/R *mit Eins von* U^+/R *mit* $U \in G(U^+)$, *die die nachfolgende Eigenschaft haben*:

(E) *Es gibt* (mindenstens) *ein* $x_0 \in X$ *derart, daß* $Gx_0 \cap A \neq \emptyset$ *für jedes* $A \in \mathfrak{A}(U)$ *gilt. Der Raum* $Y = X_U$ *und damit die SFGS-Aktion* $(G, Y) \in \mathfrak{C}(G, X)$, *die der Algebra* U *wie oben entspricht, wird wie im Beweis von* [**3**; Satz 1.6] *konstruiert.*

(b) *Analog werden auch die Elemente von* $\mathfrak{K}(G, X) - \mathfrak{C}(G, X)$ *konstruiert*; *einem derartigen* (G, Y) *entspricht ein* $U \in G(U^+)$ *mit* $\mathfrak{M}(U) = \{I_1, I_2\}$, $GI_i = I_i$, $i = 1, 2$ *und* $Y = X \cup \{I_1\}$, *wobei* $(G, Y^\infty) \in \mathfrak{C}(G, X)$.

Beweis. Die Eigenschaft (E) garantiert, daß nur Grenzpunkte in $X_U - X$ (im Fall (a)) auftreten (vgl. Lemma in 2.12): Aus dem Beweis von [**3**; Satz 1.6] geht hervor, daß

(i) R_0 gleich dem Raum $\mathfrak{M}(U)$ mit der Zariski-Topologie [**7**; II, 4.3, Def. 4] ist, und

(ii) die Mengen der Gestalt $A^+ = : A \cup \{p \in \mathfrak{M}(U): A \not\in p\}$, $A \subset X$ offen, eine Umgebungsbasis von $p_0 \in R_0 = X_U - X$ mit $A \not\in p_0$ bilden.

Daraus folgt, daß ein $p \in R_0$ genau dann Grenzpunkt des Orbits Gx_0 ist, wenn $Gx_0 \cap A \neq \emptyset$ für jedes offene $A \subset X$ mit $A \not\in p$ gilt; aus $A \not\in p$ folgt natürlich $A \not\in R$ (und man kann leicht zeigen, daß die Aussagen "$A \in \mathfrak{A}(U)$" und "$A \subset X$ offen: es gibt $p \in \mathfrak{M}(U)$ mit $A \not\in p$" gleichwertig sind, woraus folgt, daß die Voraussetzung (E) nicht abgeschwächt werden kann); aus den Vorangegangenen folgt, daß $R_0 \subset \overline{Gx_0}$ eine Folgerung der Voraussetzung (E) ist; da (H, X) eigentlich ist und X die Voraussetzungen in [**2**] erfüllt, gilt $R_0 \subset \overline{Gx}$ für jedes $x \in X$ nach [**2**; 3.4]; da G dicht in H liegt, folgt daraus $R_0 \subset \overline{Gx}$ für jedes $x \in X$ wie behauptet.

Die Behauptung (a) ist nun folgendermaßen zu zeigen: Nach 2. läßt sich (G, X) genau dann zu einer Aktion (G, Y) fortsetzen, wenn (H, X)

sich zu einer Aktion (H, Y) fortsetzen läßt; die Behauptung (a) folgt aus dieser Bemerkung und aus dem nachfolgenden Lemma. Ebenfalls aus diesem Lemma und aus 2.13.(2).(i) folgt auch die Behauptung (b) und der Satz ist bewiesen.

LEMMA 4.2. *Sei (H,X) eine E-Aktion, wobei H (und daher X) nicht kompakt ist. Dann gibt es eine bijektive Zuordnung zwischen den 0-dimensionalen Kompaktifizierungen Y von X, auf die die Aktion (H,X) sich fortsetzen läßt, und den Unteralgebren U/R mit Eins von U^+/R, für die $U \in H(U^+)$ gilt* (Bezeichnung, auch im Beweis, wie in 4.1). *Alle Punkte von $Y - X$ sind genau dann Grenzpunkte, wenn* (E) *aus* 4.1 *gilt.*

Beweis. Sei (H,X) auf $X_U = Y$ fortsetzbar; dann gilt $H(Y-X) = Y-X$ also $\mathfrak{M}(U)$ ist H-invariant. Sei $u \in U$; dann gilt entweder $u \in p \in \mathfrak{M}(U)$ oder $1+u \in p \in \mathfrak{M}(U)$. Im ersten Fall gilt $h(u) \in h(p)$ für jedes $h \in H$ also $h(u) \in U$. Falls u in keinem $p \in M(U)$ enthalten ist, gilt $1+u \in p$ für jedes $p \in \mathfrak{M}(U)$ also $h(1+u) \in U$ und damit $h(u) = 1 + h(1+u) \in U$; daraus folgt $U \in H(U^+)$.

