PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 144, No. 2, 1990

RESOLUBILITE SEMI-GLOBALE DES OPERATEURS DIFFERENTIELS INVARIANTS SUR LES GROUPES DE DEPLACEMENTS

KAHAR EL HUSSEIN

We study the existence of global fundamental solution of certain invariant linear differential operators on the semi-direct product $G = V \ltimes K$ where V is a real vector space of finite dimension and K a connected compact Lie group which acts on V as a linear group.

Using the scalar Fourier transform on G and the A. Cerezo and F. Rouviere's method ("Solution élémentaire d'un operateur différentiel invariant sur un group de Lie compact", Ann. Sci. Ec. Norm. Sup 4, séri t; 1969, pp. 561–581). We prove that a *left invariant* differential operator P on G and *right invariant* by K admits a fundamental solution on G if and only if its partial Fourier coefficients satisfy a condition of slow growth. Hence we deduce an explicit necessary and sufficient condition for the existence of a fundamental solution for a bi-invariant differential operator P on the Cartan's motion group.

1. Introduction. Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, K un groupe de Lie compact connexe qui opére linéairement et continument dans V et $G = V \ltimes K$ le groupe des displacements produit semi-direct de V par K, rélativement à l'opération donnée de K dans V.

Soit P un operateur différentiel *invariant* sur G. Alors P est dit semi-globalement résoluble si pour toute fonction fC^∞, et à support compact dans G, il existe une fonction gC^∞ sur G, tel que $Pf = g$. Le but de ce travail est l'étude de la résolubilité semi-globale des opérateurs différéntiels invariants à *gauche* sur G et à *droite* par K. Pour célà on utilise des résultats d'analyse harmoniques sur G ([**8**]) et ([**3**]), et le fait que P est invariant à *droite* par le sous-groupe compact maximal K. Ceci raméne le probleme à un probleme équivalent sur un groupe de Lie noté $\widetilde{G}$, qui le produit *direct* de V par K. Il se trouve dans ce cas que la conditoin de A. Cerezo et F. Rouviere ([**2**]) est une condition nécessaire et suffisante, pour qu'un opérateur differéntiel invariant à *gauche* sur G et à *droite* par K admette une solution élémentaire sur G. On obtient alors le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit G le groupe des deplacements et soit P un opérateur différéntiel invariant à gauche sur G et à droite par K. Alors P*

admet une solution élémentaire si et seulement si les coefficients de Fourier de P vérifient la conditoin de A. Cerezo et F. Rouviere (*voir Théorème* 6.5.).

Si G est le groupe des *deplacements de Cartan*, alors on déduit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur différéntiel P bi-invariant sur G ait une solution élémentaire sur G (voir Théorème 7.3).

1.1. *Notations et rappels.* Soit X une variété C^∞. On note $C^\infty(X)$, $D(X)$, $D'(X)$ et $\varepsilon'(X)$, respectivement les espaces des fonctions C^∞, C^∞ à support compact, distributions, et distributions à support compact dans X. Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Tout élément X de $\mathfrak{g}$ peut être considéré comme un champ des vecteurs invariants *à droite* sur G, tel que pour tout $f \in C^\infty(G)$, on a:

$$(Xf)(x) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 f(\exp(-tXx)), \qquad x \in G.$$

Soit $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ l'algèbre complexifié de $\mathfrak{g}$. On note u l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, alors u peut être considérée comme l'algèbre des opérateurs différentiels invariants *à droite* sur G. Soit $\langle\ \rangle$ le dualité entre $D'(G)$ et $D(G)$. Si P est un opérateur différentiels invariants sur G, la transposée ${}^tP$ de P est définie par:

$$\langle {}^tPE, f\rangle = \langle E, Pf\rangle$$

pour tout f dans $D(G)$ et E dans $D'(G)$.

Si K est un groupe de Lie compact et si γ dans $\hat{K}$. On note E_γ l'espace de γ, d_γ sa dimension, χ_σ son caractère, et $\mathrm{End}(E_\gamma)$ l'espace de tous les endomorphismes de E_γ.

Soit f dans $D(K)$, sa tranformée de Fourier $\hat{f}$ est définie par:

$$\hat{f}(\gamma) = \int_K f(x)\gamma(x^{-1})\,dx, \qquad \forall \gamma \in \hat{K} \tag{1.1}$$

(où dx est la mesure de Haar normalisée de K). Si $f \in C^\infty(K)$, alors on a une fomule d'inversion de Fourier!

$$f(x) = \sum_{\gamma\in\hat{K}} d_\gamma \mathrm{tr}(\hat{f}(\gamma)\gamma(x)) \tag{1.2}$$

où tr signifie trace; La convergence de la série (1.2) étant uniforme sur K (voir [**1**]).

Si P est un opérateur différentiel invariant *à droite* sur K, on définit les coefficients de Fourier $P(\gamma)$, $\gamma \in \hat{K}$, de P de la façon suivante: $P(\gamma)$ est l'endomorphisme de E_γ tel que, pour tout $x \in K$,

$$(P_\gamma)(x) = P(\gamma) \cdot \gamma(x). \tag{1.3}$$

Dans cette égalité $P(\gamma)$ désigne l'endomorphisme obtenue en appliquant l'opérateur P à la fonction γ (au point x) et $P(\gamma) \cdot \gamma(x)$ est le produit des deux endomorphismes de $\gamma(x)$ et $P(\gamma)$ de E_γ.

