PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 125, No. 2, 1986

ALGEBRES DE KAC MOYENNABLES

MICHEL ENOCK AND JEAN-MARIE SCHWARTZ

We generalize the classical theory of amenable locally compact groups to Kac algebras. Most of the equivalent definitions of amenability are translated into the formalism of Kac algebras and still remain equivalent. Among others, we see that every "group dual" (i.e. symmetric Kac algebra) is amenable.

Results on actions of amenable groups on von Neumann algebras are extended as well; this allows us to obtain new properties on group co-actions (i.e. actions of "group duals").

Introduction. La théorie des groupes moyennables demeure, depuis von Neumann, un centre d'intérêt en analyse harmonique pour de nombreux mathématiciens; elle concerna d'abord les groups discrets, puis les groupes localement compacts quelconques G. Le résultat essentiel, dû à A. Hulanicki [**13**], montre l'équivalence entre l'existence d'une "moyenne invariante à gauche sur $L^\infty(G)$" et le fait que toutes les représentations irréductibles (où, grâce à R. Godement [**9**], la représentation triviale) sont faiblement contenues, au sens de J. M. G. Fell [**8**], dans la représentation régulière gauche. Pour ces questions, on se reportera à [**10**]. Un autre résultat important, peut-être moins célèbre, dû à H. Leptin [**14**], énonce qu'un groupe localement compact est moyennable si et seulement si son algèbre de Fourier (au sens de P. Eymard [**7**]) possède une unité approchée.

Dans la lignée des travaux de nombreux prédécesseurs, la théorie des algèbres de Kac a été introduite, séparément par les auteurs [**4**], [**15**] et par G. I. Kac et L. S. Vainerman [**19**], pour fournir une catégorie naturelle à l'intérieur de laquelle s'exprimerait facilement la dualité des groupes localement compacts. Cette théorie s'est révélée apte à rendre compte des résultats concernant notamment les actions des groupes localement compacts sur une algèbre de von Neumann ([**3**], [**5**]); le théorème de dualité de M. Takesaki [**18**] le laissait d'ailleurs prévoir et a dû être une motivation importante pour son article [**17**]. De plus ([**2**]), de nombreuses notions d'analyse harmonique sesont aussi naturellement généralisées dans le cadre des algèbres de Kac.

Dans cet article, nous montrons que la théorie des groupes moyennables, et en particulier les deux résultats cités plus haut de Hulanicki et Leptin s'étendent facilement au cadre des algèbres de Kac; cela peut paraître surprenant dans la mesure où la moyennabilité n'est pas reliée à la dualité des groupes localement compacts. Mais, cela constitue un élément supplémentaire permettant de penser que les algèbres de Kac rendent compte de façon adéquate des problèmes structurels sur les groupes localement compacts. Comme, pour tout groupe localement compact G, l'algèbre $L^1(G)$ possède une unité approchée, on verra en particulier que le "dual" de G est toujours moyennable. Cela entraîne des démonstrations particulièrement rapides dans le cas des coactions.

Comme dans le cas des groupes localement compacts (cf. **[1]**), les liens entre moyennabilité et injectivité des algèbres de von Neumann se démontrent aisément; comme il est usuel dans la théorie des algèbres de Kac, nous généralisons ainsi des résultats connus dans le cas des groupes, et démontrons des résultats nouveaux dans celui des "duaux de groupes".

Les premiers travaux dans cette voie étaient dûs à D. Voiculescu **[20]**, qui donnait comme ouvertes les généralisations des théorèmes d'Hulanicki et de Leptin.

1. Préliminaires et notations.

1.1. *Rappel.* On appelle algèbre de Hopf-von Neumann involutive un triplet (M, Γ, κ) où:

(i) M est une algèbre de von Neumann;
(ii) Γ est un morphisme normal injectif de M dans $M \otimes M$, tel que $(\Gamma \otimes i)\Gamma = (i \otimes \Gamma)\Gamma$ (Γ s'appelle le coproduit);
(iii) κ est un antiautomorphisme involutif de M;
(iv) $\varsigma\Gamma\kappa = (\kappa \otimes \kappa)\Gamma$ (où ς est l'automorphisme de $M \otimes M$ qui envoie $x \otimes y$ sur $y \otimes x$).

De manière équivalente, cela revient à munir le prédual M_* d'une structure d'algèbre de Banach involutive. Ces objets ont été introduits par J. Ernest **[6]**.

1.2. *Rappel.* On appelle algèbre de Kac un quadruplet $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ où:

(i) (M, Γ, κ) est une algèbre de Hopf-von Neumann involutive;
(ii) φ est un poids normal semi-fini et fidèle sur M;
(iii) pour tout x de M^+, on a: $(i \otimes \varphi)(\Gamma(x)) = \varphi(x)1$;
(iv) pour tous x et y de $\mathcal{N}_\varphi$, on a:
$$(i \otimes \varphi)\big((1 \otimes y^*)\Gamma(x)\big) = \kappa\big((i \otimes \varphi)\big(\Gamma(y^*)(1 \otimes x)\big)\big);$$
(v) pour tout t de $\mathbf{R}$, on a: $\kappa\sigma_t^\varphi = \sigma_{-t}^\varphi\kappa$.

1.3. *Rappel.* Les algèbres de Kac ont été introduites pour rendre compte de la dualité des groupes localement compacts. A tout groupe localement compact G, on peut associer (**[4]**, Chap. 8) deux algèbres de Kac $KS(G)$ et $KA(G)$ dont les algèbres de von Neumann sous-jacentes sont, respectivement, l'algèbre $\mathscr{M}(G)$ engendrée par la représentation régulière gauche λ_G, et l'algèbre $L^\infty(G)$ des fonctions essentiellement bornées par rapport à une mesure de Haar à gauche sur G.

1.4. *Rappel*. Soit $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac. On définit une représentation λ, dite représentation de Fourier, de l'algèbre de Banach involutive M_* dans l'espace hilbertien H_φ associé au poids φ. On sait alors munir l'algèbre de von Neumann endengrée $M\hat{}$ d'une structure d'algèbre de Kac, duale de $\mathbf{K}\hat{}$. On a, de plus:

(i) $\mathbf{K}\hat{}\hat{}$ est isomorphe à $\mathbf{K}$;

(ii) $KA(G)\hat{}$ est isomorphe à $KS(G)$.

L'algèbre de von Neumann $M\hat{}$ est en position standard par rapport à H_φ, au sens de [**11**]. Pour simplifier, on note H au lieu de H_φ. Tous les éléments de M_* (resp. $\hat{M}_*$) sont donc de la forme $x \mapsto (x\xi \mid \eta)$ où ξ, η sont dans H et x dans M (resp. $\hat{M}$); on notera ces formes vectorielles $\omega_{\xi,\eta}$ (resp. $\hat{\omega}_{\xi,\eta}$).

