

TOPOLOGIES DE CORPS A LINEAIRES

DRISS ABOUABDILLAH

Un anneau de Dedekind A possède la propriété suivante: Toute topologie de corps A -linéaire séparée et non discrète définie sur le corps des fractions de A est borne supérieure d'une famille de topologies \mathfrak{p} -adiques. Ce résultat est dû à E. Correl, A. Jebli et W. Wieslaw. Dans cette note, une classe plus vaste d'anneaux possédant cette propriété est fournie et étudiée, ce qui constitue en particulier une solution à un problème posé par W. Wieslaw.

Introduction. Soit A un anneau commutatif unitaire et intègre, K son corps des fractions, on suppose que $A \neq K$. Les sous A -modules non nuls de K forment un système fondamental de voisinages de zéro pour une topologie A -linéaire sur K , notée T_A , compatible avec la structure d'anneau de K , séparée et non discrète, de plus, T_A est compatible avec la structure de corps de K si et seulement si $\text{Rad}(A) \neq (0)$.

Soit X_0 l'ensemble des idéaux premiers non nuls de A , pour tout $\mathfrak{p} \in X_0$ la topologie $T_{A,\mathfrak{p}}$ sera notée abusivement $T_{\mathfrak{p}}$ et appelée topologie \mathfrak{p} -adique.

On désigne par $\mathfrak{T}(A)$ l'ensemble des topologies A -linéaires sur K , compatibles avec sa structure de corps, séparées et non discrètes, et on dit que A possède la propriété de la borne supérieure si toute topologie de $\mathfrak{T}(A)$ est borne supérieure d'une famille de topologies \mathfrak{p} -adiques.

E. Correl a montré (en 1958) qu'un anneau principal possède la propriété de la borne supérieure.

A. Jebli a montré (en 1971) qu'un anneau de Dedekind possède la propriété de la borne supérieure.

W. Wieslaw a démontré ce même résultat indépendamment de A. Jebli et a posé un problème en disant qu'il serait intéressant de trouver une autre classe d'anneaux possédant la propriété de la borne supérieure. A. Jebli a caractérisé ensuite les anneaux noethériens possédant cette propriété et a posé le problème analogue suivant: Quels sont les anneaux de Prüfer de dimension 1 qui possèdent la propriété de la borne supérieure?

Nous donnons dans ce travail une solution à ces deux problèmes.

Au §1, nous montrons d'abord (Fevrier 1977), qu'un anneau de Prüfer h -semi-local possède la propriété de la borne supérieure, résultat que nous énonçons sous une forme plus générale au Th. (1.3). Nous donnons

ensuite quelques propriétés de ce que nous appelons anneaux topologiquement prüfériens.

Au §2, nous remarquons que l'application $\pi: \mathfrak{p} \rightarrow T_{\mathfrak{p}}$ de X_0 dans $\mathfrak{T}(A)$ n'est pas toujours injective, et nous montrons cependant, (Mai 1976), que si A vérifie la condition suivante:

$$(*) \quad \text{“Pour tout } \mathfrak{p} \in X_0 \text{ et tout } x \in \mathfrak{p} \text{ on a: } \bigcap_n x^n A_{\mathfrak{p}} = (0)\text{”}$$

alors π est injective. Cette condition est vérifiée par une grande classe d'anneaux comprenant les anneaux noethériens les anneaux de Krull et tous les anneaux de dimension 1. Ensuite, grâce à la condition (*), nous obtenons d'autres précisions intéressantes sur les anneaux qui possèdent la propriété de la borne supérieure: Théorèmes: (2.9), (2.10), (2.11) et (2.12).

1. Anneaux topologiquement prüfériens. On dit qu'une topologie $T \in \mathfrak{T}(A)$ est une topologie de valuation, s'il existe un anneau de valuation V pour K tel que: $T = T_V$.

Rappelons la définition suivante: On dit que A est un anneau prüférien si pour tout $\mathfrak{p} \in X_0$, $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation, et posons par analogie la

(1.1) DÉFINITION. On dit que A est topologiquement prüférien si toute topologie \mathfrak{p} -adique est une topologie de valuation.

