PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 98, No. 2, 1982

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINEAIRES p-ADIQUES (II)

P. ROBBA

0. Introduction.

0.1. Dans des articles précédents ([8], [10], [13]) B. Dwork et l'auteur ont considéré des équations différentielles dont les coefficients étaient des éléments analytiques. L'idée essentielle était d'étudier le comportement de cette équation dans le disque générique. L'objet de cet article est d'étendre cette méthode au cas où les coefficients sont des fonctions algébriques.

0.2. De fait, un exemple utilisant de telles équations différentielles a été donné par Tate ([6], § 5) qui considérait la question suivante. Soit $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ λ constante. Existe-t-il une constante C (dépendant de λ) telle que l'équation

$$C\frac{dz}{dx} = z/y \tag{1}$$

ait une solution bornée dans le dique à l'infini $\{x, |x| > 1\}$? Cette formulation n'est pas tout à fait correcte car la variable x ne donne pas une bonne paramétrisation de la courbe elliptique à l'infini. Mais il résulte des résultats de cet article que le disque à l'infini ne joue aucun rôle particulier et la question est l'existence d'une solution de (1) qui est une fonction analytique dans une classe résiduelle. (Remarque: La réponse est oui si la courbe elliptique a une réduction non super singulière et dans ce cas C est n'importe quelle détermination de $\sqrt{-1}F(1/2, 1/2, 1; \lambda)$ vu comme élément algébrique.)

0.3. Nous n'avions pu obtenir de théorème de factorisation d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux qu'à condition de considérer des opérateurs à coefficients éléments analytiques. De même ici nous ne pourrons pas nous contenter d'opérateurs à coefficients fonctions algébriques, et il est naturel de considérer des opérateurs à coefficients éléments algébriques au sens de Christol [3].

0.4. En fait, sans effort supplémentaire, nos méthodes s'appliquent au cas où les coefficients sont des fonctions analytiques bornées.

Si u est une fonction analytique bornée dans une couronne $\varDelta$ de centre 0 et de rayon extérieur 1, nous lui associons la série formelle

$$\tau(u) = \sum_{n\geq 0} \frac{u^{(n)}}{n!} X^n . \tag{2}$$

La somme de cette série peut s'interpréter comme une fonction dans un disque de rayon 1 que nous appelons disque générique. De plus, l'application τ a de bonnes propriétés: c'est un isomorphisme d'anneau valué avec dérivation.

Utilisant cet isomorphisme, nous montrons qu'on peut transférer des informations concernant les solutions de l'opérateur différentiel, analytiques dans Δ, en des informations concernant les solutions de l'image par τ de l'opérateur, analytiques dans le disque générique et réciproquement.

Nous obtenons ainsi les théorèmes de comparaisons usuels et les règles de croissance des solutions.

0.5. Dans le cas où les coefficients sont des éléments algébriques, nous montrons que l'on peut définir un prolongement algébrique (multiforme) et cela nous permet de comparer les propriétés des solutions de l'opérateur dans différentes classes résiduelles.

0.6. Cet article est une continuation de l'article [10] commun avec B. Dwork. Je tiens à remercier B. Dwork pour les discussions que nous avons eu sur le présent article et qui m'ont beaucoup aidé. Je le remercie en particulier de m'avoir indiqué l'application de cette théorie à un résultat d'Ogus (cf. paragraphe 4.5).

Ces résultats ont été annoncés dans [14] et [15]. En particulier dans [14] on montre que les points fixes d'un opérateur de Frobenius sont des éléments algébriques et par conséquent les solutions bornées de systèmes différentiels possédant une structure de Frobenius fort [7] sont des éléments algébriques.

Liste des symboles ultilisés.

$\mathscr{A}_a^r$, $\mathscr{A}_a$	3.1	$\mathscr{M}$	4.1
$\mathscr{A}$	4.1	Ω_0, Ω	1.3.1
$D(a, r^+)$, $D(a, r^-)$	1.0	θ	1.3.1
$\mathscr{D}$	1.3.7	$\mathscr{R}_{E'}$, $\mathscr{R}_W$	3.2 et 4.1
Δ_r	1.1.1	t(point générique)	2.1 et 6.1
E_0, E, $\mathscr{E}$	1.2.1	τ	2.2
$\mathscr{E}_a$	6.5	τ_a	6.5
F_0	6.2	$\mathscr{U}$	1.1.2
F	3.2 et 6.2	$W(A)$, W, W', $\mathscr{W}$	1.1.1
F_A	7.1	W_a	6.5
$\mathscr{F}$	1.3.1	W_a^π, W_a^α	3.1
$\mathscr{F}_a$	6.5	sous-ensemble admissible	6.7
$H(A)$	1.2.1	ensemble standard	7.1

1. Germes de fonctions au bord d'un disque. Un germe de fonction analytique au bord du disque non circonférencié de centre a et de rayon R est une fonction analytique sur une couronne de centre a et de rayon extérieur R.

Nous considérons plusieurs sous-classes de telles fonctions. Ce qui importera par la suite sera que ces classes forment un corps de fonctions stable par dérivation et fermé pour une topologie que nous préciserons.

1.0. Soit K un corps valvé ultramétrique de caratéristique 0.

Si $f = \sum_{n \geqq 0} a_n (x-a)^n$ est une fonction analytique dans un disque de centre a et de rayon r de K, il est bien connu que, pour toute extension valuée complète L de K, f définit également une fonction analytique dans le disque de L de centre a et de rayon r. Dans la suite, nous considèrerons toujours que nos fonctions analytiques ont leurs coefficients dans K, mais sont définies dans une extension suffisamment grande $\tilde{K}$ de K, par exemple $\tilde{K}$ complet et algébriquement clos. En accord avec ce point de vue pour $a \in K$ et $r \in \boldsymbol{R}^+$, $D(a, r^+)$ et $D(a, r^-)$ désigneront les disques de centre a et de rayon r, respectivement circonférencié et non, de toute extension valuée complète L de K.

$$D(a, r^+) = \{x \in L, |x-a| \leqq r\}$$
$$D(a, r^-) = \{x \in L, |x-a| < r\} .$$

Si L est un corps, nous noterons L^{alg} la clôture algébrique de L.

Si A est un ensemble métrique, nous noterons A^c le complété de A.

1.1. *Germes de fonctions analytiques bornées.*

1.1.1. Si A est une couronne sur un disque de K, on notera $W(A)$ l'espace des fonctions analytiques bornées sur A à coefficients dans K.

Considérons la classe résiduelle $D(0, 1^-)$. On pose

$$\Delta_r = D(0, 1^-) - D(0, r^-), \ r \in]0, 1[.$$

On note W *l'espace des germes de fonctions analytiques bornées au bord* de $D(0, 1^-)$,

$$W = \lim_{r \to 1} \operatorname{ind} W(\Delta_r) .$$

On a:

$$W = \{f = \sum_n a_n x^n ; a_n \in K, \ \sup_n |a_n| < +\infty, \ \exists r \in]0, 1[\lim_{n \to -\infty} |a_n| r^n = 0\} .$$

Pour $f = \sum a_n x^n$ de W, on définit la norme frontière de f par la formule:

$$|f| = \sup_n |a_n| .$$

(Si $f \in W(\Delta_r)$ pour $r \geqq r_0$ et si l'on pose $\|f\|_{\Delta_r} = \sup_{x\in\Delta_r}|f(x)|$, on vérifie que $|f| = \lim_{r\to 1}\|f\|_{\Delta_r}$ ce qui justifie le nom de norme frontière.)

Cette norme sur W définit une valeur absolue sur l'anneau intègre W, et se prolonge sur W', le corps des fractions de W. Un élément de W' sera appelé un *germe de fonction méromorphe bornée au bord* de $D(0, 1^-)$. On notera $\mathscr{W}$ le complété de W'.

Remarquons que si la valuation de K est discrète, W est un corps.

Notons également que pour un élément u du complété W^c de W, on peut définir un développement en série de Laurent formel:

$$u = \sum_n a_n x^n ,$$

avec $\sup_n |a_n| < +\infty$ et $\lim_{n\to-\infty}|a_n| = 0$.

1.1.2. Comme les espaces $W(\Delta_r)$ sont stables par dérivation, W est également stable par dérivation. De plus, la dérivation D est continue pour la norme frontière et l'on a même: $\|D\| = 1$.

La dérivation s'étend de façon unique à W' et est continue sur W', donc s'étend à $\mathscr{W}$, et l'on a encore $\|D\| = 1$ sur $\mathscr{W}$.

On a, dans W, $\|D^m/m!\| = 1$, et ceci est encore vrai dans W'. (En effet, soit $u \in W'$, $u = f/g$, $f, g \in W$, on a:

$$\frac{D^m}{m!}f = \frac{D^m}{m!}(ug) = \sum_{i+j=m}\frac{D^i}{i!}u\frac{D^j}{j!}g ,$$

et par induction sur m, on montre que $|D^m u/m!| \leqq |u|$.)

Par continuité, on voit que l'on a encore $\|D^m/m!\| = 1$ dans $\mathscr{W}$.

