PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 92, No. 1, 1981

NEW EXPLICIT FORMULAS FOR THE nTH DERIVATIVE OF COMPOSITE FUNCTIONS

PAVEL G. TODOROV

Dedicated to my mother

The paper consists of four sections, the first of which is an introduction to the problems and a survey of the results known. The second section develops and supplies some new proofs of the fundamental classic formulas deriving another explicit formula for the nth derivative of composite functions. The third section derives new explicit formulas for the nth Lie derivative, i. e., for the nth derivative of composite functions, defined implicitly by the parametric representation $w=g(t)$, $z=f(t)$ and, in particular, for the nth derivative of inverse functions. Compared to the classic formula of Lagrange, the Taylor coefficients of the parametrically given composite functions are here determined by new formulas as explicit functions of the Taylor coefficients of the two component functions. In particular, the respective explicit inverses in the famous class S of regular schlicht functions in the unit disk are found. Moreover, an explicit expression for the substitution of the higher derivatives in Legendre transformations has been given. The fourth section points out the conditions under which all result proved in the previous sections remain valid and are in the real domain. Also, it is noted that the corresponding results remain valid and are for the formal power series.

1. **Einleitung.** Seien die Funktion $w = \rho(z)$ im Gebiet G_z der Ebene z und die Funktion $z = f(t)$ im Gebiet G_t der Ebene t regulär, wobei $G_z = f(G_t)$, dann ist die zusammengesetzte Funktion $w = g(t)\colon = \rho(z)\circ f(t)$, wo die Operation $\circ$ die Substitution $z = f(t)$ bezeichnet, in G_t regulär und ihre erste Ableitung ist in jedem beliebigen Punkt $t \in G_t$ gleich

$$\frac{dw}{dt} = \rho'(z)f'(t)\ . \tag{1}$$

Dem Problem zum Finden expliziter Formeln der $n$te Ableitung $d^n w/dt^n (n \geqq 1)$ sind Abhandlungen vieler Autoren gewidmet. Seit langem ist bemerkt worden, dass bei aufeinanderfolgender Differentiation von (1) nach t durch Induktion folgende Formel für die $n$te Ableitung

$$\frac{d^n w}{dt^n} = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}(t)\,\frac{d^k w}{dz^k} \quad (n \geqq 1) \tag{2}$$

erhalten wird, wo die Koeffizienten A_{nk} nicht von der Funktion $\rho(z)$, sondern nur von der Funktion $f(t)$ abhängen, und die Rekursionsformel

$$
(3) \qquad \begin{aligned} &A_{n+1,k} = A_{n,k-1}f' + A'_{nk} \\ &\qquad (1 \leqq k \leqq n+1;\, n \geqq 1;\, A_{n0} = A_{n,n+1} \equiv 0;\, A_{11} = f') \end{aligned}
$$

erfüllen.

Genauer folgt aus (3) durch Induktion, dass die Koeffizienten A_{nk} homogene Polynome mit natürlichen Koeffizienten und vom Grad $k(1 \leqq k \leqq n)$ bezüglich der Ableitungen $f', f'', \cdots, f^{(n+k+1)}$ sind, mit Ausnahme des Koeffizienten A_{n1}, der ein solches Polynom nur von der Ableitung $f^{(n)}$ ist. Insbesondere sind der Anfangs- und Schlusskoeffizient entsprechend gleich

$$
(4) \qquad A_{n1} = f^{(n)},\ A_{nn} = (f')^n \quad (n \geqq 1)\,.
$$

Die Koeffizienten A_{nk} können entweder bei spezieller Wahl von $\rho(z)$ in (2) order von der Rekursionsformel (3) selbst, unabhängig von (2), bestimmt werden. Der erste Weg einer klassischen Wahl für $\rho(z)$ ist die Exponential-Funktion $\rho(z) = e^{az}$ (a-Konstante), mit der (2) sich in die Indentität

$$
(5) \qquad e^{-af}\frac{d^n}{dt^n}e^{af} = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}(t)a^k \quad (n \geqq 1)
$$

umwandelt. Hieraus wird ein expliziter kombinatorischer Ausdruck der Polynomen A_{nk} gefunden, der als Formel von Faà di Bruno [5, 6] bekannt ist. Anwendungen der Formel von Faà di Bruno und der Rekursionsformel (3) findet man in Ch. Jordan [10], S. 31-34, 195-199, 205-212 und Riordan [15, 16]. Die Polynome A_{nk} und überhaupt die Polynome der Ableitungen $f^{(k)}$ und $\rho^{(k)}$, $1 \leqq k \leqq n(n = 1, 2, \cdots)$, ausgedrückt von den rechten Teilen von (2), werden aufgrund seiner Arbeiten über ihre Anwendung Polynome von Bell genannt (Beispiele und Literatur siehe in [16], S. 34-49 und auch in der Monographie von Comtet [2], Chapter III, wo die Polynome von Bell systematisch betrachtet werden).

Ebenfalls dem ersten Weg folgend, ist eine andere klassische Wahl für $\rho(z)$ die Potenzfunktion (siehe z.B. Bertrand [1], S. 138-140): Wird in (2) ([1], S. 138) k mit $\nu(1 \leqq \nu \leqq n)$ vertauscht und $\rho(z) = z^k/k!$ $(1 \leqq k \leqq n)$ gesetzt, erhält man die Rekursionsformel ([1], S. 139):

$$
(6) \qquad \sum_{\nu=1}^{k} \frac{f^{k-\nu}}{(k-\nu)!}A_{n\nu} = \frac{1}{k!}\,\frac{d^n}{dt^n}f^k \quad (1 \leqq k \leqq n;\, n \geqq 1)\,,
$$

aus der durch eine nicht so einfache Induktion die sweite, klassische Formel ([1], S. 140) folgt:

$$(7) \qquad A_{nk} = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f^{k-\nu} \frac{d^n}{dt^n} f^{\nu} \quad (1 \leqq k \leqq n; n \geqq 1) .$$

Andere Literatur und Anwendungen der Formel (7) siehe in Gould ([7], S. 47-48). McKiernan ([12], Formel (9_n)) findet eine dritte explizite Form von A_{nk} durch Entwicklung der rechten Seite von (7), gemäss dem multinomialen Analogon der Formel von Leibniz. Diese dritte Form von A_{nk} ist auch von F. G. Kravchenko ([11], S. 76 unten) durch eine andere Methode (Matrixmethode) bei der Betrachtung des Problems der Umkehrung algebraischer Polynome erhalten worden.

Der zweite Weg ist bis heute nicht erforscht worden.

Weiterhin fand Pandres [14] eine Operator-Elementen-Determinante, die eine andere explizite Form der $n$ten Ableitung der allgemeineren zusammengesetzten Funktion $w = \rho(z_1, \cdots, z_m)$ ergibt, wo $z_j = f_j(t)(1 \leqq j \leqq m; m \geqq 1)$ ist. Analog fand Ivanoff [9] auch eine Darstellung der Formel von Faà di Bruno durch eine Operator-Elementen-Determinante.

Insbesondere für die $n$te Ableitung der Umkehrfunktion einer willkürlichen, schlichten Funktion ist durch verschiedene Methoden vieler Autoren (Bödewadt, Kamber, Ostrowski, Turowicz, Riordan und Comtet) eine kombinatorische Formel vom Typ der Formel von Faà di Bruno gefunden worden (die Bibliographie und Ausführungen siehe in [2], S. 150-151, [3], S. 458 und [13, 21]).

Schliesslich übertrug Stamm [17] den Gegenstand zum Beweis aller dieser Problems im Falle des differenzierbaren Abbildes in den Banachraum.