1.5. Lemme ([**4**], 4.3.9). *Soit* $\mathbf{K}$ *une algèbre de Kac. Il existe un opérateur unitaire* $W(\mathbf{K})$ *dans* $M \otimes M\hat{}$ *qui vérifie* (*on le note* W *pour simplifier*):

(i) $(\hat{J} \otimes J)W(\hat{J} \otimes J) = W^*$ (*on note respectivement* J *et* $\hat{J}$ *les involutions isométriques* J_φ *et* $J_{\hat{\varphi}}$ *canoniquement associées aux poids* φ *et* $\hat{\varphi}$);

(ii) $\Gamma(x) = W(1 \otimes x)W^*$ *pour tout* x *de* M;

(iii) $(W(\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes \delta) = (\beta \mid \lambda(\omega_{\gamma,\alpha})\delta)$ *pour tous* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *de* H;

(iv) $W(\hat{\mathbf{K}}) = \sigma W^* \sigma$;

(v) $(W(\alpha \otimes \beta) \mid \gamma \otimes \delta) = (\hat{\lambda}(\hat{\omega}_{\beta,\delta})\alpha \mid \gamma)$ *pour tous* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *de* H, *que l'on obtient en appliquant* (iii) *à* $W(\mathbf{K}\hat{})$ *et en utilisant* (iv).

1.6. Lemme. *Soient* ξ_1, ξ_2 *et* η *dans* H. *On a*:

$$\big(W(\eta \otimes \xi_1) \mid \eta \otimes \xi\big) = \big(W^*(\hat{J}\eta \otimes \xi_1) \mid \hat{J}\eta \otimes \xi_2\big)$$

Démonstration. D'après 1.5 (i), on a:

$$\begin{aligned}
\big(W(\eta \otimes \xi_1) \mid \eta \otimes \xi_2\big) &= \big((\hat{J} \otimes J)W^*(\hat{J} \otimes J)(\eta \otimes \xi_1) \mid \eta \otimes \xi_2\big)\\
&= \big(W(\hat{J}\eta \otimes J\xi_2) \mid \hat{J}\eta \otimes J\xi_1\big)\\
&= \big(J\xi_2 \mid \lambda(\omega_{\hat{J}\eta})J\xi_1\big) \qquad \text{d'après 1.5 (iii)}\\
&= \big(J\lambda(\omega_{\hat{J}\eta})J\xi_1 \mid \xi_2\big)\\
&= \big(\lambda(\omega_{\hat{J}\eta})\xi_1 \mid \xi_2\big) \qquad \text{d'après [4], 2.2.3}\\
&= \big(\hat{J}\eta \otimes \xi_1 \mid W(\hat{J}\eta \otimes \xi_2)\big) \qquad \text{d'après 1.5 (iii),}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

1.7. *Rappel.* Soit **K** une algèbre de Kac; on notera $W^*(\mathbf{K})$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Banach involutive M_*. Cette algèbre de von Neumann peut être munie d'une structure d'algèbre de Hopf-von Neumann involutive, et son prédual, noté $B(\mathbf{K})$ est ainsi muni d'une structure d'algèbre de Banach involutive. De plus, $B(KA(G))$ est l'algèbre $B(G)$ introduite par P. Eymard [7] et $B(KS(G))$ est isomorphe à l'algèbre $M^1(G)$ des mesures bornées sur G.

1.8. *Rappel.* On notera $C^*(\mathbf{K})$ la C^*-algèbre enveloppante de l'algèbre de Banach involutive M_* et $C^*_\lambda(\mathbf{K})$ la C^*-algèbre endendrée par la représentation λ. On peut identifier $C^*_\lambda(\mathbf{K})$ au quotient de $C^*(\mathbf{K})$ par le noyau du prolongement canonique de λ à $C^*(\mathbf{K})$; le dual de $C^*_\lambda(\mathbf{K})$ s'identifie alors à un sous-espace fermé de $B(\mathbf{K})$, noté $B_\lambda(\mathbf{K})$. En fait, $B_\lambda(\mathbf{K})$ est un idéal autoadjoint de $B(\mathbf{K})$; on l'appelle l'algèbre d'Eymard de **K** [**1**].

1.9. DÉFINITIONS. Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann. On appelle action de l'algèbre de Kac $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ sur $\mathscr{A}$ un morphisme injectif α de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A} \otimes M$ tel que $\alpha(1) = 1$ et $(\alpha \otimes i)\alpha = (i \otimes \Gamma)\alpha$. Soit α une action de **K** sur $\mathscr{A}$; on peut définir ([3], 2.2), un produit croisé de $\mathscr{A}$ par **K** selon α, qu'on notera $\mathscr{W}^*(\alpha)$. Si α(resp. β) est une action (resp. une coaction) d'un groupe localement compact G sur $\mathscr{B}$, on utilisera plutôt la notation $\mathscr{A} \rtimes_\alpha G$ (resp. $\mathscr{B} \ltimes_\beta G$).

Toute action α de $KA(G)$ sur $\mathscr{A}$ s'identifie à une action continue $g \mapsto \alpha_g$ de G sur $\mathscr{A}$ ([3], Prop. 1.3): pour tout x de $\mathscr{A}$, $\alpha(x)$ est égal à la fonction $g \mapsto \alpha(x)$, continue bornée de G dans $\mathscr{A}$, considérée comme élément de $\mathscr{A} \otimes L^\infty(G)$. Une action de $KS(G)$ sur $\mathscr{A}$ est aussi appelée une "coaction" de G sur $\mathscr{A}$. On pose

$$\mathscr{A}^\alpha = \{x \in \mathscr{A} \colon \alpha(x) = x \otimes 1\}$$

On dira que $\mathscr{A}^\alpha$ est la sous algèbre des éléments invariants par α.

1.10 LEMME. *Soient H un espace hilbertien, $\mathscr{J}$ une involution isométrique antilinéaire de H dans H. On notera $\mathscr{P}$ le cône convexe fermé engendré dans $H \otimes H$ par les vecteurs de la forme $\xi \otimes \mathscr{J}\xi$, où ξ appartient à H. Soit Ξ un vecteur de $H \otimes H$. On a*:

(i) *le quadruplet $(\mathscr{L}(H), H \otimes H, \sigma(\mathscr{J} \otimes \mathscr{J}), \mathscr{P})$, où $\mathscr{L}(H)$ agit sur $H \otimes H$ par le représentation $x \mapsto 1 \otimes x$, est une forme standard au sens de* [**11**];

(ii) *il existe une isométrie partielle u de $\mathscr{L}(H)$, telle que*:

(a) $\Xi \in$ *support* $(u \otimes 1)$

(b) $(u \otimes 1)\Xi \in \mathscr{P}$.

Démonstration. En considérant $\mathscr{J}$ comme un isomorphisme de H sur $\overline{H}$, on voit que $\mathscr{J} \otimes i$ est un isomorphisme de $H \otimes H$ sur $\overline{H} \otimes H$ qui transpote le quadruplet ci-dessus en la représentation standard habituelle de $\mathscr{L}(H)$ sur $\overline{H} \otimes H$, d'où (a).

D'après **[11]**, 2.17 il existe un unique vecteur Ξ' de $\mathscr{P}$ tel que les états vectoriels sur $\mathscr{L}(H)$ associés respectivement à Ξ et à Ξ' que l'on notera θ_Ξ et $\theta_{\Xi'}$ soient égaux.