(1.2) LEMME. Soit $T \in \mathfrak{T}(A)$, s'il existe un sous- A -module M de K ouvert pour T et un $\mathfrak{p} \in X_0$ tels que:

(1) $T_{\mathfrak{p}}$ soit une topologie de valuation.

(2) $M_{\mathfrak{p}} \neq K$.

Alors $T_{\mathfrak{p}}$ est moins fine que T .

Preuve. Soit V un anneau de valuation (pour K) tel que: $T_{\mathfrak{p}} = T_V$, il existe $y \in K$ tel que: $yV \subset A_{\mathfrak{p}}$ donc $yVM_{\mathfrak{p}} \subset M_{\mathfrak{p}}$. Soit $x \in K - M_{\mathfrak{p}}$, $xV \not\subset yVM_{\mathfrak{p}}$ donc $yVM_{\mathfrak{p}} \subset xV$, car les sous- V -modules de K sont totalement ordonnés, donc $yM \subset xV$ ce qui montre que T_V est moins fine que T .

Rappelons qu'un anneau A est dit h -semi-local si tout idéal $\neq (0)$ est contenu seulement dans un nombre fini d'idéaux maximaux.

(1.3) THÉORÈME. Soit A un anneau topologiquement prüférien, si A est h -semi-local alors il possède la propriété de la borne supérieure.

Preuve. Soit $T \in \mathfrak{T}(A)$ et $M \neq K$ un sous- A -module de K ouvert pour T . L'application: $(x, y) \in K \times K^* \rightarrow xy^{-1} \in K$ est continue en $(0, 1)$ donc il existe un sous- A -module N de K ouvert pour T tel que: $N(1 + N)^{-1} \subset M$. On peut supposer que l'idéal $\alpha_N = N \cap A \neq A$. Soit $(\mathfrak{m}_i)_{i \in I}$ la famille non vide des idéaux maximaux contenant α_N . Montrons que $\bigcap_{i \in I} N_{\mathfrak{m}_i} \subset M$.

Soit $y \in \bigcap_{i \in I} N_{\mathfrak{m}_i}$, pour tout $i \in I$ il existe $x_i \in N$, et $s_i \in A - \mathfrak{m}_i$ tels que: $y = x_i/s_i$. L'idéal $\alpha_N + \sum_{i \in I} As_i$ n'est contenu dans aucun idéal maximal donc il est égal à A , donc il existe $a \in N$, $s = \sum_{i \in I'} \alpha_i s_i \in \sum_{i \in I'} As_i$ (I' étant une partie finie de I) tels que: $1 = a + s$. Nous avons $s_i y = x_i$ donc $\sum_{i \in I'} \alpha_i s_i y = \sum_{i \in I'} \alpha_i x_i$, d'où:

$$y = \sum_{i \in I'} \alpha_i x_i / \sum_{i \in I'} \alpha_i s_i = \sum_{i \in I'} \alpha_i x_i / 1 - a \in N(1 + N)^{-1} \subset M.$$

Donc il existe $i \in I$ tel que: $N_{\mathfrak{m}_i} \neq K$, $T_{\mathfrak{m}_i}$ est alors moins fine que T d'après le Lemme (1.2).

Soit $J = \{i \in I / N_{\mathfrak{m}_i} \neq K\}$. $J \neq \emptyset$ et nous avons encore $\bigcap_{i \in J} N_{\mathfrak{m}_i} \subset M$, ceci montre que, lorsque I est fini M est ouvert pour $\sup_{\mathfrak{m} \in \Delta} T_{\mathfrak{m}}$, où Δ est l'ensemble des idéaux maximaux \mathfrak{m} tels que $T_{\mathfrak{m}}$ soit moins fine que T , d'où le théorème.

REMARQUE. Si A est un anneau de Prüfer, la condition A est h -semi-local peut être remplacée par la condition plus faible suivante: Pour toute famille $(\mathfrak{m}_i)_{i \in I}$ d'idéaux maximaux tels que $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{m}_i \neq (0)$, il existe une famille finie $(\mathfrak{p}_i)_{i \in I'}$ d'idéaux premiers non nuls tels que $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{m}_i$ pour tout $i \in I$. Ou, ce qui revient au même, "Toute intersection non nulle d'idéaux maximaux contient une intersection finie d'idéaux premiers non nuls".