In den folgenden Paragraphen wird eine neue Theorie ausgearbeitet. (Man vergleiche auch die Mathematischen Enzyklopädie in Band II 1.1 auf Seite 87-88: Punkt 24, Teubner-Verlag, Leipzig, 1899). In § 2 geben wir bei gleichzeitiger Erforschung beider Wege eine Entwicklung und neue Beweise der klassischen Grundformeln für die $n$te Ableitung der zusammengesetzten Funktion, wobei noch eine explizite Formel für die Koeffizienten A_{nk} angegeben wird. In § 3 kehren wir die Formel (2) um und entdecken explizite Formeln für die $n$te Ableitung der parametrisch gegebenen, zusammengesetzten Funktion und insbeson, inbesondere dere für die der Umkehrfunktion mit Hilfe von Determinanten. Aus diesen Determinaten entstehen neue Darstellungen des linearen Differentialoperators von Lie der $n$ten Ordnung. Im Vergleich mit der klassischen Formel von Lagrange finden wir eine explizite Darstellung der Taylorschen Koeffizienten der parametrisch gegebenen, zusammengesetzten Funktion mit Hilfe von Determinanten, gebildet von den Taylorschen Koeffizienten beider Komponenten-Funktionen. Insbesondere erhalten wir mit Hilfe von

Determinanten auch die Umkehrung in der berühmten Klasse S der regulären und schlichten Funktionen im Einheitskreis. Ausserdem geben wir einen expliziten Ausdruck für die Auswechslung der höheren Ableitungen in der Transformation von Legendre. Zum Schluss weisen wir in § 4 auf die Bedingungen hin, bei denen alle festgestellten Resultate in den vorangegangenen Paragraphen auch im reellen Gebiet in Kraft bleiben. Die festgestellten Resultate gelten also auch, wenn alle betrachteten Potenzreihen nur asymptotisch sind.

2. Zu den expliziten Formeln für die *n*te Ableitung der zusammengesetzten Funktion. Die Formel (2) und die Rekursionsformeln (3) und (6) werden für alle $k = 1, 2, \cdots$ bei einer willkürlich, fixierten ganzen Zahl $n \geqq 1$ richtig sein, wenn man identisch

$$A_{nk} \equiv 0 \qquad (k \geqq n + 1;\ n \geqq 1) \tag{8}$$

setzt. Ausserdem sind die Rekursionsformeln (3) und (6) auch für alle Funktionen der Art $c + f$ richtig, wo c eine willkürliche komplexe Konstante ist, ohne dass wir die Komponente f in der gegebenen zusammengesetzten Funktion $g(t) = \rho(z) \circ f(t)$ verändern. Für (3) ist das offensichtlich, und für (6) folgt es aus (2) bei Wahl $\rho(z) = (c + z)^k/k!$ $(k \geqq 1;\ n \geqq 1)$. In diesem erweiterten Aspekt werden wir jetzt zeigen, dass auch der zweite Weg, d.h. auch das unabhängige Behandeln der Rekursionsformel (3) zur Lösung der Rekursionsformel (6) führt, dass andererseits die Konstante c die Möglichkeit gibt, sofort die Rekursionsformel (6) zu lösen und dadurch die Formel (7) zu erhalten, d.h. ohne den komplizierten Übergang durch Induktion von (6) zu (7) auszunutzen und dass man schliesslich die Formel (7) sofort aus der Identität (5), aus der die Formel von Faà di Bruno entstammt, erhält.

THEOREM 1. *Wenn die Funktionen $w = \rho(z)$ und $z = f(t)$ entsprechend in den Gebieten G_z und G_t regulär sind, wobei $G_z = f(G_t)$ ist, so wird die nte Ableitung der zusammengesetzten Funktion $w = g(t) = \rho(z) \circ f(t)$ in jedem beliebigen Punkt $t \in G_t$ durch die formale Reihe*

$$\frac{d^n w}{dt^n} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(t) \frac{d^k w}{dz^k} \qquad (n \geqq 1) \tag{9}$$

dargestellt, wo

$$A_{nk}(t) = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f^{k-\nu} \frac{d^n}{dt^n} f^{\nu} \qquad (k \geqq 1;\ n \geqq 1)\ , \tag{10}$$

wobei

$$\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}f^{k-\nu}\frac{d^n}{dt^n}f^{\nu}=0 \quad (k \geqq n+1;\, n \geqq 1) \tag{11}$$

identisch ist, d.h. bei beliebigen $k \geqq n+1$ *wird die Reihe* (9) *unterbrochen.*

Erster Beweis. Für willkürliche natürliche k und n findet man die neue Rekursionsformel

$$\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(c+f)^{k-\nu}}{(k-\nu)!}A_{n+1,\nu}=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(c+f)^{k-\nu}}{(k-\nu)!}A_{n\nu} \quad (k \geqq 1;\, n \geqq 1)\,, \tag{12}$$

indem man die Summe links in (12) mit Hilfe von (3) und (8) bildet. Aus (12) mit unmittelbarer Induktion bezüglich n erhalten wir die Rekursionsformel

$$\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(c+f)^{k-\nu}}{(k-\nu)!}A_{n\nu}=\frac{1}{k!}\frac{d^n}{dt^n}(c+f)^k \qquad (k \geqq 1;\, n \geqq 1)\,, \tag{13}$$

in Berücksichtigung, dass sie offensichtlich bei $n=1$ richtig ist, d.h. wir sind zum erweiterten Aspekt der Rekursionsformel (6) auch auf dem zweiten Wege gekommen.

Jetzt werden wir sofort die Rekursionsformel (13) mit Hilfe der eingeführten, willkürlichen Konstante c lösen. Sei in (13) $t=t_0$ gesetzt, wo t_0 ein willkürlich, fixierter Punkt des Gebietes G_t ist, und sei die Konstante $c=-f(t_0)$ gewählt. Dann verschwinden alle Summanden auf der linken Seite von (13) bei $\nu<k$ und die Summe reduziert sich auf den Summanden bei $\nu=k$, d. h. man erhält die Formel

$$A_{nk}(t_0)=\frac{1}{k!}D^n_{t=t_0}(f(t)-f(t_0))^k \qquad (k \geqq 1;\, n \geqq 1) \tag{14}$$

($D=d/dt$ bezeichnet den allgemeinen Differentialoperator), wo bei $k \geqq n+1$ ($n \geqq 1$) der rechte Teil identisch gleich Null, gemäss (8) ist. Wenn wir die Potenz nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln, erhalten wir die erweiterte Formel (10) mit den Identitäten (11), da t_0 ein willkürlicher Punkt von G_t ist. Folglich wird die Summe (2) durch die formale Reihe (9) dargestellt.

Zweiter Beweis. Es wird gezeigt werden, dass die Formel (10–11) auch sofort aus der Identität (5) erhalten wird, aus der die Formel von Faà di Bruno stammt. Tatsache ist, dass wenn man in (5) die Exponential-Funktionen $e^{\pm af}$ durch die entsprechenden Reihen darstellt, durch Umstellung der Summenzeichen der linke

Teil von (5) gleich wird

$$
\begin{aligned}
(15)\qquad e^{-af}\frac{d^n}{dt^n}e^{af} &= \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(af)^{\nu}}{\nu!}\,\frac{d^n}{dt^n}\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{(af)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}a^k\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^{\nu}\frac{f^{\nu}}{\nu!(k-\nu)!}\,\frac{d^n}{dt^n}f^{k-\nu} \quad (k \geqq 1;\, n \geqq 1)\,.
\end{aligned}
$$

Der Vergleich der Koeffizienten bei a^k in den rechten Teilen von (15) und (5) gibt die Formel (10-11), die in voller Übereinstimmung mit den Charakter des Theorems 1 ist.

