PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 172, No. 2, 1996

PARAGROUPE D'ADRIAN OCNEANU ET ALGEBRE DE KAC

MARIE-CLAUDE DAVID

Dans ces quelques pages, nous reprenons l'essentiel des notes manuscrites d'Adrian Ocneanu intitulées "A Galois theory for operator algebras"(1986). Nous en précisons les définitions et démontrons les théorèmes essentiels: les propriétés fondamentales du paragroupe, le résultat de classification qui est un corollaire du théorème de classification de S. Popa et la caractérisation de l'inclusion d'un facteur dans son produit croisé par une algèbre de Kac de dimension finie. Il nous a paru important que le paragroupe soit explicitement défini et que ces résultats admis par tous et souvent cités par F. Goodman, P. de la Harpe, V. Jones dans leur livre [**GHJ**] et par S. Popa dans ses article de classification [**Popa**, **1** et **2**] reçoivent enfin une demonstraion exhaustive. Je me suis attachée à rédiger les démonstrations qui auraient pu être données à l'époque à deux exception près:

Le caractère d'invariant complet du paragroupe est démontré grâce aux carrés commutatifs de S. Popa.

La coassociativité du coproduit de l'algèbre de Kac (§5) était vérifiée directement dans ma première version (Publications de l'Université Paris-Sud #93-06). Claire Anantharaman a attiré mon attention sur l'article de W. Szymanski [**S**], je l'en remercie: la dualité qu'il définit me permet de donner une démonstration plus algébrique.

Parmi les développements de la théorie qui pourraient fournir d'autres démonstrations à ces résultats, on peut citer, par exemple, la théorie des bimodules d'A. Ocneanu [**O**], la théorie des secteurs [**L1**, **L2**], [**I1**, **I2**]...

Je remercie particulièrement Vaughan Jones qui m'a encouragée à entreprendre ce travail et m'a guidée lors de nombreuses discussions. Je remercie aussi Michel Enock pour ses conseils qui m'ont aidée à achever cet article.

0. Introduction.

Soit N un sous-facteur d'indice fini dans M, un facteur de type II_1 dont tr est la trace finie fidèle normalisée. Soit M_1 l'algèbre oblenue par construction de base: M_1 est l'algèbre de von Neumann sur $L^2(M, \mathrm{tr})$ engendrée par M et e_N la projection sur $L^2(N, \mathrm{tr})$ [**VJ1**]. Si J est l'involution standard de $L^2(M, \mathrm{tr})$,

M_1 est égal à $JN'J$. J permet donc de définir un anti-automorphisme γ_0 de $N' \cap M_1$:

$$\gamma_0(x) = Jx^*J \qquad (x \in N' \cap M_1).$$

Plus généralement, comme M. Pimsner et S. Popa ont montré que

$$N \subset M_n \subset M_{2n+1}$$

est isomorphe à la construction de base, on sera tenté de définir, pour x élément de $N' \cap M_{2n+1}$, $\gamma_n(x)$ par $J_n x^* J_n$ où J_n est l'involution standard de $L^2(M_n, \mathrm{tr})$. La première partie de cet article contient les vérifications nécessaires à une définition cohérente de γ_n.

La deuxième partie donne la définition et les propriétés fondamentales des γ_n.

La troisième partie contient la démonstration de ces propriétés et une expression de $\gamma_n(y)$ quand y est un élément de $N' \cap M_{2n+1}$.

La quatrième partie montre que le paragroupe (la tour dérivée munie des anti-automorphismes) est un invariant complet pour l'inclusion d'un sous-facteur de profondeur finie dans le facteur hyperfini de type II_1 équivalent à l'invariant défini par S. Popa dans [**Popa1**], à savoir le carré commutatif canonique.

On rappelle que *l'inclusion* $N \subset M$ *est de profondeur finie* si le graphe principal est fini [**GHJ**, 4.1]; on obtient le *graphe principal* de $N \subset M$ en effaçant dans le diagramme de Bratteli de la tour dérivée ce qui s'obtient par réflexion de l'étage précédent.

La cinquième partie donne une caractérisation de l'inclusion d'un facteur de type II_1 dans son produit croisé par une algèbre de Kac de dimension finie:

Soient M un facteur de type II_1, tr sa trace normale finie fidèle normalisée et N un sous-facteur d'indice fini dans M. Les proposition suivantes sont équivalentes:

(a) N est de profondeur au plus 2 dans M et $N' \cap M$ est égal à $\mathbb{C}$.

(b) M est le produit croisé de N par une action extérieure d'une algèbre de Kac de dimension finie $\mathbb{K}$.

(c) N est la sous-algèbre des points fixes de M sous une action extérieure d'une algèbre de Kac de dimension finie $\widehat{\mathbb{K}}$.

Une démonstration de ce résultat utilisant la méthode des secteurs se trouve dans [**L2**] (voir aussi [**I2**]). Dans [**I1**], on trouvera une caractérisation d'une inclusion irréductible de profondeur 2 de facteurs proprement infinis.

Un résultat semblable dans le cas où l'indice est infini est montré dans [**EN**]. D'autre part, si $N' \cap M_1$ est commutatif, l'algèbre de Kac est un groupe fini.

1. Représentations des algèbres de la tour obtenue en itérant la construction de base.

1.1. Définitions [**VJ1**]. Soient M un facteur de type II_1, tr sa trace normale finie fidèle normalisée et N un sous-facteur d'indice fini dans M. On regarde M dans sa représentation standard π_0 sur $L^2(M,\mathrm{tr})$. L'espérance conditionelle E_N de M sur N définit le projecteur e_N de $L^2(M,\mathrm{tr})$ sur $L^2(N,\mathrm{tr})$:

Si ξ est le vecteur cyclique canonique donné par la trace, si x appartient à M, on a:

$$e_N(x\xi) = E_N(x)\xi.$$

La construction de base sur $N \subset M$ est la définition de l'algèbre de von Neumann M_1 sur $L^2(M,\mathrm{tr})$ engendrée par M et e_N. On connaît donc M_1 par sa représentation fidèle π_0 sur $L^2(M,\mathrm{tr})$ qui prolonge la représentation π_0 de M par multiplication à gauche, c'est-à-dire pour tout a de M et tout x de M, on a:

$$\pi_0(a)(x\xi) = (ax)\xi \text{ et } \pi_0(e_N)(x\xi) = E_N(x)\xi.$$

D'après [**VJ1**, 3.1.7], la trace canonique Tr sur M_1 est une $([M:N]^{-1}, M)$ trace, c'est-à-dire Tr étend tr et $\mathrm{Tr}(e_N x)$ est égal à $[M:N]^{-1}\,\mathrm{tr}(x)$ pour tout x de M. On notera alors la trace sur M_1 comme la trace sur M par tr.

1.2. La tour. D'après [**VJ1**, 3.1.7], on peut recommencer la construction de base à partir de l'inclusion $M \subset M_1$ et on obtient une algèbre de von Neumann M_2 que l'on connait par sa représentation π_1 sur $L^2(M_1,\mathrm{tr})$. Les restrictions de π_1 à M_1 ou M sont les représentation de ces algèbres qui prolongent leur action par multiplication à gauche sur $M_1\xi_1$, où ξ_1 est le vecteur cyclique canonique.

La trace sur M_2 prolonge celle de M_1 et vérifie la propriété de Markov, on la notera encore tr et ainsi pour la trace de chaque algèbre construite par construction de base. En effet, en répétant la construction de base, on obtient la tour d'algèbres:

$$N \subset M \overset{e_0}{\subset} M_1 \overset{e_1}{\subset} M_2 \overset{e_2}{\subset} \cdots M_n \overset{e_n}{\subset} M_{n+1} \cdots$$

On connaît M_{n+1} par sa représentation π_n sur $L^2(M_n,\mathrm{tr})$, M_{n+1} est l'algèbre de von Neumann engendrée par M_n et e_n, la projection de $L^2(M_n,\mathrm{tr})$ sur $L^2(M_{n-1},\mathrm{tr})$.

1.3. La construction de base $N \subset M_n \subset M_{2n+1}$. Dans [**PiPo2**], M. Pimsner et S. Popa remarquent qu'on peut définir abstraitement l'algèbre de la construction de base sur $N \subset M$ comme l'unique (à un isomorphisme près) facteur fini M_1, muni d'une trace τ, qui contienne M et une projection e et vérifie

$$\begin{aligned}&[M_1 : M] = [M : N]\\ &[e, y] = 0 \quad (y \in N)\\ &exe = E_N(x)e \quad (x \in M)\\ &\tau(ex) = [M_1 : M]^{-1}\operatorname{tr}(x) \quad (x \in M).\end{aligned}$$

Ils montrent alors que l'algèbre M_{2n+1} est isomorphe à l'algèbre obtenue par la construction de base sur $N \subset M_n$. Il existe donc une représentation fidèle π_n de M_{2n+1} sur $L^2(M_n, \operatorname{tr})$. Le projecteur de la construction de base est alors [**PiPo2**, 2.6].:

$$f_n^{-1} = [M : N]^{\frac{n(n+1)}{2}}(e_n e_{n-1} \dots e_0)(e_{n+1}e_n \dots e_1)\dots(e_{2n}e_{2n-1}\dots e_n)$$

M_{2n+1} est donc le facteur engendré par M_n et f_n^{-1}.

Si ξ_n est le vecteur cyclique canonique de $L^2(M_n, \operatorname{tr})$ et x_n un élément de M_n, on a:

$$\pi_n(f_n^{-1})(x_n\xi_n) = E_N(x_n)\xi_n$$

et la restriction de π_n à M_n est la representation standard de M_n sur $L^2(M_n, \operatorname{tr})$.

1.4. D'autres représentations. On pourrait aussi regarder la construction de base sur $M_p \subset M_n$, $p \leq n$, qui nous donne une représentation π_n^p de M_{2n-p} sur $L^2(M_n, \operatorname{tr})$; posons alors

$$f_n^p = [M : N]^{\frac{(n-p)(n-p-1)}{2}}(e_n e_{n-1} \dots e_{p+1})(e_{n+1}e_n \dots e_{p+2})\dots(e_{2n-p-1}\dots e_n).$$

M_{2n-p} est le facteur engendré par M_n et f_n^p et, pour x_n dans M_n, $\pi_n^p(f_n^p)(x_n\xi_n)$ vaut $E_{M_p}(x_n)\xi_n$.

La restriction de π_n (définie en 3) à M_{2n-p} nous donne aussi une représentation de M_{2n-p} sur $L^2(M_n, \operatorname{tr})\dots$ Nous allons voir dans le paragraphe suivant que π_n^p et π_n coïncident sur M_{2n-p}.

1.5. Compatibilité des représentations obtenues à partir de différentes constructions de base. Nous commençons par fixer les notations et rappeler les règles de calcul dans les algèbres de la tour.

1.5.1. Notations.

a) $\alpha = [M : N]$, a est la partie entière de α et $\alpha(n,p) = \alpha^{\frac{(n-p)(n-p-1)}{2}}$.

b) a_n est la partie entière de α^n, l'indice de M_n dans M_{2n}.

c) $g_n^k = e_n e_{n-1} \dots e_{k+1} e_k \qquad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n \geq k$.

d) $g_n^k = e_n e_{n+1} \dots e_{k-1} e_k \qquad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n \leq k$
remarquons que $g_k^n = (g_n^k)^*$ pour tous n et k.

e) $f_n^p = \alpha(n,p) g_n^{p+1} g_{n+1}^{p+2} \dots g_{2n-p-1}^n \qquad n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, n \geq p \geq -1.$

1.5.2. Bases de Pimsner-Popa [**PiPo1**, 1.3].

Il existe une famille $\{\lambda_j, 1 \leq j \leq a+1\}$ d'éléments de M, appelée base de Pimsner-Popa de M sur N, telle que:

a) $E_N(\lambda_j^* \lambda_k) = 0$ si $j \neq k$.

b) $E_N(\lambda_j^* \lambda_j) = p_j$ où p_j est un projecteur de N de trace $\alpha - a$ si $j = a+1$ et est l'identité sinon.

Une telle famille vérifie de plus:

c) $\lambda_j e_N$ est une isométrie partielle pour $1 \leq j \leq a+1$.

d) $\sum_{j=1}^{a+1} \lambda_j e_N \lambda_j^* = 1$.

e) $\sum_{j=1}^{a+1} \lambda_j \lambda_j^* = \alpha$.

f) Tout y de M admet une unique décomposition $y = \sum_{j=1}^{a+1} \lambda_j y_j$ où y_j est un élément de $p_j N$ égal à $E_N(\lambda_j^* y)$. De même $y = \sum_{j=1}^{a+1} E_N(y\lambda_j)\lambda_j^*$.

g) La famille $\{\alpha^{1/2}\lambda_i e_0, 1 \leq i \leq a+1\}$ est une base de Pimsner-Popa de M_1 sur M. Plus généralement, la famille $\{\alpha^{(p+1)/2}\lambda_i g_0^p, 1 \leq i \leq a+1\}$ est une base de Pimsner-Popa de M_{p+1} sur M_p. (Ceci résulte de la démonstration de la proposition 1.5 de [**PiPo1**].)

