PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 75, No. 1, 1978

SUR LES SUITES D'INTERPOLATION EN PLUSIEURS VARIABLES

DENISE ET ERIC AMAR

We prove that there exists a sequence σ in the polydisc $\mathbf{D}^2$ of $\mathbf{C}^2$ (resp in the unit ball $\mathbf{B}_2$ of $\mathbf{C}^2$) such that σ is strongly $H^2(D^2)$ (resp. $H^2(\mathbf{B}^2)$) interpolating but not $H^\infty(\mathbf{D}^2)$ (resp. $H^\infty(\mathbf{B}_2)$) interpolating. These results are corollaries of a result of this kind for the Bergman class $A^2(D)$ of the unit disc.

1. Introduction et notations. Soit λ la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque unité $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$; on note $H^\infty(\mathbf{D})$ l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans $\mathbf{D}$ et $A^2(\mathbf{D})$ l'espace de Bergman des fonctions analytiques dans $\mathbf{D}$ telles que:

$$\int_{\mathbf{D}} |f(z)|^2 d\lambda(z) = \|f\|_2^2 < +\infty.$$

Soit $\sigma = \{z_n, n \in \mathbf{N}\}$ une suite dans $\mathbf{D}$, on dit que σ est fortement d'interpolation $A^2(\mathbf{D})$ si l'opérateur T_2 défini sur $A^2(\mathbf{D})$ dans l'espace des suites par

$$\forall f \in A^2(\mathbf{D}), \quad T_2 f = \{(1-|z_n|^2) f(z_n), \quad n \in \mathbf{N}\}$$

est continu et surjectif sur $l^2(\mathbf{N})$;

on dit que σ est d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D})$ si l'opérateur T_∞ de $H^\infty(\mathbf{D})$ dans l'espace des suites définit par:

$$\forall f \in H^\infty(\mathbf{D}), \quad T_\infty f = \{f(z_n), n \in \mathbf{N}\}$$

est surjectif sur $l^\infty(\mathbf{N})$.

Dans cette note on montre le

THEOREME 1. *Il existe une suite σ qui est fortement d'interpolation $A^2(\mathbf{D})$ mais qui n'est pas d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D})$.*

Ce résultat contraste avec la cas de la classe de Hardy $H^2(\mathbf{D})$ car on sait **[6]** que interpolation $H^2(\mathbf{D})$ entraîne interpolation $H^\infty(\mathbf{D})$.

Soit $d\mathcal{M}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le tore $\mathbf{T}^2 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2, |z| = |w| = 1\}$ (respectivement $d\mu$ la mesure de Lebesgue normalisée sur la sphère $S_2 = \partial \mathbf{B}_2 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1\}$) on note encore $H^\infty(\mathbf{D}^2)$ l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans le polydisque $\mathbf{D}^2$ et $H^2(\mathbf{S}^2)$ l'espace des fonctions analytiques f dans $\mathbf{D}^2$ telles que:

$$\sup_{r<1} \int_{\mathbf{T}^2} |f(rz, rw)|^2 \, dm(z, w) = \|f\|_2^2 < +\infty.$$

De même $H^\infty(\mathbf{B}_2)$ désignera l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans $\mathbf{B}_2 = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2; |z|^2 + |w|^2 < 1\}$ et $H^2(\mathbf{B}_2)$ l'espace des fonctions analytiques f dans $\mathbf{B}_2$ telles que

$$\sup_{r<1} \int_{S_2} |f(rz, rw)|^2 d\mu(z, w) = \|f\|_2^2 < +\infty.$$

Soit $\sigma = (\underline{z}_n, n \in \mathbf{N})$ une suite de $\mathbf{D}^2$ (resp. de $\mathbf{B}_2$) on dit que σ est d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D}^2)$ si l'opérateur T_∞: $\forall f \in H^\infty(\mathbf{D}^2)$, $T_\infty f = \{f(\underline{z}_n), n \in \mathbf{N}\}$ est surjectif sur $l^\infty(\mathbf{N})$ (de même pour $H^\infty(\mathbf{B}_2)$).

On dit que σ est fortement d'interpolation $H^2(\mathbf{D}^2)$ si l'opérateur

$$T_2\colon \forall f \in H^2(\mathbf{D}^2), \quad T_2 f = \{(1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{2}}(1 - |w_n|^2)^{\frac{1}{2}} f(\underline{z}_n), \ n \in \mathbf{N}\}$$

est surjectif et continu sur $l^2(\mathbf{N})$, avec $\underline{z}_n = (z_n, w_n)$.

De même σ est fortement d'interpolation pour $H^2(\mathbf{B}_2)$ si

$$T_2\colon \forall f \in H^2(\mathbf{B}_2), \ T_2 f = \{(1 - |\underline{z}_n|^2) f(\underline{z}_n), \ n \in \mathbf{N}\}$$

est surjectif et continu sur $l^2(\mathbf{N})$, ($\underline{z}_n = (z_n, w_n)$, $|\underline{z}_n|^2 = |z_n|^2 + |w_n|^2$).