Preuve. Dans la démonstration du théorème précédant nous avons: $(0) \neq \alpha_N \subset \bigcap_{i \in J} \mathfrak{m}_i$. Soit $(\mathfrak{p}_i)_{i \in J}$ une famille finie d'idéaux premiers non nuls tels que pour tout $i \in J$, $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{m}_i$, on a $\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{p}_i} \subset \mathfrak{m}_i A_{\mathfrak{m}_i}$, d'où: $\bigcap_{i \in J} \alpha_N \mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{p}_i} \subset \bigcap_{i \in J} \alpha_N \mathfrak{m}_i A_{\mathfrak{m}_i} \subset \bigcap_{i \in J} N_{\mathfrak{m}_i} \subset M$, or le lemme suivant montre que $T_{\mathfrak{p}_i} = T_{\mathfrak{m}_i}$ pour tout $i \in J$, et ceci permet de conclure.

(1.4) LEMME. Si V est un anneau de valuation pour K , T_V est un élément minimal dans l'ensemble des topologies linéaires séparées et compatibles avec la structure d'anneau de K . (Résultat connu).

Preuve. Soit T une topologie linéaire séparée, compatible avec la structure d'anneau de K , et moins fine que T_V . Si $M \neq K$ est un sous groupe additif de K ouvert pour T , il existe un sous groupe N de K , ouvert

pour T tel que $M \supset NN$ et il existe $x \in K^*$ tel que $N \supset xV$. On a $M \supset xNV$, donc NV est un sous- V -module de K distinct de K . Soit $y \in K - NV$, on a: $yV \not\subset NV$, comme les sous- V -modules de K sont totalement ordonnés, on a: $NV \subset yV$, donc $N \subset yV$ et par suite, la topologie T_V est moins fine que T .

(1.5) PROPOSITION. *Si A est topologiquement prüférien, tout sur-anneau de A contenu dans K est topologiquement prüférien.*

Preuve. Soit B un sur-anneau de A contenu dans K . Si \mathfrak{p}' est un idéal premier non nul de B , $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A \in X_0$ et $T_{B_{\mathfrak{p}'}} = T_{\mathfrak{p}}$ en vertu du Lemme (1.4).

(1.6) THÉORÈME. *Soit A un anneau topologiquement prüférien. Si A possède la propriété de la borne supérieure, alors tout sur-anneau B de A contenu dans K la possède.*

Preuve. Si $T \in \mathfrak{T}(B)$, alors $T \in \mathfrak{T}(A)$, donc il existe une famille $(\mathfrak{p}_i)_{i \in I}$ d'éléments de X_0 telle que: $T = \sup T_{\mathfrak{p}_i}$. Pour tout $i \in I$ posons $S_i = A - \mathfrak{p}_i$. On a d'une part; $A_{\mathfrak{p}_i} \subset S_i^{-1}B$, d'autre part, $A_{\mathfrak{p}_i}$ est ouvert pour T , donc il existe un sous- B -module M_i de K ouvert pour T tel que $A_{\mathfrak{p}_i} \supset M_i$. Si $x_i \in M_i - (0)$, $A_{\mathfrak{p}_i} \supset x_i B$, donc $A_{\mathfrak{p}_i} \supset x_i S_i^{-1}B$ et par suite $S_i^{-1}B \neq K$. Il existe un idéal premier non nul \mathfrak{p}'_i de B tel que: $S_i^{-1}B \subset B_{\mathfrak{p}'_i}$, donc $A_{\mathfrak{p}_i} \subset B_{\mathfrak{p}'_i}$ et par suite $T_{B_{\mathfrak{p}'_i}}$ est moins fine que $T_{\mathfrak{p}_i}$ donc $T_{B_{\mathfrak{p}'_i}} = T_{\mathfrak{p}_i}$ (Lemme (1.4)), d'où $T = \sup T_{\mathfrak{p}'_i}$.

Désignons par X_1 l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A , et par \mathfrak{V}_1 l'ensemble des anneaux de valuation de hauteur 1 contenant A . Pour tout anneau de valuation V on désigne par m_V l'idéal maximal de V .