Pour tout f dans $D(K)$ et γ dans $\hat{K}$, on a:

$$\widehat{Pf}(\gamma) = \hat{f}(\gamma) \cdot P(\gamma), \tag{1.4}$$

$$({}^tP)(\gamma) = {}^tP(\check{\gamma}), \tag{1.5}$$

où $\check{\gamma}$ est la représentation *contragradiente* de γ. Si V est un espace vectoriel réel de dimension n, on choisit une base hilbertienne $(v_1, \dots, v_n)$ de V, et on identifie V à $\mathbb{R}^n$. Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un multi-indices, on note Q_v^α l'opérateur différentiel sur V, tel que:

$$Q_v^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial v_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Si $P(v)$ est un polynôme de n variables ($v = (v_1, \dots, v_n)$) sur V à valeur complexe, on note encore $P(v)$ l'opérateur différentiel (à coefficients constants) sur V, en remplaçant chaque variable v_j ($1 \leq j \leq n$) par l'opérateur différentiel $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial v_j}$, $i = \sqrt{-1}$.

2. Représentations de groupes de deplacements.

2.1. Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, K un groupe de Lie compact connexe et $\rho: K \to \mathrm{GL}(V)$ un représentation linéaire continue de K dans V et $G = V \ltimes_\rho K$ le groupe des déplacements produit semi-direct de V par K, rélativement à ρ. On munit V d'un produit scalaire K-invariant, noté (1), et le complexifié $V_\mathbb{C} = V \times \mathbb{C}$ de V du produit scalaire Hermitien qui prolonge (1), et qui sera noté de la même manière. Le groupe K opére naturellement dans $V_\mathbb{C}$; si x est dans K et ζ dans $V_\mathbb{C}$, on écrira $x \cdot \zeta$ au lieu de $\rho(x)\zeta$.

2.2. Soint ζ dans $V_\mathbb{C}$ et K_ζ le stabilasateur de ζ dans K. Soint H un sous-groupe fermé de K_ζ et σ une représentation unitaire irreductible de H, dans un espace E_σ (Hilbertien, de dimension fini). Ala donnée (ζ, σ); il est possible d'associer une représentation linéaire continue (en général non unitaire) de G dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}_\sigma$, qui n'est autre que celui des "fonctions" $\phi: K \to E_\sigma$ telles que $\phi(xy) = \sigma(y^{-1})\phi(x)$ pour tous x dans K et y dans H, et:

$$\int_K \|\phi(x)\|^2 \, dx < +\infty \tag{1.1}$$

où dx désigne la mesure de Haar normalisée de K et $\|\phi(x)\|$ la norme de $\phi(x)$, caculée dans E_σ. Le produit scalaire dans $\mathscr{H}_\sigma$ est défeni par:

$$(\phi|\psi) = \int_K (\phi(x)|\psi(x)) \, dx$$

où le produit scalaire figurant dans l'intégrale est celui de E_σ. L'opération de G dans $\mathscr{H}_\sigma$ est décrite de la manière suivante: à chaque (v, x) dans G, est associé l'opérateur $\pi_{\zeta,\sigma}$ tel que:

$$(\pi_{\zeta,\sigma}(v, x)\phi)(y) = e^{i(y\cdot\zeta|v)}\phi(x^{-1}y) \qquad (\phi \in \mathscr{H}_\sigma).$$

On notera que la restriction à K de cette représentatin n'est autre que la représentation induite (unitaire) $\mathrm{Ind}_{H\uparrow K}\sigma$. Deux cas particuliers de cette construction vont jouer un rôle privilégié.

2.3. On prend pour H le sous-groupe trivial de K_ζ, à savoir $H = \{1\}$, et pour σ la représentation triviale de dimension 1. Dans ce cas, l'espace $\mathscr{H}_\sigma$ n'est autre que l'espace $\mathscr{H}$ des fonctions de carré intégrable sur K, et on notera π_ζ la représentation construite cidessus, π_ζ étant l'homomorphisme de G dans le groupe linéaire de $\mathscr{H}$. Précisément:

$$(\pi_\zeta(v, x)\cdot\phi)(y) = e^{i(y\cdot\zeta|v)}\phi(x^{-1}y) \qquad (\phi \in \mathscr{H}).$$

2.4. On prend $H = K_\zeta$ et σ variable dans $\hat{K}_\zeta$, et $\pi_{\zeta,\sigma}$ la représentation associée à (ζ, σ). Alors on a:

Proposition. *Pour tout σ dans $\hat{K}$:*

$$\pi_{\zeta,\sigma} = \sum_{\sigma\in\hat{K}_\xi} d_\sigma \pi_{\zeta,\sigma}.$$

Pour la démonstraton de cette proposition (*voir* **[3]**, II, 19).

2.6. Rappellons ici que si $\zeta = \xi \in V$ est réel, alors les représentations $\pi_{\xi,\sigma}$ sont toutes irréductibles et toute représentation unitaire irréductible de G est équivalente à l'une de $\pi_{\xi,\sigma}$ (voir **[9]**, Ch. I).

3. La transformation de Fourier sur les groupes de deplacements.

3.1. Soit f dans $\mathscr{D}(G)$, on peut définir un opérateur $\pi_\zeta(f)$, pour chaque ζ dans $V_{\mathbb{C}}$, de la manière habituelle:

$$\pi_\zeta(f) = \int_G f(v, y)\pi_\zeta(v, y)\, dv\, dy \tag{3.1}$$

(où dv est une mesure de Haar du groupe vectoriel V.) L'opérateur $\pi_\zeta(f)$: $\mathscr{X} \to \mathscr{X}$ est en fait défini par un noyau $F_f(\zeta)$ qui appartient à $C^\infty(K \times K)$. Précisement:

$$F_f(\zeta)(x, y) = \int_V e^{i(\zeta|v)} f(x \cdot v, xy^{-1})\, dv. \tag{3.2}$$

Achaque f dans $\mathscr{D}(G)$. on peut ainsi associer une fonction F_f: $V_{\mathbb{C}} \times k \times k \to \mathbb{C}$, telle que:

$$F_f(\zeta)(x, y) = F_f(\zeta, x, y)$$

et une fonction $\tilde{f}$: $V \times K \times K \to \mathbb{C}$, telle que:

$$\tilde{f}(v; x, y) = f(x \cdot v, xy^{-1}) \tag{3.4}$$

pour tout ζ dans $V_{\mathbb{C}}$, v dans V, et (x, y) dans $K \times K$. A la suite de Kumahara ([**6**]), on appellera la fonction F_f la transformée de Fourier scalaire de f, où la transformée de Fourier additive de la fonction $\tilde{f}$. En sense invers des théorèmes de type Paley-Wiener dûs à Kumahara ([**8**]) et ([2, **a**]) permettent de caracterise l'image de $\mathscr{D}(G)$ par la transformée de Fourier scalaire où opérateur.