Comme application du théorème 1, on montre alors:

THEOREME 2. *Il existe une suite σ dans $\mathbf{D}^2$ qui est fortement d'interpolation $H^2(\mathbf{D}^2)$ mais n'est pas d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D}^2)$.*

THEOREME 3. *Il existe une suite σ dans $\mathbf{B}_2$ qui est fortement d'interpolation $H^2(\mathbf{B}_2)$ mais n'est pas d'interpolation $H^\infty(\mathbf{B}_2)$.*

Une autre application du théorème 1 montre que le classique théorème de Pick–Nevanlinna **[4]** **[5]** ne se généralise pas du tout en plusieurs variables **[1]**.

2. Preuve du Théorème 1. On note $K_z(\zeta)$ le noyau de Cauchy–Bergman de $\mathbf{D}$ et $E_z(\zeta)$ ce noyau normalisé dans $A^2(\mathbf{D})$:

$$E_z(\zeta) = \frac{K_z(\zeta)}{\|K_z\|} = \frac{1-|z|^2}{(1-\bar{z}\zeta)^2}.$$

Dans **[2]**, on montre que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ $(z_n)\subset D$ est d'interpolation pour $A^2(\mathbf{D})$ si et seulement si l'opérateur S de $l^2(\mathbf{N})$ défini par la matrice $(\langle E_{z_n}, E_{z_k}\rangle)_{n,k}$ est bicontinu. Une suite d'interpolation de $H^\infty(D)$ est une suite d'interpolation pour $A^2(\mathbf{D})$ **[2]**.

(b) Construction d'une suite d'interpolation de $A^2(\mathbf{D})$ qui n'est pas d'interpolation pour $H^\infty(\mathbf{D})$.

Cette suite (σ) sera réunion de suites finies G_n de points situés sur un même cercle et équiréparties sur ce cercle

$$G_n = \left\{z_k\,;\,|z_k| = 1-2^{-g(n)},\quad \operatorname{Arg} z_k = \frac{2k\pi}{2^{g(n)}} \qquad 0 \leqq k < g(n)\right\}$$

où g est une fonction strictement croissante. G_n est la $n^{\text{ième}}$ génération de la suite σ au sens de Garnett **[3]**. $\sigma = \bigcup_n G_n$ *n'est pas une suite d'interpolation de* $H^\infty(D)$. En effet $\Sigma_{z_k\in G_n}(1-|z_k|) = 1$ d'où la suite $\Sigma_{z_i\in\sigma}(1-|z_i|)$ est divergente. Par construction, chaque génération est un ensemble d'interpolation de $A^2(\mathbf{D})$ pour une même constante C. On montre qu'on peut choisir la fonction g pour que σ soit d'interpolation pour $A^2(\mathbf{D})$.

DÉMONSTRATION. Soit S_p la matrice $(\langle E_{z_i}, E_{z_j}\rangle)_{ij}$, $z_i \in G_p$, $z_j \in G_p$. S_p est bicontinue et

$$\|S_p\| \leqq C^2$$
$$\|S_p^{-1}\| \leqq C^2.$$

On note T_n la matrice $(\langle E_{z_i}, E_{z_j}\rangle)_{ij}$, $z_i \in \bigcup_1^n G_p$, $z_j \in \bigcup_1^n G_p$. On démontre par récurrence que T_n est une matrice inversible. Supposons

$$\|T_n\| \leqq K_n^2 \quad \text{où} \quad C^2 \leqq K_n^2$$
$$\|T_n^{-1}\| \leqq K_n^2.$$

T_{n+1} est de la forme

$$\begin{pmatrix} T_n & G \\ G^* & S_{n+1} \end{pmatrix}$$

où G est la matrice $(\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle$, $z_k \in \bigcup_1^n G_j$, $z_p \in G_{n+1})$. Si $z_k \in G_j$, $z_p \in G_{n+1}$

$$|\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle| = \frac{(1-|z_k|^2)(1-|z_p|^2)}{|1-\bar{z}_k z_p|^2}$$

$$\leqq \frac{4\,2^{-g(j)-g(n+1)}}{[1-(1-2^{-g(j)})(1-2^{-g(n+1)})]^2}$$

$$\leqq 4\,2^{g(j)-g(n+1)}$$

$$|\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle|^2 \leqq 16\,2^{2g(j)-2g(n+1)}$$

$$\sum_{z_k\in G_j, z_p\in G_{n+1}} |\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle|^2 \leqq 16.2^{3g(j)-g(n+1)}$$

d'où

$$\sum_{z_k\in \cup_1^n G_j,\, z_p\in G_{n+1}} |\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle|^2 \leqq 16.2^{-g(n+1)}\left(\sum_1^n 2^{3g(j)}\right)$$

$$= \epsilon^2(n).$$

La fonction g sera choisie telle que:

$$\sum_n \epsilon(n) < \frac{1}{2C^2}.$$

La norme de Hilbert–Schmidt de la matrice G est inférieure à $\epsilon(n)$. Si $\lambda \in l^2(2^{g(1)}+2^{g(2)}+\cdots+2^{g(n)}+2^{g(n+1)})$ alors $\lambda = \mu + \nu$ oú:

$$\mu \in l^2(2^{g(1)}+\cdots+2^{g(n)}),\ \nu \in l^2(2^{g(n+1)})$$

$$\|\lambda\|^2 = \|\mu\|^2 + \|\nu\|^2$$

$$\|T_{n+1}\lambda\|^2 = \|T_n\mu + G\nu\|^2 + \|G^\infty\mu + S_{n+1}\nu\|^2$$

$$\|T_{n+1}\lambda\|^2 \leqq (K_n^2\|\mu\| + \epsilon(n)\|\nu\|)^2 + (C^2\|\nu\| + \epsilon(n)\|\mu\|)^2$$

$$\leqq [K_n^2 + \epsilon(n)]^2\|\lambda\|^2$$

de même

$$\|T_{n+1}(\lambda)\|^2 \geqq \left[\frac{1}{K_n^2} - \epsilon(n)\right]^2 \|\lambda\|^2.$$

La matrice T_{n+1} de $\cup_1^{n+1} G_p$ vérifie donc

$$\|T_{n+1}\| \leqq K_n^2 + \epsilon(n)$$

$$\|T_{n+1}^{-1}\| \leqq \frac{1}{\dfrac{1}{K_n^2} - \epsilon(n)}.$$

La matrice S de $\bigcup_n G_n$ vérifiera donc

$$\|S\| \leqq C^2 + \sum_n \epsilon(n) \leqq 2C^2$$

$$\|S^{-1}\| \leqq \frac{1}{\frac{1}{C^2} - \sum_n \epsilon(n)} \leqq 2C^2$$

d'où $\bigcup_n G_n$ est une suite d'interpolation pour $A^2(\mathbf{D})$.

3. Applications.

Preuve du Théorème 2. On considère la suite $\tilde{\sigma} = \{(z_n, z_n), n \in \mathbf{N}\}$ où $\sigma = \{z_n, n \in \mathbf{N}\}$ est la suite construite dans la preuve du Théorème 1; clairement, puisque σ n'est pas d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D})$, $\tilde{\sigma}$ n'est pas d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D}^2)$.

Si l'on note

$$e_{(z,w)}(\xi, \eta) = \frac{(1-|z|^2)^{1/2}(1-|w|^2)^{1/2}}{(1-\bar{z}\xi)(1-\bar{w}\eta)}$$

le noyau de Cauchy Szegö $\mathbf{D}^2$ normalisé dans $H^2(\mathbf{D}^2)$ on a facilement

$$\forall n, p \in \mathbf{N},\ \langle e_{(z_n,z_n)}, e_{(z_p,z_p)}\rangle = \langle E_{z_n}, E_{z_p}\rangle$$

donc les matrices $(\langle e_{(z_n,z_n)}, e_{(z_p,z_p)}\rangle,\ (n,p) \in \mathbf{N}^2)$ et $(\langle E_{z_n}, E_{z_p}\rangle,\ (n,p) \in \mathbf{N}^2)$ définissent le même opérateur sur $l^2(\mathbf{N})$.

On en déduit alors aisément que σ est fortement d'interpolation $H^2(\mathbf{D}^2)$.

Preuve du Théorème 3. On considère dans $\mathbf{B}_2$ la suite $\tilde{\tilde{\sigma}} = \{(z_n, 0), n \in \mathbf{N}\}$ et on remarque, comme ci-dessus que $\langle e_{(z_n,0)}, e_{(z_p,0)}\rangle = \langle E_{z_n}, E_{z_p}\rangle$ où ici $e_{(z_n,0)}$ désigne le noyau de Cauchy–Szegö normalisé dans $H^2(\mathbf{B}_2)$.

References

1. D. et E. Amar, *Sur les théorèmes de Schwarz–Pick et Nevanlinna dans C^n*, Preprint, Anal. Harm. Orsay, **167** (1975).

2. E. Amar, *Méthodes hilbertiennes et interpolation dans le spectre d'une algèbre de Banach*, Preprint Anal. Harm. Orsay, **152** (1975) et thèse (1977).

3. J. Garnett, *Interpolating sequences for bounded harmonic functions.* Indiana Univ. Math. J., **21** (1971).

4. R. Nevanlinna, *Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschnebene Werte aunehmen*, Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. A, **13** (1919), n. 1.
5. G. Pick, *Über die Beschränkungen analystischer Funktionen, welche durch vergegebene Funktionswerke bewirkt werden*, Math. Ann., **77** (1961), 7–23.
6. H. Shapiro, et A. L. Shields, *On some interpolation problems for analytic functions*, Amer. Math. Soc. Transl., **83** (1961).

Received January 28, 1976 and in revised form May 3, 1977.

UNIVERSITE PARIS XI
91405 ORSAY, FRANCE