Aus der Formel (14) geht folgendes für die Anwendungen nützliches Resultat hervor:

THEOREM 2. *Seien die Funktionen $w = \rho(z)$ und $z = f(t)$ in den Punkten z_0 und t_0 regulär, wobei $z_0 = f(t_0)$ und der Punkt t_0 eine s-fache ($s \geqq 1$) Nullstelle der Funktion $f(t) - f(t_0)$ ist. Dann haben wir fär die nte Ableitung der zusammengesetzten Funktion $g(t) = \rho(z)\circ f(t)$ im Punkt t_0 die Formeln*

$$(16)\qquad g^{(n)}(t_0) = 0 \qquad (1 \leqq n \leqq s-1;\, s \geqq 2)$$

und

$$(17)\qquad g^{(n)}(t_0) = \sum_{k=1}^{[n/s]}A_{nk}(t_0)\rho^{(k)}(z_0) \qquad (n \geqq s;\, s \geqq 1)\,,$$

wo $[n/s]$ der ganze Teil von n/s ist und die Koeffizienten $A_{nk}(t_0)$ von der Formel

$$(18)\qquad A_{nk}(t_0) = \frac{n!}{k!(n-k\sigma)!}D_{t=t_0}^{n-k\sigma}\left(\frac{f(t)-f(t_0)}{(t-t_0)^{\sigma}}\right)^k \qquad \left(1 \leqq k \leqq \left[\frac{n}{s}\right]\right)$$

bei willkürlicher Wahl von σ unter den ganzen Zahlen $\sigma = 0, 1, 2, \cdots, s$ gegeben werden.

Beweis. Gemmäss der Bedingung kann man

$$(19)\qquad f(t) - f(t_0) = (t-t_0)^s\psi(t)$$

schreiben, wo die Funktion $\psi(t)$ regulär in t_0 ist und $\psi(t_0) \neq 0$. Mit Hilfe von (19) und der Formel von Leibniz erhalten wir für die Ableitung in (14) bei $1 \leqq k \leqq n$ die Formel

$$(20)\qquad D_{t=t_0}^n(f(t)-f(t_0))^k = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}D_{t=t_0}^{n-\nu}\psi^k(t)D_{t=t_0}^{\nu}(t-t_0)^{ks}\,.$$

Möge $s > 1$ sein. Dann verschwinden bei $ks > n$ alle Glieder in der Summe (20), d.h. bei $k > n/s$ hat man $A_{nk}(t_0) = 0$. Hieraus folgt, dass man bei $n < s$ für alle $k = 1, 2, \cdots, n$ $A_{nk}(t_0) = 0$ hat, d.h.

gemäss (9) erhalten wir die Gleichheiten (16), und bei $n \geqq s$ können wir die Reihe (9) bei $k > n/s$ unterbrechen, woraus die Formel (17) folgt. Bei $ks \leqq n$ verschwinden alle Glieder in der Summe (20), wenn $\nu \neq ks$ ist, und man erhält die Formel

$$(21) \qquad D^n_{t=t_0}(f(t) - f(t_0))^k = (ks)! \binom{n}{ks} D^{n-ks}_{t=t_0}\psi^k(t) ,$$

die zusammen mit (17) auch bei $s = 1$ richtig bleibt. Tatsächlich ist bei $s = 1$ die Formel (17) offensichtlich richtig, und in der Summe (20) unterscheidet sich von Null nur das Glied bei $\nu = k$, das mit dem rechten Teil von (21) bei $s = 1$ zusammenfällt. Folglich erhalten wir bei $n \geqq s \geqq 1$ von (21), (19) und (14) die Formel

$$(22) \quad A_{nk}(t_0) = \frac{n!}{k!\,(n - ks)!} D^{n-ks}_{t=t_0}\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{(t - t_0)^s}\right)^k \qquad \left(1 \leqq k \leqq \left[\frac{n}{s}\right]\right),$$

die eine explizite Form der Koeffizienten in (17) gibt.

Jetzt werden wir die Formel (22) verallgemeinern. Möge σ eine willkürliche, ganze Zahl unter den Zahlen $0, 1, 2, \cdots, s$ $(s \geqq 1)$ sein. Dann erhalten wir, indem wir (19) mit $(t - t_0)^{-\sigma}$ multiplizieren und die Formel von Leibniz zum rechten Teil anwenden, bei $s \leqq ks \leqq n$ (k, n-positive ganze Zahlen), die Formel

$$(23) \qquad D^{n-k\sigma}_{t=t_0}\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{(t - t_0)^\sigma}\right)^k = \frac{(n - k\sigma)!}{(n - ks)!} D^{n-ks}_{t=t_0}\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{(t - t_0)^s}\right)^k .$$

Formel (23) erlaubt die Formel (22) mit der allgemeinen Formel (18) zu vertauschen, die bei den Anwendungen die Möglichkeit zur günstigsten Wahl von σ bietet.

Damit ist das Theorem 2 bewiesen.

Im folgenden § 3 entdecken wir explizite Formeln anderen Charakters.

3. Neue explizite Formeln fur die $n$te Ableitung der parametrisch gegebenen, zusammengesetzten Funktion. Möge die betrachtete, zusammengesetzte Funktion $w = g(t) = \rho(z)\circ f(t)$ in dem Theorem 1 eine schlichte Komponente $z = f(t)$ im Gebiet G_t haben. Bezeichnet man durch $t = h(z)$ ihre Umkehrfunktion, die im Gebiet $G_z = f(G_t)$ definiert ist, dann ist umgekehrt, die Funktion $w = \rho(z) = g(t)\circ h(z)$ im Gebiet G_z zusammengesetzt und stimmt in diesem Gebiet mit der Funktion überein, die parametrisch durch die beiden Funktionen $w = g(t)$ und $z = f(t)$ dargestellt wird. Für die $n$te Ableitung der parametrisch gegebenen, zusammengesetzten Funktion $w = \rho(z)$ ist nach Induktion die Formel von Pourchet bekannt (siehe [2], S. 220: Punkt 2):

$$\frac{d^n w}{dz^n} = \left(\frac{1}{f'}\frac{d}{dt}\right)^n g(t) \qquad (n \geqq 1)\,, \tag{24}$$

wo der rechte Teil die $(1/f')$-Ableitung von Lie der $n$ten Ordnung der Funktion g ist, die durch den Differentialoperator von Lie der $n$ten Ordnung

$$\left(\frac{1}{f'}\frac{d}{dt}\right)^n = \frac{1}{f'}\frac{d}{dt}\frac{1}{f'}\frac{d}{dt}\cdots\frac{1}{f'}\frac{d}{dt} \qquad (f' \neq 0;\, n \geqq 1)\,, \tag{25}$$

in dem jedes $1/f'$ und d/dt $n$mal geschrieben, erhalten ist. Durch Induktion wird bewiesen, dass der Operator (25) linear ist, d.h. eine Entwicklung nach den Potenzen $D, D^2, \cdots, D^n (D = d/dt)$ mit Koeffizienten, die nur von der Funktion $1/f'$ und ihren Ableitungen abhängen, hat:

$$\left(\frac{1}{f'}\frac{d}{dt}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} B_{nk}(t) D^k \qquad (n \geqq 1)\,, \tag{26}$$

wo die Koeffizienten B_{nk} die Rekursionsformel

$$\begin{gathered} B_{n+1,k} = \frac{1}{f'}(B'_{nk} + B_{n,k-1}) \\ (1 \leqq k \leqq n+1;\, n \geqq 1;\, B_{n0} = B_{n,n+1} \equiv 0;\, B_{11} = 1/f') \end{gathered} \tag{27}$$

erfüllen. Folglich hat die Formel von Pourchet (24) eine einzige, lineare Entwicklung nach den Ableitungen $g', g'', \cdots, g^{(n)}$:

$$\frac{d^n w}{dz^n} \equiv \left(\frac{1}{f'}\frac{d}{dt}\right)^n g(t) = \sum_{k=1}^{n} B_{nk}(t)\frac{d^k g}{dt^k} \qquad (n \geqq 1) \tag{28}$$