Autrement dit: $((1 \otimes x)\Xi \mid \Xi) = ((1 \otimes x)\Xi' \mid \Xi')$ pour tout x de $\mathscr{L}(H)$. Cela entraîne, en particulier:

$$\|(1 \otimes x)\Xi\| = \|(1 \otimes x)\Xi'\| \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathscr{L}(H),$$

d'où l'existence d'une isométrie partielle U de $H \otimes H$ sur $H \otimes H$ telle que support $U = \{(1 \otimes \mathscr{L}(H))\Xi\}^-$ et

$$U(1 \otimes X)\Xi = (1 \otimes x)\Xi' \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathscr{L}(H).$$

On vérifie facilement que U appartient à $\mathscr{L}(H) \otimes \mathbf{C}$, d'où (ii).

2. Définitions et propriétés

2.1. Définition. Soient E un espace vectoriel topologique et C une partie convexe compacte de E. On notera $\operatorname{Aff} C$ l'ensemble des applications affines et continues de C dans lui-même. Il est clair que $\operatorname{Aff} C$, muni de la topologie de la convergence simple, est un espace compact; sauf mention expresse du contraire, on le considérera muni de cette topologie dans toute la suite.

Il est immédiat que $\operatorname{Aff} C$ est un espace convexe, stable par composition des applications.

2.2. Définition. Avec les notations précédentes, on appellera action de $\mathbf{K}$ sur C une application T de M_*^{+1} dans $\operatorname{Aff} C$ telle que:

(i) T soit continue lorsque l'on munit M_*^{+1} de la topologie normique;

(ii) T soit affine;

(iii) pour tous ω_1 et ω_2 de M_*^{+1}, on ait:

$$T(\omega_1 * \omega_2) = T(\omega_1) \circ T(\omega_2).$$

On dira que T possède un point fixe s'il existe x dans C tel que $T(\omega)(x) = x$ pour tout ω de M_*^{+1}.

2.3. Exemple. Soit α une action de $\mathbf{K}$ sur une algèbre de von Neumann $\mathscr{A}$. On montre sans difficulté qu'on peut lui associer une action T de $\mathbf{K}$ sur $\mathscr{A}^{*+1}$, en posant, pour tout μ de $\mathscr{A}^{*+1}$ et tout ω de M_*^{+1}:

$$T(\omega)(\mu) = \mu((i \otimes \omega)\alpha).$$

2.4. THÉORÈME. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *il existe famille filtrante* $\{\xi_j\}$ *de vecteurs unitaires de* H *telle que* $\hat{\lambda}(\omega_{\xi_j})$ *converge faiblement vers* 1;

(ii) *la représentation triviale de* $\mathbf{K}$ *est faiblement contenue dans la représentation de Fourier* λ;

(iii) *l'algèbre d'Eymard* $B_\lambda(\mathbf{K})$ *est unifère*;

(iv) *les algèbres de Banach* $B_\lambda(\mathbf{K})$ *et* $B(\mathbf{K})$ *sont égales*;

(v) *le prolongement canonique de* λ *à* $C^*(\mathbf{K})$ *réalise un isomorphisme entre* $C^*(\mathbf{K})$ *et* $C^*_\lambda(\mathbf{K})$;

(vi) *il existe une famille filtrante* $\{\xi_j\}$ *de vecteurs unitaires de* H *telle que* $\|W(\eta \otimes \xi_j) - \eta \otimes \xi_j\|$ *tende vers* 0 *pour tout* η *de* H;

(vii) (a) (*resp.* (vii)(b)) $\hat{M}_*$ *possède une unité approchée à gauche* (*resp. à droite*);

(viii) *il existe un élément* m *de* M^{*+1} *tel que*:

$$m\big((\omega \otimes i)(1 \otimes y^*)\Gamma(x)\big) = m\big((\omega_{\text{o}}\kappa \otimes i)\Gamma(y^*)(1 \otimes x)\big)$$

pour tout ω *de* M_* *et tous* x, y *de* M;

(ix) (a) (*resp.* (ix)(b)) *il existe un élément* m *de* M^{*+1} *tel que*:

$$m((\omega \otimes i)\Gamma(x)) = m(x)\omega(1)$$

$$(\textit{resp. } m((i \otimes \omega)\Gamma(x)) = m(x)\omega(1))$$

pour tout ω *de* M_* *et tout* x *de* M;

(x) (a) (*resp.* (x)(b)) *il existe une famille filtrante* $\{\omega_j\}$ *d'éléments de* M_*^{+1} *telle que, pour tout* ω *de* M_*^{+1}, $\omega * \omega_j - \omega_j$ (*resp.* $\omega_j * \omega - \omega_j$) *tende vers* 0 *pour la topologie* $\sigma(M_*, M)$;

(xi) (a) (*resp.* (xi)(b)) *il existe une famille filtrante* $\{\omega_j\}$ *d'éléments de* M_*^{+1} *telle que, pour tout* ω *de* M_*^{+1}, $\|\omega * \omega_j - \omega_j\|$ (*resp.* $\|\omega_j * \omega - \omega_j\|$) *tende vers* 0;

(xii) *pour tout convexe compact* C *et toute action de* $\mathbf{K}$ *sur* C, *celle-ci possède un point fixe*;

(xiii) *pour toute action* α *de* $\mathbf{K}$ *sur une algèbre de von Neumann* $\mathscr{A}$, *il existe un élément* m *de* $\mathscr{A}^{*+1}$ *tel que*:

$$m((i \otimes \omega)\alpha(x)) = m(x)\omega(1), \quad \textit{pour tout } \omega \textit{ de } M_*$$

et tout x *de* $\mathscr{A}$;

(xiv) *pour tout entier* n *et tous* $x_1, \ldots, x_n$ *dans* M^+ *et* $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *dans* M_*^{+1}, *on a*:

$$\inf\left\{t, t \in \operatorname{Sp}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - (\omega_k \otimes i)\Gamma(x_k)\right)\right\} \le 0.$$

2.5. DÉFINITIONS. Toute algèbre de Kac vérifiant l'une des conditions du théorème ci-dessus est dite moyennable. Tout état vérifiant la condition (ix)(a) (resp. (ix)(b)) est appelé moyenne invariante à gauche (resp. à droite) sur **K**.

La démonstration du Théorème 2.4 occupera les paragraphes 2.6.1. à 2.9.5; certaines parties en ont déjà été démontrées: l'équivalence de (i) à (v) dans [**2**], l'équivalence de (i), (vi) et (vii)(a), ainsi que les implications (vi) $\Rightarrow$ (viii) $\Rightarrow$ (ix)(a) dans [**20**]; notons que le réciproque de ces implications y était laissée ouverte.

Dans le souci de faciliter la lecture, nous donnons ci-après une preuve complète. Nous procéderons par étapes:

2.6: équivalence des conditions (i) à (v);

2.7: équivalence des conditions (vi) à (vii)(b) avec les précédentes;

2.8: équivalence des conditions (viii) à (xi)(b) avec les précédentes;

2.9: équivalence des conditions (xii) à (xiv) avec les précédentes.