3.2. La transformée de Fourier opérateur $\pi_\zeta(f)$ de f est K-invariant au sens suivant:

$$\pi_{k,\zeta}(f) = \tau_k \pi_\zeta(f)\tau_k^{-1} \qquad (\forall k \in K,\ \forall \zeta \in V_{\mathbb{C}}), \tag{3.5}$$

où τ est la représentation régulière droite de K, (voir [**8**], p. 28). Alors la fonction F_f est k-invariante au sens suivant:

$$F_f(k \cdot \zeta; x, y) = F_f(\zeta; xk, yk) \tag{3.6}$$

pour tout ζ dans $V_{\mathbb{C}}$, et (x, y, k) dans $K \times K \times K$, et la fonction $\tilde{f}$ est aussi K-invariante au sens (3.6).

4. Soient f l'algèbre de Lie de K, et $(X_1, \dots, X_m)$ une base de f, telle que l'opérateur $\Delta = \sum_{i=1}^m X_f^2$ soit b-invariant sur K, une telle base existe ([**1**], p. 564). Pour $l \in \mathbb{N}$, on pose:

$$D^l = (1 - \Delta)^l. \tag{4.1}$$

Alors la famille de semi-normes $\{\gamma_l\,,\, l \in \mathbb{N}\}$ telle que:

$$\gamma_l(f) = \left(\int_K |D^l f(y)|^2\, dy\right)^{1/2}, \qquad f \in C^\infty(K)$$

définit sur $C^\infty(K)$, la même topologie que les semi-normes $\|X^\alpha f\|_2$, c'est-à-dire sa topologie habituelle d'espace de Frechet (voir **[1]**, pp. 565), et:

$$\|X^\alpha f\|_2 = \left(\int_k |X^\alpha f(y)|^2\, dy\right)^{1/2}, \qquad \alpha = (\alpha_1\,, \ldots\,, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m.$$

4.1. Soit $\mathscr{S}(V)$ l'espace des fonctions C^∞, et à décroissance rapide sur V. On note $\mathscr{S}(G)$ l'espace complété de l'espace $\mathscr{S}(V) \otimes C^\infty(V)$ produit tensoriel de $\mathscr{S}(V)$ par $C^\infty(K)$, dont la topologie est définie par la famille de semi-normes $\{\partial^l_{\alpha\,,\,\beta}\,,\, l \in \mathbb{N}\,,\, \beta \in \mathbb{N}\,,\, \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ telle que:

$$\partial^l_{\alpha\,,\,\beta}(f) = \sup_{|\alpha| \le p} \sup_{(v\,,\,y) \in V \times K} (1 + |v|^2)^\beta \|Q^\alpha_v D^1 f(v\,,\, y)\|_2$$

où $|\ |$ signifie la norme sur V associée à $(|)$. Pour l'espace $\mathscr{S}(G)$ (voir aussi **[11]**, Chapitre 45).

L'espace $\mathscr{S}(G)$ est un espace de Fréchet (voir **[8]**, Lemme 2 et Proposition 1), et ce qu'on appelle l'espace des fonction C^∞, et à *décroissance rapide sur* G, ou *l'espace des Schwartz* de G.

De même on définit l'espace de Schwartz de $V \times K \times K$, qu'on notera $\mathscr{S}(V \times K \times K)$.

4.2. Soit $\mathscr{S}_K(V \times k \times K)$ l'ensemble des fonctions $F(v\,;\, x\,,\, y)$ sur $V \times K \times K$, K-invariantes au sens (3.6) et telles que:

(i) $F(v\,;\, x\,,\, y)$ est C^∞ sur $V \times K \times K$;

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\beta \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C^l_{\alpha\,,\,\beta}$ telle que:

$$(1 + |v|^2)^\beta \|(Q^\alpha_v D^l_y F)(v\,;\, x\,,\, y)\|_2 \le C^1_{\alpha\,,\,\beta}$$

où Dy est l'opérateur différentiel $(1 - \Delta)$ agissant sur la variable y. On munit $\mathscr{S}_K(V \times K \times K)$ par la topologie définite par la famille des semi-normes:

$$\gamma^l_{\alpha\,,\,\beta}(F) = \sup_{|\alpha| \le p} \sup_{(v\,,\,x\,,\,y) \in V \times K \times K} (1 + |v|^2)^\beta \|Q^\alpha_v D^l_y F(v\,;\, x\,,\, y)\|_2$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\beta \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$. Alors $\mathscr{S}_K(V \times K \times K)$ est un espace de Fréchet (voir **[8]**, Proposition 2). De même on défini les espaces $D_K(V \times K \times K)$ et de $C^\infty_K(V \times K \times K)$ respectivement, alors on a:

4.3. PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont vérifiées:*

(i) $\sim: C^\infty(G) \to C_K^\infty(V\times K\times K)$ *est un* isomorphisme Topologique.
(ii) $\sim: D^\infty(G) \to D_K(V\times K\times K)$ *est un* isomorphisme Topologique.
(iii) $\sim: \mathscr{S}(G) \to \mathscr{S}_K(V\times K\times K)$ *est un* isomorphisme Topologique.

où $\sim$ *est l'application de* $C^\infty(G)$ *dans* $C^\infty(V\times K\times K)$ *définie par:*

$$\sim(f) = \tilde{f}$$

la démonstration de cette proposition est identique à celle donnée dans (**[8]**, *Lemme* 3).