(Die Koeffizienten jeder anderen linearen Entwicklung der Ableitung von Lie (24) nach den Ableitungen $g', g'', \cdots, g^{(n)}$ sind identisch mit den entsprechenden Koeffizienten in (28). Dafür kann man sich durch den aufeinanderfolgenden Vergleich der beiden Entwicklungen bei $g(t) = t^s/s!$, $s = 1, 2, \cdots, n$ überzeugen). Eine explizite, kombinatorische Formel für die Koeffizienten $B_{nk}(t)$ ist von Comtet gefunden worden ([4], S. 166), mit deren Hilfe die Entwicklung (28) die entsprechende explizite Form erlangt. (Für Rechnung mit dem Operator von Lie, Beispiele und andere Literatur siehe die diesbezüglich zitierten Arbeiten von Comtet; im Falle $f(t) = \log t$ ist der Operator (25) ausführlich von Ch. Jordan [10], S. 195–199 betrachtet worden).

In diesem Paragraph kehren wir die Formel (9) um und entdecken neue, explizite Darstellungen der $n$te Ableitung der parametrisch gegebenen, susammengesetzten Funktion $w = \rho(z)$ oder desgleichen für die Ableitung und den Operator von Lie (24) und

(26) mit Hilfe von Determinanten. Das erste Resultat in dieser neuen Richtung ist folgendes:

THEOREM 3. *Es seien die Funktion* $w = g(t)$ *im Gebiet* G_t *regulär und die Funktion* $z = f(t)$ *und ihre Umkehrfunktion* $t = h(z)$ *regulär und schlicht entsprechend in den Gebieten* G_t *und* $G_z = f(G_t)$. *Dann wird die* n*te Ableitung* ($n \geqq 1$) *der parametrisch gegebenen, zusammengesetzten Funktion* $w = \rho(z) = g(t) \circ h(z)$ *in jedem beliebigen Punkt* $z \in G_z$ *in expliziter Form durch die Formel*

$$\frac{d^n w}{dz^n} = \frac{1}{\left(\dfrac{df}{dt}\right)^{\binom{n+1}{2}}} \begin{vmatrix} \dfrac{d}{dt}\dfrac{f}{1!} & \dfrac{d}{dt}\dfrac{f^2}{2!} & \cdots & \dfrac{d}{dt}\dfrac{f^{n-1}}{(n-1)!} & \dfrac{dg}{dt} \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{f}{1!} & \dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{f^2}{2!} & \cdots & \dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{f^{n-1}}{(n-1)!} & \dfrac{d^2 g}{dt^2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \dfrac{d^n}{dt^n}\dfrac{f}{1!} & \dfrac{d^n}{dt^n}\dfrac{f^2}{2!} & \cdots & \dfrac{d^n}{dt^n}\dfrac{f^{n-1}}{(n-1)!} & \dfrac{d^n g}{dt^n} \end{vmatrix} \tag{29}$$

dargestellt, wo für $n = 1$ *die Determinante gleich* dg/dt *angenommen wird, d.h. bei* $n \geqq 2$ *ist die Ableitung von Lie* (24) *mit Genauigkeit bis zum Faktor gleich der Wronskischen Determinante der* $n$ten *Ordnung für das System von Funktionen* $\{(d/dt)(f^k/k!),\ 1 \leqq k \leqq n-1,\ dg/dt\}$.

Beweis. Wenn man die Reihen abbricht, bilden die ersten Gleichheiten (9) ein Dreiecksystem von n Gleichungen bezüglich $d^k w/dz^k$, $1 \leqq k \leqq n$, dessen Determinante, unter Berücksichtigung der zweiten Formel von (4), gleich

$$\begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \left(\frac{df}{dt}\right)^{\binom{n+1}{2}} \qquad (n \geqq 1) \tag{30}$$

ist.

Dann drückt sich nach der Regel von Cramer die Ableitung $d^n w/dz^n$ durch folgende explizite Formel aus:

$$\frac{d^n w}{dz^n} \equiv \left(\frac{1}{f'}\frac{d}{dt}\right)^n g = \frac{\Delta_n}{\left(\dfrac{df}{dt}\right)^{\binom{n+1}{2}}} \qquad (n \geqq 1)\,, \tag{31}$$

wo Δ_a die Determinante der $n$ten Ordnung

$$(32) \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \cdots & 0 & \dfrac{dg}{dt} \\ A_{21} & A_{22} & 0 \cdots & 0 & \dfrac{d^2g}{dt^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \cdots & A_{n-1,n-1} & \dfrac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}} \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{n,n-1} & \dfrac{d^ng}{dt^n} \end{vmatrix}$$

ist, die man bei $n = 1$ gleich dg/dt annimmt. Bei $n = 2$ stimmt die Formel (31-32) auch mit (29) überein, wenn man (4) berücksichtigt. Bei $n \geqq 3$ transformiert sich die Determinante (32) mit Hilfe der folgenden Operation bei Ausnutzung der Formel (13) wie folgt: Wenn man der $k$ten Spalte $(2 \leqq k \leqq n - 1)$ jede νte Spalte $(1 \leqq \nu \leqq k-1)$, multipliziert entsprechend mit $f^{k-\nu}/(k - \nu)!$, hinzufügt, dann wird gemäss (13) bei $c = 0$ jedes $j$te Element $(1 \leqq j \leqq n)$ der $k$ten Spalte gleich $(d^j/dt^j)(f^k/k!)$. Wenn man aufeinanderfolgend $k = n - 1$, $n - 2, \cdots, 2$ nimmt, dann transformiert sich durch diese Operation die Determinante (32) in die Determinante der Formel (29).

Das Theorem 3 ist bewiesen.

Aus Theorem 3 geht eine explizite Darstellung des linearen Differentialoperators von Lie der $n$ten Ordnung (26) durch den rechten Teil von (29) hervor, wenn man die Ableitungen $g', g'', \cdots, g^{(n)}$ der letzten Spalte der Determinante durch $D, D^2, \cdots, D^n (D = d/dt)$ ersetzt. Die Koeffizienten B_{nk} werden hier durch das Produkt der algebraischen Komplemente der Elemente der letzten Spalte der Determinante in (29) und des vor ihr liegenden Faktors dargestellt.

Wenn man in Theorem 3 $w = g(t) = t$ setzt, dann erscheint $w = t \circ h(z) = h(z)$ als zusammengesetzte Funktion, d.h. die Umkehrung der Funktion $z = f(t)$, woraus man folgende Behauptung erhält:

THEOREM 4. *Sei die Funktion $z = f(t)$ regulär und schlicht im Gebiet G_t. Dann wird die $n$te Ableitung $(n \geqq 1)$ der Umkehrfunktion $t = h(z)$ in jedem beliebigen Punkt $z \in G_z = f(G_t)$ in expliziter Form durch die Formal*

$$(33) \qquad \frac{d^nt}{dz^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{\left(\dfrac{df}{dt}\right)^{\binom{n+1}{2}}} \begin{vmatrix} \dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{f}{1!} & \dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{f^2}{2!} & \cdots & \dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{f^{n-1}}{(n-1)!} \\ \dfrac{d^3}{dt^3}\dfrac{f}{1!} & \dfrac{d^3}{dt^3}\dfrac{f^2}{2!} & \cdots & \dfrac{d^3}{dt^3}\dfrac{f^{n-1}}{(n-1)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{d^n}{dt^n}\dfrac{f}{1!} & \dfrac{d^n}{dt^n}\dfrac{f^2}{2!} & \cdots & \dfrac{d^n}{dt^n}\dfrac{f^{n-1}}{(n-1)!} \end{vmatrix}$$

dargestellt, wo für $n = 1$ die Determinante durch 1 ersetzt wird, d.h. bei $n \geqq 2$ ist die $n$te *Ableitung der Funktion $t = h(z)$ mit Genauigkeit bis zum Faktor gleich der Wronskischen Determinante der* $(n-1)$ten *Ordnung für das System der Funktionen* $\{(d^2/dt^2) \times (f^k/k!),\ 1 \leqq k \leqq n-1\}$.