2.6.1. (i) *est équivalent à* (ii): Il est clair que (i) s'exprime par l'existence d'une famille filtrante $\{\xi_j\}$ de vecteurs unitaires de H telle que, pour tout ω de M_*, on ait:

$$\lim_j \left\langle \hat{\lambda}(\hat{\omega}_{\xi_j}), \omega_o\kappa \right\rangle = \omega_o\kappa(1) = \omega(1);$$

d'après [**4**], 4.3.9 cela s'écrit aussi:

$$\lim_j \left\langle \lambda_*(\hat{\omega}_{\xi_j}), \omega \right\rangle = \omega(1)$$

soit encore:

$$\lim_j \left(\lambda(\omega)\xi_j | \xi_j \right) = \omega(1).$$

On sait que cette égalité équivaut au fait que le représentation triviale $1_{\mathbf{K}}$ est faiblement contenue dans λ, c'est-à-dire (ii).

2.6.2. (ii) *entraîne* (iii): Pour tout ω de M_*, il résulte de (ii) que l'on a:

$$|\langle 1, \omega\rangle| \leq \|\lambda(\omega)\|.$$

D'après [**1**], 3.2(i), on en déduit que 1 appartient à $\pi_*(B_\lambda(\mathbf{K}))$; comme π_* est injectif, (iii) en résulte.

2.6.3. (iii) *entraîne* (iv): Comme $B_\lambda(\mathbf{K})$ est un idéal de $B(\mathbf{K})$, cette implication est triviale.

2.6.4. (iv) *entraîne* (v): Supposons que le noyau du prolongement canonique de λ à $C^*(\mathbf{K})$ ne soit pas réduit à $\{0\}$; le théorème de Hahn-Banach permet alors de construire un élément de $B(\mathbf{K})$ qui ne s'annule pas sur ce noyau, autrement dit qui n'appartient pas à $B_\lambda(\mathbf{K})$; d'où l'implication.

2.6.5. (v) *entraîne* (ii): C'est immédiat et achève la première étape de la démonstration.

2.7.1. (ii) *entraîne* (vi). Comme nous l'avons vu, la condition (ii) s'exprime aussi par le fait qu'il existe une famille filtrante $\{\xi_j\}$ de vecteurs unitaires de H telle que, pour tout η de H, on ait:

$$\lim_j (\lambda(\omega_\eta)\xi_j \mid \xi_j) = \|\eta\|^2.$$

Cela implique:

$$\lim_j 2\Big(\|\eta\|^2 - \mathrm{Re}\big(\lambda(\omega_\eta)\xi_j \mid \xi_j\big)\Big) = 0$$

$$\lim_j 2\Big(\|\eta\|^2 - \mathrm{Re}\big(W(\eta \otimes \xi_j) \mid \eta \otimes \xi_j\big)\Big) = 0 \quad \text{d'après [4], 4.3.9}$$

$$\lim_j \left\| W(\eta \otimes \xi_j) - \eta \otimes \xi_j \right\|^2 = 0 \quad \text{d'où (vi).}$$

2.7.2. (vi) *entraîne* (vii)(a): Supposons (vi); soit η dans H. On a:

$$\|\hat\omega_{\xi_j} * \hat\omega_\eta - \hat\omega_\eta\| =$$

$$= \sup\Big\{\Big|\big\langle \hat\Gamma(x), \hat\omega_{\xi_j} \otimes \hat\omega_\eta\big\rangle - \big\langle x, \hat\omega_\eta\big\rangle\Big|;\ x \in M^{\hat{}}\ ;\ \|x\| \le 1\Big\}$$

$$= \sup\Big\{\Big|\big(\sigma W^*\sigma(1 \otimes x)\sigma W\sigma(\xi_j \otimes \eta) \mid \xi_j \otimes \eta\big) - (x\eta \mid \eta)\Big|;\ x \in M^{\hat{}}\ ;\ \|x\| \le 1\Big\}$$

d'après [4], 4.3.9

$$= \sup\Big\{\Big|\big((x \otimes 1)W(\eta \otimes \xi_j) \,\big|\, W(\eta \otimes \xi_j)\big) - \big((x \otimes 1)(\eta \otimes \xi_j) \mid \eta \otimes \xi_j\big)\Big|;\ x \in M^{\hat{}}\ ;\ \|x\| \le 1\Big\}$$

$$\le \sup\Big\{\Big|\big\langle x \otimes 1, \Omega_{W(\eta\otimes\xi_j)} - \Omega_{\eta\otimes\xi_j}\big\rangle\Big|;\ x \in M^{\hat{}}\ ;\ \|x\| \le 1\Big\}$$

$$\le \left\|\Omega_{W(\eta\otimes\xi_j)} - \Omega_{\eta\otimes\xi_j}\right\|$$

$$\le \left\|W(\eta \otimes \xi_j) - \eta \otimes \xi_j\right\| \left\|W(\eta \otimes \xi_j) + \eta \otimes \xi_j\right\|$$

d'après [11], démonstration de 2.11

$$\le 2\|\eta\| \left\|W(\eta \otimes \xi_j) - \eta \otimes \xi_j\right\|.$$

On en déduit que $\|\hat{\omega}_{\xi_j} * \hat{\omega}_\eta - \hat{\omega}_\eta\|$ tend vers 0, et, par polarisation, que $\|\hat{\omega}_{\xi_j} * \hat{\omega} - \hat{\omega}\|$ tend vers 0 pour tout $\hat{\omega}$ de $\hat{M}_*$, et donc que $\hat{\omega}_{\xi_j}$ est une unité approchée à gauche de $\hat{M}_*$, soit (vii)(a).

2.7.3. (vii)(a) *équivaut à* (vii)(b): Cela résulte du fait que $\hat{M}_*$ est une algèbre involutive.

2.7.4. (vii)(a) *entraîne* (ii): Soit $\hat{\omega}_j$ une unité approchée à gauche de $\hat{M}_*$; comme $\hat{\lambda}$ est une représentation non dégénérée, il en résulte que $\hat{\lambda}(\hat{\omega}_j)$ tend fortement vers 1. Soit ω dans M_*; on a, pour tout j:

$$\begin{aligned}\|\lambda(\omega)\| &\geq \lim_j \left|\left\langle \lambda(\omega), \hat{\omega}_j \circ \hat{\kappa}\right\rangle\right| \\ &= \lim_j \left|\left\langle \hat{\lambda}(\hat{\omega}_j), \omega\right\rangle\right| \quad \text{d'après [4], 4.3.9} \\ &= |\omega(1)| \quad \text{d'où (ii), ce qui achève la seconde étape} \\ &\qquad\qquad\quad \text{de la démonstration.}\end{aligned}$$