4.4. COROLLAIRE. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\sim: D'(G) \to D'_K(V\times K\times K)$ *est un* isomorphisme Topologique.
(ii) $\sim: \varepsilon'(G) \to \varepsilon'_K(V\times K\times K)$ *est un* isomorphisme Topologique.
(iii) $\sim: \mathscr{S}'(G) \to \mathscr{S}'_K(V\times K\times K)$ *est un* isomorphisme Topologique.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la Proposition 4.3.

4.5. LEMME (*Kumahar* **[6]**). *La transformée de Fourier scalaire* F *est un isomorphisme topologique de* $\mathscr{S}(G)$ *sur* $\mathscr{S}_K(V\times K\times K)$, *pour les structures d'espaces vectoriels topolgiques l'isomorphisme réciproque noté par* F^{-1}; *autrement dit, pour toutes fonctions* f *dans* $\mathscr{S}(G)$ *on a*:

$$F^{-1}_{F_f} = f. \tag{4.2}$$

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ la transformée de Fourier vectoriele sur V. Alors on a:

$$F = \mathscr{F}\circ\sim \tag{4.3}$$

mais comme $\mathscr{F}$ est un isoimorphisme topologique de $\mathscr{S}_K(V\times K\times K)$ sur $\mathscr{S}_K(V\times K\times K)$, d'après la Proposition 2.7 on voit que F est un isomorphisme topologique de $\mathscr{S}(G)$ sur $\mathscr{S}_K(V\times K\times K)$.

4.6. DÉFINITION. On appelle transformée de Fourier scalaire de $\mathscr{S}'(G)$ dans $\mathscr{S}'_K(V\times K\times K)$ la transposée ${}^tF^{-1}$ de la transformée de Fourier scalaire F^{-1} de $\mathscr{S}_K(V\times K\times K)$ sur $\mathscr{S}(G)$.

On notera encore par F (au lieu de ${}^tF^{-1}$) cette transformée. Alors on a:

$$\langle F_T, \varphi\rangle = \langle T, F_\varphi^{-1}\rangle \tag{4.4}$$

pour tout T dans $\mathscr{S}'(G)$, et φ dans $\mathscr{S}'(V\times K\times K)$. Alors il en résulte de ce qui précède la théorème suivant:

4.7. THÉORÈME. *La transformée de Fourier scalaire* F *est un isomorphisme topologique de* $\mathcal{S}'(G)$ *sur* $\mathcal{S}'_K(V \times K \times K)$.

5. Opérateurs différentiels invariants sur G.

5.1. Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ le complexifié de $\mathfrak{g}$. On note u l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, qui peut être concidérée comme l'algèbre des opérateurs différentiels invariant à *gauche* sur G; on note $U^{\mathfrak{k}}$ le centralisateur de $\mathfrak{k}$ dans U. On fixe une base $v_1, \dots, v_n$ de V qu'on pourra supposer orthonormée par rapport à $(|)$, et une base $(X_1, \dots, X_m)$ de $\mathfrak{k}$ telle que $\Delta = -\sum_{i=1}^m x_i^2$ soit bi-invariant. Tout élément P du U s'écrit (de manière unique) sous la forme:

$$P = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} v^\beta X^\alpha$$

où sous le forme:

$$P = \sum_\alpha P_\alpha X^\alpha \tag{5.1}$$

où les α (respectivements β) sont multi-indices $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ (resp. $= (\beta_1, \dots, \beta_n))$, $v^\beta = v_1^{\beta_1} \cdots v_n^{\beta_n}$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_m^{\alpha_m}$, $a_{\alpha,\beta}$ sont des nombres complexes, et P_α sont des fonctions polynômes sur V à valeurs complexes.

5.2. Soit t réel et soit X dans $\mathfrak{k}$, identifié à l'élément $(0, X)$ de $\mathfrak{g}$. On a alors:

$$\tilde{f}(v; x, \exp -tXy) = \tilde{f}(xv, xy^{-1} \exp tX). \tag{5.2}$$

En dérivant par rapport à t, on trouve:

$$(R_X\tilde{f})(v; x, y) = (L_X f)^{\sim}(v; x, y) \tag{5.3}$$

où R_X et L_X sont les champs de vecteurs associés à X, le premier sur $V \times K \times K$, le deuxième sur $V \times K$:

$$(R_X\phi)(v; x, y) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \phi(v; x, \exp -tXy), \qquad (\phi \in C^\infty(V \times K \times K)), \tag{5.4}$$

$$(L_X\phi)(v; y) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \phi(v; y \exp tX), \qquad (\phi \in C^\infty(V \times K)). \tag{5.5}$$

On remarquera que les champs de vecteurs R_X et L_X peuvent être interprétés de la manière suivante: R_X est un champ de vecteurs sur $V \times K \times K$ qui en fait n'opère pas sur les deux premières variables (v, x) mais seulement sur y; c'est essentiellement le champ de vecteurs *invariant à droite* sur K associé à X, étendue de manière naturelle en un opérateur différentiel sur $(V \times K) \times K$. De même pour L_X, mais ici L_X est invariant *à gauche*, et c'est un champ *invariant à gauche* sur le groupe $G = V \times K$.