1.5.3. Règles de calcul. On rappelle que

a) e_k appartient à M_{k+1}.

b) e_k commute avec les éléments de M_{k-1}.

c) e_k commute avec e_h si $|k-h| \geq 2$.

d) $e_k e_{k+1} e_k = \alpha^{-1} e_k$ et $e_{k+1} e_k e_{k+1} = \alpha^{-1} e_{k+1}$.

e) $e_{k+1} x e_{k+1} = E_{M_{k-1}}(x) e_{k+1}$ $(x \in M_k)$.

f) $E_{M_k}(e_k) = \alpha^{-1}$.

g) f_n^p appartient à M_{2n-p} et commute avec les éléments de M_p.

h) $\pi_n(f_n^p)(x_n \xi_n) = E_{M_p}(x_n)\xi_n$.

Lemme 1.5.4. $f_n^p f_n^{-1} = f_n^{-1}$.

Démonstration. Pour montrer cette égalité, nous allons faire disparaître un à un les produits du type g_{n+k}^{p+k} de f_n^p.

Voici un procédé pour faire disparaître un projecteur:

Lemme. $g_h^{n+k} g_{n+k}^k g_{n+k+1}^{k+1} = \alpha^{-1} g_{n+k-1}^k g_h^{n+k+1} g_{n+k+1}^{k+1}$ *si* $h \geq n+k+1$ *et*

$k \geq 0$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} g_h^{n+k} g_{n+k}^k g_{n+k+1}^{k+1} &= g_h^{n+k+2}\, e_{n+k+1}\, e_{n+k}\, g_{n+k}^k\, g_{n+k+1}^{k+1} \qquad (1.5.1c)\\ &= g_h^{n+k+2}\, e_{n+k+1}\, e_{n+k}\, g_{n+k-1}^k\, e_{n+k+1}\, g_{n+k+1}^{k+1} \qquad (1.5.1c)\\ &= g_h^{n+k+2}\, e_{n+k+1}\, e_{n+k}\, e_{n+k+1}\, g_{n+k-1}^k\, g_{n+k+1}^{k+1} \qquad (1.5.2b)\\ &= \alpha^{-1} g_h^{n+k+2}\, e_{n+k+1}\, g_{n+k-1}^k\, g_{n+k+1}^{k+1} \qquad (1.5.3d)\\ &= \alpha^{-1} g_{n+k-1}^k\, g_h^{n+k+2}\, e_{n+k+1}\, g_{n+k+1}^{k+1} \qquad (1.5.1c) \text{ et } (1.5.3c)\\ &= \alpha^{-1} g_{n+k-1}^k\, g_h^{n+k+1}\, g_{n+k+1}^{k+1} \qquad (1.5.1c). \end{aligned}$$

Suite de la démonstration de 1.5.2.
Ce procédé va nous premettre de faire disparaître un à un les projecteurs de g_{2n-p-1}^n.

$$g_{2n-p-1}^n f_n^{-1} = \alpha(n,-1)\left(g_{2n-p-1}^n\, g_n^0 g_{n+1}^1 \cdots g_{2n-p-2}^{n-p-2}\right) g_{2n-p-1}^{n-p-1} \cdots g_{2n}^n \qquad (1.5.1e).$$

En appliquant le lemme une fois, nous obtenons d'abord:

$$g_{2n-p-1}^n f_n^{-1} = \alpha(n,-1)\left(\alpha^{-1} g_{n-1}^0\, g_{2n-p-1}^{n+1}\, g_{n+1}^1\, g_{n+2}^2 \cdots g_{2n-p-2}^{n-p-2}\right) g_{2n-p-1}^{n-p-1} \cdots g_{2n}^n.$$

En appliquant ce résultat $(n-p-2)$ fois de plus, nous faisons disparaître g_{2n-p-1}^n.

$$\begin{aligned} g_{2n-p-1}^n f_n^{-1} &= \alpha(n,-1)\Big(\alpha^{-(n-p-2)} g_{n-1}^0\, g_n^1 g_{n+1}^2 \cdots\\ &\qquad g_{2n-p-4}^{n-p-3}\, g_{2n-p-1}^{2n-p-2}\, g_{2n-p-2}^{n-p-2}\Big)\, g_{2n-p-1}^{n-p-1} \cdots g_{2n}^n\\ &= \alpha(n,-1)\left(\alpha^{-(n-p-1)} g_{n-1}^0\, g_n^1 \cdots g_{2n-p-3}^{n-p-3}\right) g_{2n-p-1}^{2n-p-1}\, g_{2n-p-1}^{n-p-1} \cdots g_{2n}^n\\ &= \alpha(n,-1)\left(\alpha^{-(n-p-1)} g_{n-1}^o\, g_n^1 \cdots g_{2n-p-3}^{n-p-2}\right) g_{2n-p-1}^{n-p-1} \cdots g_{2n}^n. \end{aligned}$$

Multiplions maintenant par g_{2n-p-2}^{n-1}:

$$\begin{aligned} g_{2n-p-2}^{n-1} g_{2n-p-1}^n f_n^{-1} &= \alpha(n,-1)\alpha^{-(n-p-1)}\\ &\qquad \left(g_{2n-p-2}^{n-1}\, g_{n-1}^0\, g_n^1 \cdots g_{2n-p-3}^{n-p-2}\right) g_{2n-p-1}^{n-p-1} \cdots g_{2n}^n. \end{aligned}$$

Par le procédé précédent appliqué $(n-p-2)$ fois, nous avons:

$$\begin{aligned} g_{2n-p-2}^{n-1} g_{2n-p-1}^n f_n^{-1} &= \alpha(n,-1)\alpha^{-(n-p-1)}\\ &\qquad \left(\alpha^{-(n-p-2)} g_{n-2}^0 \cdots g_{2n-p-5}^{n-p-3}\, g_{2n-p-2}^{2n-p-3}\, g_{2n-p-3}^{n-p-2}\right) g_{2n-p-1}^{n-p-1} \cdots g_{2n}^n.\\ g_{2n-p-2}^{n-1} g_{2n-p-1}^n f_n^{-1} &= \alpha(n,-1)\alpha^{-(n-p-1)-(n-p-2)}\\ &\qquad \left(g_{n-2}^0 g_{n-1}^1 \cdots g_{2n-p-5}^{n-p-3}\right) g_{2n-p-2}^{n-p-2}\, g_{2n-p-1}^{n-p-1} \cdots g_{2n}^n. \end{aligned}$$

Après la disparition de g_{n+1}^{p+2}, c'est-à-dire après $(n-p-1)$ absorptions, nous obtenons

$$f_n^p f_n^{-1} = \alpha(n,p)\alpha(n,-1)\alpha^{-(n-p-1)-(n-p-2)\ldots-1} g_n^{p+1}\left(g_{p+1}^0\right) g_{n+1}^1 \cdots g_{2n}^n.$$

Comme $(n-p-1)+(n-p-2)\ldots+1 = \frac{(n-p)(n-p-1)}{2}$ et $g_n^{p+1} g_{p+1}^0 = g_n^0$, l'égalité est démontrée.

Nous allons vérifier maintenant que les représentations π_n, π_n^p, π_n^k coïncident sur M_{2n-p}.

Proposition 1.5.5. *Avec les notations précédentes, $\pi_{n/M_{2n-p}} = \pi_n^p$.*

Corollaire 1.5.6. *Toutes représentations de la même algèbre sur le même espace obtenues à partir de différentes constructions de base sont les mêmes. Plus précisement, si $p \leq k \leq n$, alors les représentations π_n, π_n^p, π_n^k coïncident sur M_{2n-p}.*

Démonstration de la proposition. On sait que π_n^p et π_n ont même restriction à M_n, c'est la représentation standard de M_n sur $L^2(M_n, \mathrm{tr})$; il reste donc à comparer $\pi_n^p(f_n^p)$ et $\pi_n(f_n^p)$.

Si x, y et z sont des éléments quelconques de M_n, $xE_N(yz)$ appartient M_n et on peut écrire:

$$\pi_n^p(f_n^p)\pi_n(xf_n^{-1}y)(z\xi_n) = \pi_n^p(f_n^p)(xE_N(yz)\xi_n) = E_{M_p}(xE_N(yz))\xi_n.$$

D'où:

$$\pi_n^p(f_n^p)\pi_n(xf_n^{-1}y)(z\xi_n) = E_{M_p}(x)E_N(yz)\xi_n = \pi_n(E_{M_p}(x)f_n^{-1}y)(z\xi_n).$$

Nous avons donc obtenu:

$$\pi_n^p(f_n^p)\pi_n(xf_n^{-1}y) = \pi_n(E_{M_p}(x)f_n^{-1}y) \quad (x \in M_n, y \in M_n).$$

D'autre part, calculons $f_n^p x f_n^{-1} y$:

$$f_n^p x f_n^{-1} y = f_n^p x f_n^p f_n^{-1} y = E_{M_p}(x) f_n^p f_n^{-1} y = E_{M_p}(x) f_n^{-1} y \qquad (1.5.4).$$

De ces deux calculs, nous déduisons:

$$(*) \qquad \pi_n^p(f_n^p)\pi_n(xf_n^{-1}y) = \pi_n(f_n^p x f_n^{-1} y) \quad (x \in M_n, y \in M_n).$$

L'égalité (*) nous permet d'écrire:

$$\pi_n^p(f_n^p)\pi_n\left(\sum_{j=1}^{a_n+1} \lambda_j f_n^{-1} \lambda_j^*\right) = \pi_n\left(f_n^p \sum_{j=1}^{a_n+1} \lambda_j f_n^{-1} \lambda_j^*\right).$$

L'égalité des éléments $\pi_n^p(f_n^p)$ et $\pi_n(f_n^p)$ découle alors de la propriété de la base de Pimsner-Popa (1.5.2d) qui donne l'expression de l'identité de M_n:

$$\sum_{j-1}^{a_n+1} \lambda_j f_n^{-1} \lambda_j^* = 1.$$

La compatibilité des différentes représentations nous permet de définir sans ambiguïté les anti-automorphismes associés à la tour derivée.

2. Anti-automorphismes associés à la tour dérivée.

2.1. Définitions et notations. On reprend ici [**VJ1**, 3] et on rappelle que J_n est l'involution de l'espace de Hilbert $L^2(M_n, \mathrm{tr})$ définie par $J_n(x_n\xi_n) = x_n^*\xi_n$ si x_n est un élément de M_n.

On notera Γ_n l'anti-automorphisme de l'algèbre $\mathcal{B}_n$ des opérateurs bornés de $L^2(M_n, \mathrm{tr})$ défini par:

$$\Gamma_n(v)(x\xi_n) = J_n v^* J_n(x\xi_n) \qquad (v \in \mathcal{B}_n, x \in M_n).$$

On sait que $\Gamma_n(M_n) = M_n'$ et $\Gamma_n(\pi_n(N)') = \pi_n(M_{2n+1})$ puisque $N \subset M_n \subset M_{2n+1}$ est la construction de base; plus généralement, considérant $M_p \subset M_n \subset M_{2n-p}$, on obtient $\Gamma_n(\pi_n(M_p)') = \pi_n(M_{2n-p})$.

Définition. Soit $A_k = N' \cap M_k$, on note encore tr la restriction à A_k de la trace de M_k. Γ_n envoie $\pi_n(A_{2n+1})$ sur $\pi_n(A_{2n+1})$. On appellera γ_n l'anti-automorphisme de A_{2n+1} défini par:

$$\pi_n(\gamma_n(x)) = \Gamma_n(\pi_n(x)) \qquad (x \in A_{2n+1}).$$

Si $0 \leq p \leq n$, γ_n coïncide sur $M_p' \cap M_{2n-p}$ avec l'anti-automorphisme construit à partir de la tour $M_p \subset M_n \subset M_{2n-p}$ (1.5.6).

2.2. Propriétés fondamentales.

Théorème 2.2.1. *Pour tout n entier naturel, les anti-automorphismes γ_n satisfont les relations suivantes:*

a) $\gamma_{n+2}\gamma_{n+1}|_{A_{2n+1}} = \gamma_{n+1}\gamma_n$

b) $f_n^{-1}\gamma_n(x) = f_n^{-1}x \quad (x \in A_n)$

c) $\gamma_n(e_k) = e_{2n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$.

La démonstation de ce théorème est l'objet du paragraphe 3. Au cours de cette démonstration, nous donnerons une formule pour $\gamma_n(y)$ quand y appartient à A_{2n+1}.

Proposition 2.2.2 ([**Popa**]). *Si N est un sous-facteur de profondeur finie dans un facteur M de type* II_1*, les anti-automorphismes γ_n conservent la trace* tr *de A_{2n+1}.*

Démonstration. Soit $\ldots N_{p+1} \subset N_p \subset \ldots \subset N_1 \subset N \subset M$ un tunnel dans $N \subset M$ [**GHJ**, 4.7e]; en considérant la construction de base $N_{p+1} \subset M \subset M_{p+2}$, on peut définir γ_0 un anti-automorphisme de $N'_{p+1} \cap M_{p+2}$ par:

$$\text{si } x \in N'_{p+1} \cap M_{p+2} \qquad \pi_0(\gamma_0(x)) = J_0(\pi_0(x))J_0$$

où J_0 est l'involution canonique de $L^2(M, \mathrm{Tr})$.

