PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol 115, No 1, 1984

SUR CERTAINES EXTENSIONS DU THEOREME D'APPROXIMATION DE BERNSTEIN

D. FEYEL ET A. DE LA PRADELLE

Soit X un espace compact. Nous étendons au cas des espaces vectoriels et des cônes des théorèmes de Silov et de Bishop. Ces derniers permettent de déterminer une fonction continue complexe f appartient à une sous-algèbre fermé A de $\mathscr{C}(X, \mathbf{C})$ si elle se comporte convenablement sur des fermés de X, qui sont définis par A.

Introduction. Soient X un espace compact et A une sous-algèbre unitaire fermée de $\mathscr{C}(X, \mathbf{C})$. Les fonctions réelles de A définissent des classes d'équivalences fermées dans X. Un théorème de Silov affirme qu'une fonction f continue appartient à A si et seulement si la restriction de f à chaque classe d'équivalence appartient à l'espace des restrictions des éléments de A. On peut par récurrence définir des classes de classes: Bishop a poursuivi cette construction transfiniment et démontré un théorème améliorant celui de Silov.

Dans ce travail, nous remplaçons d'abord A par un sous-espace vectoriel E **de** $\mathscr{C}(X, \mathbf{C})$ ou de $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$, et nous définissons les classes de Silov puis de Bishop à l'aide des "multiplicateurs" réels de E. Cela permet d'obtenir des théorèmes généralisant ceux de Silov et Bishop.

Dans un deuxième temps, nous remplaçons E par un cône de fonctions continues sur X à valeurs dans un espace de Banach réel ou complexe et nous étendons la construction et les résultats précédents.

Si E est un cône de fonctions réelles sur $[0,1]$ admettant la fonction $\varphi(x) = x$ comme multiplicateur, on constate que E admet les polynômes de Bernstein comme multiplicateurs en notre sens: on en déduit facilement l'adhérence uniforme de E.

I. Parts de Silov, parts de Bishop. Dans toute la suite, $\mathbf{K}$ désigne l'une des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit X un espace compact. Si E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(X, \mathbf{K})$, on appelle "multiplicateur de E" toute fonction *réelle* continue φ sur X telle que $\varphi f \in E$ pour toute $f \in E$. Les multiplicateurs de E forment une sous-algèbre unitaire de $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$ et définissent donc canoniquement des classes d'équivalence compactes dans X que l'on appellera "parts de Silov" de (X, E). On dira que (X, E) est antisymétrique si X est la seule part de Silov. Remarquons que si E est une sous-algèbre unitaire fermée de $\mathscr{C}(X, \mathbf{K})$, on retrouve la notion introduite originellement par Silov: ce sont les classes d'équivalence définies par l'algèbre des fonctions réelles de E ([**6**]).

Généralisons alors le résultat de Silov ([**3**]), en notant E_K l'espace des restrictions des éléments de E à K et par f_K la restriction à K d'une fonction $f \in \mathscr{C}(X, \mathbf{K})$.

1°. THEOREME. *Soit $f \in \mathscr{C}(X, \mathbf{K})$. On suppose que $f_K \in E_K$ pour toute part de Silov K. Alors f appartient à l'adhérence de E.*

Démonstration. On pourrait adapter la démonstration élémentaire de Silov relative au cas des algèbres unitaires, mais on va plutôt utiliser le lemme suivant (inspiré de Glicksberg, [**4**]) qui sera de nouveau employé plus loin:

2°. LEMME. *Soit λ un élément extrêmal de la boule unité de l'orthogonal de E dans le dual de $\mathscr{C}(X, \mathbf{K})$. Alors λ est une mesure de suppport contenu dans une part de Silov.*

Démonstration du lemme. Il n'y a rien à montrer si $\lambda = 0$. Si $\lambda \neq 0$, soit φ un multiplicateur de E vérifiant $0 < \varphi < 1$. Posons

$$\mu = \frac{\varphi\lambda}{|\lambda|(\varphi)}, \qquad \nu = \frac{(1-\varphi)\lambda}{|\lambda|(1-\varphi)}, \quad \text{donc } \|\mu\| \leq 1 \text{ et } \|\nu\| \leq 1.$$

On a $\lambda = t\mu + (1-t)\nu$ avec $0 < t = |\lambda|(\varphi) < 1$ car $\|\lambda\| = 1$. Les mesures μ et ν sont orthogonales à E, donc $\lambda = \mu = \nu$ puisque λ est extrêmale, puis φ vaut la constante $t = |\lambda|(\varphi)$ presque partout, donc partout sur le support de λ, ce qui achève la démonstration.