1.1.3. On notera $\mathscr{U}$ le complété de la clôture algébrique $\mathscr{W}^{\mathrm{alg}}$ de $\mathscr{W}$ munie de l'unique valuation étendant celle de $\mathscr{W}$. La dérivation sur $\mathscr{W}$ s'étend de façon unique sur $\mathscr{W}^{\mathrm{alg}}$ mais n'est plus continue (par exemple si $u = (x)^{1/p^m}$, $K = \boldsymbol{Q}_p$, $|Du| = p^m|u|$). La dérivation ne s'étend donc pas à $\mathscr{U}$.

Notons que $\mathscr{U}$ définit de façon naturelle une extension valuée de K.

1.2. *Germes d'éléments analytiques.*

1.2.1. Le corps des fractions rationnelles à coefficients dans K,

$E_0 = K(x)$, s'identifie de façon canonique à un sous-corps de W. On notera E le complété de E_0 pour la norme frontière, E s'identifie à un sous-corps de W^c et donc de $\mathscr{U}$.

L'espace $H(\Delta_r)$ des éléments analytiques à coefficients dans K est le complété pour la topologie de la convergence uniforme sur Δ_r du sous-espace de E_0 formé des fractions rationnelles sans pôles dans Δ_r.

On note $\mathscr{E}$ *l'espace des germes de fonctions analytiques au bord de* $D(0, 1^-)$:

$$\mathscr{E} = \lim_{r\to 1} \operatorname{ind} H(\Delta_r) .$$

THÉORÈME 1.2.2 *$\mathscr{E}$ est un sous-corps de W, stable par dérivation, fermé dans W. $\mathscr{E}$ est la fermeture dans W de E_0 et l'on a: $\mathscr{E} = W \cap E$.*

Le seul résultat non trivial de ce théorème est que $\mathscr{E}$ est fermé dans W (ce qui équivaut à l'assertion $\mathscr{E} = W \cap E$ où W et E sont considérés comme des sousensembles de W^c). Cela a été démontré dans [10] (Proposition 2.6).

1.3. *Germes d'éléments algébriques.*

1.3.1. Notons Ω le complété de la clôture algébrique de E, muni de sa valuation canonique.

Nous considérerons la clôture algébrique de E_0, que nous noterons Ω_0, comme sous-corps de Ω muni de la valuation induite. Alors la fermeture Ω_0^c de Ω_0 dans Ω est un corps complet algébriquement clos contenant E, on a donc $\Omega_0^c = \Omega$, ce qui montre que Ω_0 est dense dans Ω. (Le plongement de Ω_0 dans Ω n'est pas canonique; nous supposons que nous avons choisi un plongement une fois pour toutes.)

On a vu que E se plongeait de façon canonique dans $\mathscr{U}$. Soit θ un morphisme de Ω dans $\mathscr{U}$ étendant ce plongement. Ce morphisme θ n'est pas unique, mais est défini à un élément de $\operatorname{Gal}(\Omega/E) = \operatorname{Gal}(E^{\text{alg}}/E)$ près, c'est-à-dire que les morphismes étendant le plongement de E dans $\mathscr{U}$ sont les morphismes $\theta' = \theta \circ \sigma$ avec $\sigma \in \operatorname{Gal}(\Omega/E)$.

Posons $\mathscr{F} = W \cap \theta(\Omega)$. Un élément de $\mathscr{F}$ sera appelé *germe d'élément algébrique au bord de* $D(0, 1^-)$.

Un élément algébrique sur la couronne Δ_r (resp. le disque $D(0, 1^-)$) sera un élément de $\mathscr{F} \cap W(\Delta_r)$ (resp. $\mathscr{F} \cap W(D(0, 1^-))$).

THÉORÈME 1.3.2. *$\mathscr{F}$ est sous-corps de W, stable par dérivation, fermé dans W et algébriquement clos dans W.*

La démonstration sera achevée au paragraphe 1.3.5.

1.3.3. *$\mathscr{F}$ est un corps fermé dans W, algébriquement clos dans W.*

Le fait que $\mathscr{F}$ est fermé dans W et algébriquement clos dans W est évident.

Comme $\theta(\Omega)$ est un corps et W est un anneau, $\mathscr{F}$ est également un anneau. Il nous reste à démontrer que si $u \in \mathscr{F}$, $1/u \in W$, ce qui équivaut à démontrer que u ne s'annule pas dans une couronne Δ_r (considérée comme sous-ensemble de $\tilde{K}$).

En multipliant u par un élément de K^{alg}, on peut se ramener au cas où $|u| = 1$ (en effet, le groupe des valeurs de Ω est le même que celui de K^{alg}). Il existe $v \in E^{\mathrm{alg}}$ tel que $u - \theta(v) < 1$. Alors $|v| = 1$. Soit

$$P(y) = y^m + a_1 y^{m-1} + \cdots + a_m \in E[y] ,$$

le polynôme minimal de v sur E. On a alors $|a_i| \leqq 1$ pour tout i, et $|a_m| = 1$. Choisissons, pour chaque i, $b_i \in E_0$ tel que $|b_i - a_i| < 1$. Soit

$$\eta = u^m + b_1 u^{m-1} + \cdots + b_m .$$

On a:

$$|\eta| \leqq \max\left(\left|\sum_i b_i(u^i - \theta(v)^i\right|, \left|\sum_i (b_i - a_i)v^i\right|, \left|\sum_1 a_i v^i\right|\right) = 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 .$$

u, $b_1, \cdots, b_m$, et donc η, sont dans Δ_r pour un certain r. On peut choisir r suffisamment proche de 1 pour que b_m ne s'annule pas dans Δ_r et même vérifie $\inf_{x \in \Delta_r} |b_m(x)| > 1 - \varepsilon/2$ (ce qui est possible car $b_m \in E_0 = K(x)$ et $|b_m| = 1$), et que $\|\eta\|_{\Delta_r} < 1 - \varepsilon/2$. Alors, $b_m - \eta$ ne s'annule pas dans Δ_r, donc u non plus, et $1/u \in W$.

LEMME 1.3.4. *On a $\mathscr{F} = W \cap (W^c \cap \theta(\Omega_0))^c$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathscr{F} = W \cap \theta(\Omega)$. Pour chaque $n \in N$, il existe $u_n \in \theta(\Omega_0)$ tel que $\|u - u_n\| \leqq 1/n$. Posons $d_n = d(u_n, \mathrm{conj}_E\, u_n)$ avec $\mathrm{conj}_E\, u_n =$ ensemble des conjugués de u_n par rapport à E, $d_n = 0$ si $u_n \in E$. D'après AX [2], il existe une constante universelle $k(>0)$ telle que:

$$d_n \geqq k(d(u_n, E)) .$$

(i) Supposons qu'il existe une infinité de n tels que: $|u - u_n| \geqq d_n$. Pour ces n, on a:

$$d(u, E) \leqq 1/nk ,$$

et donc, $u \in E \subset (W^c \cap \theta(\Omega_0))^c$.

(ii) Si (i) n'est pas satisfait, pour une infinité de n, $|u - u_n| < d_n$, et, d'après le lemme de Krasner ([1], Théorème 2.7.1):

$$u_n \in E(u) \subset \mathscr{F}^c \subset W^c .$$

Donc $u_n \in W^c \cap \theta(\Omega_0)$, et par suite $u \in (W^c \cap \theta(\Omega_0))^c$.

On a donc montré que $\mathscr{F} \subset W \cap (W^c \cap \theta(\Omega_0))^c$. Par ailleurs, il est évident que $(W^c \cap \theta(\Omega_0))^c \subset \theta(\Omega_0)^c = \theta(\Omega)$, et donc on a égalité.

1.3.5. *$\mathscr{F}$ est stable par dérivation.*

Il est clair que W est stable par dérivation. Par contre, ainsi que nous l'avons observé, si la dérivation s'étend à E^{alg}, elle ne se prolonge pas à Ω tout entier. Mais, en vertu du lemme 1.3.4., il suffit que montrer que $(W^c \cap \theta(\Omega_0))$ est stable par dérivation et son complété aussi, ce qui est évident.

EXEMPLE 1.3.6. Soit $K = \boldsymbol{Q}_p$. Si $a \in \boldsymbol{Z}_p$, il est bien connu que:

$$(1 + X)^a = \sum_{n \geq 0} \binom{a}{n} X^n$$

est analytique dans $D(0, 1^-)$. Si, de plus, $a \in \boldsymbol{Q}$, il est clair que $(1+X)^a \in \mathscr{F}$. Mais, si $a \notin \boldsymbol{Q}$, $(1+X)^a \notin \mathscr{F}$. En effet, si $(1+X)^a \in \mathscr{F}$, alors modulo p, $(1 + X)^a$ est solution d'une équation polynomiale à coefficients polynômes

$$\sum_{i=0}^{N} c_i(X)(1 + X)^{ai} = 0 , \quad \operatorname{mod} p\boldsymbol{Z}_p[[X]]$$

en développant les polynômes c_i suivant les puissances de $(1 + X)$, on obtient

$$\sum_{i,k} \lambda_{i,k}(1 + X)^{ai+k} = 0 , \quad \operatorname{mod} p\boldsymbol{Z}_p[[X]]$$

avec i, k entiers >0 et la somme étant finie, avec $\lambda_{i,k} \in \boldsymbol{Z}_p$, $\lambda_{i,k}$ non tous nuls modulo p.