Die Operation im Beweis des Theorem 3, mit der die Determinante (32) in die Determinante von (29) umgewandelt wurde, ist unabhängig von der Bedingung für Schlichtheit von $f(t)$ und ist auch zur Determinante in (30) anwendbar. Bei $n \geqq 2$, indem dieselbe Operation mit der $k$ten Spalte $(2 \leqq k \leqq n)$ in (30) ausgeführt wird, erhält man folgende Formel:

THEOREM 5. *Die Wronskische Determinante für das System von Funktionen* $\{(d/dt)(f^k/k!),\ 1 \leqq k \leqq n\}(n = 1, 2, \cdots)$, *wo die Funktion $f(t)$ im Gebiet G_t regulär ist, ist identisch gleich*

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{d}{dt}\dfrac{f}{1!} & \dfrac{d}{dt}\dfrac{f^2}{2!} & \cdots & \dfrac{d}{dt}\dfrac{f^n}{n!} \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{f}{1!} & \dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{f^2}{2!} & \cdots & \dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{f^n}{n!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d^n}{dt^n}\dfrac{f}{1!} & \dfrac{d^n}{dt^n}\dfrac{f^2}{2!} & \cdots & \dfrac{d^n}{dt^n}\dfrac{f^n}{n!} \end{vmatrix} = \left(\frac{df}{dt}\right)^{\binom{n+1}{2}} .$$

Weiterhin zeigen wir, dass man aus der Determinante Δ_n in Formel (31-32) einen Faktor herausziehen kann, der ein exakter Teiler der Potenz von f' im Nenner ist. So entdecken wir folgende explizite Form der $n$ten Ableitung der parametrisch gegebenen, zusammengesetzten Funktion und damit auch der Ableitung von Lie (24):

THEOREM 6. *Wenn die Funktion $w = g(t)$ im Gebiet G_t regulär ist und die Funktion $z = f(t)$ und ihre Umkehrfunktion $t = h(z)$ regulär und schlicht entsprechend in den Gebieten G_t und $G_z = f(G_t)$ sind, dann hat die* $n$te *Ableitung der parametrisch gegebenen, zusammengesetzten Funktion $w = \rho(z) = g(t) \circ h(z)$ in jedem beliebigen Punkt $z \in G_z$ die explizite Form*

$$(35) \qquad \frac{d^n w}{dz^n} \equiv \left(\frac{1}{f'}\frac{d}{dt}\right)^n g = \frac{\delta_n}{(f')^{2n-1}} \qquad (n \geqq 1),$$

wo δ_n die Determinante der $n$ten *Ordnung*

$$(36)\qquad \delta_n = \begin{vmatrix} a_{11}(n)\dfrac{f'}{1!} & 0 & 0 \cdots 0 & \dfrac{g'}{0!} \\ a_{21}(n)\dfrac{f''}{2!} & a_{22}(n)\dfrac{f'}{1!} & 0 \cdots 0 & \dfrac{g''}{1!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1}(n)\dfrac{f^{(n-1)}}{(n-1)!} & a_{n-1,2}(n)\dfrac{f^{(n-2)}}{(n-2)!} & \cdots\ a_{n-1,n-1}(n)\dfrac{f'}{1!} & \dfrac{g^{(n-1)}}{(n-2)!} \\ a_{n1}(n)\dfrac{f^{(n)}}{n!} & a_{n2}(n)\dfrac{f^{(n-1)}}{(n-1)!} & \cdots\ a_{n,n-1}(n)\dfrac{f''}{2!} & \dfrac{g^{(n)}}{(n-1)!} \end{vmatrix}$$

ist, die für $n = 1$ gleich g' angenommen wird und in der bei $n \geqq 2$, die von null verschiedenen Elemente $a_{jk}(n)f^{(j-k+1)}/(j-k+1)!$ die Koeffizienten

$$(37)\qquad a_{jk}(n) = (j - k + 1)n - j \quad (1 \leqq k \leqq \min(j, n-1);\ 1 \leqq j \leqq n)$$

haben.

Die Potenz $(f')^{2n-1}$ im Nenner der Formel (35) *ist exakt.*

Beweis. Wenn in (10) die $(n-1)$te Ableitung des Produkts $f^{\nu-1}\cdot f'$ nach der Formel von Leibniz als Summe mit Indexzahl μ in den Grenzen $1 \leqq \mu \leqq n$ dargestellt ist, so erhält man nach Umstellung der beiden Summenzeichen und bei neuer Berücksichtigung der Formel (10-11) die Rekursionsformel

$$(38)\qquad A_{nk} = \sum_{\mu=k}^{n} \binom{n-1}{\mu-1} f^{(n-\mu+1)} A_{\mu-1,k-1} \quad (1 \leqq k \leqq n;\ n \geqq 1;\ A_{n0} = 0;\ A_{00} = 1)\ .$$

Die erhaltene Formel gibt die Möglichkeit, den Ausdruck des totalen Differentials dA_{nk} zu finden. Und tatsächlich erhält man aus (3) und (38) die Formel

$$(39)\qquad A'_{nk} = A_{n+1,k} - A_{n,k-1}f' = \sum_{\mu=k}^{n} \binom{n}{\mu-1} f^{(n-\mu+2)} A_{\mu-1,k-1}\ ,$$

woraus man, mit dt multiplizierend,

$$(40)\qquad dA_{nk} = \sum_{\mu=k}^{n} \binom{n}{\mu-1} A_{\mu-1,k-1}\, df^{(n-\mu+1)} \quad (1 \leqq k \leqq n;\ n \geqq 1;\ A_{n0} = 0;\ A_{00} = 1)$$

findet.

Nach (3) ist die gefundene Formel explizit unabhängig von t. Darum kann man in ihr Ableitungen $f^{(n-k+1)}, f^{(n-k)}, \cdots, f'$ als unabhängige Veränderliche betrachten und deren Differentiale $df^{(n-k+1)}, df^{(n-k)}, \cdots, df'$ als willkürlich, was für die partiellen Ableitungen von A_{nk} nach diesen Veränderlichen die Formeln

$$\frac{\partial A_{nk}}{\partial f^{(n-\mu+1)}} = \binom{n}{\mu-1} A_{\mu-1,k-1} \tag{41}$$
$$(k \leqq \mu \leqq n;\ 1 \leqq k \leqq n;\ n \geqq 1;\ A_{n0} = 0;\ A_{00} = 1)$$

ergibt.

Folglich hat die Identität von Euler für die homogenen Funktionen A_{nk} des $k$ten Grades die Form

$$kA_{nk} = \sum_{\mu=k}^{n} \binom{n}{\mu-1} f^{(n-\mu+1)} A_{\mu-1,k-1}\ (1 \leqq k \leqq n;\ n \geqq 1;\ A_{n0}=0;\ A_{00}=1)\ . \tag{42}$$

Mit den Bezeichnungen für die Polynome von Bell ist die Identität (42) ohne Beweis in [2], S. 136 als Relation [3k] vermerkt.