Démonstration du théorème. Si f vérifie la condition de l'énoncé, le théorème de Krein-Milmann montre que $\lambda(f) = 0$ pour toute mesure λ orthogonale à E, et le théorème de Hahn-Banach permet de conclure.

Remarquons maintenant en suivant les idées de Silov puis Bishop, que si K est une part de Silov, le couple (K, E_K) définit des parts de Silov relatives dans K. Si λ est une mesure extrêmale du lemme, il est clair qu'elle est orthogonale à E_K dans le dual de $\mathscr{C}(K, \mathbf{K})$ et est toujours extrêmale dans la boule unité. D'après le lemme, λ est portée par une part de Silov relative.

On peut donc construire une suite transfinie de compacts H_α: $H_0 = X$, $H_{\alpha+1}$ est la part de Silov relative à (H_α, E_{H_α}) qui porte λ, et si β est un ordinal limite, $H_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} H_\alpha$. Il existe un ordinal α_0 tel que $H_{\alpha_0} = H_{\alpha_0+1}$ car la suite décroît, et $E_{H_{\alpha_0}}$ est donc antisymétrique. Appelons alors antisymétrique tout compact H tel que E_H soit antisymétrique: on a prouvé que λ était portée par un compact antisymétrique.

Par ailleurs, on voit facilement que les compacts antisymétriques maximaux que nous appellerons "parts de Bishop" forment une partition de X, et que tout compact antisymétrique est contenu dans une part de Bishop. Si E est une sous-algèbre unitaire fermée de $\mathscr{C}(X, \mathbf{K})$, on retrouve les notions connues: on a donc généralisé un résultat de Bishop:

3°. THEOREME. *Soit $f \in \mathscr{C}(X, \mathbf{K})$. On suppose que f_K appartient à E_K pour toute part de Bishop K. Alors f est adhérente à E.*

On remarque par ailleurs qu'une part de Bishop est toujours l'intersection de la suite bien ordonnée des parts de Silov relatives les unes aux autres qui la contiennent: cela résulte de ce qu'une part de Bishop est toujours incluse dans une part de Silov car tout multiplicateur de E est constant sur tout ensemble antisymétrique.

On remarque aussi que E est un A-module où A est une algèbre unitaire de $\mathscr{C}(X, \mathbf{K})$, et toute part de Bishop pour E est contenue dans une part de Bishop pour A, donc le Théorème 3° généralise un résultat de Glicksberg ([**14**] p. 434, remarque).

II. Cônes convexes. On remplace ici E par un cône convexe.

4°. DEFINITION. Soit C un sous-cône convexe de $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$. On appelle multiplicateur de C toute fonction φ réelle continue sur X et vérifiant:

(a) $0 \le \varphi \le 1$

(b) pour toutes $f, g \in C$, la fonction $\varphi f + (1 - \varphi) g$ appartient à $\mathbf{C}$.

On constate que les multiplicateurs forment un ensemble convexe stable par multiplications et contenant les constantes comprises entre 0 et 1. Plus généralement, si φ est une multiplicateur, $\varphi^p(1 - \varphi)^q$ l'est aussi pour tous entiers p et $q \ge 0$.

On étend de manière évidente la définition des parts de Silov. (X, C) est antisymétrique si X est la seule part de Silov.

Si C est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$, on retrouve les parts de Silov du n° I.

Un compact $K \subset X$ est dit antisymétrique pour C si (K, C_K) est antisymétrique. Les compacts antisymétriques maximaux appelés "parts de Bishop" forment une partition de X, et tout compact antisymétrique est contenu dans une part de Bishop.