(1.7) PROPOSITION. *Si A est topologiquement prüférien alors l'application $V \rightarrow m_V \cap A$ est une bijection de \mathfrak{V}_1 sur X_1 .*

Preuve. Si $V \in \mathfrak{V}_1$ montrons que $\mathfrak{p} = m_V \cap A \in X_1$. Si \mathfrak{q} est un idéal premier non nul de A contenu dans \mathfrak{p} , on a: $A_{\mathfrak{p}} \subset A_{\mathfrak{q}}$. Soit W un anneau de valuation contenant $A_{\mathfrak{q}}$, on a $T_W = T_V$, V et W sont alors dépendants donc $W \subset V$, par suite $A_{\mathfrak{q}} \subset V$. Donc il existe un idéal premier non nul \mathfrak{q}' de A contenu dans \mathfrak{q} tel que: $m_V \cap A_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}' A_{\mathfrak{q}}$, on en déduit que $m_V \cap A = \mathfrak{q}'$, d'où $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, donc \mathfrak{p} est de hauteur 1.

Réciproquement. Si $\mathfrak{p} \in X_1$, $A_{\mathfrak{p}}$ est local de dimension 1, donc il est dominé par un anneau de valuation de hauteur 1. Comme $T_{\mathfrak{p}}$ est une

topologie de valuation, V est l'unique anneau de valuation de hauteur 1 contenant A_p , ceci permet de conclure.

Pour tout anneau A , posons $A' = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_1} V$ si $\mathcal{V}_1 \neq \emptyset$, $A' = K$ si $\mathcal{V}_1 = \emptyset$, et notons que $A' \neq K$ si et seulement si $X_1 \neq \emptyset$.

(1.8) THÉORÈME. Si A est topologiquement prüferien h -semi-local, et $X_1 \neq \emptyset$ alors

- (i) A' est un anneau de Prüfer h -semi-local de dimension 1.
- (ii) L'application $\mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m} \cap A$ est une bijection de $\text{Spect}(A') - (0)$ sur X_1 .
- (iii) Si en plus tout idéal maximal contient un idéal premier de hauteur 1, alors A' coïncide avec la quasi-clôture intégrale de A .

Preuve. Remarquons d'abord que pour tout $x \in K^*$, il n'existe qu'un nombre fini d'anneaux de valuation $V \in \mathcal{V}_1$ tels que $x \notin V$, en effet: il existe $a, b \in A$ tels que: $x = a/b$. Soient $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ les idéaux maximaux de A contenant b . Si $V \in \mathcal{V}_1$ est tel que $T_V \neq T_{\mathfrak{m}_i}$, pour tout $i = 1, \dots, n$, posons $\mathfrak{p} = m_V \cap A$. On a: $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{m}_i$ pour tout i , sinon on aurait $T_V = T_{\mathfrak{m}_i}$. Soit \mathfrak{m} un idéal maximal contenant \mathfrak{p} , on a $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_i$ pour tout i , donc $b \notin \mathfrak{m}$, donc $b \notin \mathfrak{p}$ et par suite $a/b \in A_p$, donc $x \in V$, ce qui permet de conclure.

Assertion (i). Soit \mathfrak{p}' un idéal premier non nul de A' d'après (1.5) et (1.7), il existe un unique anneau de valuation $V \in \mathcal{V}_1$ tel que $A'_{\mathfrak{p}'} \subset V$. Montrons que $A'_{\mathfrak{p}'} = V$. Soit $x \in V$ et V_1, \dots, V_n l'ensemble des anneaux de valuation de hauteur 1 ne contenant pas x . Pour tout $i = 1, \dots, n$ on a $(A' - \mathfrak{p}')^{-1} \not\subset V_i$, sinon on aurait $A'_{\mathfrak{p}'} \subset V_i$, ce qui est faux. il existe donc $s_i \in A' - \mathfrak{p}'$ tel que $s_i^{-1} \notin V_i$, comme V_i est complètement intégralement clôt on a: $\bigcap_n s_i^n V_i = (0)$ il existe donc un entier k_i tel que $x^{-1} \notin s_i^{k_i} V_i$. Posons $s = s_1^{k_1} \dots s_n^{k_n}$ on a $sx \in V_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ par conséquent $sx \in V$ pour tout $V \in \mathcal{V}_1$ donc $sx \in A'$, donc $x \in A'_{\mathfrak{p}'}$. On conclut que A' est un anneau de Prüfer de dimension 1.