Wenn man jetzt in (38) und (42) n mit j vertauscht und sich auf $1 \leqq j \leqq n (n \geqq 2)$ und $1 \leqq k \leqq \min(j,\ n-1)$ begrenzt, erhält man nach Abziehen der Gleichheit (42) von der mit n multiplizierten Gleichheit (38), die für unsere Zwecke notwendige Formel

$$(n-k)A_{jk} = \sum_{\mu=k}^{j} a_{j\mu}(n) \frac{(j-1)!\ f^{(j-\mu+1)}}{(\mu-1)!\ (j-\mu+1)!} A_{\mu-1,k-1} \tag{43}$$
$$(1 \leqq k \leqq \min(j,\ n-1);\ 1 \leqq j \leqq n;\ n \geqq 2;\ A_{j0}=0,\ A_{00}=1)\ ,$$

wo

$$a_{j\mu}(n) = (j-\mu+1)n - j \quad (1 \leqq \mu \leqq j;\ 1 \leqq j \leqq n;\ n \geqq 2)\ , \tag{44}$$

gesetzt ist, wobei insbesondere $a_{nn}(n) = 0$, was für Folgendes besonders wichtig ist.

Jetzt, indem man weiter $n \geqq 2$ annimmt, wenden wir uns der Determinante Δ_n in (32) zu. Man bilde das Produkt $(n-1)!\ \Delta_n$, wobei man die Faktoren der Fakultät auf die ersten $n-1$ Spalten überträgt, so dass der Faktor $n-k$ die $k$te Spalte $(1 \leqq k \leqq n-1)$ multipliziert. Danach fügt man den Elementen jeder $k$ten Spalte $(1 \leqq k \leqq n-1)$ die mit $A_{n-1,k-1}(A_{n-1,0} = 0)$ multiplizierten entsprechenden Elemente $d^j g/dt^j (1 \leqq j \leqq n)$ der letzten Spalte hinzu, wodurch die Determinante $(n-1)!\ \Delta_n$ ihren Wert nicht verändert. Schliesslich multipliziert man die letzte Spalte selbst mit $A_{n-1,n-1}$ und dadurch wird die Determinante $(n-1)!\ \Delta_n$ mit diesem Faktor multipliziert. Die so transformierte Determinante bezeichnet man mit $\det[(n-1)!\ \Delta_n A_{n-1,n-1}]$, wobei ihr Wert $\det[(n-1)!\ \Delta_n A_{n-1,n-1}] = (n-1)!\ \Delta_n A_{n-1,n-1}$ ist. Jetzt wenden wir uns der Determinante δ_n in (36) zu. Mögen wir mit $\det[(n-1)!\ \delta_n]$ die Determinante bezeichnen, die von δ_n erhalten wird, indem man jede $j$te Zeile mit $(j-1)!\ (1 \leqq j \leqq n)$ multipliziert und jede μte Spalte durch $(\mu-1)!\ (1 \leqq \mu \leqq n-1)$ dividiert, wobei der Wert $\det[(n-1)!\ \delta_n] = (n-1)!\ \delta_n$ ist.

Bei dieser Stellung und aufgrund der Formel (43) geht hervor, dass die Determinante $\det[(n-1)!\ \Delta_n A_{n-1,n-1}]$ das Produkt, erhalten nach der Multiplikationsregel der $j$ten Zeile $(1 \leqq j \leqq n)$ der Determinante $\det[(n-1)!\ \delta_n]$ mit jeder $k$ten Spalte $(1 \leqq k \leqq n)$ der unteren Dreieckdeterminante $n$ter Ordnung

$$(45)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \cdots & A_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = (f')^{\binom{n-1}{2}} A_{n-1,n-1} \quad (n \geqq 2),$$

ist. Das ergibt sofort die Formel

$$(46)\qquad \Delta_n = \delta_n (f')^{\binom{n-1}{2}} \quad (n \geqq 1)\,,$$

offensichtlich auch richtig bei $n = 1$, indem man $\Delta_1 = g'$ und $\delta_1 = g'$ annimmt.

Jetzt, wenn man (46) in (31) einschliesst, erhält man die Formel (35-37).

Der Wert der Determinante $\delta_n (n \geqq 2)$ bei $f' = 0$, wo man die in ihr enthaltenen Ableitungen als unabhängige Veränderliche betrachtet, ist gleich $(-1)^{n+1} g' a_{21}(n) \cdots a_{n,n-1}(n)(f''/2)^{n-1}$, d.h. ist nicht identisch gleich von Null. Folglich ist f' kein Divisor von δ_n, d.h. die Potenz $(f')^{2n-1}$ im Nenner der Formel (35) ist exakt.

Damit ist das Theorem 6 vollkommen bewiesen.

BEMERKUNG 1. Die Koeffizienten $a_{jk}(n)$ aus (36-37) nehmen in jeder Diagonale, parallel zur Hauptdiagonale, mit 1 ab, da $a_{j+1,k+1}(n) = a_{jk}(n) - 1$. Folglich stellt man die Elemente in δ_n leicht auf, wenn man die Ausgangskoeffizienten $a_{j1}(n) = (n-1)j,\ 1 \leqq j \leqq n$ in der ersten Spalte vermerkt.

BEMERKUNG 2. Stellt man beide Ausdrücke für $d^{n+1}w/dz^{n+1}$ gleich, die man einmal aus (35) nach Austausch von n mit $n+1$ und ein zweites Mal durch Differenzieren nach z erhält, findet man, dass die Determinanten (36) die Rekursionsformel

$$(47)\qquad \delta_{n+1} = f'\delta_n' - (2n-1)f''\delta_n \qquad (n \geqq 1;\ \delta_1 = g')$$

erfüllen.

Aus Theorem 6 gehen eine Reihe Resultate mit fundamentaler Bedeutung hervor: Als erstes, wenn man in der letzten Spalte der Determinante (36) $D, D^2, \cdots, D^n (D = d/dt)$ statt $g', g'', \cdots, g(n)$ schreibt, ergibt die rechte Seite von (35) die folgende neue, explizite Form des linearen Differentialoperators von Lie der $n$ten Ordnung (26), wobei die Koeffizienten B_{nk} mit Hilfe der entsprechenden, algebraischen Komplemente ausgedrückt werden (in dieser Interpretation der Formel (35-36) wird die Rekursionsformel (47) in Kraft sein, wenn man $D\delta_n$ statt δ'_n schreibt und $\delta_1 = D$ setzt). Da $\lambda = 1/f'$ eine willkürliche, reguläre Funktion ist, die in den betrachteten Punkten nicht verschwindet, hat die soeben erhaltene explizite Form des linearen Differentialoperators von Lie der $n$ten Ordnung $(\lambda D)^n$ die allgemeinste Gültigkeit.

Weiterhin erhalten wir im Vergleich mit der weitbekannten klassischen Potenzreihe von Lagrange für die parametrisch gegebene, zusammengesetzte Funktion (siehe z.B. [2], S. 149-150: Theorem B), die folgende neue Darstellung:

THEOREM 7. *Es seien die Funktion $w = g(t)$ im Punkt t_0 regulär und die Funktion $z = f(t)$ und ihre Umkehrfunktion $t = h(z)$ entsprechend in den Punkten t_0 und $z_0 = f(t_0)$ regulär und schlicht, wobei man in der Umgebung von t_0 die Entwicklungen*

$$w = g(t) = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t - t_0)^n \,, \tag{48}$$

$$z = f(t) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t - t_0)^n \qquad (f_1 \neq 0) \tag{49}$$

hat.