5.3. Soit t réel et soit w dans V, identifié à l'élément $(w, 0)$ dans $\mathfrak{g}$. On a alors:

$$\tilde{f}(v + ty^{-1}w ; x, y) = f(xv + txy^{-1}w, xy^{-1}). \tag{5.6}$$

En dérivant par rapport à t, on trouve:

$$\tilde{w}\tilde{f}(v ; x, y) = (wf)^{\sim}(v ; x, y)$$

où $\tilde{w} = y^{-1}w$ et:

$$(\tilde{w}\phi)(v ; x, y) = \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \phi(v + ty^{-1}w ; x, y), \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}(w\phi)(v ; y) &= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \phi((v, y)(tw, 0)) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \phi(v + tyw, y)\end{aligned} \tag{5.8}$$

où comme dans 5.2, $\tilde{w}$ et w peuvent être interprétés de la manière suivante: $\tilde{w}$ est un champ de vecteurs sur $V \times K \times K$ qui opère seulement sur la *première variable* v comme dans la formule (5.7); c'est le champ de vecteurs sur V associé à w. De même pour w, mais ici w est *invariant à gauche*, et c'est un champ invariant à gauche sur le groupe G.

5.4. Proposition. *Soit $P = \sum_\alpha P_\alpha X^\alpha$ un opérateur différentiel invariant à gauche sur G. Alors il existe un opérateur différentiel linéaire $\widetilde{P}$ sur $V \times K \times K$, tel que:*

$$\widetilde{P}\tilde{f} = \widetilde{Pf} \qquad \forall f \in C^\infty(G).$$

Démonstration. En fait si $P = \sum_\alpha P_\alpha X^\alpha$ est un opérateur différentiel invariant à gauche sur G; le calcul précédent montre bien qu'il existe un opérateur différentiel noté $\widetilde{P}(w, R)$ agissant sur la première et la troisième variables, telque:

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(w, R)\tilde{f}(v ; x, y) &= \sum_\alpha P_\alpha(y^{-1}w)R^\alpha \tilde{f}(v ; x, y) \\ &= \widetilde{Pf}(v ; x, y)\end{aligned} \tag{5.9}$$

où $R^\alpha = R_1^{\alpha_1} \cdots R_m^{\alpha_m}$ chaque R_j n'autre que le champ de vecteurs R_{X_j} (invariant à droite sur K) et $P_\alpha(y^{-1}w)$ sont des polynômes de $(y^{-1}w)$.

5.5. Corollaire. *Soit P un opérateur différéntiel invariant à gauche sur G. Alors il existe un opérateur différéntiel noté F sur $V_{\mathbb{C}} \times K \times K$ agissant seulement sur la troisième variable telle que:*

$$F_P F_f = F_{Pf} \qquad \forall f \in \mathscr{D}(G). \tag{5.10}$$

Démonstration. En effet, il suffit de rémarquer que $F = \mathscr{F} \circ \sim$. Donc d'apres la Proposition 5.4, on a:

$$\begin{aligned} F_{Pf}(\zeta\,;x\,,y) &= \mathscr{F}\widetilde{Pf}(\zeta\,;x\,,y) \\ &= \mathscr{F}(\widetilde{P}(w\,,R)\tilde{f})(\zeta\,;x\,,y) \\ &= \sum_\alpha \mathscr{F} P_\alpha(iy\cdot\zeta) R^\alpha F_f(\zeta\,;x\,,y) \end{aligned} \tag{5.11}$$

pour tout ζ dans $V_{\mathbb{C}}$ et $(x\,,y)$ dans k, d'où le *corollaire*.

5.6. Si il n'y a pas de confusion l'opérateur F_P s'appelle la transformée de Fourier scalaire où la transformée de Fourier additive de $\tilde{P}$. Désormais on notera P la transformée de Fourier scalaire de P, alors on a:

$$\begin{aligned} (F_P F_f)(\zeta\,;x\,,y) &= \sum \mathscr{F} P_\alpha(iy\cdot\zeta) R^\alpha F_f(\zeta\,;x\,,y) \\ &= \mathscr{F}\widetilde{P}(iy\cdot\zeta\,;R)\mathscr{F}\tilde{f}(\zeta\,;x\,,y) \\ &= P(iy\cdot\zeta\,,R) F_f(\zeta\,;x\,,y) \end{aligned} \tag{5.12}$$

où comme dans 5.6 $P(iy\cdot\zeta\,,R)$ est l'opérateur differéntiel sur $V_{\mathbb{C}} \times K \times K$ agissant seulement sur la troisième variable et qu'il a la forme:

$$P(iy\cdot\zeta\,,R) = \sum_\alpha P_\alpha(iy\cdot\zeta) R^\alpha. \tag{5.13}$$

$P_\alpha(iy\cdot\zeta)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $y \mapsto P_\alpha(y\cdot\zeta)$.

6. Solution élémentaire d'un élément $P \in u^{\mathfrak{k}}$.

6.1. On considere le groupe de Lie $B = V \times K \times K$ produit direct de trois groupes V, K, et K. On rappele que le produit de deux éléments de B est donné par la formule:

$$(v\,;x\,,y)\,,(v'\,;x'\,,y') = (v+v'\,,xx'\,,yy'). \tag{6.1}$$

Soit $\widetilde{G} = V \times K$ le groupe de Lie produit direct de V par K, qu'on pourra identifié au sous-groupe fermé $V \times \{1\} \times K$ de B.

6.2. THÉORÈME. *Soient* G *le gorupe de déplacements, et* $P = \sum_\alpha P_\alpha X^\alpha$ *un opérateur différéntiel invariant à* gauche *sur* G *et à* droite *par* K. *Alors il exist un unique opérateur différentiel noté* Q *invariant à* gauche *sur* $\widetilde{G}$ *tel que*:

$$\widetilde{P}\tilde{f}(v\,;1\,,y) = (Q\tilde{f})(v\,;1\,,y)\,,\qquad \forall f \in C^\infty(G)\,, \tag{6.2}$$

avec:

$$Q = \sum_\alpha P_\alpha L^\alpha\,, \tag{6.3}$$

où $L^\alpha = L_1^{\alpha_1}\cdots L_m^{\alpha_m}$, *chaque* L_j *n'autre que le champ des vecteurs* L_{X_j} (*invariant à gauche sur* K) *associé à* X_j $(1 \le j \le m)$.