Comme $a \notin \boldsymbol{Q}$, pour $(i, k) \neq (j, \ell) \in \boldsymbol{N}^2$, on a $ai + k \neq aj + \ell$. Or, il est bien connu que pour $a_1 \cdots a_n$ distincts de $\boldsymbol{Z}_p$, les séries formelles $(1 + X)^{a_i} \operatorname{mod} p$ sont linéairement indépendantes sur $\boldsymbol{F}_p$. En effet, soit $(1 + X)^{a_1} \cdots (1 + X)^{a_n}$ une famille minimale de séries linéairement dépendantes modulo p. Soit $D(m, p^{-k+})$ le disque engendré par $a_1 \cdots a_n$, avec $m \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{N}$. On a

$$\lambda_1(1 + X)^{a_1} + \cdots + \lambda_n(1 + X)^{a_n} = 0 \operatorname{mod} p \tag{1.3.6.1}$$

avec $|\lambda_i| = 1$ pour tout i. Soit $a_i = m + p^k b_i$. Tenant compte du fait que

$$(1+X)^{p^k b_i} = (1+X^{p^k})^{b_i} \bmod p\ ,$$

on voit que:

$$(1.3.6.2) \qquad \lambda_1(1+X)^{b_1} + \cdots + \lambda_n(1+X)^{b_n} = 0 \bmod p$$

où les b_i ne sont pas tous égaux modulo p. Par dérivation, on obtient:

$$(1.3.6.3) \qquad \lambda_1 b_1(1+X)^{b_1} + \cdots + \lambda_n b_n(1+X)^{b_n} = 0 \text{ modulo } p\ ;$$

et, en combinant (1.3.6.3) et (1.3.6.2), on obtient:

$$\lambda_2(b_1 - b_2)(1+X)^{b_2} + \cdots + \lambda_n(b_1 - b_n)(1+X)^{b_n} = 0 \bmod p$$

et les $\lambda_i(b_1 - b_i)$, $i = 2$ à n, ne sont pas tous nuls modulo p, ce qui contredit la minimalité de la famille $(1+X)^{a_1} \cdots (1+X)^{a_n}$.

1.3.7. Liens avec les travaux de Krasner et Christol. Dans [11], Krasner a introduit des éléments algébriques et un prolongement multiforme. Ses éléments algébriques sont des solutions d'équations polynomiales à coefficients éléments analytiques. Ici, nous considèrerons les limites "uniformes" de tels éléments algébriques ce qui nous permet d'avoir des propriétés de complétion utiles pour les applications. Par contre, avec notre définition, les élements analytiques ne sont définis que sur des couronnes où il est possible de choisir une détermination uniforme, donc nous excluons les points de branchement (ainsi nous refusons de considérer la "fonction" $\sqrt{X}$ dans une couronne $D(0, 1^-) - D(0, r^-)$), par contre pour Krasner, les éléments algébriques sont correctement définis sur des surfaces de Riemann.

Dans sa thèse [3], Christol a étudié en détail les limites uniformes de fonctions algébriques dans un disque ou encore avec la terminologie utilisée ici l'espace $\mathscr{D} = (\theta(\Omega_0) \cap W(D(0, 1^{-1})))^c$. (En fait, il ne considère que le cas $K = C_p$ et suppose que les coefficients de Taylor de ses fonctions algébriques engendrent un anneau à valuation discrète, hypothèse qui, semble-t-il, sera toujours vérifiée.)

Or soit $u \in \theta(\Omega_0) \cap W^c$ et soit $u = \sum a_n x^n$ son développement de Laurent formel. Nous pensons qu'alors la fonction $v = \sum_{n \geqq 0} a_n x^n$, analytique bornée dans $D(0, 1^-)$, est en fait un élément de $\mathscr{D}$. Si cette conjecture est vraie, alors la propriété est valable pour les $u \in \mathscr{F}$, ce qui montrerait que notre définition des germes d'éléments algébriques peut se ramener à la définition de Christol et nous permettrait d'utiliser sa caractérisation des éléments algébriques portant sur les coefficients de leur développement de Taylor.

Notons que notre définition plus générale (peut-être seulement en apparence) facilite la démonstration de certaines propriétés des éléments algébriques, mais l'étude fine faite par Christol lui permet d'obtenir des propriétés supplémentaires (stabilité par produit de Hadamard et par produit de Hurewicz, par exemple).

1.3.8. Le théorème suivant montre que les éléments algébriques s'introduisent naturellement lorsqu'on considère des fonctions inverses d'éléments algébriques. Nous verrons en annexe également que les éléments algébriques apparaissent en liaison avec une structure de Frobenius.

THÉORÈME (Krasner). *Soit f un élément analytique sur $D(a, r^-)$ réalisant une bijection de $D(a, r^-)$ sur $D(0, 1^-)$. Alors, la fonction inverse f^{-1} est un élément algébrique sur $D(0, 1^-)$.*

REMARQUE. Soit f, élément analytique sur $D(0, 1^-)$, réalisant une bijection de $D(0, 1^-)$ sur lui-même. On voit facilement que, par passage aux classes résiduelles, f définit une fraction rationnelle $\bar{f}$ sur $\bar{K}$. Alors, d'après Motzkin [12], f^{-1} est un élément analytique si, et seulement si, $\bar{f}$ est une homographie. (La nécessité est triviale puisque, si c'est le cas, $\bar{f}\overline{f^{-1}} = \overline{f^{-1}}\bar{f} = id$.)

Démonstration. Il est bien connu que f^{-1} est une fonction analytique bornée sur $D(0, 1^-)$. Il suffit de montrer que $f^{-1} \in \theta(\Omega)$.

Par un changement affine de variable, on peut se ramener au cas où f est défini sur $D(0, 1^-)$.

Il est clair que l'élément analytique f (défini originellement seulement sur le disque $D(0, 1^-)$ de K) s'étend en un élément analytique $\tilde{f}(y)$, à coefficients dans K, défini sur l'union des classes résiduelles de $\mathscr{U}$ qui sont transcendantes sur le corps résiduel de K, soit A cet ensemble. La fonction $\tilde{f}(y) - x$ (où $x \in \mathscr{U}$ désigne l'application identique de $D(0, 1^-)$ dans lui-même) est donc un élément analytique sur A à coefficients dans E_0, donc à coefficients dans E. Il résulte du lemme de Hensel que les zéros de $\tilde{f}(y) - x$ situés dans A sont algébriques sur E, donc appartiennent à $\theta(E^{\mathrm{alg}}) \subset \theta(\Omega)$.

Par définition, f^{-1}, considéré comme élément de $\mathscr{U}$, est un zéro de $\tilde{f}(y) - x$. Il reste donc à démontrer que $f^{-1} \in A$, ce qui est évident, car si $f^{-1}(x) = \sum a_n x^n$, $d(f, K^{\mathrm{alg}}) = \sup_{n \geqq 1} |a_n| = 1$.

EXEMPLE 1.3.9. Soit $\pi = p^{-1/(p-1)}$. La fonction $f(x) = (1/\pi)\log(1+\pi x)$ est un élément analytique dans $D(0, 1^-)$ (le rayon de convergence de son développement de Taylor en 0 est > 1), et réalise une bijection de $D(10, 1^-)$ sur $D(0, 1^-)$.

La fonction inverse, $f^{-1}(x) = (1/\pi)(\exp(\pi x) - 1)$, est donc un élément algébrique sur $D(0, 1^-)$.

La démonstration du Théorème 1.3.8 nous indique que la fonction $(1/\pi)\exp(\pi x)$ est solution d'un polynôme à coefficients dans E et effectivement elle est solution de l'équation $Y^p - \pi^p \exp(p\pi x) = 0$ et l'on a $\pi^p \exp(p\pi x)$ qui appartient à E. Ce résultat est classique et a déjà été utilisé pour obtenir des prolongements de l'exponentielle.

1.4. Nous rappelons ici quelques inclusions que nous utiliserons par la suite. A l'exception de W, qui est un anneau, tous les espaces indiqués sont des corps valués et les injections sont des morphismes de corps valués.

$$K \subset E_0 = K(x) \subset \mathscr{E} \subset \mathscr{F} \subset W \subset W' \subset \mathscr{W} = W'^c \subset \mathscr{U} = (\mathscr{W}^{\mathrm{alg}})^c$$
$$K \subset E_0 = K(x) \subset E = E_0^c \subset \Omega = (E^{\mathrm{alg}})^c .$$

2. Disque Générique. Représentation des germes de fonctions meromorphes bornées.

2.1. *Point générique. Disque générique.* L'application identique de $D(0, 1^-)$ dans lui-même est un élément de W donc de $\mathscr{W}$. Ce point de $\mathscr{W}$ sera appelé le point *générique* et sera noté t. Le disque $D(t, 1^-)$ de $\mathscr{W}$ sera appelé le *disque générique*.

2.2. *L'application* τ. Pour chaque $u \in \mathscr{W}$, on pose: $\tau(u) = \sum_{n \geq 0} (D^n u/n!)(Y - t)^n$. Comme $|D^n u/n!| \leq |u|$, la série $\tau(u)$ converge dans le disque générique et définit une fonction analytique bornée, à coefficients dans $\mathscr{W}$, dans le disque générique. De plus,

$$\| \tau u \|_{D(t,1^-)} = |u| .$$

Par ailleurs,

$$\tau(u') = \sum_{n \geq 0} \frac{D^{n+1}u}{n!}(Y - t)^n = \tau(u)' .$$

La formule de Leibnitz s'écrit:

$$\frac{D^n(uv)}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{D^j u}{j!} \frac{D^{n-j} v}{(n - j)!} ,$$

ce qui donne:

$$\tau(uv) = \tau(u)\tau(v) .$$

Enfin, il est évident que: $\tau(u + v) = \tau(u) + \tau(v)$. On a donc montré le théorème suivant.