2.8.1. (vi) *entraîne* (viii). Comme la boule unité de M^* est compacte pour la topologie $\sigma(M^*, M)$, on peut considérer une sous-famille filtrante $\{\omega_{\xi_j}\}$ qui converge vers un élément m de M^{*+1}. Soient alors x, y dans M et η dans H; on a:

$$\begin{aligned}&\left|m\big((\omega_\eta \otimes i)(1 \otimes y^*)\Gamma(x)\big) - m\big((\omega_\eta \circ \kappa \otimes i)\big(\Gamma(y^*)(1 \otimes x)\big)\big)\right| \\ &= \lim_j \left|\big(\omega_\eta \otimes_{\xi_j}\big)\big((1 \otimes y^*)\Gamma(x)\big) - \big(\omega_{\hat{J}_\eta} \otimes \omega_{\xi_j}\big)\big(\big(\Gamma(y^*)(1 \otimes x)\big)\big)\right| \\ &= \lim_j \Big|\big((1 \otimes y^*)W(1 \otimes x)W^*(\eta \otimes \xi_j)\big|\eta \otimes \xi_j\big) \\ &\qquad\qquad - \big((1 \otimes y^*)W^*j(1 \otimes x)(\hat{J}\eta \otimes \xi_j)\big|W(\hat{J}\eta \otimes \xi_j)\big)\Big| \\ &= \lim_j \Big|\big((1 \otimes y^*)W(1 \otimes x)(\eta \otimes \xi_j) \,|\, \eta \otimes \xi_j\big) \\ &\qquad\qquad - \big((1 \otimes y^*)W^*(1 \otimes x)(\hat{J}\eta \otimes \xi_j) \,|\, \hat{J}\eta \otimes \xi_j\big)\Big| \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{par hypothèse} \\ &= \lim_j \left|\big(W(\eta \otimes x\xi_j) \,|\, \eta \otimes y\xi_j\big) - \big(W^*(\hat{J}\eta \otimes x\xi_j) \,|\, \hat{J}\eta \otimes y\xi_j\big)\right| \\ &= 0 \quad \text{d'après 1.6; on en déduit (viii) par linéarité.}\end{aligned}$$

2.8.2. (viii) *entraîne* (ix)(a): Il suffit de prendre $y = 1$.

2.8.3. (ix)(a) *entraîne* (x)(a): Comme M_*^{+1} est dense dans M^{*+1} pour la topologie $\sigma(M^*, M)$, il existe une famille filtrante $\{\omega_j\}$ d'éléments de M_*^{+1} qui converge vers m pour $\sigma(M^*, M)$. Soient alors x dans M et ω dans M_*. On aura donc:

$$\lim_j \big(\omega * \omega_j(x) - \omega(1)\omega_j(x)\big) = \lim_j \big(\omega_j(\omega \otimes i)\Gamma(x) - \omega(1)\omega_j(x)\big)$$

$$= m(\omega \otimes i)\Gamma(x) - \omega(1)m(x) = 0 \quad \text{par hypothèse;}$$

il en résulte que $\omega * \omega_j - \omega(1)\omega_j$ tend vers 0 pour la topologie $\sigma(M_*, M)$; d'où (x)(a).

2.8.4. (x)(a) *entraîne* (xi)(a). Considérons l'espace normé $E = \Pi_{\omega \in M^{+1}} E_\omega$, avec $E_\omega = M_*$ pour tout ω de M_*^{+1}. La topologie affaiblie $\sigma(E, E^*)$ est égale au produit des topologies $\sigma(M_*, M)$; il en résulte que si l'on considère l'application linéaire L de M_* dans E définie par

$$L(\omega)(\omega') = \omega' * \omega - \omega, \quad \text{où } \omega \text{ appartient à } M_*^{+1} \text{ et } \omega' \text{ à } E_\omega,$$

l'hypothèse se traduit par le fait que $L(\omega_j)$ tend vers 0 pour $\sigma(E, E^*)$. Comme $L(M_*^{+1})$ est convexe dans E, il résulte du théorème de Hahn-Banach que 0 est également fortement adhérent à $L(M_*^{+1})$, d'où (xi)(a).

2.8.5. (x)(a) *et* (xi)(a) sont respectivement équivalents à (x)(b) et (xi)(b): Comme M_*^{+1} est invariant par l'involution de M_*, c'est immédiat.

2.8.6. (xi)(a) *entraîne* (i). Soient $\varepsilon > 0$ et η unitaire dans H. Par hypothèse, il existe une famille filtrante $\{\omega_j\}$ de M_* telle que

$$\|\omega_j * \omega_\eta - \omega_j\| \leq \varepsilon^2/3.$$

Il résulte de ([**4**], 3.1.7) et ([**3**], 1.6(ii) et 1.9(i)) que le $1_{\mathbf{K}}^{\mathscr{L}(H)}$-cocyle $\sigma W^*\sigma$ implémente une action γ de $\mathbf{K}$ sur $\mathscr{L}(H)$. Pour tous Ω de $\mathscr{L}(H)_*^{+1}$, y de $\mathscr{L}(H)$ et tout j, on a:

$$(\Omega \otimes \omega_j)\gamma(i \otimes \omega_\eta)\gamma(y) = (\Omega \otimes \omega_j \otimes \omega_\eta)(\gamma \otimes i)\gamma(y)$$

$$= (\Omega \otimes \omega_j \otimes \omega_\eta)(i \otimes \Gamma)\gamma(y) = (\omega_j * \omega_\eta)(\Omega \otimes i)\gamma(y)$$

on en déduit:

$$\|(\Omega \otimes \omega_j)\gamma(i \otimes \omega_\eta)\gamma(y) - (\Omega \otimes \omega_j)\gamma(y)\|$$

$$\leq (\varepsilon^2/3)\|(\Omega \otimes i)\gamma(y)\| \leq (\varepsilon^2/3)\|y\|.$$

Comme $(\Omega \otimes \omega_j)\gamma$ appartient à $\mathscr{L}(H)_*^{+1}$, pour tout j il existe un vecteur unitaire ζ_j de H tel que $\|\Omega_{\zeta_j} - (\Omega \otimes \omega_j)\gamma\| \leq \varepsilon^2/3$. On a donc:

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\Omega_{\zeta_j} \otimes \omega_\eta\right)\gamma(y) - \Omega_{\zeta_j}(y)\right| \\
&\qquad \leq \left|\left(\Omega_{\zeta_j} - (\Omega \otimes \omega_j)\gamma\right)(i \otimes \omega_\eta)(y)\right| \\
&\qquad\quad + \left|(\Omega \otimes \omega_j)\gamma(i \otimes \omega_\eta)\gamma(y) - (\Omega \otimes \omega_j)\gamma(y)\right| \\
&\qquad\quad + \left|(\Omega \otimes \omega_j)\gamma(y) - \Omega_{\zeta_j}(y)\right| \\
&\qquad \leq (\varepsilon^2/3)\left\|(i \otimes \omega_\eta)\gamma(y)\right\| + (\varepsilon^2/3)\|y\| + (\varepsilon^2/3)\|y\| \leq \varepsilon^2\|y\|.
\end{aligned}$$