Démonstration. Soit ν la représentation régulière *gauche* de K. Alors pour tout f dans $\mathscr{D}(G)$, on a:

$$F_{P(f\circ\tau_k)}(\xi\,;x\,,y) = F_{\tau_k\circ(Pf)}(\xi\,;x\,,y) \tag{6.4}$$

pour tout ξ dans V et $(x\,,y\,,k)$ dans $K\times K\times K$. En faisant le calcule du première et du seconde membre de l'èquation (6.4), on trouve:

$$F_{P(f\circ\tau_k)}(\xi\,;x\,,y) = P(y\cdot\xi\,,R)F_f(\xi\,;x\,,k^{-1}y)$$

et:

$$F_{\tau_k\circ(Pf)}(\xi\,;x\,,y) = P(k^{-1}y\xi\,,R)F_f(\xi\,;x\,,k^{-1}y).$$

Donc, on a:

$$P(y\cdot\xi\,,R)F_f(\xi\,;x\,,k^{-1}y) = P(k^{-1}y\xi\,,R)F_f(\xi\,;x\,,k^{-1}y)$$

ou encore:

$$P(y\cdot\xi\,,R)(F_f\circ\nu_k)(\xi\,;x\,,y) = \nu_k\circ P(y\cdot\xi\,,R)F_f(\xi\,;x\,,y)$$

pour tout ξ dans V et $(x\,,y\,,k)$ dans $K\times K\times K$. On en déduit de l'équation (6.5) que l'opérateur $P(y\cdot\xi\,,R)$ est un opérateur invariant à *gauche* sur K dont les coefficients sont des fonctions polynômes sur V, on a donc:

$$P(y\cdot\xi\,,R) = \sum_\alpha P_\alpha(\xi)L^\alpha \tag{6.6}$$

où $L^\alpha = L_1^{\alpha_1}\cdots L_{m^r}^{\alpha_m}$ chaque L_j n'est autre que le champ des vecteurs invariant à gauche sur K associé à X_j. Soit $P_\alpha(w)$ l'unique opérateur différentiel (à coefficients constantes) sur V qui correspond naturellement au polynome $P_\alpha(\xi)$. Alors l'opérateur

$$Q = \sum_\alpha P_\alpha(w)L^\alpha$$

est un opérateur différentiel invariant à *gauche* sur $\widetilde{G}$.

6.2$'$. Le passage de P à Q et vice-versa, est donné par les diagrams commutatfs suivants:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{S}'(G) & \xrightarrow{P} & \mathscr{S}'(G) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{S}'(B) & \xrightarrow{\widetilde{P}} & \mathscr{S}'(B) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{S}_k(B) & \xrightarrow{F_P} & \mathscr{S}'_k(B) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{S}'(\widetilde{G}) & \xrightarrow{Q} & \mathscr{S}'(\widetilde{G}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{S}(\widetilde{G}) & \xrightarrow{Q} & \mathscr{S}'(\widetilde{G})
\end{array}$$

6.3. *Remarques.* Le Théorème 6.2 dit en definitif que pour P dans $u^{\mathfrak{k}}$ il est possible d'associer un opérateur différéntiel Q invariant à *gauche* sur $\widetilde{G}$ tel que:

$$Q\tilde{f} = \widetilde{Pf} \qquad \forall f \in C^\infty(G) \tag{6.7$'$}$$

car si $P \in u^{\mathfrak{k}}$, on a:

$$\widetilde{(\tau_k \circ Pf)}(v\,;x\,,y) = \widetilde{P(f \circ \tau_k)}(v\,;x\,,j)$$

pour tout $(v\,,x\,,y)$ dans $V \times K \times K$, et f dans $C^\infty(G)$. Alors par un simple calcule, on montre qu'il existe un opérateur differéntiel invariant à *gauche* sur $\widetilde{G}$, tel que $(6.7)'$ soit vérifié.

6.4. Soit $A(\xi) \in \mathrm{End}(E_\gamma)$, dont les coefficients dan une base orthonormal de E_γ sont des polynômes $a_{ij}(\xi)$. On note $\widetilde{A}(\xi)$ la matrice de coefficients $a_{ij}(\xi)$ dans cette base, où:

$$\tilde{a}_{ij}(\xi) = \left(\sum |a_{ij}(\xi)^{(\alpha)}|^2\right)^{1/2}$$

et:

$$a_{ij}(\xi)^{(\alpha)} = \frac{\partial^\alpha a_{ij}(\xi)}{(\partial\xi)^\alpha}, \qquad \alpha = (\alpha_2\,,\ldots\,,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Cette définition ne depend pas de la bas orthonormale choisie, et on a:

$$\|\widetilde{A}(\xi)\|^2 = \sum_\beta \|A(\xi)^{(\beta)}\|^2.$$

On peut maintenant énoncer ce qui suit:

6.5. Théorème. *Soient G le groupe des deplacements, P un opérateur différéntiel invariant à* gauche *sur G et à* droite *par K. Alors les* *conditions suivantes sont équivalantes*:

(i) *P admet une solution* élémentaire sur G.

(ii) *il existe une constante $C > 0$, et un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que pour tout γ dans $\hat{K}$, la fonction (de ζ)* dét $P(\zeta, \gamma)$ *ne soit pas identiquement nulle sur $V_{\mathbb{C}}$ et*:

$$\left\| \frac{({}^{\omega}P(0, \gamma))^{\sim}}{(\det P(0, \gamma))^{\sim}} \right\| \leq C d_l(\gamma)$$

où les $P(\zeta, \gamma)$ sont les coefficients de Fourier de P, $d_l(\gamma)$ les coefficients de Fourier de D^l, et ${}^{\omega}P(0, \gamma)$ est la comatrice de $P(0, \gamma)$.