THÉORÈME 2.3. *L'application τ définit un morphisme de corps valué avec dérivation de $\mathscr{W}$ dans l'anneau des fonctions analytiques bornées dans le disque générique.*

2.4. *Interprétation de l'application τ.* Pour les applications que nous avons en vue, n'importe quel point t de $\mathscr{W}$ pourrait jouer le rôle de point générique. Mais le choix particulier que nous avons fait nous donne une interprétation particulièrement intéressante de $\tau(u)$ lorsque u est un germe d'élément analytique au bord de $D(0, 1^-)$.

Si $u(x) = x$ est l'application identique de $D(0, 1^-)$ dans lui-même, on obtient d'après la définition, $\tau(u) = t + (Y - t) = Y$. Comme τ est un morphisme de corps on en déduit que, pour tout $u \in K(x) = E_0 \subset W$, on a $\tau(u) = u(Y)$. Observons que $u(Y)$ n'a pas de pôles dans le disque générique car l'image $\bar{t}$ de t dans le corps résiduel de $\mathscr{W}$ est transcendante sur $\bar{K}$ corps résiduel de K. Si $u \in \mathscr{E}$, d'après le Théorème 1.2.2, $u = \lim_n u_n$ avec $u_n \in E_0$, et comme l'application τ converse la valeur absolue, $\tau(u) = \lim_n \tau(u_n) = \lim_n u_n(Y)$ ce qui montre que $\tau(u)$ est le prolongement analytique (au sens de Krasner) de u dans le disque générique $pD(t, 1^-)$. On retrouve ainsi la définition originelle de Dwork [8].

Puisque E_0 s'identifie avec $\tau(E_0)$, E complété de E_0 pour la norme frontière, s'identifie avec $\tau(E)$, complété de $\tau(E_0)$ pour la norme de la convergence uniforme sur le disque générique. Dorénavant, nous noterons E l'espace $\tau(E)$ des éléments analytiques sur le disque générique à coefficients dans K.

3. Équations différentielles dans le disque générique.

3.1. Soit $\pi = (\pi_\nu)_{\nu \in N}$ une suite décroissante au sens large de nombres réels > 0 tels que $\pi_0 = 1$ et que $\pi_\nu/\pi_{\nu+1}$ soit croissante au sens large. On note W_a^π l'espace de Banach des germes de fonctions analytiques en a:

$$u = \sum_{\nu=0}^{+\infty} b_\nu (x - a)^\nu \in \mathscr{W}[[x - a]]$$

tels que

$$u\|_\pi = \sup_\nu \pi_\nu |b_\nu| < +\infty ,$$

muni de la norme $u \mapsto \| u \|_\pi$.

Lorsque π est la suite $\pi_\nu = 1/(\nu + 1)^\alpha$, $\alpha \geqq 0$, on écrit $W_a^\alpha = W_a^\pi (W_a^\alpha$ est l'espace des fonctions analytiques dans $D(a, 1^-)$ de croissance logarithmique d'ordre $\alpha)$. Il est clair que $W_a^0 = W(D(a, 1^-))$ est l'espace des fonctions analytiques bornées dans $D(a, 1^-)$.

Nous noterons $\mathscr{A}_a^r$ l'espace des fonctions analytiques dans le disque $D(a, r^-)$. On écrira $\mathscr{A}_a$ au bien de $\mathscr{A}_a^1$.

3.2. Soit E' un sous-corps de W_t^0 complet pour la norme de la convergence uniforme sur $D(t, 1^-)$ et stable par dérivation.

Ainsi E s'identifiant à la fermeture de $\tau(\mathscr{E})$ dans W_t^0 est un sous-corps fermé de W_t^0 stable par dérivation. Il en est de même pour $\tau(\mathscr{W})$ fermeture de $\tau(W')$. Il en est également de même pour F fermeture de $\tau(\mathscr{F})$ dans W_t^0.

Les propriétés établies antérieurement ([8], [10], [3]) sur les opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans E se généralisent sans peine aux opérateurs à coefficients dans E': il suffit dans les démonstrations de remplacer E par E'.

Notons $\mathscr{R}_{E'} = E'[D]$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans E'. Alors $\mathscr{R}_{E'}$ agit sur W_t^π avec la norme d'opérateur

$$\| \sum c_m D^m \|_\pi = \sup_m |c_m|_{E'}/\pi_m .$$

THÉORÈME 3.3. *Soit $L \in \mathscr{R}_{E'}$, soit R le générateur unitaire de la π-fermeture dans $\mathscr{R}_{E'}$ de l'idéal $\mathscr{R}_{E'}L$. Alors*:

$$\mathrm{Ker}_t R = W_t^\pi \cap \mathrm{Ker}\, L .$$

($\mathrm{Ker}_t R$ *désigne l'espace vectoriel des germes de fonctions analytiques en t, annihilées par R.*) (cf. [13], Theorem 2.6).

COROLLAIRE 3.4. *Si L est d'ordre n, alors*: $\mathscr{A}_t \cap \mathrm{Ker}\, L \subset W_t^{n-1}$. (Cf. [8], Theorem 2.)

4. Équations différentielles dans une couronne.

4.1. Nous noterons $\mathscr{A}$ l'espace des germes de fonctions analytiques au bord de $D(0, 1^-)$ à coefficients dans K, c'est-à-dire $\mathscr{A} = \lim \mathrm{ind}_{r\to 1} \mathscr{A}(\Delta_r)$, où $\mathscr{A}(\Delta_r)$ désigne l'espace des fonctions analytiques dans la couronne $\Delta_r = D(0, 1^-) - D(0, r^-)$.

Nous noterons $\mathscr{M}$ l'espace des germes de fonctions méromorphes au bord de $D(0, 1^-)$, c'est-à-dire le corps des fractions de $\mathscr{A}$.

Enfin, $\mathscr{R}_W = W[D]$ désignera l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans W.

Si $L = \sum c_m D^m \in \mathscr{R}_W$, nous poserons: ${}^\tau L = \sum \tau(c_m) D^m$ qui appartient à $\mathscr{R}_{E'}$, où E' désigne le complété de $\tau(W')$ dans W_t^0.

THÉORÈME 4.2. *Soit $L \in \mathscr{R}_W$. S'il existe $u \in \mathscr{M}$ annihilé par L, il existe $v \in W_t^0$ annihilé par ${}^\tau L$.* (cf. [13], Theorem 3.5).

LEMME 4.3. *Les éléments* $u_1, \cdots, u_n$ *de* W' *sont linéairement indépendants sur* K *si, et seulement si,* $\tau(u_1), \cdots, \tau(u_n)$ *sont linéairement indépendants sur* $\mathscr{W}$.

Démonstration. Si $u \in W'$ et $u' = 0$, alors $u \in K$, il en résulte de façon classique que $u_1, \cdots, u_n$ sont linéairement indépendants sur K si, et seulement si,

$$Wr(u_1, \cdots, u_n) = 0 ,$$

où Wr désigne le Wronskien.

De même, si $v \in W_t^0$ et $v' = 0$, alors $v \in \mathscr{W}$, et donc $\tau(u_1), \cdots, \tau(u_n)$ sont linéairement indépendants sur Ω si, et seulement si,

$$Wr(\tau(u_1), \cdots, \tau(u_n)) = 0 .$$

Mais, d'après le Théorème 2.3.,

$$\tau\, Wr(u_1, \cdots, u_n) = Wr(\tau(u_1), \cdots, \tau(u_n)) ,$$

ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 4.4. *Soit* $L \in \mathscr{R}_W$. *On a:*

$$\dim_K (\mathrm{Ker}\, L \cap W') \leqq \dim_{\mathscr{W}} (\mathrm{Ker}\, {}^{\tau}L \cap W_t^0) .$$

Démonstration. Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une base de $\mathrm{Ker}\, L \cap W'$. Alors $\tau(u_1), \cdots, \tau(u_n)$ sont visiblement des éléments de $\mathrm{Ker}\, {}^{\tau}L \cap W_t^0$, linéairement indépendants sur $\mathscr{W}$ d'après le Lemme 4.3.

4.3. *Application à un résultat d'Ogus.* Cette application m'a été indiquée par B. Dwork. Je n'ai pas de référence concernant la démonstration d'Ogus et j'ignore si l'idée de sa démonstration est similaire à l'idée utlisée ici; mais on verra que les notions que nous avons développées précédemment se prêtent naturellement à la résolution du problème posé.

Rappelons (Cf. § 1.1.1) qu'un élément u du complété W^c de W est tel que

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n X^n$$

avec $\sup_n |a_n| < +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Par ailleurs une fonction analytique v bornée dans le disque $D(0, 1^-)$ $(v \in W(D(0, 1^-)) = W_0^0)$ est de la forme $v = \sum_{n\geqq 0} a_n X^n$ avec $\sup_n |a_n| < +\infty$

Considérons le système

$$(*) \qquad Y' = AY$$

où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et A est une $n \times n$ matrice à coefficients dans W_0^0.