Comme plus haut, toute part de Bishop est l'intersection de la suite bien ordonnée des parts de Silov relatives qui la contiennent. Le Théorème 3° se laisse généraliser en:

5°. THEOREME. *Soit $f \in \mathscr{C}(X, \mathbf{R})$. On suppose que f_K appartient à C_K pour toute part de Bishop K. Alors f est adhérente à* $\mathbf{C}$.

Démonstration. Nous aménageons d'abord le Lemme 2°: soit λ une mesure extrêmale dans la boule unité du polaire de C dans le dual de $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$, et montrons comme plus haut que λ est portée par une part de Silov. C'est clair si $\lambda = 0$. Si $\lambda \neq 0$, soit φ un multiplicateur de C. Si φ n'est pas constante sur le support de λ, on a $|\lambda|(\varphi) \neq 0$, et $|\lambda|(1 - \varphi) \neq 0$ puis en posant

$$\mu = \frac{\varphi\lambda}{|\lambda|(\varphi)}, \qquad \nu = \frac{(1 - \varphi)\lambda}{|\lambda|(1 - \varphi)},$$

on trouve deux mesures μ et ν vérifiant $\|\mu\| \leq 1$, $\|\nu\| \leq 1$ et $\mu(f) \geq 0$, $\nu(f) \geq 0$ car $0 \in C$. On a $\lambda = t\mu + (1 - t)\nu$ avec $t = |\lambda|(\varphi)$, mais λ est extrêmale et par suite $\lambda = \mu = \nu$ ce qui implique $\varphi = |\lambda|(\varphi)$, $|\lambda|$-presque partout, donc partout sur le support de λ, en contradiction avec l'hypothèse.

Ainsi λ est portée par une part de Silov. Le même raisonnement par récurrence transfinie qu'au Théorème 3° montre que λ est portée par une part de Bishop. On peut alors conclure comme plus haut à l'aide des théorèmes de Krein-Milmann et Hahn-Banach.

6°. EXEMPLES. (a) Soit C un cône convexe fermé dans $\mathscr{C}^+([0,1])$ admettant la fonction x comme multiplicateur. Alors $C = \mathscr{C}^+([0,1])$, car toute part de Silov est réduite à un point.

Si l'on prend pour C le cône des fonctions $f \geq 0$ qui sont limites uniformes de leurs polynômes de Bernstein

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(k/n) x^k (1 - x)^{n-k}$$

la condition imposée est un lemme classique; cela redémontre le théorème d'approximation de Bernstein.

(b) Soit C le cône des fonctions de la forme $f(x)e^{-x}$ pour $x \geq 0$ où f est une fraction rationnelle bornée. C est un sous-cône de $\mathscr{C}([0, \infty])$. Tout point est une part de Silov, donc l'adhérence de C est $\mathscr{C}_0([\,0, \infty[\,)$. On pourrait évidemment remplacer e^{-x} par toute autre fonction tendant vers 0 à l'infini.

Si l'on remarque que les Théorèmes 3° et 5° valent aussi pour X localement compact et $\mathscr{C}_0(X)$ au lieu de $\mathscr{C}(X)$, on voit que les fonctions $e^{iax}e^{-x}$ forment un ensemble total dans $\mathscr{C}_0([\,0, \infty[\,)$ ce qui est bien connu.

(c) Soient X et Y deux espaces compacts, et soit C l'ensemble des $h \in \mathscr{C}^+(X \times Y)$ qui s'écrivent:

$$h(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) g_j(y)$$

où les $a_{ij} \in [\,0, +\infty[$, où les f_i (resp. les g_j) forment une partition finie de l'unité sur X (resp. Y). C est un cône convexe et admet comme multiplicateur toute fonction ne dépendant que de x (resp. de y). Les parts de Silov sont donc ponctuelles, et par suite C est partout dense dans $\mathscr{C}^+(X \times Y)$.

(d) Soit $X = [0,1]^2$. Soit m la mesure de Lebesgue sur X. Notons E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues f sur X telles que:

$$\iint f(x, y) u(x)\, dm(x, y) = 0$$

pour toute $u \in \mathscr{C}[0,1]$. On voit aisément que toute fonction ne dépendant que de x est un multiplicateur pour E, et que tout segment vertical est antisymétrique. Les parts de Silov (resp. Bishop) sont donc les segments verticaux de longueur 1.