Démonstration. Soit $E \in \mathscr{D}'_k(V \times K \times K)$, tel que:

$$P\widetilde{E}(v, y) = \delta_G(v, y)$$

où δ_G est la mesure de Dirac à l'élément neutre de G et $\widetilde{E}(v, y)$ est la distribution sur G, telle que:

$$\langle \widetilde{E}(v, y), f(v, y) \rangle = \langle E(v; x, y), f(xv, xy^{-1}) \rangle \tag{6.8}$$

pour tout f dans $\mathscr{D}(G)$. D'après le Théorème 6.2, on a:

$$\begin{aligned}(\widetilde{P}E)(v; 1, y) &= (QE)(v; 1, y)\\ &= \tilde{\delta}_G(v; 1, y) = \delta_{\widetilde{G}}(v; y)\end{aligned}$$

pour tout (v, y) dans $V \times K$. Donc dire que $\widetilde{E} \in \mathscr{D}'(G)$ est une solution élémentaire de P sur G équivaut à dire que $E|_{\widetilde{G}}$ la restriction de E à $\widetilde{G}$ est une solution élémentaire de Q sur $\widetilde{G}$. Ceci montre à la fois que (i) implique (ii) et (ii) implique (i) (voir **[1]**, Théorème III), d'où le *théorème.*

7. Le cas particulier des groupes de deplacements de Cartan.

7.1. Soit G_0 un groupe de Lie semi-simple connexe réel de centre fini; $\mathfrak{g}_0$ son algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ une decomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. Soit K le sous-groupe compact maximal de G_0 correspondant à K. En pernant pour V l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathfrak{p}$, muni de l'action adjoint de K. On construit le groupe des deplacements de Cartan $G = V \times_{\mathrm{Ad}} K$ produit semi-directe de V par K. Notons $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ son complexifié, sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$.

Soient M le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K, et $\mathfrak{M}$ son algèbre de Lie. On choisit une base $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathfrak{M}$, telle que l'opérateur

$D_M^l = (1 - \sum_{i-1}^n X_i^n)^l$ $(l \in \mathbb{N})$ soit bi-invariant sur M. On note $d_l(\sigma)$ les coefficients de Fourier de D^l. On aura à faire intervenir le groupe réductif connexe complexe $K_\mathbb{C}$, qui est le complexifié (universel) de K; par construction, ce groupe $K_\mathbb{C}$ est un sous-groupe du groupe linéaire de $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$; il opére donc naturellement dans $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$.

Reprons maintenant dans cette situation les objets, $P(\zeta, \gamma)$, avec γ dans $\hat{K}$ et ζ dans $p_\mathbb{C}$. La fonction (de ζ) dét $P(\zeta, \gamma)$ étant K-invariante, elle est aussi $K_\mathbb{C}$-invariant par prolongement analytique (car $\pi_\zeta(p)$ est K-invariant au sens (3.5)).

7.2. Lemme. *Les deux propriétés suivantes sont équivalantes.*

(i) *pour tout γ dans $\hat{K}$, la fonction polynome (de ζ)* dét $P(\xi, \gamma)$ *n'est pas identiquement nulle sur $\mathfrak{p}_a$.*

(ii) *pour tout γ dans $\hat{K}$, la fonction polynome de (de ζ)* dét $P(\zeta, \gamma)$ *n'est pas identiquement nulle sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$.*

Démonstration. Supposons dét $P(\zeta, \gamma) = 0$ pour tout ζ dans $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$. Du fait de l'invariance sous K remarqué plus haut, il vient que dét $P(\zeta, \gamma) = 0$ pour tout ζ dans $K_\mathbb{C} \cdot a_\mathbb{C}$ (réunion des K_0-orbits rencontrant $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$). Or ce dernier ensemble est Zariski dense dans $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ (**[6]**). Donc dét $P(\zeta, \gamma) = 0$ pour tout ζ dans $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$. Ainsi (ii) implique (i), l'implication inverse étant triviale.

7.3. Théorème. *Soit G le groupe des deplacement de Cartan, et soit P un opèrateur différéntiel bi-invariant sur G. Alors P admet une solution élémentaire sur G si et seulement si P vérifié la conditon de A. Cerezo et F. Rouviere i.e. pour tout σ dans $\widehat{M}$, il existe une constante $C > 0$, et un entier $l \in \mathbb{N}$, telle, que:*

$$\|P(0, \sigma)^\sim\|^{-1} \le C d_l(\sigma).$$

Démonstration. D'après le Théorème -6.2 pour tout f dans $\mathscr{D}(G)$ on a:

$$\begin{aligned} F_{Pf}(\zeta; x, y) &= F_P(y \cdot \zeta, R) F_f(\zeta; x, y) \\ &= \mathscr{F}\widetilde{P}(y, \zeta, R)\mathscr{F}\widetilde{f}(\zeta; x, y) \\ &= P(\zeta, L)\mathscr{F}\widetilde{f}(\zeta; x, y) \end{aligned}$$

pour tout ζ dans $V_\mathbb{C}$, et (x, y) dans K; où $P(\zeta, L)$ comme dans (6.6) est un opérateur différentiel invariant à gauche sur K dont les coefficients sont des fonctions polynomes sur $V_\mathbb{C}$. Si λ dans $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$, alors d'après ([**4**] Lemme 4.2 et 3.9), on a pour tout f dans $\mathscr{D}(G)$:

$$(7.1)\qquad \begin{aligned} P(\lambda, \sigma)(\mathscr{F}\tilde{f}_\sigma)(\lambda; x, y) &= P(\lambda, \sigma)(\mathscr{F}\tilde{f})_{\check{\sigma}}(\lambda; x, y) \\ &= \mathscr{F}(\widetilde{Pf})_{\check{\sigma}}(\lambda; x, y). \end{aligned}$$

Pour tout (λ, x, y) dans $a \times K \times K$ (voir [**4**] p. 13).