Umgekehrt sei $h(u) \in U$ für jedes $h \in H$ und $u \in U$. Für $v_1, v_2 \in p \in \mathfrak{M}(U)$ und $u \in U$ gilt:

$$h(v_1) \cdot u = h(v_1) \cdot h(h^{-1}(u)) = h(v_1 \cap h^{-1}(u)) = h(v_1 \cdot h^{-1}(u)) \in h(p)$$

und

$$\begin{aligned} h(v_1) + h(v_2) &= (h(v_1) \cup h(v_2)) - (h(v_1) \cap h(v_2)) \\ &= h((v_1 \cup v_2) - (v_1 \cap v_2)) \\ &= h(v_1 + v_2) \in h(p); \end{aligned}$$

daraus folgt, daß $h(p)$ ein Prinzipal- also ein Maximal-Ideal ist. Jedes $h: X \to X$ läßt sich also durch $p \mapsto h(p)$ fortsetzen; diese Fortsetzung ist stetig auf Grund der Definition der Topologie von X_U: Sei B wie in [**3**; S. 331, 1. und 2.] eine Umgebung von $h(p)$; dann gibt es ein $A^+ \subset B$ und $h^{-1}(A^+) = h^{-1}(A) \cup \{h^{-1}(p'): A \not\in p'\}$ ist eine Umgebung von p, die durch h innerhalb von B abgebbildet wird. Die fortgesetzten Abbildungen h definieren eine Aktion (H', X_U), deren Stetigkeit genau so zu zeigen ist, wie der Satz in [**2**; 3.2] bewiesen ist.

5. Die E-Aktionen aus der Sicht der SFGS-Aktionen. Die Vorangegangenen zeigen, daß die Theorie der E-Aktionen leicht zu neuen Sätzen in der Theorie der *SFGS*-Aktionen führen kann, allerdings unter stärkeren Voraussetzungen als diejenigen, die bis jetzt in der letzteren Theorie gemacht worden sind. Wegen ähnlich lautender Sätze in beider Theorien (vgl. [**2**; 3.6] und [**18**; 1.7]) fragt es sich, ob die Theorie der $SFGS$-Aktionen der Theorie der E-Aktionen helfen kann, die Voraussetzungen über den betreffenden Raum abzuschwächen. Bezüglich dieser Frage sei folgendes bemerkt:

Die meisten Hauptergebnisse der Theorie der E-Aktionen sind unter der nachfolgenden Voraussetzung erzielt worden:

(E_Z) *Der Raum X bei der E-Aktion (H, X) hat die Eigenschaft Z* (vgl. 2.).

Aug der anderen Seite sind die Hauptergebnisse in [**18**], z.B., unter der nachfolgenden Voraussetzung bewiesen:

(E_L) *Falls $t_n x_0 \to y \in Y - X$ für ein $x_0 \in X$ in der $SFGS$-Aktion (G, Y) gilt, dann gilt $t_n x \to y$ für jedes $x \in X$.*

(E_L) ist automatisch erfüllt, wenn X zusammenhängend ist [**18**; 1.5.(2)]. Eine Folgerung von (E_Z) ist folgende Aussage [**2**; 3.4]:

(E_A) *Falls $t_n x \to y \in Y - X$ für ein $x \in X$ gilt, gilt $t_n K \to y$ für jedes kompakte $K \subset X$.*

(Bemerkung: (E_A) und (E_L) sind gleichwertig in manchen wichtigen Fällen, z.B. wenn die Aktion eigentlich ist und X lokal zusammenhängend ist; vgl. auch [**13**; p. 223], [**9**; Th. 10], [**14**; Th. 3]).