Dann hat die parametrisch gegebene, zusammengesetzte Funktion $w = \rho(z) = g(t) \circ h(z)$, abhängig von z mittels der Werte der Funktion $t = h(z)$ aus irgendeinem Teilgebiet, t_0 enthaltend und eingeschlossen im gemeinsamen Teil der Konvergenzkreise der Reihen(48-49), *in der Umgebung von z_0 die Entwicklung*

$$w = \rho(z) = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n}{f_1^{2n-1}}(z - z_0)^n \,, \tag{50}$$

wo ρ_n die Determinante der $n$ten *Ordnung*

$$\rho_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11}(n)f_1 & 0 & 0 \cdots & 0 & g_1 \\ \alpha_{21}(n)f_2 & \alpha_{22}(n)f_1 & 0 \cdots & 0 & g_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1,1}(n)f_{n-1} & \alpha_{n-1,2}(n)f_{n-2} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1}(n)f_1 & g_{n-1} \\ \alpha_{n1}(n)f_n & \alpha_{n2}(n)f_{n-1} & \cdots & \alpha_{n,n-1}(n)f_2 & g_n \end{vmatrix} \tag{51}$$

ist, die für $n = 1$ gleich g_1 angenommen wird und in der bei $n \geqq 2$, die von null verschiedenen Elemente $\alpha_{jk}(n)f_{j-k+1}$ die Koeffizienten

$$\alpha_{jk}(n) = \frac{(j - k + 1)n}{j} - 1 \quad (1 \leqq k \leqq \min(j,\, n-1);\, 1 \leqq j \leqq n) \tag{52}$$

haben.

Die Potenz f_1^{2n-1} *im Nenner des allgemeinen Gliedes der Reihe* (50) *ist exakt.*

Bei $g(t) = t$ *ergibt das Theorem* 6:

THEOREM 8. *Wenn die Funktion* $z = f(t)$ *regulär und schlicht im Gebiet* G_t *ist, dann hat die* $n$te *Ableitung der Umkehrfunktion* $t = h(z)$ *in jedem beliebigen Punkt* $z \in G_z = f(G_t)$ *die explizite Form*

$$\begin{gathered}\frac{d^n t}{dz^n} \equiv \left(\frac{1}{f'}\frac{d}{dt}\right)^{n-1}\frac{1}{f'} = (-1)^{n-1}\frac{t_{n-1}}{(f')^{2n-1}} \\ \left(\left(\frac{1}{f'}\frac{d}{dt}\right)^0 = 1;\, n \geqq 1\right),\end{gathered} \tag{53}$$

wo t_{n-1} *die Determinante der* $(n-1)$*-ten Ordnung*

$$t_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{21}(n)\frac{f''}{2!} & a_{22}(n)\frac{f'}{1!} & 0 & 0 \cdots 0 \\ a_{31}(n)\frac{f'''}{3!} & a_{32}(n)\frac{f''}{2!} & a_{33}(n)\frac{f'}{1!} & 0 \cdots 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n-1,1}(n)\frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!} & a_{n-1,2}(n)\frac{f^{(n-2)}}{(n-2)!} & \cdots & a_{n-1,n-1}(n)\frac{f'}{1!} \\ a_{n1}(n)\frac{f^{(n)}}{n!} & a_{n2}(n)\frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!} & \cdots & a_{n,n-1}(n)\frac{f''}{2!} \end{vmatrix} \tag{54}$$

ist, die für $n = 1$ *durch* 1 *ersetzt wird und in der bei* $n \geqq 2$, *die von null verschiedenen Elemente* $a_{jk}(n)f^{(j-k+1)}/(j-k+1)!$ *die Koeffizienten*

$$a_{jk}(n) = (j-k+1)n - j \quad (1 \leqq k \leqq \min(j, n-1);\, 2 \leqq j \leqq n) \tag{55}$$

haben.

Die Potenz $(f')^{2n-1}$ *im Nenner der Formel* (53) *ist exakt.*

Wenn man in der Determinante (54) die Stellung von zwei gleichweit von den Enden entfernten Zeilen jeweils vertauscht und danach dasselbe auch mit den Spalten tut, erhält die Formel (53-55) eine andere Form. Diese transformierte Form der Formel (53-55) wurde von F. G. Kravchenko [11], S. 78 auf anderem Wege durch eine Matrixmethode erhalten, wenn die Funktion $z = f(t)$ ein algebraisches Polynom und die Funktion $t = h(z)$ ein regulärer und schlichter Zweig der algebraischen Funktion, umgekehrt vom Polynom, sind.

Im Vergleich mit der bekannten, klassischen Formel von Lagrange und der kombinatorischen Formel von Comtet für die

Umkehrung der Potenzreihen (siehe z. B. entsprechend in [2], S. 148: Theorem A und S. 150-151: Theorem E und auch in der Originalarbeit von Comtet [3], S. 458) ergeben unser Theorem 7 für $g(t) = t$ oder Theorem 8 folgendes

THEOREM 9. *Möge die Funktion $z = f(t)$ regulär und schlicht im Punkt t_0 sein und in seiner Umgebung die Entwicklung*

$$z = f(t) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t - t_0)^n \qquad (f_1 \neq 0) \tag{56}$$

haben.

Dann hat die Umkehrfunktion $t = h(z)$, regulär und schlicht im Punkt $z_0 = f(t_0)$, in seiner Umgebung die Entwicklung

$$t = h(z) = t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{h_{n-1}}{f_1^{2n-1}} (z - z_0)^n\,, \tag{57}$$

wo h_{n-1} die Determinante der $(n - 1)$ten *Ordnung*

$$h_{n-1} = \begin{vmatrix} \alpha_{21}(n)f_2 & \alpha_{22}(n)f_1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \alpha_{31}(n)f_3 & \alpha_{32}(n)f_2 & \alpha_{33}(n)f_1 & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1,1}(n)f_{n-1} & \alpha_{n-1,2}(n)f_{n-2} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1}(n)f_1 \\ \alpha_{n1}(n)f_n & \alpha_{n2}(n)f_{n-1} & \cdots & \alpha_{n,n-1}(n)f_2 \end{vmatrix} \tag{58}$$

ist, die für $n = 1$ durch 1 ersetz wird und in der bei $n \geqq 2$, die von null verschiedenen Elemente $\alpha_{jk}(n)f_{j-k+1}$ die Koeffizienten

$$\alpha_{jk}(n) = \frac{(j - k + 1)n}{j} - 1 \quad (1 \leqq k \leqq \min(j, n - 1);\, 2 \leqq j \leqq n) \tag{59}$$

haben.

Die Potenz f_1^{2n-1} im Nenner des allgemeinen Gliedes der Reihe (57) *ist exakt.*

Insbesondere ergibt das Theorem 9 die entsprechende Umkehrung in der berühmten Klasse S der regulären und schlichten Funktionen $z = f(t)$ im Kreis $|t| < 1 (t_0 = z_0 = 0, f_1 = 1)$.