On rappelle que $P(\lambda, \sigma)$ est une fonction polynome sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ pour tout σ dans $\widehat{M}$, et:

$$(7.2)\qquad (\mathscr{F}\tilde{f}_\sigma)(\lambda; x, y) = \int_M \mathscr{F}\tilde{f}(\lambda, x, yz^{-1})x_\sigma(3)\, dz,$$

$$(7.3)\qquad (\mathscr{F}\tilde{f})_{\check{\sigma}}(\lambda; x, y) = \int_M \mathscr{F}\tilde{f}(\lambda; xz, y)x_\sigma(z)\, dz.$$

(où dz est la mesure de Haar normalisée de M). Appliquons maintenant la transformée de Fourier partielle sur K, relativement à la variable y, à l'equation (7.1); on trouve:

$$(7.4)\qquad P(\lambda, \gamma)(\widetilde{\mathscr{F}\tilde{f}})_{\check{\sigma}}(\lambda, x, \gamma) = P(\lambda, \sigma)(\widetilde{\mathscr{F}\tilde{f}})_{\check{\sigma}}(\lambda; x, \gamma)$$

pour tout γ dans $\widehat{K}$, σ dans $\widehat{M}$, et (λ, x) dans $\mathfrak{a}_\mathbb{C} \times K$. Alors on a une relation entre les $P(\lambda, \gamma)$ et les scalaires $P(\lambda, \sigma)$:

$$P(\lambda, \gamma) = \begin{pmatrix} P(\lambda, \sigma) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda, \sigma) \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire que $P(\lambda, \gamma)$ est une matrice digonalisée dont les valeurs propres sont les $P(\lambda, \sigma)$. Donc on a:

$$(7.5)\qquad \text{dét} P(\zeta, \gamma) = P(\zeta, \sigma)^{d_\sigma}, \qquad \zeta \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}.$$

Alors on en déduit la suivant:

"La fonction (de ζ) det $P(\zeta; \gamma)$ n'est pas identiquement nulle sur $V_{-\mathbb{C}}$ pour tout γ dans $\widehat{K}$ si et seulement si la fonction (de ζ), $P(\zeta, \sigma)$ n'est pas identiquement nulle sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ pour tout σ dans $\hat{M}$". D'où le théorème.

7.3. Exemple. Soient $K = \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, $V = \mathbb{R}^2$, et $G = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{SO}(2)$ le produit semi-direct de $\mathbb{R}^2$ par SO(2), relativement à l'action naturelle de SO(2) dans $\mathbb{R}^2$; autrement dit, G est le groupe des deplacement du plan; il est réoluble mais non simplement connexe et c'est le groupe des deplacements de Cartan associé $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ c'est une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K). On posera:

$$v_1 = (e_1, 0), \quad v_2 = (e_2, 0), \quad Y = (0, X)$$

de sorte que (v_1, v_2, Y) est une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. D'après ([**2**], Lemme II), l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G, et invariant à droite par K, est engendrée par les deux "opérateurs":

$$P_1 = v_1^2 + v_2^2, \quad P_2 = Y$$

tandis que celle des opérateurs différentiels bi-invariants par G est engendrée par P_1.

Soit $P = \sum_{r,q} a_{r,q} P_1^r P_2^q$, les $a_{r,q}$ etant des nombres complexes. Alors, pour $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ dans $\mathbb{C}^2$, l'opérateur $\pi_\zeta(P)$ est l'opérateur différentiel invariant à gauche sur SO(2).

$$\pi_\zeta(P) = (\zeta, L) = \sum (-1)^2 a_{2,q}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^r L^q$$

où L est le champ de vecteurs sur SO(2), associé à X (dans les coordonnées habituelles: $L = \partial/\partial\theta$). La condition (ii) du Théorème 7.3 s'exprime ici de la manière suivante:

Pour tout entier m, il existe r tel que:

$$\sum_q a_{r,q}(im)^q \neq 0$$

et il existe une constante $C > 0$ et un entier $l \in \mathbb{N}$ telle que:

$$\left(\sum_{0 \leq j \leq r} \sum_q |a_{j,q}(im)^q| \right)^{-1} \leq C(1 + m^2)^l.$$

References

[1] A. Cerezo et F. Rouviere, *Solution élémentaire d'un opérateur différentiel invariant sur un groupe de Lie compact*, Ann. Scient. EC. Norm. Sup. 4^e série, t. 2 (1969), 561–581.

[2] F. D. Battesti, *Solvability of differential operators* I. *Direct and semi direct product of Lie group* (to appear).

[3] K. El-Hussein, *Théorème de Paley-Wiener pour les groupes de déplacements*, Thèse de Doctorat de 3^e cycle, Poitiers, 1982.

[4] ——, *P-convexité pour certains opérateurs différentiels sur les groupes des déplacements de Cartan*, preprint Poitiers n^o 27 1987.

[5] F. R. Gantmacher, *Théorie des Matrices*, Tome 1, Dunod, Paris, 1966.

[6] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Acad. Press 1984.

[7] L. Hormander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[8] K. Kumahar, *Fourıer transform on the motion groups*, J. Math. Soc. Japan, **28** (1976).

[9] G. W. Mackey, *The theory of unitary group representations*, University of Chicago Press, 1976.
[10] F. Rouviere, *Invariant differential equations on certain semisimple Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **243** (1978).
[11] F. Trèves, *Topological Vector Sapce Distribution and Kernels*, Academic Press, New-York, London, 1966.

Received July 30, 1988.

UNIVERSITÉ DE LATTAQUE
LATTAQUE, SYRIE