Comme N est un sous-facteur de profondeur finie dans un facteur M de type II_1, on sait que

$$E_{N' \cap M}(e_0) = [M : N]^{-1}1.$$

Grâce à 4.5 de [**PiPo1**], 3.1 et 3.2.ii de [**PiPo2**], cette dernière propriété est suffisante pour affirmer que γ_0 conserve la trace de $N'_{p+1} \cap M$ sur $M' \cap M_{p+2}$.

La proposition annonce un résultat plus fort. S. Popa affirme que γ_0 conserve la trace de $N'_{p+1} \cap M_{p+2}$. Pour démontrer ce résultat, il utilise l'hypotèse de la profondeur finie. En effet, on va plonger $N'_{p+1} \cap M_{p+2}$ dans $N'_{k+1} \cap M_{k+2}$ tel que k soit supérieur à la profondeur du graphe principal. γ_0 s'étend à $N'_{k+1} \cap M_{k+2}$ et conserve la trace de $N'_{k+1} \cap M$ sur $M' \cap M_{k+2}$. Ce choix de k permet d'affirmer que $N'_{k+1} \cap M_1$ est l'espace vectoriel engendré par $N'_{k+1} \cap M e_0 N'_{k+1} \cap M$ donc γ_0 conserve la trace de $N'_{k+1} \cap M_1$ sur $N' \cap M_{p+2}$; par récurrence, on montre ainsi que γ_0 conserve la trace de $N'_{p+1} \cap M_{p+2}$.

De la même façon, γ_n conserve la trace sur A_{2n+1}, il suffit, pour le démontrer, d'opérer une translation des indices sur la suite d'algèbres formée du tunnel et de la tour dérivée.

Remarque. La relation (a) du théorème 2.2.1 permet de définir un isomorphisme T de la tour dérivée de l'inclusion $N \subset M$ sur la tour dérivée de $M_1 \subset M_3$:

Soient $A_p = N' \cap M_p$ et $B_p = M'_1 \cap M_p$,

T est égal à $\gamma_{n+1}\gamma_n$ sur A_{2n+1} et $T(A_{2n+1}) = B_{2n+1}$.

D'après (2.2.1a), T est bien défini, c'est un isomorphisme des tours dérivées conservant la trace (2.2.2) et les anti-isomorphismes, c'est un isomorphisme de paragroupe (voir 4) qui opère une translation de 2 sur les indices des projecteurs de V. Jones.

3. Démonstration du théorème 2.2.1.

3.1. Lemmes.

Lemme 3.1.1.
a)

$$f_n^p = \alpha^{(n-p-1)} g_n^{p+1} f_{n+1}^{p+2} (g_n^{p+1})^* \ et$$
$$\pi_{n+1}(f_n^p) = \alpha^{(n-p-1)} g_n^{p+1} \pi_{n+1}(f_{n+1}^{p+2})(g_n^{p+1})^*$$

(g_n^{p+1}, élément de M_{n+1}, agit par multiplication à gauche sur $L^2(M_{n+1}, \mathrm{tr})$).

b) $f_{n+1}^{-1} = \alpha^{n+1} g_{n+1}^{2n+2} f_n^{-1} g_{2n+2}^{n+1}$.

Démonstration.
a)

$$\begin{aligned} f_n^p &= \alpha(n,p) g_n^{p+1} g_{n+1}^{p+2} \cdots g_{2n-p-1}^{n} \\ &= \alpha(n,p) g_n^{p+1} e_{p+1} g_{n+1}^{p+3} e_{p+2} \cdots g_{n+k-1}^{p+k+1} e_{p+k} \cdots g_{2n-p-1}^{n+1} e_n. \end{aligned}$$

Grâce aux règles de commutation des projecteurs (1.5.3c), on obtient:

$$f_n^p = \alpha(n,p) g_n^{p+1} g_{n+1}^{p+3} \cdots g_{n+k-1}^{p+k+1} \cdots g_{2n-p-1}^{n+1} e_{p+1} e_{p+2} \cdots e_{p+k} \cdots e_n.$$

Comme $f_{n+1}^{p+2} = \alpha(n+1, p+2) g_{n+1}^{p+3} \cdots g_{n+k-1}^{p+k+1} \cdots g_{2n-p-1}^{n+1}$ et $\alpha(p,n) = \alpha^{(n-p-1)} \alpha(n+1, p+2)$, f_n^p vaut $\alpha^{(n-p-1)} g_n^{p+1} f_{n+1}^{p+2} (g_n^{p+1})^*$ et (a) est démontré.

b)

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{-1} &= \alpha(n+1,-1) g_{n+1}^0 \, g_{n+2}^1 \cdots g_{2n+2}^{n+1} \\ &= \alpha(n+1,-1) e_{n+1} g_n^0 \, e_{n+2} \, g_{n+1}^1 \cdots e_{2n+1} \, g_{2n}^n e_{2n+2} \, g_{2n+2}^{n+1} && (1.5.1c) \\ &= \alpha(n+1,-1) g_{n+1}^{2n+2} \, g_n^0 \, g_{n+1}^1 \cdots g_{2n}^n \, g_{2n+2}^{n+1} && (1.5.3b) \\ &= \alpha(n,-1) \alpha^{n+1} g_{n+1}^{2n+2} \, (g_n^0 \, g_{n+1}^1 \cdots g_{2n}^n) \, g_{2n+2}^{n+1} && (1.5.1a) \\ &= \alpha^{n+1} g_{n+1}^{2n+2} f_n^{-1} g_{2n+2}^{n+1} && (1.5.1e). \end{aligned}$$

Lemme 3.1.2. (*dit du tour de passe-passe*)

$$g_{k+3}^{k+1} \, e_{k+3} = e_{k+1} \, g_{k+3}^{k+1}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} g_{k+3}^{k+1}\, e_{k+3} &= (e_{k+3}e_{k+2}e_{k+1})e_{k+3} \\ &= (e_{k+3}e_{k+2}e_{k+3})e_{k+1} \qquad (1.5.3c) \\ &= e_{k+3}(\alpha e_{k+1}) \qquad (1.5.3e) \\ &= e_{k+3}(e_{k+1}e_{k+2}e_{k+1}) \qquad (1.5.3e) \\ &= e_{k+1}(e_{k+3}e_{k+2}e_{k+1}) \qquad (1.5.3c). \end{aligned}$$

Lemme 3.1.3. *Si* $0 \leq k \leq n$, $e_{2n-k}f_n^{-1} = e_k f_n^{-1}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} e_{2n-k}f_n^{-1} &= e_{2n-k}\alpha(n,-1)g_n^0 g_{n+1}^1 \cdots g_{2n}^n \\ &= \alpha(n,-1)g_n^0 g_{n+1}^1 \cdots g_{2n-k-2}^{n-k-2} e_{2n-k} g_{2n-k-1}^{n-k-1} \cdots g_{2n}^n \qquad (1.5.3c). \end{aligned}$$

Nous avons e_{2n-k} devant g_{2n-k-1}^{n-k-1} et nous voudrions e_k devant g_n^0.

1^ère^ *étape:* transformons e_{2n-k} en e_{2n-k-2} devant g_{2n-k-1}^{n-k-1}. D'abord nous faisons disparaître e_{2n-k}:

$$e_{2n-k}g_{2n-k-1}^{n-k-1}g_{2n-k}^{n-k} = e_{2n-k}e_{2n-k-1}g_{2n-k-2}^{n-k-1}e_{2n-k}g_{2n-k-1}^{n-k} \qquad (1.5.1c).$$

Comme e_{2n-k} et g_{2n-k-2}^{n-k-1} commutent [(1.5.3a) et (1.5.3b)],

$$\begin{aligned} e_{2n-k}\, g_{2n-k-1}^{n-k-1}\, g_{2n-k}^{n-k} &= e_{2n-k}\, e_{2n-k-1}\, e_{2n-k}\, g_{2n-k-2}^{n-k-1}\, g_{2n-k-1}^{n-k} \\ &= \alpha g_{2n-k-2}^{n-k-1}\, e_{2n-k}\, g_{2n-k-1}^{n-k} \qquad (1.5.3d) \\ &= \alpha g_{2n-k-2}^{n-k-1}\, g_{2n-k}^{n-k}. \end{aligned}$$

Ensuite nous faisons apparaître e_{2n-k-2}:

$$\begin{aligned} e_{2n-k}\, g_{2n-k-1}^{n-k-1}\, g_{2n-k}^{n-k} &= \alpha e_{2n-k-2}\, g_{2n-k-3}^{n-k-1}\, g_{2n-k}^{n-k} \\ &= e_{2n-k-2}\, e_{2n-k-1}\, e_{2n-k-2}\, g_{2n-k-3}^{n-k-1}\, g_{2n-k}^{n-k} \qquad (1.5.3d) \\ &= e_{2n-k-2}\, g_{2n-k-1}^{n-k-1}\, g_{2n-k}^{n-k} \qquad (1.5.1c). \end{aligned}$$

2^ème^ *étape:* nous avons maintenant e_{2n-k-2} entre g_{2n-k-2}^{n-k-2} et g_{2n-k-1}^{n-k-1}, grâce à $n-k-1$ tours de passe-passe (3.1.2), nous allons obtenir e_k devant g_n^0:

1^er^ tour de passe-passe:

$$\begin{aligned} g_{2n-k-2}^{n-k-2}\, e_{2n-k-2} &= e_{2n-k-2}\, e_{2n-k-3}\, e_{2n-k-4}\, e_{2n-k-2}\, g_{2n-k-5}^{n-k-2} \qquad (1.5.3c) \\ &= e_{2n-k-4}\, e_{2n-k-2}\, e_{2n-k-3}\, e_{2n-k-4}\, g_{2n-k-5}^{n-k-2} \qquad (3.1.2) \\ &= e_{2n-k-4}\, g_{2n-k-2}^{n-k-2}. \end{aligned}$$

Après p tours de passe-passe, nous avons $e_{2n-k-2(p+1)}$ devant $g_{2n-k-(p+1)}^{n-k-(p+1)}$ et après $n-k-1$ tours de passe-passe, nous obtenons e_k devant g_n^0 et la relation annoncée est vérifiée.

Lemme 3.1.4. *Si $x \in A_n, x_n \in M_n, \pi_n(\gamma_n(x))(x_n\xi_n) = x_n x\xi_n$.*

Démonstration.

$$\pi_n(\gamma_n(x))(x_n\xi_n) = J_n\pi_n(x)^* J_n(x_n\xi_n) = J_n\pi_n(x)^* \, (x_n^*\xi_n)\,.$$

Comme x est un élément de M_n, $\pi_n(\gamma_n(x))(x_n\xi_n)$ est donc égal à $J_n(x^* x_n^*\xi_n)$, soit $x_n x\xi_n$. Ainsi $\gamma_n(x)$, élément de M_n', agit par multiplication à droite sur $L^2(M, \mathrm{tr})$.

Lemme 3.1.5. *Si la famille $\{m_j, 1 \leq j \leq a_n+1\}$ est une base de Pimsner-Popa de M_{n-1} sur N, alors la famille $\{\alpha^{n/2}\lambda_i g_0^{n-1} m_j, 1 \leq j \leq a_n+1, 1 \leq i \leq a+1\}$ est une base de Pimsner-Popa de M_n sur N.*

Démonstration. Vérifions (a) est (b) de (1.5.2):

$$\begin{aligned}
E_N\left((\alpha^{n/2} m_h^* g_{n-1}^0 \lambda_k^*)(\alpha^{n/2}\lambda_i g_0^{n-1} m_j)\right) &= \alpha^n E_N(m_h^* g_{n-1}^1 e_0(\lambda_k^*\lambda_i) e_0 g_1^{n-1} m_j) \\
&= \alpha^n \delta_{i,k} E_N(m_h^* g_{n-1}^1 e_0 g_1^{n-1} m_j) \quad \text{(1.5.1c,d et 3d)} \\
&= \alpha^1 \delta_{i,k} E_N(m_h^* E_{M_{n-1}}(e_{n-1}) m_j) = \delta_{i,k}\delta_{j,h}(1.5.2\mathrm{a}).
\end{aligned}$$

Quand l'indice α de N dans M est entier, on peut facilement donner une base de Pimsner-Popa de M_n sur N:

Proposition 3.1.6. *On suppose que l'indice α de N dans M est entier.*

On note $\mathcal{J}_n$ le produit de n copies de $\{0, 1, 2, \ldots, \alpha\}$ et si $I = (i_0, i_1, i_2, \ldots, i_n)$ est un élément de $\mathcal{J}_{n+1}$, on pose

$$m_I = \alpha^{n(n+1)/4} \lambda_{i_n} g_0^{n-1} \lambda_{i_{n-1}} g_0^{n-2} \ldots \lambda_{i_2} g_0^1 \lambda_{i_1} e_0 \lambda_{i_0}.$$

Alors la famille $\{m_I, I \in \mathcal{J}_{n+1}\}$ est une base de Pimsner-Popa de M_n sur N.

Ceci résulte par récurrence de (1.5.2g) et du Lemme 3.1.5.

3.2. Une formule pour $\gamma_n(y)$ quand y appartient à A_{2n+1}. Nous allons maintenant donner l'expression de $\gamma_n(y)$ quand y appartient à A_{2n+1}. Cette formule nous permettra d'établir 2.2.1(a) et nous sera très utile dans la partie 5. Quand l'indice est entier, elle coïncide, grâce à la proposition 3.1.6, avec celle annoncée par A. Ocneanu.