Conjecture. Toute solution de $(*)$ dans $(W^c)^n$ appartient à $(W_0^0)^n$.

Cette conjecture a été démontrée par Ogus lorsque le système $(*)$ possède une famille complète de solutions. On a précisément

THEOREME. (Ogus) *Si le système $(*)$ possède n solutions linéairement indépendantes dans $(W^c)^n$, alors ces solutions sont dans $(W_0^0)^n$.*

Démonstration. Soient $Y_1 \cdots Y_n$ ces solutions. Alors comme dans lé théorème 4.4 on voit que $\tau(Y_0) \cdots \tau(Y_n)$ sont n solutions de $(*)$ analytiques bornées dans le disque générique (c'est-à-dire appartenant à W_t^0). Comme le système $(*)$ n'a pas de points singuliers dans le disque $D(0, 1^-)$, on peut, par une méthode standard (Cf. Transfer principle [8] Theorem 3), déduire de l'existence d'une famille complète de solutions bornées dans le disque générique que toutes les solutions formelles de $(*)$ au voisinage de 0 sont des fonctions analytiques bornées dans $D(0, 1^-)$.

5. Équations différentielles dans une couronne (suite).

5.1. Nous avons regroupé dans ce paragraphe les résultats pour lesquels nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire sur les coefficients de l'opérateur L.

Nous supposerons que $L \in \mathscr{R}_W$ vérifie la condition suivante:

$(*)$ Il existe un sous-corps V de W stable par dérivation, tel que les coefficients de L appartiennent à V.
Remarquons que si $u \in W$, alors $1/u \in W$ si, et seulement si, u n'a qu'un nombre fini de zéros dans une couronne $\Delta_r = D(0, 1^-) - D(0, r^-)$, où u est défini.

Par exemple, l'espace $\mathscr{F}$ des germes de fonctions algébriques au bord de $D(0, 1^-)$ est un sous-corps de W stable par dérivation.

Si la valuation de K est discrète, W est un corps, et donc la condition $(*)$ est toujours vérifiée.

5.2. Dans certains cas, nous allons demander au sous-corps V d'être de plus fermé dans W. Cette dernière hypothèse est innocente comme le montre le lemme suivant.

LEMME. *Si V est un sous-corps de W, stable par dérivation, son adhérence dans W est un sous-corps stable par dérivation.*

Démonstration. Comme W est un anneau stable par dérivation et que la dérivation est continue, il est clair que $\bar{V}$, adhérence de V dans W, est un anneau stable par dérivation. Pour montrer que $\bar{V}$ est un corps, il suffit de montrer que, pour tout $v \neq 0$ de $\bar{V}$, $1/v \in \bar{V}$, et pour cela il suffit de montrer que $1/v \in W$. Cette dernière assertion équivaut à dire que, pour un $r \in]0, 1[$, v est analytique dans la couronne $\Delta_r = D(0, 1^-) - D(0, r^-)$ et ne s'y annule pas (on considère v comme défini sur la clôture algébrique K^{alg} de K).

Or, si $v \neq 0$ appartient à $\bar{V}$, il existe $u \in V$ tel que $|u - v| < |v|/2$. On peut choisir r suffisamment voisin de 1 pour que u et v soient analytiques sur Δ_r et que, pour tout $\rho \in (r, 1)$, on ait:

$$|u|_0(\rho) = |v|_0(\rho) > 2|v|/3 \quad \text{et} \quad |u - v|_0(\rho) < 2|v|/3$$

(on utilise la continuité de la fonction de valuation). De plus, comme V est un corps, $1/u \in W$, et donc on peut choisir r assez voisin de 1 pour que u ne s'annule pas dans Δ_r. On a alors, pour tout $x \in \Delta_r$:

$$|u(x)| = |u|_0(|x|) > 2|v|/3 > |u - v|_0(|x|) \geqq |u(x) - v(x)| ,$$

et ceci montre que v ne s'annule pas non plus dans Δ_r, ce qui achève la démonstration du lemme.

5.3. *Equations différentielles non linéaires.*

5.3.1. Nous nous proposons de généraliser les résultats de [10], § 3 concernant les solutions $u \in E^s$ d'un système de s équations différentielles non linéaires à s inconnues à coefficients éléments analytiques sur un ensemble "standard" A. Les résultats obtenus étaient de deux types.

(a) Si A est une couronne $\Delta_r = D(0, 1^-) - D(0, r^-)$, $r \in]0, 1[$, on montre que u se prolonge analytiquement sur une couronne $\Delta_{r'}$, $r \leqq r' < 1$.

(b) Si A est une union de classes résiduelles, on montre que u se prolonge analytiquement dans toutes ces classes sauf au plus un nombre fini.

Ce que nous allons faire ici c'est généraliser le résultat (a) au cas où les coefficients sont des fonctions analytiques bornées sur une couronne Δ_r. Comme il n'y a pas moyen d'associer entre elles les fonctions analytiques bornées dans deux classes résiduelles distinctes, il est clair que le résultat (b) est dénué de signification dans ce contexte. Mais dans le cas des coefficients éléments algébriques, le prolongement algébrique (§ 6) nous permettra d'associer les éléments algébriques dans deux classes résiduelles distinctes et nous montrerons au paragraphe 7.1.2 que le résultat (b) s'étend au cas des éléments algébriques.

5.3.2. Soient s, m deux entiers positifs, ρ un nombre réel positif et $r \in [0, 1]$. On note Δ_r la couronne $\Delta_r = D(0, 1^-) - D(0, r^-)$. Soit V un sous-corps fermé de W stable par dérivation. Posant $X = (X_1, \cdots, X_s)$, $Y = (Y_1, \cdots, Y_s)$, soit

$$F(X, Y) = \sum_{\mu,\nu} C_{\mu,\nu} X^\mu Y^\nu$$

la somme portant sur tous les μ et ν dans Z_+^s, avec la convention habituelle $X^\mu = X_1^{\mu_1} \cdots X_s^{\mu_s}$, et les coefficients $C_{\mu,\nu}$ appartenant à $(V \cap W(\Delta_r))^m$, c'est-à-dire sont des m-vecteurs dont les coefficients sont des fonctions analytiques bornées de la même variable x sur Δ_r et de plus appartiennent à V. On suppose que cette série converge lorsque $x \in \Delta_r$ et les X_i Y_i appartiennent à $D(0, \rho^+)$, ce qui équivaut à la condition

$$\lim_{|(\mu,\nu)| \to +\infty} \rho^{|(\mu,\nu)|} \| C_{\mu,\nu} \|_{\Delta_r} = 0 ,$$

où $|(\mu, \nu)| = \sum_{i=1}^s \mu_i + \sum_{i=1}^s \nu_i$ et $\| C_{\mu,\nu} \|_{\Delta_r}$ le maximum des sup-normes sur Δ_r des composantes de $C_{\mu,\nu}$.

Soit E' la fermeture dans W_t^0 de $\tau(V)$. On pose:

$$^\tau F(X, Y) = \sum_{\mu,\nu} {}^\tau C_{\mu,\nu} X^\mu Y^\nu .$$

Soit $u = (u_1, \cdots, u_s)$ une solution dans $(E')^s$ du système $^\tau F(X, DX) = 0$ telle que:

$$|u| = \sup_{1 \leq i \leq s} |u_i| < \rho .$$

Nous définissons l'application tangente à $^\tau F$ en u comme étant l'application de $(\mathscr{A}_t)^s$ dans $(\mathscr{A}_t)^m$ définie par la formule

$$L_u(z_1, \cdots, z_s) = \sum_{i=1}^s z_i \frac{\partial F}{\partial X_i}(u, u') + \sum_{i=1}^s z_i' \frac{\partial F}{\partial Y_i}(u, u')$$

où $z_i' = Dz_i$ et $u' = Du$.

Avec ces hypothèses et ces notations, on a le résultat suivant.

THEOREME 5.3.3. *Si L_u est injective sur $(\mathscr{A}_t)^s$, alors $u \in \tau(V)$.*

La démonstration est identique à celle du Théorème 3.1.6 de [10] avec les modifications suivantes. On remplacera "A ensemble standard" par "couronne Δ_r" "B sous-ensemble super admissible" par "couronne $\Delta_{r'}$ avec $r \leqq r' < 1$", "$H(B)$" par "$V \cap W(\Delta_{r'})$", "E_0" par "V" ou "$\tau(V)$" (voir le commentaire ultérieur), "E" par "E'", $\mathscr{R}$ sera donc interprété comme étant $E'[D]$ et $\mathscr{R}_0$ comme étant $\tau(V)[D]$.

Ainsi qu'on l'a indiqué au paragraphe 2.4, il y a une identification naturelle entre E_0 et $\tau(E_0)$. Cette identification naturelle n'existe plus entre V et $\tau(V)$, c'est pourquoi il faut remplacer E_0 tantôt par V, tantôt par $\tau(V)$, le contexte ne laissant d'ailleurs aucune ambigüité.