Schliesslich gibt das Theorem 8 unmittelbar einen expliziten Ausdruck für die Auswechslung der höheren Ableitungen in der Transformation von Legendre:

THEOREM 10. *Sei die reguläre Funktion $w = \rho(z)$, die im Gebiet G_z eine schlichte Ableitung $\rho'(z)$ hat, nach der Transformation von Legendre*

$$t = w'_z,\ u = zw'_z - w \tag{60}$$

umgewandelt, wo die neue Funktion $u = \psi(t)$ *im Gebiet* $G_t = \rho'(G_z)$ *regulär ist.*

Dann hat die $n$te *Ableitung der Funktion* $w = \rho(z)$*, ausgedrückt durch die Ableitungen der Funktion* $u = \psi(t)$*, die explizite Form*

(61)
$$\frac{d^n w}{dz^n} \equiv \left(\frac{1}{u''}\frac{d}{dt}\right)^{n-2}\frac{1}{u''} = (-1)^{n-2}\frac{u_{n-2}}{(u'')^{2n-3}}$$
$$\left(\left(\frac{1}{u''}\frac{d}{dt}\right)^{0} = 1;\ n \geqq 2\right),$$

wo u_{n-2} *die Determinante der* $(n-2)$ten *Ordnung*

(62)
$$u_{n-2} = \begin{vmatrix} a_{21}(n-1)\frac{u'''}{2!} & a_{22}(n-1)\frac{u''}{1!} & 0 & 0 \cdots 0 \\ a_{31}(n-1)\frac{u'''}{3!} & a_{32}(n-1)\frac{u'''}{2!} & a_{33}(n-1)\frac{u''}{1!} & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2,1}(n-1)\frac{u^{(n-1)}}{(n-2)!} & a_{n-2,2}(n-1)\frac{u^{(n-2)}}{(n-3)!} & \cdots & a_{n-2,n-2}(u-1)\frac{u''}{1!} \\ a_{n-1,1}(n-1)\frac{u^{(n)}}{(n-1)!} & a_{n-1,2}(n-1)\frac{u^{(n-1)}}{(n-2)!} & \cdots & a_{n-1,n-2}(n-1)\frac{u'''}{2!} \end{vmatrix}$$

ist, die für $n = 2$ *durch* 1 *ersetzt wird und in der bei* $n \geqq 3$*, die von null verschiedenen Elemente* $a_{jk}(n-1)u^{(j-k+2)}/(j-k+1)!$ *die Koeffizienten*

(63)
$$a_{jk}(n-1) = (j-k+1)(n-1) - j \quad (1 \leqq k \leqq \min(j, n-2);\ 2 \leqq j \leqq n-1)$$

haben.

Die Potens $(u'')^{2n-3}$ *im Nenner der Formel* (61) *ist exakt.*

Beweis. Wie bekannt, ist die Transformation von Legendre invariabel bezüglich w und u, d. h. die inverse Transformation von u in w drückt sich durch die Formeln

(64)
$$z = u'_t, \quad w = tu'_t - u$$

aus, die aus (60) nach Differenzieren der zweiten Formel nach z folgen, unter Berücksichtigung, dass u von z mittels t abhängt und dass $\rho''(z) \neq 0$ wegen der Schlichtheit von $\rho'(z)$ ist. Folglich sind die Funktionen $t = w'_z$ und $z = u'_t$ zueinander invers. Wenn man die Formel (53-55) für die $(n-1)$te Ableitung $d^{n-1}t/dz^{n-1} = d^n w/dz^n$ anwendet, erhält man die Formel (61-63). Umgekehrt, wenn man (53-55) zu $d^{n-1}z/dt^{n-1} = d^n u/dt^n$ anwendet, erhält man eine explizite Formel für die $n$te Ableitung der Funktion u durch die Ableitungen der Funktion w (zu diesem Zweck genügt es, in (61–62) die Buchstaben w, z, u entsprechend mit den Buchastaben u, t, w zu vertauschen). Folglich drückt die Formel (61–63) die Auswechslung der Ableitungen im ersten Fall aus, und beim zweiten Fall gibt sie die Koeffizienten, mit Genauigkeit bis zum Faktor $1/n!$, der Taylorschen Entwicklung der Funktion u in der Umgebung des zu betrachtenden Punktes t an. Diese Entwicklung kann man unmittelbar analog der Formel (57–58) schreiben.

4. Schlussbemerkung. Alle Theoreme und Formeln in vorliegender Abhandlung bleiben auch für reelle Funktionen bei deren entsprechenden Bezeichnungen und Anforderungen richtig. So ist z. B. für Theorem 1 und Formel (14) die Anforderung nur für die Differenzierbarkeit in den betrachteten Punkten wenigstens n mal. Für die übrigen Theoreme sind noch entsprechende Anforderungen von einer nicht verschwindenden ersten (oder zweiten) Ableitung, eine Entwicklungsmöglichkeit in Potenzreihen usw. notwendig. Es sei darauf hingewiesen, dass die letztere Anforderung aus der Sicht der Theorie der formalen Potenzreihen nicht notwendig ist. Eine klare Darstellung dieses Sachverhaltes ist gegeben im Buche von Henrici [8], Chapter 1. Man vergleiche auch unsere Arbeiten [18–20].

LITERATURVERZEICHNIS

1. J. Bertrand, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* (*Première partie—Calcul différentiel*), Gauthier-Villars, Paris, 1864.
2. L. Comtet, *Advanced Combinatorics* (*The Art of Finite and Infinite Expansions*), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Holland/Boston-U.S.A. 1974.
3. ———, *Polynômes de Bell et formule explicite des dérivées successives d'une fonction implicite*, C. R. Acad. Sc. Paris, **267**-A (1968), 457-460.
4. ———, *Une formule explicite pour les puissances successives de l'operateur de dérivation de Lie*, C. R. Acad. Sc. Paris, **276**-A (1973), 165-168.
5. Faà di Bruno, *Sullo sviluppo delle funzioni*, Annali di Scienze Matematiche et Fisiche di Tortoloni, **6** (1855), 479-480.
6. ———, *Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel*, Quarterly J. Math., **1** (1857), 359-360.
7. H. Gould, *Explicit formulas for Bernoulli numbers*, Amer. Math. Monthly, **79** (1972), 44-51.
8. P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, ed. J. Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney-Toronto, Vol. 1, 1974.
9. V. F. Ivanoff, Problem 4782, Amer. Math. Monthly, **65** (1958), 212.
10. Charles Jordan, *Calculus of Finite Differencse*, 3rd ed., Chelsea Publishing Co., Inc., New York 1965, (repr. 1979).
11. F. G. Kravchenko, *Representations of roots of polynomial in the form of power series and infinite determinants*, Vychislitel'naya i prikladnaya matematika, Izdatel'stvo Kievskogo Universiteta, Kiev, No. **4** (1967), 70-89 (Russian: Summary in English).
12. M. McKiernan, *On the nth derivative of composite functions*, Amer. Math. Monthly, **63** (1956), 331-333.

13. A. M. Ostrowski, *Solution of Equations and Systems of Equations,* 2nd ed., Academic Press, New York, 1966.
14. D. Pandres, *On higher ordered differentiation,* Amer. Math. Monthly, **64** (1957), 566-572.
15. J. Riordan, *Derivatives of composite functions,* Bull. Amer. Math. Soc., **52** (1946), 664-667.
16. ———, *An Introduction to Combinatorial Analysis,* ed. J. Wiley and Sons, Inc., New York-London, 1958.
17. E. Stamm, *A Contribution to Differential Calculus in Banach Spaces: The Combinatorial Mechanisms of Higher Derivatives,* ed. Forschungsinstitut für Mathematik ETH Zürich and Department of Mathematics, University of Toronto, August, 1973.
18. P. G. Todorov, *New explicit formulas for the coefficients of p-symmetric functions,* Notices Amer. Math. Soc., **25** No. 6 (1978). A-592, Abstract 78T-B186.
19. ———, *New explicit formulas for the coefficients of p-symmetric functions,* Proc. Amer. Math. Soc., **77** No. 1 (1979), 81-86.
20. ———, *New explicit formulas for the* nth *derivative of composite functions,* Notices Amer. Math. Soc., **25**, No. 7 (1978), A-699, Abstract 78T-B199.
21. A. B. Turowicz, *Sur les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction inverse,* Colloquium Mathematicum, **7**, No. 1 (1959), 83-87.

Received February 28, 1979.

Current address: 20 Lenin Ave., 4002 Plovdiv, Bulgaria