Par définition, cela s'écrit encore:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2\|y\| &\geq \left|\left(\gamma(y)(\zeta_j \otimes \eta) \mid \zeta_j \otimes \eta\right) - \left(y\zeta_j \mid \zeta_j\right)\right| \\
&= \left|\left(\sigma W^*\sigma(y \otimes 1)\sigma W\sigma(\zeta_j \otimes \eta) \mid \zeta_j \otimes \eta\right) - \left(y\zeta_j \mid \zeta_j\right)\right| \\
&= \left|\left((1 \otimes y)W(\eta \otimes \zeta_j) \mid W(\eta \otimes \zeta_j)\right) - \left((1 \otimes y)(\eta \otimes \zeta_j) \mid \eta \otimes \zeta_j\right)\right|.
\end{aligned}$$

Pour chaque j il existe une application involutive antilinéaire $\mathscr{J}_i$ de H dans H, telle que $\mathscr{J}_j\eta = \zeta_j$. En utilisant 1.10, et la forme standard $(\mathscr{L}(H), H \otimes H, \mathscr{J}_j, \mathscr{P}_j)$, l'inégalité ci-dessus devient:

$$\left\|\theta_{W(\eta \otimes \zeta_j)} - \theta_{\eta \otimes \zeta_j}\right\| \leq \varepsilon^2;$$

on obtient de plus une isométrie partielle u_j de H dans H telle que $\theta_{(u_j \otimes 1)W(\eta \otimes \zeta_j)} = \theta_{W(\eta \otimes \zeta_j)}$ alors que $(u_j \otimes 1)W(\eta \otimes \zeta_j)$ appartient à $\mathscr{P}_j$. Comme il en est de même, par construction, de $\eta \otimes \zeta_j$ et que l'on a:

$$\left\|\theta_{(u_j \otimes 1)W(\eta \otimes \zeta_j)} - \theta_{\eta \otimes \zeta_j}\right\| \leq \varepsilon^2,$$

on trouve, en utilisant **[11]**, 2.11:

$$\left\|(u_j \otimes 1)W(\eta \otimes \zeta_j) - \eta \otimes \zeta_j\right\| \leq \varepsilon.$$

En appliquant $u_j^* \otimes 1$, on en déduit:

$$\left\|W(\eta \otimes \zeta_j) - u_j^*\eta \otimes \zeta_j\right\| \leq \varepsilon.$$

D'où, pour tout ξ de H:

$$\left|\left((u_j \otimes 1)W(\eta \otimes \zeta_j)\right| \mid \xi \otimes \zeta_j\right) - \left(\eta \otimes \zeta_j \mid \xi \otimes \zeta_j\right) \leq \varepsilon\|\xi\| \quad \text{et}$$

$$\left|\left(W(\eta \otimes \zeta_j) \mid \xi \otimes \zeta_j\right)\right| - \left(u_j^*\eta \otimes \zeta_j \mid \xi \otimes \zeta_j\right)| \leq \varepsilon\|\xi\|.$$

Ou encore:

$$\left|\left(W(\eta \otimes \zeta_j) \mid u_j^*\xi \otimes \zeta_j\right) - (\eta \mid \xi)\right| \leq \varepsilon\|\xi\| \quad \text{et}$$

$$\left|\left(W(\eta \otimes \zeta_j) \mid \xi \otimes \zeta_j\right) - \left(u_j^*\eta \mid \xi\right)\right| \leq \varepsilon\|\xi\|.$$

Soit, en appliquant 1.5 (v):

$$\left|\left(u_j\hat{\lambda}(\hat{\omega}_{\zeta_j})\eta \mid \xi\right) - (\eta \mid \xi)\right| \leq \varepsilon\|\xi\| \quad \text{et}$$

$$\left|\left(\hat{\lambda}(\hat{\omega}_{\zeta_j})\eta \mid \xi\right) - \left(u_j^*\eta \mid \xi\right)\right| \leq \varepsilon\|\xi\|.$$

Considérons l'état de $\hat{M}_*^{+1}$ défini par $\hat{\omega}_{\zeta_j}^{\circ} * \hat{\omega}_{\zeta_j}$; d'après 1.4, il existe un vecteur unitaire ξ_j de H tel que:

$$\hat{\omega}_{\xi_j} = \hat{\omega}_{\zeta_j}^{\circ} * \hat{\omega}_{\zeta_j}. \qquad \text{On a:}$$

$$\begin{aligned}
\left|\left(\hat{\lambda}(\hat{\omega}_{\xi_j})\eta \mid \eta\right) - 1\right| &= \left|\left(\hat{\lambda}(\hat{\omega}_{\zeta_j})^*\hat{\lambda}(\hat{\omega}_{\zeta_j})\eta \mid \eta\right) - (\eta \mid \eta)\right| \\
&\leq \left|\left(\hat{\lambda}(\hat{\omega}_{\zeta_j})\eta \mid \hat{\lambda}(\hat{\omega}_{\zeta_j})\eta\right) - \left(u_j^*\eta \mid \hat{\lambda}(\hat{\omega}_{\zeta_j})\eta\right)\right| + \left|\left(\eta \mid u_j\hat{\lambda}(\hat{\omega}_{\zeta_j})\eta\right) - (\eta \mid \eta)\right| \\
&\leq \varepsilon\left\|\hat{\lambda}(\hat{\omega}_{\zeta_j})\eta\right\| + \varepsilon\|\eta\| \leq 2\varepsilon \quad \text{d'après ce qui précède.}
\end{aligned}$$

Par polarisation, il en résulte que $\hat{\lambda}(\hat{\omega}_{\xi_j})$ tend faiblement vers 1, d'où (i).

2.8.7. (ix)(a) *équivaut à* (ix)(b). Les paragraphes précédents établissent l'équivalence des propriétés (ix)(a) et (xi)(a). En appliquant ce résultat à l'algèbre de Kac $\mathbf{K}^{\varsigma}$ définie en **[16]**, on obtient l'équivalence entre (ix)(b) et (xi)(b), la proposition résulte alors de 2.8.5 et achève la troisième étape de la preuve.

2.9.1. (xi)(a) *entraîne* (xii). Soient C un convexe compact et T une action de $\mathbf{K}$ sur C. Soit x dans C; par compacité, il existe une famille filtrante $\{\omega_j'\}$ telle que $T(\omega_j')(x)$ converge vers un point y de C. Grâce à la continuté de T, pour tout ω de M_*^{+1} on obtient que $T(\omega * \omega_j')(x) = T(\omega)T(\omega_j')(x)$ converge vers $T(\omega)y$; comme, par ailleurs, $T(\omega * \omega_j') - T(\omega_j')$ tend vers 0, on en déduit que $T(\omega)y = y$, d'où l'existence d'un point fixe.

2.9.2. (xii) *entraîne* (xiii). Soit α une action de $\mathbf{K}$ sur $\mathscr{A}$, l'action de $\mathbf{K}$ sur $\mathscr{A}^{*+1}$ possède donc un point fixe m, cela se traduit pour tout a de $\mathscr{A}$ et tout ω de M_*^{+1} par:

$$m(a) = T(\omega)(m)(a) = m((i \otimes \omega)\alpha)$$

d'où (xiii) par linéarité.