L'hypothèse que V est fermé dans W sert à démontrer que $V \cap W(\Delta_{r'})$ est complet. (On utilise le fait que la topologie de la convergence uniforme sur $\Delta_{r'}$ est plus fine que la topologie définie par la norme frontière.) Cette hypothèse est essentielle.

5.4. Comme dans [10], on déduit de ce théorème une propriété de réductibilité des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans V.

THÉORÈME. *Soit V un sous-corps stable par dérivation de W, fermé dans W. Soit $r \in]0, 1]$. Soit $L \in \mathscr{R}_V$. Il existe $R \in \mathscr{R}_V$ unitaire, divisant L à droite, tel que*:

$$\mathrm{Ker}_t\, {}^{\tau}R = \tau\,(\mathrm{Ker}^{\tau} L \cap \mathscr{A}_t^r)\ .$$

(cf. [10], Théorèm 4.1.2).

Notons que l'hypothèse que V est fermé dans W est essentielle. Ainsi, P. Monsky nous a indiqué ([11], § 4.26.1) un opérateur $L \in K(X)[D]$ irréductible dans $K(X)[D]$, du second ordre, mais tel que $\dim \mathrm{Ker}\, {}^{\tau}L \cap \mathscr{A}_t = 1$.

L'opérateur R du théorème n'a donc pas ses coefficients dans $K(X)$, mais dans l'adhérence de $K(X)$ dans W, c'est-à-dire que ces coefficients sont des germes d'éléments analytiques au bord de $D(0, 1^-)$.

Rappelons que l'espace des germes d'éléments algébriques au bord de $D(0, 1^-)$ est fermé dans W.

THÉORÈME 5.5. *Soit $L \in \mathscr{R}_W$ vérifiant la condition* (*). *Alors*

$$\dim_K\,(\mathrm{Ker}\, L \cap \mathscr{M}) \leqq \dim_{\mathscr{W}}\,(\mathrm{Ker}\, {}^{\tau}L \cap \mathscr{A}_t)\ .$$

Démonstration. Soit R l'opérateur associé à L par le Théorème 5.4, pour $r = 1$. On a $L = QR$ avec $Q, R \in \mathscr{R}_W$. De plus, d'après la définition de R,

$$\mathrm{Ker}\, {}^{\tau}Q \cap \mathscr{A}_t = \{0\}\ .$$

Il en résulte, grâce au Théorème 4.2, que

$$\operatorname{Ker} Q \cap \mathscr{M} = \{0\} .$$

Par conséquent,

$$\dim_K (\operatorname{Ker} L \cap \mathscr{M}) = \dim_K (\operatorname{Ker} R \cap \mathscr{M}) \leqq \text{ordre } R = \text{ordre } {}^\tau R$$
$$= \dim_{\mathscr{W}} (\operatorname{Ker} {}^\tau L \cap \mathscr{A}_t) .$$

THÉORÈME 5.6. *Soit* $L \in \mathscr{R}_W$ *vérifiant la condition* $(*)$ *et à coefficients analytiques dans* $D(0, 1^-)$. *Si*

$$\dim_K (\operatorname{Ker} L \cap \mathscr{A}_0) = \dim_{\mathscr{W}} (\operatorname{Ker} {}^\tau L \cap \mathscr{A}_t) ,$$

L a un indice en tant qu'opérateur linéaire dans $\mathscr{A}_0$. (cf. [10], Theorem 4.4.)

THEOREME 5.7. *Soit* $L \in \mathscr{R}_W$ *d'ordre* n, *vérifiant la condition* $(*)$ *et à coefficients analytiques dans* $D(0, 1^-)$. *Si l'équation* $Lu = 0$ *possède* n *solutions linéairement indépendantes analytiques dans* $D(0, 1^-)$, *on a:*

$$\operatorname{Ker}_0 L \subset W_0^{n-1} .$$

Démonstration. D'après le Théorème 5.5 et l'hypothèse, on trouve

$$\operatorname{Ker}_t L \subset \mathscr{A}_t ,$$

et donc, d'aprés le Corollaire 3.4,

$$\operatorname{Ker}_t L \subset W_t^{n-1} .$$

Par ailleurs, d'après la condition $(*)$, L a au plus un nombre fini de singularités dans $D(0, 1^-)$ et, d'après l'hypothèse, ces singularités sont artificielles (c'est-à-dire qu'au voisinage de chacune de ces singularités, L possède n solutions linéairement indépendantes). On utilise alors le Lemme 4.25 de [9] pour en déduire que:

$$\operatorname{Ker}_0 L \subset W_0^{n-1} .$$

5.8. *Polygone de Newton.* Dans [8], Dwork associe à l'opérateur différentiel L, dans une classe résiduelle où L est défini, un polygone de Newton représentant la croissance des solutions de L dans cette classe. Précisément, si L vérifie les hypothèses du Théorème 5.7, le polygone de Newton de L relatif à la classe résiduelle $D(a, 1^-)$ aura un côté de projection m_α et de pente α si

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\,(\dim \mathrm{Ker}_a L \cap W_a^{\alpha+\varepsilon}/\mathrm{Ker}_a L \cap W_a^{\alpha-\varepsilon}) = m_\alpha .$$

On dit que L est *super singulier* dans la classe $D(a, 1^-)$ si son polygone de Newton dans cette classe est distinct du polygone de Newton dans le disque générique.

Conjecture. Le polygone de Newton de L dans $D(0, 1^-)$ est situé au-dessus du polygone de Newton de L dans le disque générique.

Nous renvoyons à [8] pour les motivations de cette conjecture. Le Théorème 4.4 démontre cette conjecture pour le côté de pente 0.

6. Prolongement algébrique.

6.1. *Nouveau disque générique.* La définition que nous avons donnée de $\mathscr{W}$, et par conséquent, du disque générique qui est contenu dans $\mathscr{W}$, est liée au choix de la classe résiduelle $D(0, 1^-)$.

Nous allons donc modifier la définition du disque générique, ce qui la rendra indépendante du choix d'une classe résiduelle. Cela nous permettra de mettre en correspondance les germes d'éléments algébriques dans deux classes résiduelles distinctes (mais cela ne permet plus d'associer aux germes de fonctions analytiques bornées des fonctions analytiques dans le disque générique).

Nous reprenons les notations du paragraphe 1.3. La fraction rationnelle x est un élément de $E_0 = K(x)$ donc de Ω. Cet élément sera appelé le point générique et sera noté t. Le disque générique est alors le disque $D(t, 1^-)$ de Ω. Rappelons que Ω peut être considére comme une extension valuée de K.

6.2. Nous avons remarqué que la dérivation était définie sur $\Omega_0 = E_0^{\mathrm{alg}}$ (mais non sur Ω). Nous posons:

$$F_0 = \left\{\sum_{n\geqq 0}\frac{v^{(n)}}{n!}(Y-t)^n;\ v\in\Omega_0,\ \forall n\left|\frac{v^{(n)}}{n!}\right|\leqq|v|\right\} .$$

On vérifie sans difficulté que F_0 est un sous-corps de $W_t^0 = W(D(t, 1^-))$ l'espace des fonctions analytiques bornées dans le disque générique.

Nous noterons F le complété de F_0 pour la norme de la convergence uniforme sur $D(t, 1^-)$.

Rappelons que nous avons choisi un plongement θ de Ω dans $\mathscr{U}$ et que, par définition, $\mathscr{F} = W \cap \theta(\Omega)$. Par conséquent, θ^{-1} est bien défini sur $\mathscr{F}$ et prend ses valeurs dans Ω.

Pour chaque $u \in \mathscr{F}$, nous posons:

$$\tau(u) = \sum_{n \geqq 0} \theta^{-1}\left(\frac{u^{(n)}}{n!}\right)(Y - t)^n \in \Omega[[Y - t]] .$$

Cette définition a un sens car nous avons vu que $\mathscr{F}$ était stable par dérivation et par conséquent, pour tout $n \geqq 0$, $u^{(n)} \in \mathscr{F}$.

THÉORÈME 6.3. *L'application τ réalise un morphisme de corps valué avec dérivation de $\mathscr{F}$ dans F.*

Démonstration. Tout ce que nous avons à démontrer est que $\tau(\mathscr{F}) \subset F$ (le fait que τ réalise un morphisme de corps valué avec dérivation se montre alors comme dans le Théorème 2.3).

Or ceci est une conséquence immédiate du Lemme 1.3.4. Nous allons étendre l'application τ à $(W^c \cap \theta(\Omega_0))^c$ et montrer qu'elle envoie cet espace dans F. Pour $u \in W^c \cap \theta(\Omega_0)$, nous avons $\theta^{-1}(u) \in \Omega_0$ et, pour tout n,

$$\frac{|\theta^{-1}(u^{(n)})|}{n!} = \frac{|u^{(n)}|}{n!} \leqq |u| = |\theta(u)| ,$$

ce qui montre que:

$$\tau(u) = \sum_{n \geqq 0} \frac{\theta^{-1}(u^{(n)})}{n!}(Y - t)^n$$

appartient à F_0. On a, de plus,

$$\|\tau(u)\|_{D(t,1^-)} = |\theta^{-1}(u)| = |u| ,$$

donc τ réalise une isométrie de $W^c \cap \theta(\Omega_0)$ dans F_0 et par conséquent s'étend en une isométrie de $(W^c \cap \theta(\Omega_0))^c$ dans F.