Proposition 3.2.1. *Si* $\{m_i, 1 \leq i \leq a_{n+1}+1\}$ *est une base de Pimsner-Popa de* M_n *sur* N*, alors pour tout* y *de* A_{2n+1}*, on a:*

$$\gamma_n(y) = \alpha^{n+1} \sum_{k=1}^{a_{n+1}+1} E_{M_n}\left(f_n^{-1} m_k y\right) f_n^{-1} m_k^*.$$

Démonstration. D'après 1.5.2, la famille $\{\alpha^{(n+1)/2} m_i f_n^{-1}, 1 \leq i \leq a_{n+1}+1\}$ est une base de Pimsner-Popa de M_{2n+1} sur M_n et

$$y = \alpha^{2n+1} \sum_{i=1}^{a_{n+1}+1} E_{M_n}(y m_i f_n^{-1}) f_n^{-1} m_i^*.$$

Si $E_N(m_h^* m_h) = q_h$, tout élément de M_n s'écrit $\sum_{k+1}^{a_{n+1}+1} z_h m_h^*$ où z_h est un élément de $N q_h$, il suffit donc de connaître $\pi_n(\gamma_n(y))$ sur les vecteurs de $L^2(M_n, \mathrm{tr})$ de la forme $z m_h^* \xi_n$ où z appartient à N_{q_h}. J'omets π_n quand l'élément de M_n agit par multiplication à gauche.

$$\begin{aligned}\pi_n(y^*) J_n(z m_h^* \xi_n) &= \alpha^{n+1} \sum_{i=1}^{a_{n+1}+1} E_{M_n}(y^* m_i f_n^{-1}) \pi_n(f_n^{-1})(m_i^* m_h z^* \xi_n) \\ &= \alpha^{n+1} \sum_{i=1}^{a_{n+1}+1} E_{M_n}(y^* m_i f_n^{-1}) E_N(m_i^* m_h)(z^* \xi_n). \qquad (1.5.3\text{h})\end{aligned}$$

Or

$$E_N(m_i^* m_h) z^* = \delta_{i,h} q_h z^* = \delta_{i,h} z^* \qquad (1.5.2\text{a,b}),$$

d'où

$$\pi_n(y^*) J_n(z m_h^* \xi_n) = \alpha^{n+1} E_{M_n}(y^* m_h f_n^{-1})(z^* \xi_n)$$

et

$$\pi_n(\gamma_n(y))(z m_h^* \xi_n) = \alpha^{n+1} z E_{M_n}(f_n^{-1} m_h^* y) \xi_n.$$

Comme z commute à E_{M_n} et f_n^{-1} et que $z m_h^*$ se décompose en

$$\sum_{k=1}^{a_{n+1}+1} m_k E_N(m_k^* z m_h^*) \qquad (1.5.2\text{f}),$$

on obtient:

$$\pi_n(\gamma_n(y))(z m_h^* \xi_n) = \alpha^{n+1} \sum_{k=1}^{a_{n+1}+1} E_{M_n}(f_n^{-1} m_k E_N(m_k^* z m_h^*) y) \xi_n.$$

Comme l'élément y de A_{2n+1} commute à $E_N(m_k^* z m_h^*)$, on obtient:

$$\pi_n(\gamma_n(y))(zm_h^*\xi_n) = \alpha^{n+1} \sum_{k=1}^{a_{n+1}+1} E_{M_n}(f_n^{-1}m_k y)E_N(m_k^* z m_h^*)\xi_n$$

$$= \alpha^{n+1} \sum_{k=1}^{a_{n+1}+1} E_{M_n}(f_n^{-1}m_k y)\pi_n(f_n^{-1})m_k^*(zm_h^*\xi_n). \qquad (1.5.3\text{h})$$

Et la formule est démontrée.

3.3. $\gamma_{n+2}\gamma_{n+1}|_{A_{2n+1}} = \gamma_{n+1}\gamma_n$.

Lemme 3.3.1. *Si* $x \in M_n$, $E_{M_1}(g_1^n x g_n^1) = \alpha^{-n}E_M(x)$.

Démonstration.

$$E_{M_1}(g_1^n x g_n^1) = E_{M_1}(e_1e_2\dots e_n x e_n \dots e_2e_1)$$
$$= E_{M_1}(e_1e_2\dots e_{n-1}E_{M_{n-1}}(x)e_ne_{n-1}\dots e_2e_1).$$

Comme E_{M_1} est égal à $E_{M_1}E_{M_n}$, l'égalité devient:

$$E_{M_1}(g_1^n x g_n^1) = \alpha^{-1}E_{M_1}(e_1e_2\dots e_{n-1}E_{M_{n-1}}(x)e_{n-1}\dots e_2e_1).$$

Après $n-1$ manœuvres de ce type, on obtient:

$$E_{M_1}(g_1^n x g_n^1) = \alpha^{-(n-1)}E_{M_1}(e_1E_{M_1}(x)e_1) = \alpha^{-n}E_M(x).$$

Proposition 3.3.2. *Si, pour* $1 \le k \le a+1$, $\mu_k = \alpha^{(2n+2)/2}\lambda_k g_0^{2n+1}$ *et si* y *est un élément de* A_{2n+1}, *alors* $\gamma_{n+1}(y)$ *est l'élément* $\sum_{k=1}^{a+1}\mu_k\gamma_n(y)e_{2n+2}\mu_k^*$ *de* $M_1' \cap M_{2n+3}$.

Démonstration. Comme $\{\alpha^{(n+1)/2}\lambda_i g_0^n, i = 1,\dots,n\}$ est une base de Pimsner-Popa de M_{n+1} sur M_n (1.5.2), il suffit de calculer $\pi_{n+1}(\gamma_{n+1}(y))$ sur les vecteurs de $L^2(M_{n+1}, \mathrm{tr})$ de la forme $\lambda_j g_0^n z\xi_{n+1}$ où p_j est le projecteur $E_N(\lambda_j^*\lambda_j)$ et z un élément de p_jM_n.

$$\pi_{n+1}(y^*)J_{n+1}(\lambda_j g_0^n z\xi_{n+1})$$
$$= \alpha^{2n+1}\sum_{i=1}^{a_{n+1}+1} E_{M_n}(y^*m_i f_n^{-1})\pi_{n+1}(f_n^{-1})(m_i^* z^* g_n^0\lambda_j^*\xi_{n+1}).$$

Comme $f_n^{-1} = \alpha^n g_n^0 f_{n+1}^1(g_n)^*$ et $\pi_{n+1}(f_{n+1}^1) = E_{M_1}$ (1.5.3h), on a:

$$\pi_{n+1}(y^*)J_{n+1}(\lambda_j g_0^n z\xi_{n+1})$$
$$= \alpha^{2n+1}\sum_{i=1}^{a_{n+1}+1} E_{M_n}(y^*m_i f_n^{-1})g_n^0 E_{M_1}\left(g_0^n m_i^* z^* g_n^0\lambda_j^*\right)\xi_{n+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\pi_{n+1}(\gamma_{n+1}(y))(\lambda_j g_0^n z\xi_{n+1}) \\ &= \alpha^{2n+1}\sum_{i=1}^{a_{n+1}+1} E_{M_1}\left(\lambda_j g_0^n z m_i g_n^0\right) g_0^n E_{M_n}\left(f_n^{-1} m_i^* y\right)\xi_{n+1} \\ &= \alpha^{2n+1}\sum_{i=1}^{a_{n+1}+1} \lambda_j e_0 E_{M_1}\left(g_1^n z m_i g_n^1\right) g_0^n E_{M_n}\left(f_n^{-1} m_i^* y\right)\xi_{n+1}.\end{aligned}$$

Appliquons le lemme 3.3.1 à zm_i et nous obtenons:

$$\begin{aligned}\pi_{n+1}(\gamma_{n+1}(y))(\lambda_j g_0^n z\xi_{n+1}) \\ &= \alpha^{n+1}\sum_{i=1}^{a_{n+1}+1} \lambda_j e_0 E_M(zm_i) e_0 g_o^n E_{M_n}\left(f_n^{-1} m_i^* y\right)\xi_{n+1} \\ &= \alpha^{n+1}\sum_{i=1}^{a_{n+1}+1} \lambda_j e_0 E_N(zm_i) g_0^n E_{M_n}\left(f_n^{-1} m_i^* y\right)\xi_{n+1}.\end{aligned}$$

Comme $E_N(zm_i)$ commute à g_0^n, à E_{M_n} et à f_n^{-1} et que $\sum_{i=1}^{a_{n+1}+1} E_N(zm_i)m_i^*$ vaut z, on peut écrire:

$$\pi_{n+1}(\gamma_{n+1}(y))(\lambda_j g_0^n z\xi_{n+1}) = \alpha^{n+1}\lambda_j g_0^n E_{M_n}\left(f_n^{-1} z y\right)\xi_{n+1}.$$

On utilise maintenant la décomposition de ξ sur la base m_i (1.5.2f):

$$z = \sum_{i=1}^{a_{n+1}+1} m_i E_N(m_i^* z)$$

pour faire commuter z avec y, élément de A_{2n+1} et le sortir de E_{M_n}:

$$\begin{aligned}\pi_{n+1}(\gamma_{n+1}(y))(\lambda_j g_0^n z\xi_{n+1}) &= \alpha^{n+1}\sum_{i=1}^{a_n+1} \lambda_j g_0^n E_{M_n}\left(f_n^{-1} m_i y\right) E_N(m_i^* z)\xi_{n+1} \\ &= \alpha^{n+1}\sum_{i=1,k=1}^{a_{n+1}+1,a+1} \delta_{k,j}\lambda_k g_o^n E_{M_n}\left(f_n^{-1} m_i y\right) E_N(m_i^* p_j z)\xi_{n+1}.\end{aligned}$$

Comme $\delta_{k,j} p_j = \alpha^{(n+1)} E_{M_n}(g_n^0 \lambda_k^* \lambda_j g_0^n)$, $\pi_{n+1}(\gamma_{n+1}(y))(\lambda_j g_0^n z\xi_{n+1})$ est égal à

$$\alpha^{2(n+1)}\sum_{i=1,k=1}^{a_{n+1}+1,a+1} \lambda_k g_0^n E_{M_n}\left(f_n^{-1} m_i y\right) E_N\left(m_i^* E_{M_n}(g_n^0\lambda_k^*\lambda_j g_0^n) z\right)\xi_{n+1}.$$

$$\begin{aligned}\pi_{n+1}(\gamma_{n+1}(y))(\lambda_j g_0^n z\xi_{n+1}) \\ &= \alpha^{2(n+1)}\sum_{i=1,k=1}^{a_{n+1}+1,a+1} \lambda_k g_0^n E_{M_n}\left(f_n^{-1} m_i y\right) E_N\left(m_i^* g_n^0 \lambda_k^* \lambda_j g_0^n z\right)\xi_{n+1}.\end{aligned}$$

Or $\pi_{n+1}(f_{n+1}^{-1})(x)\xi_{n+1} = E_N(x)\xi_{n+1}$ si $x \in M_{n+1}$ (1.5.3h), donc

$$\gamma_{n+1}(y) = \alpha^{2(n+1)} \sum_{i=1,k=1}^{a_n+1,a+1} \lambda_k g_0^n E_{M_n}\left(f_n^{-1} m_i y\right) f_{n+1}^{-1} m_i^* g_n^0 \lambda_k^*.$$

Comme f_{n+1}^{-1} est égal à $\alpha^{n+1} g_{n+1}^{2n+2} f_n^{-1} g_{2n+2}^{n+1}$ (3.1.1), en utilisant les règles de commutation, on écrit:

$$\gamma_{n+1}(y) = \alpha^{3(n+1)} \sum_{k=1}^{a+1} \lambda_k g_0^{2n+2} \left[\sum_{i=1}^{a_{n+1}+1} E_{M_n}\left(f_n^{-1} m_i y\right) f_n^{-1} m_i^* \right] g_{2n+2}^0 \lambda_k^*.$$

D'où $\gamma_{n+1}(y) = \alpha^{2(n+1)} \sum_{k=1}^{a+1} \lambda_k g_0^{2n+2} \gamma_n(y) g_{2n+2}^0 \lambda_k^*$.

Si, pour $1 \leq k \leq a+1$, on note μ_k l'élément $\alpha^{2(n+1)/2} \lambda_k g_0^{n+1}$ de la base de M_{2n+2} sur M_{2n+1}, ce résultat s'écrit:

$$\gamma_{n+1}(y) = \sum_{k=1}^{a+1} \mu_k \gamma_n(y) e_{2n+2} \mu_k^*.$$

Corollaire 3.3.3. *Si, pour* $1 \leq k \leq a+1$, $\mu_k = \alpha^{(2n+2)/2} \lambda_k g_0^{2n+1}$ *et si* y *est un élément de* A_{2n+1}, *alors*

$$\gamma_{n+1}(\gamma_n(y)) = \sum_{k=1}^{a+1} \mu_k y e_{2n+2} \mu_k^*.$$

Proposition 3.3.4. $\gamma_{n+2}\gamma_{n+1}|_{A_{2n+1}} = \gamma_{n+1}\gamma_n \quad (n \in \mathbb{N})$.