Montrons que A' est h -semi-local. Soit $x \in A' - (0)$, si \mathfrak{m}' est un idéal maximal de A' , $A'_{\mathfrak{m}'} \in \mathcal{V}_1$ donc $x \in \mathfrak{m}'$ équivaut à $x^{-1} \notin A'_{\mathfrak{m}'}$, et la remarque précédente permet de conclure.

Assertion (ii). Découle immédiatement de la Proposition (1.7).

Assertion (iii). On voit immédiatement que la quasi-clôture intégrale de A est contenue dans A' . Réciproquement: Soit $x \in A' - (0)$, il existe $a, b \in A - (0)$ tels que $x = a/b$. Soient $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ les idéaux maximaux de A contenant b , V_1, \dots, V_n les anneaux de valuation de \mathcal{V}_1 tels que $T_{V_i} = T_{\mathfrak{m}_i}$. Il existe $c_i \in A - (0)$ tels que $c_i V_i \subset A_{\mathfrak{m}_i}$. Soit $c = c_1 \dots c_n$, on

a pour tout $i = 1, \dots, n$ et pour tout entier k , $cx^k \in A_{m_i}$. Si m est un idéal maximal de A distinct des m_i alors $b \notin m$, donc $x = a/b \in A_m$ et par suite $cx^k \in A_m$ pour tout idéal maximal m , donc $cx^k \in A$ donc x est quasi-entier sur A .

2. Condition d'injectivité. Remarquons d'abord que si A est un anneau de Prüfer de dimension > 1 alors l'application $\pi: \mathfrak{p} \rightarrow T_{\mathfrak{p}}$ n'est pas injective. Dans le cas général nous avons:

(2.1) THÉORÈME. Soient $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in X_0$, Pour que $T_{\mathfrak{p}}$ soit moins fine que $T_{\mathfrak{q}}$ il faut et il suffit que $\bigcap_{x \in \mathfrak{p}-\mathfrak{q}} xA_{\mathfrak{p}} \neq (0)$.

Preuve. Nécessité: Si $T_{\mathfrak{p}} < T_{\mathfrak{q}}$ il existe $a \in A - (0)$ tel que $A_{\mathfrak{p}} \supset aA_{\mathfrak{q}}$, donc pour tout $x \in \mathfrak{p} - \mathfrak{q}$, $a/x \in A_{\mathfrak{p}}$ donc $a \in \bigcap_{x \in \mathfrak{p}-\mathfrak{q}} xA_{\mathfrak{p}}$.

Suffisance: Soit $a \in \bigcap_{x \in \mathfrak{p}-\mathfrak{q}} xA_{\mathfrak{p}}$ alors $A_{\mathfrak{p}} \supset aA_{\mathfrak{q}}$; en effet: si $y = \alpha a/s \in aA_{\mathfrak{q}}$ avec $\alpha \in A$, $s \in A - \mathfrak{q}$ on a: $\bigcap_{x \in \mathfrak{p}-\mathfrak{q}} xA_{\mathfrak{p}} \subset sA_{\mathfrak{p}}$, donc il existe $\beta \in A_{\mathfrak{p}}$ tel que $a = \beta s$ d'où $y = \alpha\beta \in A_{\mathfrak{p}}$.

(2.2) COROLLAIRE. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:

(a) L'application $\pi: \mathfrak{p} \in X_0 \rightarrow T_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{T}(A)$ est injective.

(b) Pour tout $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in X_0$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ on a: $\bigcap_{x \in \mathfrak{p}-\mathfrak{q}} xA_{\mathfrak{p}} \neq (0)$ ou $\bigcap_{x \in \mathfrak{q}-\mathfrak{p}} xA_{\mathfrak{q}} \neq (0)$.

(2.3) COROLLAIRE. On suppose que A vérifie la condition suivante:

(*) Pour tout $\mathfrak{p} \in X_0$ et tout $x \in \mathfrak{p}$, $\bigcap_n x^n A_{\mathfrak{p}} = (0)$.