6.4. L'interprétation de l'application τ dans le cas des germes d'éléments analytiques donnée au § 2.4 se transpose sens difficulté au cas du nouveau disque générique. En particulier, on peut identifier $E_0 = K(x)$ à un sous-corps de F_0 et $E = E_0^c$ à un sous-corps de F. Notons que cette identification ne dépend pas du choix du plongement θ de Ω dans $\mathscr{U}$.

Tenant compte de cette identification et du Théorème 6.3, on voit tout de suite que F_0 s'identifie à l'espace des fonctions algébriques à coefficients dans K dans le disque générique (c'est-à-dire que $f \in F_0$ si, et seulement si, f est une fonction analytique dans le disque générique et s'il existe $P \in K[Y, U]$ tel que $P(Y, f(Y)) = 0$) et, par conséquent, F s'identifie aux éléments algébriques dans le disque générique à coefficients dans K.

6.5. *Prolongement algébrique.* Soient $D(a, 1^-)$ et $D(b, 1^-)$ deux classes résiduelles de K et notons W_a, $\mathscr{E}_a$, $\mathscr{F}_a$ (resp. W_b, $\mathscr{E}_b$, $\mathscr{F}_b$) les espaces des germes de fonctions analytiques bornées, d'éléments analytiques, d'éléments algébriques au bord de $D(a, 1^-)$ (resp. $D(b, 1^-)$).

Nous avons défini un morphisme τ_a (resp. τ_b) de $\mathscr{F}_a$ (resp. $\mathscr{F}_b$) dans F. Comme l'application θ de Ω dans $\mathscr{U}$ n'était définie qu'à un élément de $\mathrm{Gal}(\Omega/E)$ près, le morphisme τ_a n'est défini, lui aussi, qu'à un élément de $\mathrm{Gal}(\Omega/E)$ près. Plus précisément, soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\Omega/E)$. Si $u = \sum_{n\geqq 0} u_n(Y-t)^n$, $u_n \in \Omega$, on pose $\sigma(u) = \sum_n \sigma(u_n)(Y-t)^n$. Alors σ définit un automorphisme de F (qui laisse invariants les éléments de E considérés comme éléments de F). Il est clair que $\sigma\circ\tau_a$ définit un autre morphisme de corps valué différentiel de $\mathscr{F}_a$ dans F.

Si $f \in \mathscr{F}_a$, $\tau_a(f)$ sera considéré comme un prolongement algébrique de f dans le disque générique. Les autres prolongements de f étant les $\sigma(\tau_a(f))$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\Omega/E)$. On voit que si $f \in \mathscr{E}_a$, f a un seul prolongement dans le disque générique. Si $f \in \mathscr{F}_a$ et $g \in \mathscr{F}_b$, on dit que g est un prolongement algébrique de f s'il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(\Omega/E)$ tel que $\tau_a(f) = \sigma(\tau_b(g))$.

Comme dans le cas des "fonctions" multiformes, ces prolongements algébriques sont à manier avec les précautions d'usage. Mais notons qu'ici l'on peut aussi choisir une branche particulière: pour un choix particulier des morphismes τ_a et τ_b, il est clair que $\tau_b^{-1}\circ\tau_a$ définit un morphisme de corps valué différentiel de $\tau_a^{-1}(F_{ab})$ sur $\tau_b^{-1}(F_{ab})$ où $F_{ab} = \tau_a(\mathscr{F}_a) \cap \tau_b(\mathscr{F}_b)$.

Dans le cas où $f \in \mathscr{E}_a$, alors $g \in \mathscr{E}_b$ et, d'après les résultats de [10], ce prolongement correspond avec le prolongement analytique usuel à la Krasner.

EXEMPLE 6.6. *Prolongement de la fonction exponentielle.* On a vu que $f = e^{\pi x}$ était un élément algébrique dans $D(0, 1^-)$. Comme f satisfait l'équation différentielle $f' - \pi f = 0$, son prolongement algébrique g dans $D(a, 1^-)$, s'il existe, doit satisfaire la même équation. On a donc $g = c\exp\pi(x-a)$. Le problème est de déterminer quels sont les choix convenables de c. Or f satisfait l'équation algébrique $f^p = \exp(\pi p x)$, et $\exp(\pi p x)$ appartient à E. Il en résulte que g est solution de la même équation, et on obtient ainsi:

$$c^p = \exp\pi p a\ .$$

On trouve, pour c, p valeurs qui sont les racines p-ièmes de $\exp(\pi p a)$. Il reste à montrer que ces p valeurs sont admissibles. Ceci équivaut à montrer que le polynôme $Y^p - \exp(\pi p x)$ est irréductible sur $E[Y]$. Or cette équation a pour racines, dans $\mathscr{U}$, $\gamma \exp(\pi x)$ avec γ racines p-ièmes de l'unité. Le produit de k de ces racines est de la forme $\alpha \exp(\pi k x)$ et n'appartient pas à E pour $k < p$, ce qui montre l'irréductibilité sur E du polynôme considéré.

6.7. *Prolongement des fonctions algébriques.* Nous allons montrer que les fonctions algébriques dans le disque générique (c'est-à-dire les éléments de F_0) possèdent un prolongement algébrique dans presque toutes les classes résiduelles (nous montrerons en fait un résultat un peu plus fort). Cette propriété, jointe au fait que F_0 est dense dans F, jouera dans les applications un rôle similaire à celui joué par la propriété que E_0 est dense dans E et que ses éléments, les fractions rationnelles, définissent des éléments analytiques dans presque toutes les classes résiduelles.

Soit A une union de classes résiduelles. On dit que B est un *sous-ensemble admissible de* A si B contient toutes les classes résiduelles contenues dans A sauf au plus un nombre fini.

THÉORÈME. *Soit A une union de classes résiduelles. Soit $u \in F$ une solution d'une équation $P(u) = 0$ avec $P \in \tau(H(A))[Y]$. Soit Q le polynôme minimal unitaire de u dans $E[Y]$. Il existe B, sous-ensemble admissible de A, tel que les coefficients de Q appartiennent à $\tau(H(B))$ et tel que, pour toute classe résiduelle $\Delta \subset B$, le polynôme $\tau^{-1}(Q)$ se décompose en facteurs linéaires dans $W(\Delta)$.*

Démonstration. Quitte à se restreindre à un sous-ensemble admissible A_1 de A, on peut supposer que P est unitaire et est premier avec P' (et $P \in \tau(H(A_1))[Y]$). Soit alors $P = QR$ avec Q et R unitaires appartenant à $E[Y]$. Alors Q et R sont forcément premiers entre eux. Cette équation s'interprète comme un système d'équations non linéaires. Nous allons utiliser le Théorème 3.6.1. de [10] pour montrer que les coefficients de Q et R appartiennent à $\tau(H(A_2))$, où A_2 est un sous-ensemble admissible de A_1 (donc de A). Soit n le degré de Q et m le degré de R. L'application tangente mentionnée dans le Théorèm 3.6.1. de [10] est l'application:

$$(M, N) \longmapsto QM + NR$$

où M (resp. N) est un polynôme de degré au plus $m - 1$ (resp. $n - 1$). Pour pouvoir appliquer le Théorème 3.6.1 de [10] et conclure, tout ce qu'il reste à faire est de montrer que cette application tangente est injective sur $(\mathscr{A}_t[Y])_{m-1} \times (\mathscr{A}_t[Y])_{n-1}$ où les indices représentent la borne sur les degrés. Il est équivalent de montrer que cette application est surjective sur $(\mathscr{A}_t[Y])_{m+n-1}$. Comme Q et

R sont premiers entre eux, il existe U et $V \in E[Y]$ tels que $QU + RV = 1$. Si alors $T \in (\mathscr{A}_t[Y])_{n+m-1}$, soit $TV = SQ + N$, $\deg N < n = \deg Q$, et $M = TU + SR$. On voit que:

$$MQ + NR = TUQ + SRQ + TVR - SQR = T$$

et que $\deg M \leqq \deg (T - NR) - \deg Q \leqq m + n - 1 - n = m - 1$, ce qui montre que l'application tangente est surjective et nous permet d'appliquer le Théorème 3.6.1 de [10].

Par conséquent, les facteurs premiers de P dans $E[Y]$, et en particulier le polynôme minimal unitaire Q de u, ont tous leurs coefficients dans $\tau(H(A_3))$, où A_3 est un sous-ensemble admissible de A.

Soit g le discriminant de Q. g est un élément de $\tau(H(A_3))$. Notons B le complément dans A_3 de l'union des classes résiduelles contenant des racines de $\tau^{-1}(g)$ (qui sont en nombre fini).

Comme Q est irréductible sur $E[Y]$, toutes les autres racines de Q appartiennent à F. Soit m le degré de Q. Si Y est une racine de Q, posons $X = (1, Y, \cdots, Y^{m-1})$. Alors:

$$\frac{dX}{dx} = XG , \tag{6.7.1}$$

où G est une $m \times m$ matrice à coefficients dans $\tau(H(B))$.