Démonstration. Ecrivons la formule du corollaire 3.3.3 pour $n+1$: Si y est un élément de A_{2n+3},

$$\gamma_{n+2}(\gamma_{n+1}(y)) = \alpha^2 \sum_{k=1}^{a+1} \mu_k e_{2n+2} e_{2n+3} y e_{2n+4} e_{2n+3} e_{2n+2} \mu_k^*.$$

Mais si, de plus, y est dans A_{2n+1}, la formule se simplifie car

$$\begin{aligned} \alpha^2 e_{2n+2} e_{2n+3} y e_{2n+4} e_{2n+3} e_{2n+2} &= \alpha^2 y e_{2n+2}(e_{2n+3} e_{2n+4} e_{2n+3}) e_{2n+2} \\ &= \alpha y (e_{2n+2} e_{2n+3} e_{2n+2}) = y. \end{aligned}$$

On obtient alors:

$$\gamma_{n+2}(\gamma_{n+1}(y)) = \gamma_{n+1}(\gamma_n(y)).$$

3.4. $f_n^{-1}\gamma_n(x)$ et f_n^{-1} sont égaux si x est un élément de A_n.

Proposition 3.4. *Pour tout x de A_n, $f_n^{-1}\gamma_n(x) = f_n^{-1}x$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer la relation pour les unitaires de A_n. Soient u un unitaire de A_n et z un élément de M_n,

$$\pi_n(f_n^{-1}\gamma_n(u))(z\xi_n) = \pi_n(f_n^{-1})(zu\xi_n) \qquad (3.1.4).$$

Alors par définition de f_n^{-1}, $\pi_n(f_n^{-1}\gamma_n(u))(z\xi_n) = E_N(zu)\xi_n$. Comme u normalise N, pour tout x de M_n, $E_N(uxu^*) = uE_N(x)u^*$, on obtient donc:

$$\pi_n(f_n^{-1}\gamma_n(u))(z\xi_n) = E_N(zu)\xi_n = u^*E_N(uz)u\xi_n = E_N(uz)\xi_n$$

car u commute à N. Cela s'écrit aussi:

$$\pi_n(f_n^{-1}\gamma_n(u))(z\xi_n) = \pi_n(f_n^{-1}u)(z\xi_n).$$

La relation est démontrée.

3.5. Si $0 \leq k \leq n$, l'image de e_k par l'anti-automorphisme γ_n est e_{2n-k}.

Proposition 3.5. $\gamma_n(e_k) = e_{2n-k} \qquad (0 \leq k \leq n)$.

Démonstration.
1^{er} *cas:* $k = n$.
e_n est la projection de $L^2(M_n, \mathrm{tr})$ sur $L^2(M_{n-1}, \mathrm{tr})$, aussi J_n et e_n commutent et $\gamma_n(e_n) = e_n$.
$2^{ème}$ *cas:* $0 \leq k < n$.

Soient x, y, z des éléments de M_n. Calculons d'abord $\gamma_n(e_k)xf_n^{-1}y$:

$$\pi_n(\gamma_n(e_k)xf_n^{-1}y)(z\xi_n) = \pi_n(\gamma_n(e_k))\,(xE_N(yz)\xi_n) = xE_N(yz)e_k\xi_n \qquad (3.1.4).$$

Comme e_k commute à M_{k-1} donc à N,

$$\pi_n(\gamma_n(e_k)xf_n^{-1}y)(z\xi_n) = xe_kE_N(yz)\xi_n.$$

On obtient donc $\gamma_n(e_k)xf_n^{-1}y = xe_kf_n^{-1}y$.

Calculons maintenant $e_{2n-k}xf_n^{-1}y$:
Comme $k < n$, e_{2n-k} commute à M_n, donc

$$e_{2n-k}xf_n^{-1}y = xe_{2n-k}f_n^{-1}y = xe_kf_n^{-1}y \qquad (3.1.3).$$

Soient a_{n+1} la partie entière de α^{n+1}, l'indice de N dans M_n et

$$\{m_j, j = 1, \ldots a_{n+1} + 1\}$$

une base de Pimsner-Popa de M_n sur N. Comme $\sum_{j=1}^{a_{n+1}+1} m_j f_n^{-1} m_j^*$ est l'identité (1.5.2d) et, pour tous x et y éléments de M_n, $\gamma_n(e_k)xf_n^{-1}y$ et $e_{2n-k}xf_n^{-1}y$ coïncident, on peut écrire:

$$\gamma_n(e_k)\left(\sum_{j=1}^{a_{n+1}+1} m_j f_n^{-1} m_j^*\right) = e_{2n-k}\left(\sum_{j=1}^{a_{n+1}+1} m_j f_n^{-1} m_j^*\right),$$

c'est-à-dire $\gamma_n(e_k) = e_{2n-k}$.

4. Le paragroupe, invariant complet pour l'inclusion d'un sous-facteur de profondeur finie dans le facteur hyperfini de type II_1.

4.1. Paragroupe ou carré commutatif. Popa a montré que l'inclusion d'un sous-facteur de profondeur finie dans le facteur hyperfini de type II_1 est determinée par son carré commutatif canonique [**Popa1**, 6.6]. Le paragroupe est une autre version de cet invariant.

Définition. Le paragroupe de l'inclusion $N \subset M$ est la tour dérivée $(A_k)_{k\geq 0}$ de $N \subset M$ munie de ses anti-automorphismes canoniques γ_k.

Remarque. La donnée du graphe principal équivaut à celle de la tour dérivée [**GHJ**, 4.6.5].

Théorème 4.1.1. *Soient N (resp. $\widetilde{N}$) un sous-facteur de profondeur finie dans le facteur hyperfini de type* II_1 *M (resp. $\widetilde{M}$). Si les couples $N \subset M$ et $\widetilde{N} \subset \widetilde{M}$ ont même paragroupe, ils sont isomorphes.*

Démonstration. On suppose qu'il existe un isomorphisme β des tours dérivées conservant la trace tel que $\beta(A_k) = \widetilde{A}_k$ et $\gamma_k = \beta^{-1}\widetilde{\gamma}_k\beta$.

Si $N \subset M$ est de profondeur finie p, $N_1 \subset N$ est de profondeur finie p_1, alors si $2j$ est supérieur à $p-1$ et p_1, le carré commutatif

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{array}{ccc} M' \cap M_{2j} & \subset & N' \cap M_{2j} \\ \cap & & \cap \\ M' \cap M_{2j+1} & \subset & N' \cap M_{2j+1} \end{array}$$

est le carré canonique de $N_1 \subset N$. Pour montrer que les deux couples sont isomorphes, il suffit de montrer que $N_1 \subset N$ et $\widetilde{N}_1 \subset \widetilde{N}$ ont même carré canonique [**Popa1**, 6.6].

Montrons que $(\mathcal{C})$ et $(\widetilde{\mathcal{C}})$ sont isomorphes:
Nous savons déjà que l'isomorphime β envoie $N' \cap M_{2j}$ sur $\widetilde{N}' \cap \widetilde{M}_{2j}$ et $N' \cap M_{2j+1}$ sur $\widetilde{N}' \cap \widetilde{M}_{2j+1}$ en conservant la trace.

Comme $M' \cap M_{2j}$ est l'intersection de $(N' \cap M_{2j})$ et $(M' \cap M_{2j+1})$, il nous suffit de démontrer que

$$\beta(M' \cap M_{2j+1}) = \widetilde{M}' \cap \widetilde{M}_{2j+1}.$$

Or

$$M' \cap M_{2j+1} = \gamma_j(N' \cap M_{2j}),$$

donc

$$\widetilde{M}' \cap \widetilde{M}_{2j+1} = \widetilde{\gamma}_j(\widetilde{N}' \cap \widetilde{M}_{2j}) = \widetilde{\gamma}_j\beta(N' \cap M_{2j})$$

et comme $\gamma_j = \beta^{-1}\widetilde{\gamma}_j\beta$,

$$\widetilde{M}' \cap \widetilde{M}_{2j+1} = \beta\gamma_j(N' \cap M_{2j}) = \beta(M' \cap M_{2j+1}).$$

Les deux carrés sont isomorphes.

5. Produit croisé par une algèbre de Kac de dimension finie.

Dans cette partie, nous donnons une caractérisation de l'inclusion d'un facteur de type II_1 dans son produit croisé par une algèbre de Kac de dimension finie:

Théorème 5.0. *Soient M un facteur de type II_1, tr sa trace normale finie fidèle normalisée et N un sous-facteur d'indice fini dans M. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(a) *N est de profondeur au plus 2 dans M et $N' \cap M$ est égal à $\mathbb{C}$.*

(b) *M est le produit croisé de N par une action extérieure d'une algèbre de Kac de dimension finie $\mathbb{K}$.*

(c) *N est la sous-algèbre des point fixes de M sous une action extérieure d'une algèbre de Kac de dimension finie $\widehat{\mathbb{K}}$.*

L'équivalence entre (b) est (c) est un résultat de M. Enock et J.-M. Schwartz [**ES2**]; dans [**EN**], on trouvera la démonstration de (b)$\Rightarrow$(a) dans le cas le plus général. Nous nous attacherons ici à construire une algèbre de Kac de dimension finie à partir de l'inclusion d'un sous-facteur dans un facteur de type II_1, c'est-à-dire à montrer (a)$\Rightarrow$(c).

Soient M un facteur de type II_1, tr sa trace normale finie fidèle normalisée et N un sous-facteur d'indice fini n et de profondeur 2 dans M. Par construction de base, on obtient la tour de facteurs

$$N \subset M \overset{e_0}{\subset} M_1 \overset{e_1}{\subset} M_2 \overset{e_2}{\subset} \dots M_p \overset{e_p}{\subset} M_{p+1} \dots ,$$

la suite des projecteurs de V. Jones et les anti-automorphismes γ_p définie en 2.2.1. On s'intéressera plus particulièrement à la tour dérivée de l'inclusion $M \subset M_1$, aussi on notera $B_p = M' \cap M_p$. On supposera, de plus, que $N' \cap M = \mathbb{C}$.

5.1. La tour dérivée de l'inclusion $M \subset M_1$. Comme $N' \cap M = \mathbb{C}$, $B_1 = \gamma_0(N' \cap M) = \mathbb{C}$.

Comme l'inclusion de N dans M est de profondeur 2, $N' \cap M_2$ est obtenue par construction de base sur l'inclusion $N' \cap M \subset N' \cap M_1$ [**GHJ**, 2.4.1 ou 4.6.3], donc $N' \cap M_2$ est un facteur de dimension finie puisque $[M : N]$ est fini, soit $M_n(\mathbb{C})$ où $n = [M : N]$ qui est donc entier. Alors $B_3 = \gamma_1(N' \cap M_2)$ est aussi isomorphe au facteur $M_n(\mathbb{C})$, plus précisément c'est le facteur $\mathcal{B}(H_\varphi)$, si $(B_2, H_\varphi, J_\varphi, \varphi)$ est la forme standard de B_2.

Alors B_2 est une algèbre de dimension finie n, soit $B_2 = \oplus_{i \in I} M_{n_i}(\mathbb{C})$ où I est un ensemble fini et $\sum_{i \in I} n_i^2 = n$. On notera $M_{n_1}(\mathbb{C})$ le sous-facteur $\mathbb{C}e_1$ de B_2 (donc $n_1 = 1$) et p_i le projecteur central de B_2 tel que $B_2 p_i \cong M_{n_i}(\mathbb{C})$. La trace de Markov normalisée sur B_2, notée φ, est la restriction de la trace de M_2, sa valeur sur le projecteur minimal du facteur $B_2 p_i$ est $\frac{n_i}{n}$.

Nous allons montrer que $(B_2, \gamma_2\gamma_1, \gamma_1, n\varphi)$ est une algèbre de Kac qui agit sur M en laissant fixes les éléments de N.

Nous utiliserons seulement deux réflexions de la tour dérivée:

i) γ_φ, l'anti-automorphisme de l'algèbre B_3 défini par

$$\gamma_\varphi(a) = J_\varphi a^* J_\varphi \qquad (a \in B_3)$$

γ_φ envoie B_2 dans B_2'.

ii) γ_{H_φ} défini de la même façon à partir de J_{H_φ} l'involution standard de B_3, c'est un anti-automorphisme de l'algèbre $B_2' \cap B_4$ qui envoie $B_2' \cap B_3$ sur $B_3' \cap B_4$.

Comme nous ne considérons que des constructions de base à un étage, il n'y a aucun problème de compatibilité de répresentations, de plus les formules de la partie 3 sont encore valables; on peut vérifier directement que ces réflexions conservent le trace de Markov de la tour dérivée.

5.2. Bases de Pimsner-Popa et unités matricielles. Pour appliquer les formules de 3, nous allons choisir des bases de Pimsner-Popa particulières. La proposition suivante motive ce choix.