Alors pour tout $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in X_0$ tels que $T_{\mathfrak{p}} < T_{\mathfrak{q}}$ on a: $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, en particulier l'application π est injective.

(2.4) Exemples d'anneaux vérifiant la condition (*).

(1) Les anneaux noethériens et plus généralement, les anneaux localement noethériens et les anneaux fortement laskériens ([1] Ch. 4, Exer. 28 et 29).

(2) Les anneaux A tels que $A_{\mathfrak{p}}$ soit complètement intégralement clôs pour tout $\mathfrak{p} \in X_0$ (exemples: Les anneaux de Krull et plus généralement les anneaux de caractère fini et de type réel).

(3) Les anneaux de dimension 1 (en effet, si A est de dimension 1, alors pour tout $\mathfrak{p} \in X_0$, $A_{\mathfrak{p}}$ est dominé par un anneau de valuation de hauteur 1, ce dernier étant complètement intégralement clôs).

REMARQUE. Si S est une partie multiplicative de A et si A vérifie la condition (*) alors $S^{-1}A$ la vérifie aussi.

Rappelons que pour toute partie multiplicative S de A il existe une partie multiplicative saturée S^* de A telle que $S^{-1}A = S^{*-1}A$ ([1] Ch. 2, §2. Exer. 1).

La topologie $T_{S^{-1}A}$ (resp. $T^{S^{-1}A}$ ([6] Prop. 0.6)) sera notée abusivement T_S (resp. T^S).

Notons que si $S = \bigcap_{i=1}^n A - \mathfrak{p}_i$ (où $\mathfrak{p}_i \in X_0$) alors $T_S = \sup T_{\mathfrak{p}_i}$.

(2.5) THÉOREME. *On suppose que A vérifie la condition (*). Soient S et S' deux parties multiplicatives de A , si $T_S < T_{S'}$ ou $T^S < T^{S'}$ alors $S'^* \subset S^*$.*

Preuve. Montrons que si $T^S < T^{S'}$ alors $S'^* \subset S^*$. On se ramène aussitôt au cas où S et S' sont saturées. Supposons que $S' \not\subset S$, soit $s' \in S' - S$. Si $S = \bigcap_{i \in I} A - \mathfrak{p}_i$, avec $\mathfrak{p}_i \in X_0$, il existe $i \in I$ tel que: $s' \in \mathfrak{p}_i$, comme $S^{-1}A/(1 + s'S^{-1}A)$ est ouvert pour T^S , il est aussi ouvert pour $T^{S'}$ et à fortiori pour $T_{S'}$. Donc il existe $x \in A - (0)$ tel que: $S^{-1}A/(1 + s'S^{-1}A) \supset xS'^{-1}A$, ainsi $x/s'^n \in S^{-1}A/(1 + s'S^{-1}A) \subset A_{\mathfrak{p}_i}$, contrairement au fait que A vérifie la condition (*).

La deuxième partie de l'assertion se démontre d'une manière analogue.

(2.6) COROLLAIRE. *On suppose que A vérifie la condition (*). Soit $(\mathfrak{p}_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de X_0 , et $S = \bigcap_{i \in I} A - \mathfrak{p}_i$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (a) $T_S = \sup T_{\mathfrak{p}_i}$.
- (b) $\sup T_{\mathfrak{p}_i}$ est localement bornée.
- (c) *il existe des éléments $(\mathfrak{q}_j)_{j=1, \dots, n}$ maximaux parmi les \mathfrak{p}_i , tels que chaque \mathfrak{p}_i soit contenu dans l'un des \mathfrak{q}_j .*

Preuve. (a) \Rightarrow (b) et (c) \Rightarrow (a) sont évidentes. Montres que (b) \Rightarrow (c). Il existe une partie finie J de I telle que $\sup_{i \in I} T_{\mathfrak{p}_i} = \sup_{i \in J} T_{\mathfrak{p}_i}$ ([2] Exer. 20) donc si $k \in I - J$, $\bigcup_{i \in J} \mathfrak{p}_i = (\bigcup_{i \in J} \mathfrak{p}_i) \cap_{\mathfrak{p}_k}$ (Th. (2.5)), donc \mathfrak{p}_k est contenu dans l'un des \mathfrak{p}_i pour $i \in J$, ce qui permet de conclure.