2.9.3. (xiii) *entraîne* (ix)(b). Considérons l'action Γ de **K** sur M. Il existe donc un élément m de M^{*+1} tel que, pour tout x de M et tout ω de M_*, on ait:

$$m((i \otimes \omega)\Gamma(x)) = m(x)\omega \qquad \text{d'où (ix)(b).}$$

2.9.4. (ix)(a) *entraîne* (xiv). On note E l'espace vectoriel réel engendré par $\{x - (\omega \otimes i)\Gamma(x) : x \in M^+, \omega \in M_*^{+1}\}$. Il résulte de l'hypothèse que $m(E) = 0$. On sait de plus qu'il existe une famille filtrante $\{\xi_j\}$ de vecteurs unitaires de H, telle que $m(x) = \lim_j (x\xi_j \mid \xi_j)$ pour tout x de M.

Soit y dans E. On a:

$$\begin{aligned}\inf\{t, t \in \operatorname{Sp} y\} &= \inf\{(y\xi \mid \xi), \xi \in H, \|\xi\| = 1\} \\ &\leq \lim_j (y\xi_j \mid \xi_j) \\ &\leq m(y) = 0 \qquad \text{d'où le résultat.}\end{aligned}$$

2.9.5. (xiv) *entraîne* (ix)(a). Considérons l'ensemble $F = \{x \in M^+; \inf\{t, t \in \operatorname{Sp} x\} > 0\}$. Il est clair que pour la topologie de la norme, F est un ouvert convexe contenant 1. On a, de plus, par hypothèse et en conservant la notation de 2.9.4, $F \cap E = \varnothing$; en appliquant le théorème de Hahn-Banach il en résulte qu'il existe un élément hermitien m de M^* tel que $m(E) = 0$ et $m(y) > 0$ pour tout y de F; on supposera en particulier que $m(1) = 1$.

Comme pour tout réel positif ε et tout x de M l'élément $x + \varepsilon 1$ appartient à F, on a $m(x + \varepsilon 1) = m(x) + \varepsilon > 0$ et donc $m(x) \geq 0$, autrement dit m appartient à M^{*+1}. Enfin, comme $m(E) = 0$, on a $m(x) = m((\omega \otimes i)\Gamma(x))$ pour tout x de M^+ et tout ω de M_*^{+1}; par linéarité, on en déduit que m est une moyenne invariante sur **K**, ce qui achève la démonstration du théorème.

2.10. REMARQUE. Il résulte clairement de 2.8.7 que **K** est moyennable si et seulement si $\mathbf{K}^\varsigma$ l'est. Par nature, la Proposition 2.7.3 vaut aussi pour l'algèbre opposée de $\hat{M}_*$; or, comme on sait que $\mathbf{K}^{\wedge\varsigma} = \mathbf{K}'^{\wedge}$ ([**16**]), celle-ci est en fait le prédual de $M'^{\wedge}$; on en conclut que **K** est moyennable si et seulement si $\mathbf{K}'$ l'est.

2.11. PROPOSITION. *Soit G un groupe localement compact. On a*:

(i) *l'algèbre de Kac $KS(G)$ est moyennable*;

(ii) *l'algèbre de Kac $KA(G)$ est moyennable si et seulement si G est moyennable*; *une moyenne invariante à gauche sur $KA(G)$ s'assimile à une moyenne topologiquement invariante à gauche sur $L^\infty(G)$ au sens de* [**10**], 2.1.1.

DÉMONSTRATION. Comme $L^1(G)$ possède une unité approchée, (i) résulte de 2.4 (vii)(a). En utilisant **[10]**, 2.2.1, on obtient immédiatement (ii).

2.12. PROPOSITION. *Soit* $\mathbf{K}$ *une algèbre de Kac de type compact, alors* $\mathbf{K}$ *est moyennable, et le poids de Haar (normalisé) de* $\mathbf{K}$ *est une moyenne invariante à gauche (et à droite) sur* $\mathbf{K}$.

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement de **[4]**, 7.2.

3. Actions des algèbres de Kac moyennables.

3.1. THÉORÈME. *Soit* α *une action d'une algèbre de Kac moyennable* $\mathbf{K}$ *sur une algèbre de von Neumann* $\mathscr{A}$. *Il existe une projection normiquement continue de* $\mathscr{A}$ *sur l'algèbre des points fixes* $\mathscr{A}^\alpha$.

DÉMONSTRATION. Soient m une moyenne invariante à gauche sur $\mathbf{K}$, θ un élément de $\mathscr{A}_*$ et a dans $\mathscr{A}$. On a:

$$\|m((\theta \otimes i)\alpha(a))\| \leq \|\theta\| \, \|a\|$$

il existe donc une application linéaire continue E de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ telle que $\langle Ea, \theta\rangle = m((\theta \otimes i)\alpha(a))$.

Pour tout ω de M_*, on aura donc:

$$\begin{aligned}\langle \alpha(Ea), \theta \otimes \omega\rangle &= \langle Ea, (\theta \otimes \omega)_\circ\alpha\rangle = m((((\theta \otimes \omega)_\circ\alpha) \otimes i)\alpha(a)) \\ &= m((\theta \otimes \omega \otimes i)(\alpha \otimes i)\alpha(a)) = m((\theta \otimes \omega \otimes i)(i \otimes \Gamma)\alpha(a)) \\ &= m((\theta \otimes i)\alpha(a))\omega(1) \quad \text{par définition de } m \\ &= \langle Ea, \theta\rangle\langle 1, \omega\rangle = \langle Ea \otimes 1, \theta \otimes \omega\rangle.\end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha(Ea) = Ea \otimes 1$ et donc que $E\mathscr{A} \subset \mathscr{A}^\alpha$. Supposons que a appartienne à $\mathscr{A}^\alpha$. On a:

$$\langle Ea, \theta\rangle = m((\theta \otimes i)(a \otimes 1)) = \langle a, \theta\rangle, \quad \text{d'où } Ea = a;$$

le théorème en résulte.

3.2. EXEMPLES. (i) Soient G moyennable et α une action de G sur une algèbre de von Neumann $\mathscr{A}$. Alors il existe une projection normiquement continue de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{A}^\alpha$.

(ii) Soient G une groupe localement compact quelconque et β une coaction de G sur une algèbre de von Neumann $\mathscr{B}$. Alors il existe une projection normiquement continue de $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{B}^\beta$.

3.3. COROLLAIRE. *Soit α une action d'une algèbre de Kac* **K** *dont le dual est moyennable sur une algèbre de von Neumann $\mathscr{A}$. Il existe une projection normiquement continue du produit croisé $\mathscr{W}^*(\alpha)$ sur $\alpha(\mathscr{A})$; ainsi si $\mathscr{W}^*(\alpha)$ est injectif, $\mathscr{A}$ également.*

Démonstration. Comme, d'après ([**5**], 2.5 et 4.2 (ii)), $\alpha(\mathscr{A})$ est égale à l'algèbre des invariants de l'action duale $\tilde{\alpha}$, il suffit d'appliquer 3.1 à $\tilde{\alpha}$. La fin du corollaire est claire d'après [**1**], 6.2.