III. Fonctions à valeurs vectorielles. On fixe ici un espace de Banach B.

7°. DEFINITION. *Soit C un sous-cône convexe de $\mathscr{C}(X, B)$. On appelle multiplicateur de C toute fonction réelle continue sur X vérifiant*:

(a) $0 \leq \varphi \leq 1$

(b) *pour toutes $f, g \in C$, la fonction $\varphi f + (1 - \varphi) g$ appartient à C.*

On constate immédiatement que les définitions du n° II s'étendent sans aucun changement. Les Théorèmes 3° et 5° deviennent:

8°. THEOREME. *Soit $f \in \mathscr{C}(X, B)$. On suppose que f_K appartient à C_K pour toute part de Bishop K. Alors f est adhérente à C.*

Démonstration. Soit Y la boule unité faible du dual de B. Considérons l'isométrie canonique $f \mapsto \tilde{f}$ de $\mathscr{C}(X, B)$ dans $\mathscr{C}(X \times Y)$ définie par

$f(x, y') = \langle y', f(x)\rangle$. Soit $\tilde{C}$ l'image de C: on va appliquer le Théorème 5° à $\tilde{C}$. Soit H un compact antisymétrique dans $X \times Y$ relativement à $\tilde{C}$, montrons que sa première projection $\pi(H)$ est antisymétrique pour C. Soit φ un multiplicateur de $C_{\pi(H)}$, il est clair que $\psi(x, y') = \varphi(x)$ est un multiplicateur de $\tilde{C}_H$, donc ψ est constante sur H et φ est constante sur $\pi(H)$.

Si maintenant f vérifie les conditions du théorème, $\tilde{f}_{K\times Y}$ appartient à $\tilde{C}_{K\times Y}$ dès que K est antisymétrique par rapport à C, donc a fortiori $\tilde{f}_H$ appartient à $\tilde{C}_H$ dès que H est antisymétrique par rapport à $\tilde{C}$. Alors $\tilde{f}$ adhère à $\tilde{C}$, et par suite f adhère à C.

9°. EXEMPLE. Soit S un cône convexe fermé dans B, et soit C le cône convexe des $f \in \mathscr{C}(X, B)$ qui s'écrivent $f(x) = \Sigma f_i(x) b_i$ avec des $b_i \in S$, et où les f_i forment une partition finie de l'unité sur X. Il est clair que toute fonction φ continue sur X, $0 \leq \varphi \leq 1$, est un multiplicateur de C. On en déduit que C est partout dense dans $\mathscr{C}(X, S)$.

IV. Isométries canoniques. En suivant Glicksberg ([4] p. 420), on a le lemme fondamental et d'ailleurs classique:

10°. LEMME. *Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(X)$, on a pour toute mesure μ sur X:*

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Inf}\{\|\mu - \lambda\| : \lambda \perp E\} = \operatorname{Sup}\{|\mu(f)| : f \in E, \|f\| \leq 1\}$$

où $\lambda \perp E$ signifie que la mesure λ s'annule sur E.

On remarque en effet que le membre de gauche est la norme de l'image de μ dans le quotient $\mathscr{M}(X)/E^{\perp}$ ($E^{\perp}$ est l'orthogonal de E, $\mathscr{M}(X)$ l'espace des mesures de Radon sur X), et le membre de droite la norme de la restriction de μ à E: l'égalité provient alors du théorème de Hahn-Banach. Si K est compact et μ portée par K, on a donc aussi:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &\operatorname{Inf}\{\|\mu - \lambda\| : \lambda \perp E, \lambda \text{ portée par } K\} \\ &\qquad = \operatorname{Sup}\{\mu(f) : f \in E, \|f_K\| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, si E est un espace de Banach, E' désigne son dual topologique et E'' le dual topologique de E' muni de sa topologie d'espace de Banach. Si F est un espace vectoriel en dualité avec E, $\sigma(E, F)$ désigne la topologie faible sur E défini par F.