(2.7) COROLLAIRE. *Soit A un anneau vérifiant la condition (*). Si A possède la propriété de la borne supérieure alors pour toute famille $(\mathfrak{p}_i)_{i \in I}$ d'idéaux premiers tels que: $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{p}_i \neq (0)$, il existe $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n \in X_0$ tels que: $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{p}_i = \bigcup_{j=1}^n \mathfrak{q}_j$ en particulier; A est h-semi-local.*

Preuve. Posons $S = \bigcap_{i \in I} A - \mathfrak{p}_i$, $T_S \in \mathfrak{T}(A)$ car $\text{Rad}(S^{-1}A) \neq (0)$. Comme T_S est localement bornée, il existe $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n \in X_0$ tels que: $T_S = \sup(T_{\mathfrak{q}_1}, \dots, T_{\mathfrak{q}_n})$ ([2]. Exer. 20), or, $\sup(T_{\mathfrak{q}_1}, \dots, T_{\mathfrak{q}_n})$ coïncide avec $T_{S'}$,

où $S' = \bigcap_{i=1}^n A - q_i$, donc $S = S'$ (Th. (2.5)), d'où: $\bigcup_{i \in I} p_i = \bigcup_{i=1}^n q_j$, ainsi pour tout $i \in I$, p_i est contenu dans l'un des q_j , donc si les p_i étaient tous maximaux, ils seraient en nombre fini.

(2.8) LEMME. *Soit A un anneau de dimension 1. On suppose que pour tout $T \in \mathfrak{T}(A)$ il existe une topologie \mathfrak{p} -adique $T_{\mathfrak{p}}$ moins fine que T . Alors A est topologiquement prüferien.*

Preuve. Soit $\mathfrak{p} \in X_0$, il existe un anneau de valuation V contenant $A_{\mathfrak{p}}$, et par hypothèse il existe $q \in X_0$ tel que: $T_q < T_V$ ainsi $T_q < T_V < T_{\mathfrak{p}}$, comme A vérifie la condition (*), $q \subset \mathfrak{p}$ donc $q = \mathfrak{p}$ et par suite $T_{\mathfrak{p}} = T_V$.

(2.9) THÉORÈME. *Soit A un anneau de dimension 1, il est équivalent de dire:*

- (a) *A possède la propriété de la borne supérieure.*
- (b) *A est topologiquement prüferien h -semi-local.*

Preuve. (a) \Rightarrow (b) résulte du lemme précédent et de (2.7). (b) \Rightarrow (a) résulte du théorème (1.3).

(2.10) THÉORÈME. *Soit A un anneau de dimension 1, si A possède la propriété de la borne supérieure alors tout sur-anneau de A contenu dans K la possède.*

Preuve. Résulte de (2.9) et de (1.6).

Avec les notations de (1.8), nous avons comme corollaire des Théorèmes (2.9) et (1.8) le résultat suivant:

(2.11) THÉORÈME. *Soit A un anneau de dimension 1, si A possède la propriété de la borne supérieure alors:*

- (i) *A' est un anneau de Prüfer h -semi-local de dimension 1.*
- (ii) *L'application $m' \rightarrow m' \cap A$ est une bijection de $\text{Spect}(A')$ sur $\text{Spect}(A)$.*
- (iii) *A' coïncide avec la quasi-clôture intégrale de A .*

Nous allons maintenant aborder le cas des anneaux noethériens.

(2.12) THÉORÈME. *Pour qu'un anneau noethérien A possède la propriété de la borne supérieure il faut et il suffit qu'il soit topologiquement prüferien.*

Nécessité. Pour tout $\mathfrak{p} \in X_0$, il existe un anneau de valuation discrète V qui domine $A_{\mathfrak{p}}$ ([4]. Prop. (6.5.8)). A possède la propriété de la borne supérieure, donc il existe $\mathfrak{q} \in X_0$ tel que $T_{\mathfrak{q}} < T_V$, nous avons en effet $T_{\mathfrak{q}} = T_V$ (Lemme (1.4)). Soit W un anneau de valuation discrète dominant $A_{\mathfrak{q}}$, nous avons: $T_W < T_{\mathfrak{q}} = T_V$ donc $T_W = T_V$ (Lemme (1.4)). V et W sont alors dépendants ([1]. Ch. 6. 7. Prop. 3), par conséquent $V = W$, car ils sont tous les deux maximaux. ([1]. Ch. 6. 4. Prop. 6). V domine à la fois $A_{\mathfrak{p}}$ et $A_{\mathfrak{q}}$ donc $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ ([1]. Ch. 6. 1. Exer. 1) et $T_{\mathfrak{p}} = T_V$. c.q.f.d.