Proposition 5.2.1. *Soit N un sous-facteur d'indice fini n du facteur M, tr la trace normale finie fidèle normalisée sur M et $N \subset M \overset{e_0}{\subset} M_1$ la construction de base.*

Si N est de profondeur au plus 2 dans M et que $N' \cap M$ est égal à $\mathbb{C}$, on pose:

$$N' \cap M_1 = \oplus_{i \in I} M_{n_i}(\mathbb{C}) \quad et \quad \mathcal{J} = \{K = (k, k_1, k_2), k \in I, 1 \leq k_1, k_2 \leq n_k\}.$$

Soit $\left\{ f^k_{k_1,k_2} = f_K, K \in \mathcal{J} \right\}$ une famille d'unités matricielles de $N' \cap M_1$, où $f^0_{1,1} = f_0 = e_0$, alors la famille $\left\{ \sqrt{\frac{n}{n_k}} f_K, K \in \mathcal{J} \right\}$ est une base de Pimsner-

Popa de M_1 sur M ainsi qu'une base de Pimsner-Popa de $N' \cap M_1$ sur $\mathbb{C}$; de même pour $\left\{\sqrt{\frac{n}{n_k}}(f_K)^*, K \in \mathcal{J}\right\}$.

Démonstration. On vérifie facilement les propriétés de 3.1.5 car, comme $N' \cap M = \mathbb{C}$, sur $N' \cap M_1$, l'espérance conditionelle sur M est la trace.

Définitions.

1. On choisira pour base de Pimsner-Popa de M_1 sur M la base de Pimsner-Popa associée à une famille d'unités matricielles de $N' \cap M_1$ comme dans la proposition 5.2.1 et on la notera pour simplifier $\{\lambda_s, 1 \leq s \leq n\}$, où $\lambda_1 = e_0$. On ne souviendra que $\sum_{r=1}^{n} \operatorname{tr}(\lambda_r)\lambda_r^* = 1$ et que $\{\lambda_s^*, 1 \leq s \leq n\}$ est aussi une base de Pimsner-Popa de M_1 sur M.

   On rappelle que $\{n^{1/2}\lambda_s e_1, 1 \leq s \leq n\}$ est alors une base de M_2 sur M_1 (1.5.2g).
2. Si $B_2 = \oplus_{i \in I} M_{n_i}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{J} = \{K = (k, k_1, k_2), k \in I, 1 \leq k_1, k_2 \leq n_k\}$, on choisit une famille d'unités matricielles de B_2, $\left\{f_{k_1,k_2}^k = f_K, K \in \mathcal{J}\right\}$ où $f_{1,1}^0 = e_1$. La proposition 5.2.1 permet alors d'affirmer que la famille $\left\{\sqrt{\frac{n}{n_k}} f_K, K \in \mathcal{J}\right\}$ est une base de Pimsner-Popa de M_2 sur $\mathbb{C}$ ainsi qui une base de Pimsner-Popa de B_2 sur $\mathbb{C}$; de même pour la famille $\left\{\sqrt{\frac{n}{n_k}}(f_K)^*, K \in \mathcal{J}\right\}$.

On voudrait voir $\gamma_2\gamma_1$ comme un co-produit sur B_2, or $\gamma_2\gamma_1$ est un isomorphisme de B_2 sur $M_2' \cap M_4$ qui est contenu dans $B_2' \cap B_4$; il reste à mettre l'algèbre $B_2' \cap B_4$ dans le produit tensoriel $B_2 \otimes B_2$, c'est l'objet de la proposition suivante qui fixe les notations.

Proposition et Définitions 5.2.2.

a) *L'application $\gamma_\varphi\gamma_1$ est un isomorphisme de B_2 sur $B_2' \cap B_3$ qui conserve la trace.*

Posons $f_K' = \gamma_\varphi\gamma_1(f_K)$.

La famille $\{f_K', K \in \mathcal{J}\}$ est une famille d'unités matricielles de $B_2' \cap B_3$.

b) *L'application γ_{H_φ} est un isomorphisme de B_2 sur $B_3' \cap B_4$ qui conserve la trace.*

Posons $F_K = \gamma_{H_\varphi}\gamma_\varphi(f_K)$.

La famille $\{F_K, K \in \mathcal{J}\}$ est une famille d'unités matricielles de $B_3' \cap B_4$.

c) *La famille $\{f_H' F_K, H \in \mathcal{J}, K \in J\}$ est une base de $B_2' \cap B_4$. L'algèbre $B_2' \cap B_4$ est isomorphe à $B_2 \otimes B_2$ par l'isomorphisme θ:*

$$\theta(f_H' F_K) = f_H \otimes f_K.$$

d) *L'application $\gamma_2\gamma_1$ est un isomorphisme de B_2 sur $M_2' \cap M_4$ qui envoie B_2 dans $B_2' \cap B_4$ en conservant la trace.*

Posons $g_K = \gamma_2\gamma_1(f_K)$.

Alors $g_K = \sum_{P,Q\in\mathcal{J}} x^K_{P.Q} f'_P F_Q$ *où les* $x^K_{P.Q}$ *sont des nombres complexes. On posera* $\Gamma = \theta\gamma_2\gamma_1$.

La démonstration de cette proposition est laissée au lecteur.

On peut appliquer les résultats du 3 et obtenir les formules suivantes:

Proposition 5.2.3.

$$\forall K \in \mathcal{J}, \qquad \gamma_1(f_K) = n\sum_{s=1}^{n} E_{M_1}(e_1\lambda_s f_K)e_1\lambda_s^*.$$

$$f'_K = \sum_{P\in\mathcal{J}} \sqrt{\frac{n}{n_p}} f_P\gamma_1(f_K)e_2\sqrt{\frac{n}{n_p}} f_P^*.$$

$$F_K = n\sum_{P\in\mathcal{J}} \sqrt{\frac{n}{n_p}} f_P e_2 f_K e_3 e_2\sqrt{\frac{n}{n_p}} f_P^*.$$

$$g_K = n^2\sum_{s=1}^{n} \lambda_s e_1 e_2 f_K e_3 e_2 e_1 \lambda_s^*.$$

Démonstration.

a) C'est la formule (3.2.1) pour γ_1 l'anti-automorphisme de B_2.

b) C'est la formule (3.2.1) pour γ_φ l'anti-automorphisme de B_2 qui se simplifie:

$$f'_K = n\sum_{P\in\mathcal{J}} E_{B_2}\left(e_2\sqrt{\frac{n}{n_p}} f_P\gamma_1(f_K)\right) e_2\sqrt{\frac{n}{n_p}} f_P^*$$
$$= \sum_{P\in\mathcal{J}} \sqrt{\frac{n}{n_p}} f_P\gamma_1(f_K)e_2\sqrt{\frac{n}{n_p}} f_P^*.$$

(c) et (d) cf. formule (3.3.3).

5.3. Définition d'un coproduit sur B_2. Nous allons préciser les composantes de g_K sur la base $\{f'_H F_K, H\in\mathcal{J}, K\in\mathcal{J}\}$, connaissant l'expression de $\Gamma(f_K)$, nous pourrons vérifier que Γ est un co-produit co-associatif.

Proposition 5.3.1. $g_K = \sum_{P,Q\in\mathcal{J}} x^K_{P.Q} f'_P F_Q$, *c'est-à-dire*

$$\Gamma(f_K) = \sum_{P,Q\in\mathcal{J}} x^K_{P,Q} f_P \otimes f_Q$$

où

$$x^K_{P,Q} = \frac{n^2}{n_p n_q}\,\mathrm{tr}\left(\sum_{r=1}^{n} E_{M_1}\left(e_1\lambda_r f_P^*\right) f_K \lambda_r^* f_Q^*\right).$$

En particulier $e_3 = \Gamma(e_1) = \sum_{P\in\mathcal{J}} \frac{1}{n_p}\gamma_1(f_P^*) \otimes f_P$.

Démonstration.

Si $P = (p; p_1, p_2)$ et $Q = (q; q_1, q_2)$,

$$g_K f_P^* F_Q^* = x_{P,Q}^K f'^{p}_{p_1 p_1} F^q_{q_1 q_1}$$

et en passant à la trace, on obtient $x_{P,Q}^K = \frac{n^2}{n_p n_q}\operatorname{tr}\left(g_K f_P'^* F_Q^*\right)$.

Calculons donc $\operatorname{tr}(g_K f_P' F_Q)$.

$$\begin{aligned} f_P' F_Q &= n \sum_{B,C\in\mathcal{J}} \sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B \gamma_1(f_P) e_2 \left(\sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B^* \sqrt{\frac{n}{n_c}} f_C\right) e_2 f_Q e_3 e_2 \sqrt{\frac{n}{n_c}} f_C^* \\ &= n \sum_{B\in\mathcal{J}} \sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B \gamma_1(f_P) e_2 f_Q e_3 e_2 \sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B^* \end{aligned}$$

car $\left\{\sqrt{\frac{n}{n_c}} f_C, C \in \mathcal{J}\right\}$ est une base de Pimsner-Popa [**1.5.2a**]. Donc

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}(g_K f_P' F_Q) = \\ &= n^3 \operatorname{tr}\left(\sum_{B\in\mathcal{J},s=1}^{n} \lambda_s e_1 e_2 f_K e_3 e_2 \left(e_1 \lambda_s^* \sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B \gamma_1(f_P)\right) e_2 f_Q e_3 e_2 \sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B^*\right) \\ &= n^3 \operatorname{tr}\left(\sum_{B\in\mathcal{J},s=1}^{n} \lambda_s e_1 e_2 f_K e_3 E_{M_1} \left(e_1 \lambda_s^* \sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B \gamma_1(f_P)\right) e_2 f_Q e_3 e_2 \sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B^*\right) \\ &= n^2 \operatorname{tr}\left(\sum_{B\in\mathcal{J},s=1}^{n} \lambda_s e_1 e_2 f_K E_{M_1} \left(e_1 \lambda_s^* \sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B \gamma_1(f_P)\right) f_Q e_3 e_2 \sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B^*\right). \end{aligned}$$

Utilisons la propriété de commutation de la trace et sa propriété de Markov [**VJ1**, 3.1.7]: on a

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}(g_K f_P' F_Q) = \\ &= n \operatorname{tr}\left(\sum_{B\in\mathcal{J},s=1}^{n} e_2 \left(\sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B^* \lambda_s e_1\right) e_2 f_K E_{M_1} \left(e_1 \lambda_s^* \sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B \gamma_1(f_P)\right) f_Q\right) \\ &= n \operatorname{tr}\left(\sum_{B\in\mathcal{J},s=1}^{n} E_{M_1} \left(\sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B^* \lambda_s e_1\right) e_2 f_K E_{M_1} \left(e_1 \lambda_s^* \sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B \gamma_1(f_P)\right) f_Q\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\sum_{B\in\mathcal{J},s=1}^{n} E_{M_1} \left(\sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B^* \lambda_s e_1\right) f_K E_{M_1} \left(e_1 \lambda_s^* \sqrt{\frac{n}{n_b}} f_B \gamma_1(f_P)\right) f_Q\right). \end{aligned}$$

Ecrivons $E_{M_1}\left(e_1\lambda_s^*\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B\gamma_1(f_P)\right)$ sur la base $\{\lambda_r, r=1 \text{ à } n\}$:

$$E_{M_1}\left(e_1\lambda_s^*\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B\gamma_1(f_P)\right)=\sum_{r=1}^{n}E_M\left(E_{M_1}\left(e_1\lambda_s^*\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B\gamma_1(f_P)\right)\lambda_r\right)\lambda_r^*$$
$$E_{M_1}\left(e_1\lambda_s^*\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B\gamma_1(f_P)\right)=\sum_{r=1}^{n}E_M\left(e_1\lambda_s^*\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B\gamma_1(f_P)\lambda_r\right)\lambda_r^*.$$

Comme f_K commute à M, on en déduit:

$$\operatorname{tr}(g_Kf'_PF_Q)=$$
$$=\operatorname{tr}\left(\sum_{B\in\mathcal{J},r,s=1}^{n}E_{M_1}\left(\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B^*\lambda_se_1\right)E_M\left(e_1\lambda_s^*\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B\gamma_1(f_P)\lambda_r\right)f_K\lambda_r^*f_Q\right)$$
$$=\operatorname{tr}\left(\sum_{B\in\mathcal{J},r,s=1}^{n}E_{M_1}\left(\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B^*\lambda_se_1E_M\left(e_1\lambda_s^*\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B\gamma_1(f_P)\lambda_r\right)\right)f_K\lambda_r^*f_Q\right)$$
$$=\operatorname{tr}\left(\sum_{B\in\mathcal{J},r,s=1}^{n}E_{M_1}\left(\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B^*\lambda_se_1E_{M_1}\left(e_1\lambda_s^*\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B\gamma_1(f_P)\lambda_r\right)e_1\right)f_K\lambda_r^*f_Q\right)$$

Comme on a:

$$n\sum_{s+1}^{n}\lambda_se_1E_{M_1}\left(e_1\lambda_s^*\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B\gamma_1(f_P)\lambda_r\right)=\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B\gamma_1(f_P)\lambda_r \quad (1.5.2\text{f}),$$

on en déduit:

$$\operatorname{tr}(g_Kf'_PF_Q)=\frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(\sum_{B\in\mathcal{J},r=1}^{n}E_{M_1}\left(\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B^*\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B\gamma_1(f_P)\lambda_re_1\right)f_K\lambda_r^*f_Q\right).$$

Et comme $\sum_B\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B^*\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B=n$ (1.5.3e), on peut écrire:

$$\operatorname{tr}(g_Kf'_PF_Q)=\operatorname{tr}\left(\sum_{r=1}^{n}E_M\left(\gamma_1(f_P)\lambda_re_1\right)f_K\lambda_r^*f_Q\right).$$