11°. DEFINITION. Nous dirons qu'un compact K est distingué s'il existe un noyau N, c'est à dire une application linéaire continue de $\mathscr{C}(X)$

dans l'espace des fonctions bornées universellement mesurables, ayant les propriétés suivantes:

(a) la mesure $\varepsilon_x N$: $\varphi \mapsto N\varphi(x)$ est portée par K pour tout $x \in E$.

(b) $Nf_K = f_K$ pour toute $f \in \mathscr{C}(X)$.

(c) Pour toute $f \in E$, la fonction Nf appartient à l'adhérence de E dans $\mathscr{C}(X)''$ muni de la topologie $\sigma(\mathscr{C}(X)'', \mathscr{M}(X))$.

(d) $\|N\| \leq 1$, où $\|N\|$ est la norme opérateur de N.

On notera $E_0(K)$ l'ensemble des fonctions de E qui s'annulent sur K.

12°. THEOREME. *On suppose que E est fermé et que K est un compact distingué. Alors l'application canonique* $E/E_0(K) \overset{\rho}{\to} E_K$ *est une isométrie (surjective).*

Démonstration. Il suffit de voir que sa transposée $(E/E_0(K))' \overset{\rho'}{\leftarrow} E'_K$ est une isométrie surjective. Montrons d'abord que c'est une isométrie. Soit $u \in E'_K$ représentée par une mesure μ portée par K d'après l'isométrie canonique (2), soit ν une mesure s'annulant sur $E_0(K)$ et représentant $\rho'(u)$. La norme de $\rho'(u)$ vaut $\operatorname{Sup}\{|\nu(f)|: f \in E, \|\dot{f}\| \leq 1\}$ où $\dot{f}$ est la classe de f suivant $E_0(K)$. Dans cette expression, on peut remplacer ν par μ car ν et μ coïncident sur E, on peut ensuite remplacer $\dot{f}$ par f car μ est portée par K: on obtient ainsi le second membre de (1). Il reste à prouver que pour μ les premiers membres de (1) et (2) coïncident. Or, on a:

$$\begin{aligned}\operatorname{Inf}\{\|\mu - \lambda\| : \lambda \perp E\} &\leq \operatorname{Inf}\{\|\mu - \lambda\| : \lambda \perp E, \lambda \text{ portée par } K\} \\ &\leq \operatorname{Inf}\{\|\mu - \lambda N\| : \lambda \perp E\} = \operatorname{Inf}\{\|\mu N - \lambda N\| : \lambda \perp E\} \\ &\leq \operatorname{Inf}\{\|\mu - \lambda\| : \lambda \perp E\}\end{aligned}$$

donc ρ' est une isométrie.

Soit maintenant F l'image de ρ': elle est partout dense pour la topologie de la convergence simple sur les éléments de $E/E_0(K)$ car ρ est injective. Sa trace sur la boule unité est faiblement fermée pour la même topologie car ρ' est continue. Il résulte d'un théorème de Banach-Dieudonné (5) que F est faiblement fermé (car E est complet). Ainsi ρ' est surjective.

13°. REMARQUE. Si K est un compact réunion de parts de Silov, on peut montrer que ρ' est surjective sans supposer que E est fermé, et en prenant $Nf = 1_K f$, on trouve encore que ρ est une isométrie.

14°. PROPOSITION. *Dans les mêmes hypothèses qu'au Théorème* 12°, *et si* $f \in E$, *la fonction* Nf *est limite faible d'éléments de* $f + E_0(K)$.

Démonstration. Soit μ une mesure s'annulant sur $E_0(K)$. Comme seule sa valeur sur E nous intéresse et que ρ' est bijective, on peut supposer que μ est portée par K. On a alors $\mu(f - Nf) = 0$ d'après le (b) du 11°. On conclut en remarquant que pour $f \in E$, Nf adhère faiblement à E d'après le (c) du 11°.

15°. EXEMPLES. (a) On dit que K est "frontalier" si le noyau $f \mapsto 1_K f$ vérifie les propriétés de la Définition 11°.[1] On voit sans difficulté que toute intersection de frontaliers est un frontalier, que tout frontalier relatif à un frontalier est un frontalier dans X, et que les parts de Silov sont des frontaliers: on en déduit que les parts de Bishop sont aussi des compacts frontaliers.