Suffisance. A est de dimension 1 en vertu de la condition (*) et du Lemme (1.4), il en résulte que A est h -semi-local, et on conclut à l'aide du Théorème (1.3).

(2.13) REMARQUES.

REMARQUE 1. Pour un anneau noethérien A il est équivalent de dire:

(a) A est topologiquement prüferien.

(b) A est de dimension 1 et pour tout $p \in X_0$, $A_{\mathfrak{p}}$ est de Mori unibranche.

Preuve. (a) \Rightarrow (b). $\dim A = 1$ en vertu de la condition (*) et du Lemme (1.4). Soit $p \in X_0$ et B la clôture intégrale de $A_{\mathfrak{p}}$, si $\mathfrak{q} \neq (0)$ est un idéal premier quelconque de B , $T_{B_{\mathfrak{q}}} < T_{\mathfrak{p}}$ donc $T_{B_{\mathfrak{q}}} = T_{\mathfrak{p}}$. D'une part il existe $x \in K^*$ tel que: $xB_{\mathfrak{q}} \subset A_{\mathfrak{p}}$ et ceci montre que $A_{\mathfrak{p}}$ est de Mori. D'autre part B est un anneau de Krull donc il vérifie la condition (*) donc il est local.

(b) \Rightarrow (a) vient du fait que la clôture intégrale B de $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète tel que: $T_B = T_{\mathfrak{p}}$.

Nous rejoignons ainsi la caractérisation des anneaux noethériens possédant la propriété de la borne supérieure donnée dans [6].

REMARQUE 2. Si un anneau localement noethérien possède la propriété de la borne supérieure alors il est noethérien (topologiquement prüferien).

Preuve. Résulte immédiatement du Corollaire (2.7) et de [7] Appendice; lemme de l'exemple 1.

(2.14) THÉORÈME. Soit A un anneau noethérien de dimension 1, A' sa clôture intégrale. Si A est de Mori alors tout $T \in \mathfrak{T}(A)$ est borne supérieure d'une famille de topologies \mathfrak{p}' -adiques ou $\mathfrak{p}' \in \text{Spect}(A')$.

Preuve. Soit $T \in \mathfrak{T}(A)$, les $A'M$ où M parcourt l'ensemble des sous- A -modules ouverts pour T forment encore un système fondamental de voisinages de zéro pour T . En effet; A' est un A -module de type fini, donc il existe $d \in A - (0)$ tel que: $dA' \subset A$, si N est un sous- A -module ouvert pour T , dN est ouvert pour T et nous avons $dN \subset A'dN \subset N$. Donc T est A' -linéaire, or, A' est un anneau de Dedekind donc le Théorème (1.3) permet de conclure.

REFERENCES

- [1] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*.
- [2] ———, *Topologie générale*, Ch. III.
- [3] E. Correl, *Topologies on quotient fields*, Duke Math. J., **35** (1968).
- [4] A. Grothendick, J. A. Dieudonne, *Eléments de Géométrie Algébrique*, Vol. I, Springer-Verlag, 1971.
- [5] J. Heine and S. Warner, *Ring topologies on the quotient field of a Dedekind domain*, Duke Math. J., **40** Number 3 (1973).
- [6] A. Jebli, Thèse, 1975, Rennes.
- [7] M. Nagata, *Local rings*.
- [8] W. Wieslaw, *On topological fields*, Colloquium Mathematicum. Vol. **XXIX**, 1974, Fasc. 1.

Received May 8, 1979 and in revised form November 19, 1982.

UNIVERSITÉ MOHAMMED V
 FACULTÉ DES SCIENCES
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
 RABAT, MAROC