Simplifions $E_{M_1}\left(\gamma_1(f_P)\lambda_re_1\right)$ en remplaçant $\gamma_1(f_P)$ par

$$n\sum_{s=1}^{n}E_{M_1}(e_1\lambda_sf_P)e_1\lambda_s^*.$$

On obtient alors

$$x_{P,Q}^K=\frac{n^2}{n_pn_q}\operatorname{tr}\left(g_Kf_P^{'*}F_Q^*\right)=\frac{n^2}{n_pn_q}\operatorname{tr}\left(\sum_{r=1}^{n}E_{M_1}\left(e_1\lambda_rf_P^*\right)f_K\lambda_r^*f_Q^*\right).$$

On notera $\gamma_K(f_P^*) = n\sum_{r=1}^n E_{M_1}(e_1\lambda_r f_P^*)\, f_K\lambda_r^*$. (Cette notation est cohérente puisque $\gamma_1(f_P) = n\sum_{s=1}^n E_{M_1}(e_1\lambda_s f_P)e_1\lambda_s^*$). On peut alors écrire

$$x_{P,Q}^K = \frac{n}{n_p n_q}\operatorname{tr}\left(\gamma_K(f_P^*)f_Q^*\right).$$

En particulier:

$$\begin{aligned} e_3 &= \gamma_2\gamma_1(e_1) \\ &= \sum_{P,Q\in\mathcal{J}} \frac{n}{n_p n_q}\operatorname{tr}\left(f_Q^*\gamma_1(f_P^*)\right) f_P' F_Q \\ &= \sum_{P,Q\in\mathcal{J}} \frac{n}{n_p n_q}\operatorname{tr}\left(f_Q^*\gamma_1(f_P^*)\right) f_P \otimes f_Q. \end{aligned}$$

Comme $\left\{\sqrt{\frac{n}{n_b}}f_B, B\in\mathcal{J}\right\}$ est une base de Pimsner-Popa de B_2 sur $\mathbb{C}$ et que γ_1 conserve la trace, on peut écrire

$$e_3 = \sum_{P\in\mathcal{J}} \frac{1}{n_p} f_P \otimes \gamma_1(f_P^*) = \sum_{P\in\mathcal{J}} \frac{1}{n_p}\gamma_1(f_P^*)\otimes f_P.$$

5.4. Dualité entre A_1 et B_2. Dans [**S**], W. Szymanski définit une dualité entre les espaces vectoriels A_1 etB_2.

Définition et Proposition 5.4.1. (W. Szymanski) *La forme linéaire définie sur $A_1 \times B_2$ par*

$$(a,b) = n^2\operatorname{tr}(ae_1e_0b) \qquad (a\in A_1, b\in B_2)$$

établit une dualité entre A_1 et B_2.

Démonstration.

Rappelons d'abord que $A_1e_0 = \mathbb{C}e_0$ et $e_1B_2 = \mathbb{C}e_1$. Alors si, pour b donné dans B_2, $n^2\operatorname{tr}(ae_1e_0b)$ est nul pour tout a de A_1, $n^2\operatorname{tr}(ae_1a'e_0b)$ est nul pour tous a et a' de A_1.

Comme $A_2 = A_1e_1A_1$ et que e_0b est un élément de A_2, nous concluons à la nullité de $\operatorname{tr}(e_0bb^*e_0)$.

Or comme $E_{M_1}(bb^*)$ appartient à l'algèbre $M'\cap M_1$ qui vaut $\mathbb{C}$, on peut écrire:

$$0 = \operatorname{tr}(e_0bb^*e_0) = \operatorname{tr}(bb^*e_0) = \operatorname{tr}\left(E_{M_1}(bb^*)e_0\right) = n^{-1}\operatorname{tr}(bb^*).$$

La fidélité de la trace permet de conclure à la nullité de b.

Nous démontrons de même que, pour a donné dans A_1, la nullité de (a,b) pour tout b de B_2 implique la nullité de a.

La proposition suivante nous assure la co-associativité de Γ.

Proposition 5.4.2. *Γ, le coproduit de B_2, est le dual du produit de l'algèbre A_1.*

Démonstration.
L'algèbre A_1 (resp. B_2) est engendrée par $\{\lambda_s, 1 \leq s \leq n\}$ (resp. $\{f_K, K \in \mathcal{J}\}$). Nous allons donc calculer $(\lambda_h \otimes \lambda_s, , \Gamma(f_K))$. D'après 5.4.1 et 5.3.1, nous avons

$$(\lambda_h \otimes \lambda_s, , \Gamma(f_K)) = n^4 \sum_{P,Q \in \mathcal{J}} x_{P,Q}^K \operatorname{tr}(\lambda_h e_1 e_0 f_P) \operatorname{tr}(\lambda_s e_1 e_0 f_Q).$$

Lemme 1.

$$e_0 E_{M_1}(e_1 \lambda_r f_P^*) = n e_0 E_M (e_0 e_1 \lambda_r f_P^*) = n e_0 \operatorname{tr}(e_0 e_1 \lambda_r f_P^*).$$

Démonstration.
La première égalité est une application directe de [**PiPo1**, lemma 1.2].
Comme $e_0 e_1 \lambda_r f_P^*$ appartient à A_2, $E_M(e_0 e_1 \lambda_r f_P^*)$ appartient à $N' \cap M$ donc vaut $\operatorname{tr}(e_0 e_1 \lambda_r f_P^*)$.

Lemme 2. *L'élément $\gamma_K(f_P^*) = n \sum_{r=1}^n E_{M_1}(e_1 \lambda_r f_P^*) f_K \lambda_r^*$ appartient à B_2.*

Démonstration.
Soit y un élément de M, $\lambda_r^* y = \sum_{r=1}^n E_M(\lambda_r^* y \lambda_s)\lambda_s^*$, alors comme f_K, f_P^* et e_1 commutent à M, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
\gamma_K(f_P^*)y &= n \sum_{r=1}^n E_{M_1}(e_1 \lambda_r f_P^*) f_K \lambda_r^* y \\
&= n \sum_{r=1}^n E_{M_1}(e_1 \lambda_r f_P^*) f_K E_M(\lambda_r^* y \lambda_s)\lambda_s^* \\
&= n \sum_{r=1}^n E_{M_1}(e_1 \lambda_r E_M(\lambda_r^* y \lambda_s) f_P^*) f_K \lambda_s^* \\
&= n \sum_{r=1}^n E_{M_1}(e_1 y \lambda_s f_P^*) f_K \lambda_s^* \\
&= y \gamma_K(f_P^*)
\end{aligned}$$

donc $\gamma_K(f_P^*) \in M' \cap M_2$.

Lemme 3.

$$\sum_{Q\in\mathcal{J}} x^K_{P,Q}\,\mathrm{tr}(\lambda_s e_1 e_0 f_Q) = \frac{1}{n_p}\sum_{r=1}^{n}(\lambda_r^*\lambda_s, f_K)\,\mathrm{tr}(e_0 e_1 \lambda_r f_P^*).$$

Démonstration.

$$\sum_{Q\in\mathcal{J}} x^K_{P,Q}\,\mathrm{tr}(\lambda_s e_1 e_0 f_Q) = \frac{n}{n_p n_q}\sum_{Q\in\mathcal{J}}\mathrm{tr}\left[\mathrm{tr}\left(\gamma_K(f_P^*)f_Q^*\right) f_Q\lambda_s e_1 e_0\right].$$

Puisque $\left\{\sqrt{\frac{n}{n_q}}f_Q^*\right\}$ est une base de B_2 sur $\mathbb{C}$, le Lemme 2 nous permet d'affirmer:

$$\sum_{Q\in\mathcal{J}}\frac{n}{n_q}\,\mathrm{tr}\left(\gamma_K(f_P^*)f_Q^*\right) f_Q = \gamma_K(f_P^*).$$

On simplifie alors l'expression:

$$\sum_{Q\in\mathcal{J}} x^K_{P,Q}\,\mathrm{tr}(\lambda_s e_1 e_0 f_Q) = \frac{1}{n_p}\,\mathrm{tr}\left(e_0\gamma_K(f_P^*)\lambda_s e_1\right).$$

En remplaçant $\gamma_K(f_P^*)$ par son expression, on obtient:

$$\sum_{Q\in\mathcal{J}} x^K_{P,Q}\,\mathrm{tr}(\lambda_s e_1 e_0 f_Q) = \frac{n}{n_p}\sum_{r=1}^{n}\mathrm{tr}\left(e_0 E_{M_1}\left(e_1\lambda_r f_P^*\right) f_K\lambda_r^*\lambda_s e_1\right).$$

Le Lemme 1 nous permet d'écrire:

$$\sum_{Q\in\mathcal{J}} x^K_{P,Q}\,\mathrm{tr}(\lambda_s e_1 e_0 f_Q) = \frac{n^2}{n_p}\sum_{r=1}^{n}\mathrm{tr}\left(e_0\,\mathrm{tr}(e_0 e_1\lambda_r f_P^*)f_K\lambda_r^*\lambda_s e_1\right).$$

On en déduit facilement le résultat annoncé.

Suite de démonstration de la proposition. D'après le Lemme 3, on peut écrire:

$$\begin{aligned}(\lambda_h\otimes\lambda_s,\Gamma(f_K)) &= \sum_{r=1}^{n}(\lambda_r^*\lambda_s, f_K)\sum_{P\in\mathcal{J}}\frac{n^4}{n_p}\,\mathrm{tr}(e_0 e_1\lambda_r f_P^*)\,\mathrm{tr}(f_P\lambda_h e_1 e_0)\\ &= \sum_{r=1}^{n}(\lambda_r^*\lambda_s, f_K)\sum_{P\in\mathcal{J}}\frac{n^3}{n_p}\,\mathrm{tr}\left(n e_0\,\mathrm{tr}(e_0 e_1\lambda_r f_P^*)f_P\lambda_h e_1\right)\\ &= \sum_{r=1}^{n}(\lambda_r^*\lambda_s, f_K)\sum_{P\in\mathcal{J}}\frac{n^3}{n_p}\,\mathrm{tr}\left(e_0 E_{M_1}(e_1\lambda_r f_P^*)f_P\lambda_h e_1\right).\end{aligned}$$

Comme $\left\{\sqrt{\frac{n}{n_p}} f_P, P \in \mathcal{J}\right\}$ est une base de Pimsner-Popa de M_2 sur M_1 (5.2), on peut simplifier l'expression:

$$(\lambda_h \otimes \lambda_s, \Gamma(f_K)) = n^2 \sum_{r=1}^{n} (\lambda_r^* \lambda_s, f_K) \operatorname{tr}(e_0 e_1 \lambda_r \lambda_h e_1).$$

Grâce à 1.5.2a et b et à définition de λ_s (5,2), on arrive au résultat espéré.

$$(\lambda_h \otimes \lambda_s, \Gamma(f_K)) = n^2 (\lambda_h \lambda_s, f_K) \operatorname{tr}(e_0 e_1) = (\lambda_h \lambda_s, f_K).$$

Corollaire 5.4.3. *$\Gamma = \theta\gamma_2\gamma_1$ est un coproduit co-associatif sur B_2.*

5.5. γ_1 est une co-involution sur (B_2, Γ). γ_1 est, par définition, une involution sur B_2, pour montrer qu'avec Γ, elle munit B_2 d'une structure d'algèbre de Hopf-Von Neumann co-involutive, nous avons besoin d'en savoir plus sur γ_{H_φ}.

Lemme 5.5.1.
a)
$$\forall P \in \mathcal{J}, \forall Q \in \mathcal{J}, \theta\gamma_{H_\varphi}\theta^{-1}(f_P \otimes f_Q) = \gamma_1(f_Q) \otimes \gamma_1(f_P),$$

c'est-à-dire que modulo l'identification θ entre $B_2' \cap B_4$ et $B_2 \otimes B_2$,

$$\gamma_{H_\varphi} = (\gamma_1 \otimes \gamma_1)\sigma$$

où σ est l'automorphisme de $B_2 \otimes B_2$ défini par $\sigma(x \otimes y) = \sigma(y \otimes x)$ [**ES1**, 1.2.5].

b) $\gamma_3(a) = \gamma_{H_\varphi}(a) \qquad (a \in B_2' \cap B_4)$.