On généralise alors un résultat de Bishop: si K est une part de Bishop et si E est fermé dans $\mathscr{C}(X)$, E_K est lui aussi fermé dans $\mathscr{C}(K)$.

(b) Soit X le disque unité fermé de $\mathbf{C}$: $X = \{z: |z| \leq 1\}$. Prenons pour E l'espace des fonctions continues sur X, harmoniques dans $\mathring{X}$. Soit $K = \{z \in X: |z| = 1, \text{Ré}\, z \geq 0\}$. Définissons Nf pour $f \in \mathscr{C}(X)$: on pose $Nf(z) = f(z)$ si $z \in K$, $Nf(z) = 0$ si $|z| = 1$ et $\text{Ré}\, z < 0$, et on prolonge Nf à l'intérieur de X à l'aide du noyau de Poisson. Les propriétés (a), (b), (c), (d) sont immédiates, donc K est un compact distingué. Par ailleurs K n'est pas "frontalier", sinon 1_K adhèrerait faiblement à E, ce qui donnerait $\sigma(K) = 0$ où σ désigne la mesure de Lebesgue normalisée sur la circonférence.

On peut voir qu'un compact H de la circonférence est un pic faible si et seulement s'il est de mesure de Lebesgue nulle.

16°. *Extension à un espace de Banach*. On considère un espace de Banach B, et un sous-espace E de $\mathscr{C}(X, B)$. On dit que K est distingué s'il existe une application linéaire N de $\mathscr{C}(X)$ dans les fonctions bornées scalairement universellement mesurables, vérifiant (a), (b), (d) du 11° et (c') pour toute $f \in E$, la fonction Nf (integrable faible) appartient à l'adhérence faible de E dans $\mathscr{C}(X, B)''$ muni de la topologie $\sigma(\mathscr{C}(X, B)'', \mathscr{C}(X, B)')$.

Le résultat suivant généralise le Théorème 12°:

17°. THEOREME. *On suppose que E est fermé et que K est un compact distingué. Alors l'application $E/E_0(K) \xrightarrow{\rho} E_K$ est une isométrie.*

---

[1] Cf. [**1**] où les compacts frontaliers sont appelés "parties frontaliers".

Démonstration. On plonge isométriquement B dans $\mathscr{C}(Y)$ où Y est la boule unité faible de B', et l'on définit le noyau $\tilde{N}$ sur $\mathscr{C}(X \times Y)$ par la formule $\tilde{N}\varphi(x, y) = \int \varphi(t, y)\, d\varepsilon_x N(t)$.

On vérifie les propriétés (a), (b), (c), (d) pour le noyau $\tilde{N}$, d'ou l'on déduit que $K \times Y$ est distingué pour l'image $\tilde{E}$ de E par le plongement canonique de B. D'après le Théorème 12°, l'application canonique de $\tilde{E}/\tilde{E}_0(K \times Y)$ sur $\tilde{E}_{K\times Y}$ est une isométrie, et donc aussi celle de $E/E_0(K)$ sur E_K.

RÉFÉRENCE

[1] A. Bernard, *Caractérisation de certaines parties d'un espace compact muni d'un espace vectoriel ou d'une algèbre de fonctions continues*, Ann. Inst. Fourier, t. **XVII**, 2, (1967), 369–382.

[2] E. Bishop, *A generalization of the Stone-Wëierstrass theorem*, Pacific J. Math. **11** (1961), 777–783.

[3] I. M. Gelfand, D. A. Raikov et G. E. Silov, *les Anneaux Normés Commutatifs*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[4] I. Glicksberg, *Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry*, Trans. Amer. Soc., **105** (1962), 415–435.

[5] A. Grothendieck, *Espaces vectoriels topologiques*, Publi. da Sociedade de Mat. de S. Paulo, (1964).

[6] G. E. Silov, *On rings of functions with uniform convergence*, Ukrain Math. Z., **III** (1951), 404–411 (en russe).

Received January 26, 1983 and in revised form January 18, 1984.

E.R.A. N° 294 AU C.N.R.S., TOUR 46 - 0
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
4, PLACE JUSSIEU, PARIS V