Pour chaque $s \in N$, il existe une $m \times m$ matrice G_s, à coefficients dans $\tau(H(B))$ telle que:

$$\frac{d^s X}{dx^s} XG_s .$$

Comme Q a m racines distinctes dans F, le système différentiel (6.7.1) possède m solutions linéairement indépendantes analytiques dans le disque générique. On en néduit que:

$$|G_s| = 0(1) \text{ quand } s \longrightarrow +\infty$$

où $|G_s|$ désigne le sup des valeurs absolues des coefficients de G_s. On en déduit que, pour toute classe résiduelle $\Delta \subset B$, les solutions de l'équation

$$\frac{dX}{dx} = XG^{\tau^{-1}}$$

au voisinage d'un point de Δ convergent dans Δ tout entier, donc les racines de $\tau^{-1}Q$ au voisinage d'un point de Δ convergent dans Δ tout entier, ce qui achève la démonstration du théorème.

7. Equations différentielles a coefficients éléments algébriques.

7.1. Les résultats des paragraphes 4 et 5 s'appliquent au cas d'un opérateur différential L dont les coefficients sont des éléments algébriques dans une couronne. Maintenant, nous nous intéressons au cas où les coefficients de L se prolongent algébriquement dans certaines classes résiduelles.

Une union de classes résiduelles de $\tilde{K} \cup \{\infty\}$ sera appelée un *ensemble standard.*

Soit A un ensemble standard. Soit u un élément algébrique dans une classe résiduelle de A qui se prolonge dans les autres classes résiduelles de A. Cela signifie que pour chaque classe Δ de A, il existe un morphisme $\tau_\Delta : \mathscr{F}_\Delta \to F$, tel que pour tous Δ et Δ' contenus dans A, on ait $\tau_\Delta(u) = \tau_{\Delta'}(u)$. Ici $\mathscr{F}_\Delta$ désigne l'anneau des éléments algébriques sur Δ.

Pour chaque classe résiduelle Δ de $\tilde{K} \cap \{\infty\}$, nous choisissons un morphisme τ_Δ de $\mathscr{F}_\Delta$ dans $\mathscr{F}$.

Si A est un ensemble standard, nous posons:

$$F_A = \bigcap_{\Delta \subset A} \tau_\Delta(\mathscr{F}_\Delta) .$$

Si B est un ensemble standard contenu dans A, il est clair que $F_A \subset F_B$. Cette définition dépend du choix des τ_Δ.

Un sous-ensemble standard B d'un ensemble standard A sera dit sous-ensemble *admissible* si B contient toutes les classes résiduelles de A sauf au plus un ensemble fini.

7.2. *Equations différentielles non linéaires.*

7.2.1. Soit A un ensemble standard. Comme au paragraphe 5.3.2, on considère

$$F(X, Y) = \sum_{\mu,\nu} C_{\mu,\nu} X^\mu Y^\nu ,$$

mais, cette fois, on suppose que $C_{\mu,\nu} \in (F_A)^s$. On suppose encore que:

$$\lim_{|(\mu,\nu)| \to +\infty} \rho^{|(\mu,\nu)|} \|C_{\mu,\nu}\| = 0 ,$$

où $\|C_{\mu,\nu}\|$ désigne le maximum des valeurs absolues des coefficients de $C_{\mu,\nu}$.

Soit $u \in F^s$ une solution du système: $F(X, dX/dx) = 0$.

On définit encore l'application tangente en u par la formule:

$$L_u(z_1, \cdots, z_s) = \sum_{i=1}^{s} z_i \frac{\partial F}{\partial X_i}(u, u') + \sum_{i=1}^{s} z'_i \frac{\partial F}{\partial Y_i}(u, u') .$$

On a alors le résultat suivant.

THEOREME 7.2.2. *Si L_u est injective sur $(\mathscr{A}_t)^s$, il existe un* *sous-ensemble admissible B de A tel que $u \in F_B$.*

La démonstration est identique à celle du Théorème 3.1.6 de [10], et se simplifie du fait que l'on ne considère qu'un sous-ensemble admissible B et non super admissible. Notons que ce que nous appelons ici ensemble standard est appelé dans [10] ensemble "very standard".

Les modifications à apporter sont les suivantes. On remplacera "super admissible" par "admissible", "$H(B)$" "E_0" et "E" par "F_B" "F_0" et "F". Alors $\mathscr{R}$ sera interprété comme étant $F[D]$ et $\mathscr{R}_0$ comme étant $F_0[D]$.

Comme B est standard (very standard dans [10]), on a $e_B = 1$ et on n'a pas à tenir compte du Lemme 3.3 de [10] et de son corollaire.

On utilise le Théorème 6.7 pour montrer que, pour tout ensemble standard A et tout $\xi \in F_0$, il existe un sous-ensemble admissible B de A tel que $\xi \in F_B$.

Enfin, comme $\tau_{\Delta}(\mathscr{F}_{\Delta})$ est fermé dans F pour toute classe résiduelle Δ, on voit que, pour tout B standard, F_B est fermé dans F donc complet.

7.3. Soit A un ensemble standard. Soit $L \in H_A[D]$ et soit $r \in]0, 1]$. L'intersection de $\mathrm{Ker}_t L$ avec $\mathscr{A}_t^r$ détermine un facteur unitaire M de L et, par le Théorème 3.3, on a:

$$L = NM$$
$$\mathrm{Ker}_t M = \mathscr{A}_t^r \cap \mathrm{Ker}_t L$$

et M et N appartiennent à $F[D]$.

THÉORÈME. *Il existe un sous-ensemble admissible B de A tel que $M \in F_B[D]$.* (Cf. [10], Theorem 4.1.2.)

THÉORÈME 7.4. *Soit A un ensemble standard contenant une infinité de classes résiduelles. Soit $L \in F_A[D]$. Pour toute classe résiduelle $\Delta = D(a, 1^-)$ de A, sauf au plus un nombre fini d'entre elles, on a:*

$$\dim_K (\mathrm{Ker}\, \tau_{\Delta}^{-1}(L) \cap \mathscr{A}_a) = \dim_{\Omega} (\mathrm{Ker}\, L \cap \mathscr{A}_t)\,.$$

Démonstration. On prend $r = 1$ et on applique le Théorème 7.3. Alors $L = NM$ avec M unitaire, $\mathrm{Ker}_t N = \{0\}$, $\mathrm{Ker}_t M \subset \mathscr{A}_t$ et N et M appartiennent à $F_B[D]$. Il résulte alors du Théorème 4.2 que si la classe résiduelle $\Delta = D(a, 1^-)$ est contenue dans B

$$\operatorname{Ker} \tau_{\Delta}^{-1}(N) \cap \mathscr{A}_a = \{0\} .$$

Par ailleurs, $\tau_{\Delta}^{-1}(M)$ n'a pas de singularités dans Δ puisque M est unitaire. Il découle alors classiquement du fait que $\operatorname{Ker}_t M \subset \mathscr{A}_t$ que:

$$\operatorname{Ker} \tau_{\Delta}^{-1}(M) \subset \mathscr{A}_a .$$

On a alors:

$$\operatorname{Ker} \tau_{\Delta}^{-1}(L) \cap \mathscr{A}_a = \operatorname{Ker} \tau_{\Delta}^{-1}(M) \cap \mathscr{A}_a$$

et donc:

$$\dim_K (\operatorname{Ker} \tau_{\Delta}^{-1}(L) \cap \mathscr{A}_a) = \text{ordre } M = \dim_\Omega (\ker L \cap \mathscr{A}_t) .$$

7.5. Plus généralement, on conjecture que L est super singulier (cf. § 5.8) dans au plus un nombre fini de classes résiduelles.

Bibliographie

1. Y. Amice, *Les nombres p-adiques*, Paris, PUF, 1975.

2. J. Ax, *Zeros of polynomials over local fields*, J. Algebra, t. **15** (1970), 412–428.

3. G. Christol, *Limites uniformes p-adiques de fonctions algébriques*, Thèse, Université Paris VI, 1977. Une partie des résultats de cette thèse est exposée dans les articles suivants:

4. *Eléments analytiques uniformes et multiformes, séminaire Delange-Pisot-Poitou: théorie des nombres*, 15e année, (1973–74), n° 6, 18 pages;

5. *Eléments algébriques, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique*, 1re année, (1973–74), n° 14, 10 pages.

6. B. Dwork, *p-adic cycles*, Publications mathématiques n° 37, I.H.E.S., (1969), 29-113.

7. ———, *On p-adic differential equations I*, Bull. Soc. Math. France, mémoire 39-40, (1974), 27-37.

8. ———, *On p-adic differential equations II*, Ann. of Math., **93** (1973), 366–376.

9. ———, *Bessel functions as p-adic functions*, Duke Math. J. **41** (1974), 711–738.

10. B. Dwork and P. Robba, *On ordinary linear p-adic differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **231** (1977), 1-46.

11. M. Krasner, *Prolongement analytique uniforme et multiforme*, Colloque CNRS, (1966), Clermont-Ferrand.

12. E. Motzkin, *Un invariant conforme p-adique*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 269, (1969), série A, p. 507–509.

13. P. Robba, *On the index of p-adic differential operators I*, Ann. of Math., **101** (1975), 280-316.

14. ———, *Nouveau point de vue sur le prolongement algébrique*. G.E.A.U. 1976–77, exposé n° 5, 14 p.

15. ———, *Disque générique et équations différentielles*. G.E.A.U. 1976–77, exposé n° 8, 7p.

Received September 15, 1980.

Université Paris XI
91405 Orsay, France