Die Obigen zeigen, daß (E_L) schwächer als (E_Z) ist. Da (E_L), wie gesagt, automatisch für zusammenhängendes X erfüllt ist, könnte die Theorie der $SFGS$-Aktionen zur Theorie der E-Aktionen in der Richtung beitragen, die Voraussetzung (E_Z) durch die nachfolgende zu ersetzen:

(E_{GS}) *In der FE-Aktion (H, Y, X), in der H nicht kompakt ist, gibt es eine Metrik d auf Y derart, daß (H, X) eine $GS(d_X)$-Aktion ist.*

Für die nachfolgenden setzen wir als Ziel, den Satz [**2**; 3.6] mit schwächeren Voraussetzungen als (E_Z) zu beweisen. In diesem Fall soll Y (wie in [**2**; 3.6]) kompakt sein also (E_{GS}) ist entweder für jede oder für keine Metrik auf Y erfüllt. Bezüglich (E_{GS}) sei noch folgendes bemerkt: Die nach 2.8.1 auf X existierende H-invariante Metrik d', bezüglich deren (H, X) eine GS-Aktion ist, läßt sich nicht zu einer Metrik d auf Y fortsetzen: Da (H, X) uniform-$GS(d')$ ist, wäre (H, Y) uniform $GS(d)$ nach [**6**; X, 2.2, Prop. 4] und damit eigentlich nach 2.4.(a), was der Tatsache widerspricht, daß H nicht kompakt und Y kompakt ist. Daraus folgt auch, daß (H, X) eine $GS(d_X)$-Aktion für jede Metrik d auf Y sein kann, aber daß es sicherlich keine Metrik d auf Y derart gibt, daß H uniform $GS(d_X)$ auf X ist.

Nun sei (H, Y, X) eine FE-Aktion wie oben. Setzt man (E_{GS}), statt (E_Z), voraus, so erthält man folgendes:

(E_S) *Sei $t_n x_0 \to y \in Y - X$, wobei $x_0 \in X$; dann gilt $t_n x_n \to y$ für jede Folge $X \ni x_n \to x_0$.*

Beweis. Sei (E_S) nicht erfüllt; dann gibt es eine Teilfolge $\{t_m x_m, m \in \mathbf{N}\}$ von $\{t_n x_n, n \in \mathbf{N}\}$ mit $t_m x_m \to z \neq y$. Seien U, V abgeschlossene und disjunkte Umgebungen von y bzw. z; dann gilt $d(U, V) \neq 0$. Schließlich sei $0 < \epsilon < d(U, V)$; dann gibt es kein $\delta > 0$ derart, daß $d(hx_0, hx) < \epsilon$ für $d(x_0, x) < \delta$ gilt, d.h. (E_{GS}) ist verletzt.

Daraus folgt insbesondere, daß (E_S) schwächer als (E_{GS}) ist; darüber hinaus ist (E_S) schwächer als (E_Z): Sei $\hat{H}$ die in [**2**; 4.2] betrachtete Kompaktifizierung von H : Falls (E_Z) gilt, ist $\hat{\varphi} : \hat{H} \times X \to Y$ (wie in [**2**; 4.2]) stetig; andererseits ist (E_S) notwendig und hinreichend für die Stetigkeit von $\hat{\varphi}$, weil $H \subset I_{d'}(X)$ metrisierbar nach [**6**; X, 3.1, Cor.] ist.

Falls (E_S) erfüllt ist, sind die Rechts- bzw. Linkstranslationen von H derart auf $\hat{H}$ fortsetzbar, daß $\hat{H}$ eine Specker-Kompaktifizierung von H wird [**3**; 0.2, Beispiel 2]: Wegen der Stetigkeit von $\hat{\varphi}$ folgt diese Behauptung aus den Ausführungen in [**2**; S. 467]. Ist darüber hinaus H kompakt-erzeugt und besteht $Y - X$ ausschließlich aus Grenzpunkten, so folgt daraus und aus [**3**; Satz A], daß $\hat{H} - H$ und somit $Y - X = \hat{H} - H$ aus 1, 2 oder unendlich vielen Punkten besteht. (Die Voraussetzung, daß H kompakt erzeugt ist, ist wegen [**3**; Satz 7.8] gemacht; sie führt auch dazu, daß man die Ergebnisse der Paragraphen 3–5 in [**3**] zur Verfügung hat). Aus [**3**; Beispiel 5.2] folgt, daß $Y - X \simeq D$ gilt, falls $Y - X$ unendlich ist: Da der topologische Graph (bzw. der Raum der Realisierung davon), den man aus H nach dem Beispiel 5.2 in [**3**] enthält, lokal kompakt ist [**3**; Def. 2.2] und die Eigenschaft Z hat [**3**; 2.3], folgt die Behauptung aus [**2**; 4.11.4], denn $Y - X$ ist, in diesem Fall, perfekt, kompakt, total-unzusammenhängend und metrisierbar. Damit ist folgendes bewiesen:

SATZ 5.1. *Sei (H, Y, X) eine FE-Aktion wie oben, wobei H kompakt-erzeugt ist, $Y - X = R_0$ gilt und (E_S) erfüllt ist; dann besteht R_0 aus 1 oder 2 Punkten oder R ist dem Cantorschen Diskontinuum homöomorph. Wenn H zusammenhängend ist, besteht R_0 aus höchstens 2 Punkten.*

Die letzte Behauptung folgt aus [**3**; Satz 3.6] und aus [**3**; Beispiel 5.2]. Aus [**3**; Satz 4.5] bekommt man ein Analogon zu [**2**; 4.9]. Es scheint, daß man auf diese Weise noch mehr Resultate der Theorie der E-Aktionen beweisen kann, wenn man (E_Z) durch (E_S) ersetzt, aber darauf wird hier nich eingegangen. Auf jeden Fall scheint (nach den Ausführungen dieses Paragraphen) für die Theorie der E-Aktionen die Beantwortung der Frage interessant zu sein, ob (E_S) (oder vielleicht (E_{GS})) für jede FE-Aktion mit den gemachten sonstigen Voraussetzungen erfüllt ist, und wenn nicht unter welchen "vernünftigen" Voraussetzungen das der Fall ist.

Zum Schluß sei noch folgendes bemerkt: Die Voraussetzungen

(E_A), (E_L), (E_S) sind zwar schwächer als (E_Z) aber sie müssen für die jeweilige Aktion gestellt werden; (E_Z) dagegen ist eine Voraussetzung über den Raum X, die die Eigenschaften (E_A), (E_L), (E_S) als Folgerungen für jede E-Aktion einer lokal kompakten Gruppe auf X hat; so gesehen ist (E_Z) "ästhetisch" besser.

LITERATUR

1. H. Abels, *Über die Erzeugung von eigentlichen Transformationsgruppen*, Math. Z., **103** (1968), 333–357.
2. ———, *Enden von Räumen mit eigentlichen Transformationsgruppen*, Commentarii Math. Helv., **47** (1972), 457–473.
3. ———, *Specker-Kompaktifizierungen von lokal kompakten topologischen Gruppen*, Math. Z., **135** (1974), 325–361.
4. ———, *Parallelizability of proper actions, global K-slices and maximal compact subgroups*, Math. Annalen, **212** (1974), 1–19.
5. ———, *On a problem of Freudenthal*, to appear in Compositio Math.
6. N. Bourbaki, *General Topology, Part* 2, Hermann, Paris, 1966.
7. ———, *Commutative Algebra*, Hermann, Paris, 1972.
8. J. Dugundji, *Topology*, Allyn-Bacon, Boston, 1966.
9. P. F. Duvall and L. S. Husch, *Regular properly discontinuous* $\mathbf{Z}^n$*-actions on open mánifolds*, Illinois J. Math., **17** (1973), 290–300.
10. W. J. Gray and F. A. Roberson, *On the near equicontinuity of transformation groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **23** (1969), 59–63.
11. W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Univ. Press, 1948.
12. J. R. Isbell, *Uniform Spaces*, Math. Surveys No 12, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1964.
13. S. Kinoshita, *On quasitranslations in 3-space*, Topology of 3-Manifolds (Editor M. K. Fort jr.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
14. ———, *On a kind of discrete transformation groups*, Proc. Conf. Transformation Groups (Editor P. S. Mostert), Springer, Berlin, 1968, 451–456.
15. M. Koecher and W. Roelcke, *Diskontinuierliche und diskrete Gruppen von Isometrien metrischer Räume*, Math. Z., **71** (1959), 258–267.
16. J. L. Koszul, *Lectures on Groups of Transformations*, Tata Inst., Bombay, 1965.
17. P. F. Lam, *Equicontinuity and indivisibiliy in transformation groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **174** (1972), 399–424.
18. ———, *Almost equicontinuous transformation groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **195** (1974), 165–200.
19. F. A. Robertson, *A theorem on near equicontinuity of transformation groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **27** (1971), 189–191.
20. ———, *Some theorems on the structure of nearly equicontinuous transformation groups*, Canad. J. Math., **23** (1971), 421–425.
21. J. R. Stallings, *On torsion-free groups with infinitely many ends*, Ann. Math., **88** (1968), 312–334.
22. P. Strantzalos, *Dynamische Systeme und topologische Aktionen*, Manuscripta Math., **13** (1974), 207–211.
23. ———, *Kompaktheitseigenschaften der Gruppe der Isometrien metrischer Räume*, to appear.

Received February 6, 1976 and in revised form January 28, 1977.

48 BIELEFELD
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
KURT-SCHUMACHER-STR. 6
W. GERMANY