3.4. COROLLAIRE. *Soient G une groupe localement compact quelconque, α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann $\mathscr{A}$; alors, il résulte immédiatement de ce qui précède que l'on a:*

(i) *il existe une projection normiquement continue du produit croisé $\mathscr{A} \rtimes_\alpha G$ sur $\alpha(\mathscr{A})$;*

(ii) *si $\mathscr{A} \rtimes_\alpha G$ est injectif, alors $\mathscr{A}$ également.*

3.5. REMARQUE. Le résultat précédent est déjà connu dans le cas où G est discret [**21**] (la projection est alors, de plus, normale). Il l'est probablement aussi dans le cas général, mais ne semble pas avoir été publié jusqu'ici.

3.6. COROLLAIRE. *Soient α une action d'une algèbre de Kac moyennable* **K** *sur une algèbre de von Neumann injective $\mathscr{A}$, μ une réprésentation non dégénérée de M_*. Alors:*

(i) *l'algèbre A_μ est injective;*

(ii) *l'algèbre duale $\hat{M}$ est injective;*

(iii) *l'algèbre $\mathscr{A}^\alpha$ est injective;*

(iv) *le produit croisé $\mathscr{W}^*(\alpha)$ est injectif.*

Démonstration. D'après ([**1**], Th. 2.10) il existe un $1_{\mathbf{K}}^{\mathscr{L}(\mathfrak{H}_\mu)}$-cocyle U tel que $\mu(\omega) = (i \otimes \omega)(U)$ pour tout ω de M_*. Soit ν l'action de **K** sur $\mathscr{L}(\mathfrak{H}_\mu)$ implémentée par U, comme $\mathscr{L}(\mathfrak{H}_\mu)^\nu = \mu(M_*)'$ il résulte du théorème 3.1 que $\mu(M_*)'$ est une algèbre de von Neumann injective, d'après ([**1**] 6.4(a)), il en est de même de son commutant A_μ, d'où (i).

Pour démontrer (ii), il suffit d'appliquer (i) à la représentation de Fourier λ.

Supposons $\mathscr{A}$ réalisée dans un espace hilbertien $\mathfrak{H}$. D'après [**1**], 6.2, il existe une projection de $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ sur $\mathscr{A}$; en la composant avec la projection construite en 3.1, il vient (iii).

D'après [5], 4.5, on sait qu'il existe une action β de $\mathbf{K}$ sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{L}(H)$ équivalente à l'action biduale $\alpha^{\sim\sim}$ et telle que:

$$\mathscr{W}^*(\alpha) = (\alpha \otimes \mathscr{L}(H))^{\beta};$$

comme il résulte de [12], 2.3 que $\mathscr{A} \otimes \mathscr{L}(H)$ est injective, en utilisant (iii), on achève le corollaire.

3.7. EXEMPLE. Soient G un groupe localement compact quelconque et β une coaction de G sur une algèbre de von Neumann injective $\mathscr{B}$; alors le produit croisé $G \ltimes_{\beta} \mathscr{B}$ est injectif.

3.8. COROLLAIRE. *Soit α une action d'une algèbre de Kac $\mathbf{K}$ moyennable, dont le dual est également moyennable, sur une algèbre de von Neumann $\mathscr{A}$. Alors $\mathscr{A}$ est injective si et seulement si le produit croisé $\mathscr{W}^*(\alpha)$ est injectif.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser 3.3 et 3.6.

3.9. COROLLAIRE. *Soient G une groupe localement compact moyennable, $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$) une algèbre de von Neumann, α une action (resp. une coaction) de G sur $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$), μ une représentation de G. On a:*

(i) *l'algèbre de von Neumann de μ est injective*; (*cf*. [1], 6.9(a))

(ii) *l'algèbre $\mathscr{A}$ est injective si et seulement si le produit croisé $\mathscr{A} \rtimes_{\alpha} G$ est injectif* (*cf*. [1], 6.8);

(iii) *l'algèbre $\mathscr{B}$ est injective si et seulement si le produit croisé $\mathscr{B} \ltimes_{\beta} G$ est injectif.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Connes, *Classification of injective factors*, Ann. of Math., **104** (1976), 73–115.

[2] J. De Cannière, M. Enock and J.-M. Schwartz, *Algèbres de Fourier associées à une algèbre de Kac*, Math. Ann., **245** (1979), 1–22.

[3] M. Enock, *Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac*, J. Funct. Anal., **26** (1977), 16–47.

[4] M. Enock and J.-M. Schwartz, *Une dualité dans les algèbres de von Neumann*, Bull. Soc. Math. France Supp. Mémoire no **44** (1975), 1–144.

[5] ______, *Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac, II*. Publ. RIMS, **16** (no 1) (1980), 189–232.

[6] J. Ernest, *Hopf von Neumann algebras*, Proceedings of the conference of Functional Analysis (Irvine, Cal.), 195–217. New York, Academic Press, 1967.

[7] P. Eymard, *L'algèbre de Fourier d'une groupe localement compact*, Bull. Soc. Math. France, **92** (1964), 181–236.

[8] J. M. G. Fell, *Weak containment and induced representations of groups*, Canad. Math. J., **14** (1962), 237–268.

[9] R. Godement, *Les fonctions de type positif et la théorie des groupes*, Trans. Amer. Math. Soc., **63** (1948), 1–84.

[10] F. P. Greenleaf, *Invariant Means on Topological Groups*, New York, Van Nostrand, 1969.

[11] U. Haagerup, *The standard form of von Neumann algebras*, Math. Scand., **37** (1975), 271–283.

[12] J. Hakeda and J. Tomiyama, *On some extension properties of von Neumann algebras*, Tôhoku Math. J., **19**, no 3 (1967), 315–323.

[13] A. Hulanicki, *Means and Følner conditions on locally compact groups*, Studia Math., **27** (1966), 87–104.

[14] H. Leptin, *Sur l'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact*, C. R. Acad. Sci. Paris, **266** (1968), 1180–1182.

[15] J.-M. Schwartz, *Sur la structure des algèbres de Kac*, I, J. Funct. Anal., **34** (1979), 370–406.

[16] _____, *Sur la structure des algèbres de Kac*, II, Proc. London Math. Soc., **41** (1980), 465–480.

[17] M. Takesaki, *Duality and von Neumann Algebras*, in *Lecture on Operator Algebras*. Lectures Notes in Math. no 247. Springer-Verlag, Berlin, 1972, 665–785.

[18] _____, *Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III*, Acta Math., **131** (1973), 249–310.

[19] L. I. Vainerman and G. I. Kac, *Non unimodular ring-groupes and Hopf von Neumann algebras*, Math. USSR, Sbornik, **23** (1974), 185–214. Traduction de Math. Sbornik, **94** (136), (1974), 194–225.

[20] D. Voiculescu, *Amenability and Katz algebras*, Communication au Colloque International du CNRS "Algèbres d'opérateurs et leurs applications en physique mathématique". Marseille, Juin 1977.

[21] G. Zeller-Meier, *Produits croisés d'une C*-algèbre par un groupe d'automorphismes*, J. Math. Pures Appl., **47** (1968), 101–239.

Received June 21, 1985.

UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE
4, PLACE JUSSIEU
F-75252 PARIS, FRANCE