Démonstration.

a) $\gamma_{H_\varphi}(f_P' F_Q) =$
$= \gamma_{H_\varphi}(\gamma_{H_\varphi}\gamma_\varphi(f_Q))\, \gamma_{H_\varphi}(\gamma_\varphi\gamma_1(f_P)) = \gamma_\varphi\gamma_1(\gamma_1(f_Q))\, \gamma_{H_\varphi}\gamma_\varphi(\gamma_1(f_P))$.

b) D'après la formule 3.2.1, $\left\{\frac{n}{\sqrt{n_p}} f_P\, e_2, P \in \mathcal{J}\right\}$ étant une base de Pimsner-Popa de M_3 sur M_2, si $a \in B_2' \cap B_4$,

$$\gamma_3(a) = n \sum_{P \in \mathcal{J}} E_{M_3}\left(e_3 \frac{n}{\sqrt{n_p}} f_P\, e_2 a\right) e_3 e_2 \frac{n}{\sqrt{n_p}} f_P^*.$$

Comme $\left(e_3 \frac{n}{\sqrt{n_p}} f_P e_2\, a\right)$ appartient à B_4, $E_{M_3}\left(e_3 \frac{n}{\sqrt{n_p}} f_P e_2\, a\right)$ commute à M donc vaut $E_{B_3}\left(e_3 \frac{n}{\sqrt{n_p}} f_P e_2 a\right)$, on a alors

$$\gamma_3(a) = n \sum_{P \in \mathcal{J}} E_{B_3}\left(e_3 \frac{n}{\sqrt{n_p}} f_P e_2\, a\right) e_3 e_2 \frac{n}{\sqrt{n_p}} f_P^*.$$

C'est la formule 3.2.1 pour γ_{H_φ} défini sur $B_2' \cap B_4$, ainsi γ_3 et γ_{H_φ} coïncident sur $B_2' \cap B_4$.

Proposition 5.5.2. *Le triplet* (B_2, Γ, γ_1) *est une algèbre de Hopf-Von Neumann co-involutive.*

Démonstration.

D'après 5.5.1a, $(\gamma_1 \otimes \gamma_1)\sigma\Gamma\gamma_1 = \theta\gamma_{H_\varphi}\gamma_2|_{B_2}$. Comme $\gamma_2(B_2)$ est contenu dans $B_2' \cap B_4$, d'après 5.5.1b, $\gamma_{H_\varphi}\gamma_2|_{B_2} = \gamma_3\gamma_2|_{B_2}$. La propriété (2.2.1a) des anti-automorphismes nous permet alors d'écrire:

$$(\gamma_1 \otimes \gamma_1)\sigma\Gamma\gamma_1 = \theta\gamma_2\gamma_1 = \Gamma.$$

Le triplet (B_2, Γ, γ_1) est une algèbre de Hopf-Von Neumann co-involutive [**ES1**, 1.2.5].

Remarque. On peut vérifier facilement que γ_1 est la co-involution définie par la dualité entre A_1 et B_2.

Proposition 5.5.3. γ_1, *la co-involution sur* B_2, *est le dual de l'involution de* A_1.

Démonstration.

Pour λ_r dans A_1 et f_K dans B_2, on a

$$\begin{aligned}(\lambda_r, \gamma_1(f_K)) &= n^3 \sum_{s=1}^{n} \operatorname{tr}\left(\lambda_r e_1 e_0 E_{M_1}(e_1 \lambda_s f_K) e_1 \lambda_s^*\right) \\ &= n^3 \sum_{s=1}^{n} \operatorname{tr}\left(\lambda_r E_M\left(e_0 E_{M_1}(e_1 \lambda_s f_K)\right) e_1 \lambda_s^*\right).\end{aligned}$$

Comme $e_0 E_{M_1}(e_1 \lambda_s f_K)$ appartient à $N' \cap M_1$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda_r, \gamma_1(b)) &= n^3 \sum_{s=1}^{n} \operatorname{tr}\left(\lambda_r \operatorname{tr}\left(e_0 e_1 \lambda_s f_K\right) e_1 \lambda_s^*\right) \\ &= n^3 \sum_{s=1}^{n} \operatorname{tr}\left(\lambda_r e_1 \operatorname{tr}\left(f_K e_0 e_1 \lambda_s\right) \lambda_s^*\right).\end{aligned}$$

Comme $\{\lambda_s, 1 \leq s \leq n\}$ est une base de Pimsner-Popa de A_1 sur $\mathbb{C}$, on peut écrire:

$$(\lambda_r, \gamma_1(b)) = n^3 \operatorname{tr}\left(\lambda_r e_1 E_{M_1}\left(f_K e_0 e_1\right)\right) = n^2 \operatorname{tr}\left(\lambda_r E_{M_1}\left(f_K e_0 e_1\right)\right).$$

On en déduit que

$$(\lambda_r, \gamma_1(b)) = n^2 \operatorname{tr}\left(f_K e_0 e_1 \lambda_r\right) = \overline{(\lambda_r^*, f_K^*)}.$$

5.6. $(B_2, \Gamma, \gamma_1, n\varphi)$ **est une algèbre de Kac.** Nous allons montrer que $n\varphi$ est un poids de Haar sur (B_2, Γ, γ_1) en utilisant le théorème 6.3.5 de [**ES2**].

Lemme 5.6.1. *$\forall K \in \mathcal{J}$, $g_K e_1 = e_1 F_K$, c'est-à-dire*

$$\forall a \in B_2, \qquad \Gamma(a)(e_1 \otimes 1) = e_1 \otimes a.$$

Démonstration.
Nous utilisons la formule de la Proposition 5.3.1 et la notation déjà utilisée $\gamma_K(f_P^*) = n \sum_{r=1}^n E_{M_1}(e_1 \lambda_r f_P^*) f_K \lambda_r^*$, en particulier

$$\gamma_K(e_1) = \sum_{r=1}^n \operatorname{tr}(\lambda_r) f_K \lambda_r^* = f_K.$$

Comme $g_K = \sum_{P \in \mathcal{J}} \frac{1}{n_p} f_P \otimes \gamma_K(f_P^*)$, $g_K e_1 = e_1 \otimes \gamma_K(e_1) = e_1 \otimes f_K$.

Lemme 5.6.2. *$\forall K \in \mathcal{J}$, $\theta(g_K)(1 \otimes e_1) = f_K \otimes e_1$, c'est-à-dire*

$$\forall a \in B_2, \qquad \Gamma(a)(1 \otimes e_1) = a \otimes e_1.$$

Démonstration.
Comme $\theta(g_K) = \sum_{P,Q \in \mathcal{J}} \frac{n^2}{n_p n_q} \operatorname{tr}\left(\sum_{r=1}^n E_{M_1}(e_1 \lambda_r f_P^*) f_K \lambda_r^* f_Q^*\right) f_P \otimes f_Q$, on a:

$$\theta(g_K)(1 \otimes e_1) = \sum_{P \in \mathcal{J}} \frac{n}{n_p} \operatorname{tr}\left(n \sum_{r=1}^n E_{M_1}(f_K \lambda_r^* e_1) e_1 \lambda_r f_P^*\right) f_P \otimes e_1.$$

Or, puisque $\{n^{1/2} \lambda_r e_1, 1 \leq r \leq n\}$ est une base de Pimsner-Popa de M_2 sur M_1,

$$n \sum_{r=1}^n E_{M_1}(f_K \lambda_r^* e_1) e_1 \lambda_r = n \sum_{r=1}^n E_{M_1}(f_K \lambda_r e_1) e_1 \lambda_r^* = f_K.$$

Alors,

$$\sum_{P \in \mathcal{J}} \frac{n}{n_p} \operatorname{tr}\left(n \sum_{r=1}^n E_{M_1}(f_K \lambda_r^* e_1) e_1 \lambda_r f_P^*\right) f_P = \sum_{P \in \mathcal{J}} \frac{n}{n_p} \operatorname{tr}(f_K f_P^*) f_P = f_K$$

et l'égalité est démontrée.

Proposition 5.6.3. $(B_2, \Gamma, \gamma_1, n\varphi)$ *est une algèbre de Kac de dimension finie.*

Démonstration.
On a vu dans la Proposition 5.3.1 que le projecteur central de B_2, e_1, vérifie:

$$\Gamma(e_1) = \sum_{P=(p;p_1,p_2)\in\mathcal{J}} \frac{1}{n_p}\gamma_1(f^p_{p_2,p_1}) \otimes f^p_{p_1,p_2}.$$

Le Théorème 6.3.5. de [**ES2**] et les Lemmes 5.6.1 et 2 permettent de conclure.

Remarque. L'algèbre A_1 munie du co-produit dual du produit de l'algèbre B_2, de la co-involution duale de l'involution de B_2 et du poids $n\,\mathrm{tr}$ est l'algèbre de Kac duale de l'algèbre $(B_2, \Gamma, \gamma_1, n\varphi)$ [**ES1**, 6.9.9].

5.7. Une action de $(B_2, \Gamma, \gamma_1, n\varphi)$ **sur** M**.** Il nous reste à faire agir l'algèbre de Kac sur M.

Proposition 5.7.1.

a) *Si N_1 est la première algèbre d'un tunnel construit dans $N \subset M$, c'est-à-dire que $N_1 \subset N \subset M$ est la construction de base, soit $\nu = \gamma_0\gamma_1$ l'isomorphisme de B_2 sur $N_1' \cap M$, $\{\nu(f_K), K \in \mathcal{J}\}$ est une famille d'unités matricielles de $N_1' \cap M$ et, à une constante multiplicative près, une base de Pimsner-Popa de M sur N.*

b) *Soit β le morphisme de M dans $M \otimes B_2$ défini par:*

$$\text{si } y \in N \text{ et } K \in \mathcal{J}, \qquad \beta(y\,\nu(f_K)) = (y \otimes 1)(\nu \otimes i)\Gamma(f_K)$$

β est une action de B_2 sur M dont l'algèbre des point fixes est N.

c) *ν se prolonge en un morphisme normal de B_2 dans M qui vérifie:*

$$\nu(1) = 1 \text{ et } \beta\nu = (\nu \otimes i)\Gamma.$$

Démonstration.

a) C'est la Proposition 5.2.1.

b) β est une action car c'est un morphisme injective de M dans $M \otimes B_2$ qui vérifie

$$\beta(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad (\beta \otimes i)\beta = (i \otimes \Gamma)\beta. \qquad [\mathbf{E1}, 1.1]$$

En effet si $y \in N$,

$$\begin{aligned}(i\otimes\Gamma)\beta(y\nu(f_K)) &= (y\otimes 1\otimes 1)(i\otimes\Gamma)(\nu\otimes i)\Gamma(f_K)\\ &= (y\otimes 1\otimes 1)(\nu\otimes i\otimes i)(i\otimes\Gamma)\Gamma(f_K)\\ &= (y\otimes 1\otimes 1)(\nu\otimes i\otimes i)(\Gamma\otimes i)\Gamma(f_K)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{P,Q\in\mathcal{J}} x^K_{P,Q}\,[(y\otimes 1)(\nu\otimes i)\Gamma(f_P)]\otimes f_Q \\ &= (\beta\otimes i)\,[(y\otimes 1)(\nu\otimes i)\Gamma(f_K)] \\ &= (\beta\otimes i)\beta\,(y\nu(f_K))\,. \end{aligned}$$

Comme $1 = \sum_{K\in\mathcal{J}} f_K$, β laisse fixe les éléments de N. D'autre part, comme $[M : N] = n = [M : N^\beta]$, l'inclusion $N^\beta \subset N$ implique l'égalité.

c) résulte de la définition de ν et β.

La Proposition 5.7.1 et le Théorème 5.2 de [**ES2**] permettent de conclure:

Théorème 5.7.2. *Soient M un facteur de type* II_1, tr *sa trace normale finie fidèle normalisée et N un sous-facteur d'indice fini dans M. Si N est de profondeur au plus 2 dans M et $N' \cap M$ est égal à $\mathbb{C}$, N est la sous-algèbre des points fixes de M sous l'action extérieure β de l'algèbre de Kac de dimension finie $(M' \cap M_2, \theta\gamma_2\gamma_1, \gamma_1, n\varphi)$.*

L'action β est extérieure puisque $N' \cap M = \mathbb{C}$.

5.8. Remarque: cas d'un groupe fini. Le cas où $N'\cap M_1$ est abélien peut se traiter directement, en effet le groupe G apparaît comme le quotient du normalisateur de N par le groupe unitaire de N. Un résultat de Sutherland repris dans la thèse de V. Jones permet de conclure [**thèse VJ**, 4.1.7].

References

[E1] M. Emock, *Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac*, Journal of Functional Analysis, **26(1)** (1977).

[EN] M. Enock et R. Nest, en préparation.

[ES1] M. Enock et Jean-Marie Schwartz, *Kac algebras and duality of locally compact groups*, à paraître chez Springer.

[ES2] M. Enock et Jean-Marie Schwartz, *Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac, II*, P.R.I.M.S.K.U., **16(1)** (1980).

[GHJ] F.M. Goodman, P. de la Harpe et V.F.R. Jones, *Coxeter Graphs and Towers of algebras*, MSRI Publications, **14**.

[I1] N. Izumi, *Application of Fusion Rules to Classification of subfactors*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **27** (1991), 953-994.

[I2] N. Izumi, *On subalgebras of non AF-algebras with finite Wakatani index. I. Cuntz algebras*, preprint.

[L1] R. Longo, *Index of subfactors and statistics of quantum fields I*, Comm. Math. Phys., **126** (1989), 217-247.

[L2] R. Longo, *A duality for Hopf algebras and subfactors I*, preprint 1992.

[O] *Quantum Symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors*, Lectures given at University of Tokyo by Adrian Ocneanu, notes recorded by Yasuyuki Kawahigashi.

PiPo1] M. Pimsner et S. Popa, *Entropy and index for subfactors*, Ann. Scient. ENS, **19** (1986), 57-106.

PiPo2] M. Pimsner et S. Popa, *Iterating the basic construction*, Trans. A.M.S., **310(1)** (1988), 127-134.

Popa1] S. Popa, *Classification of subfactors: reduction to commuting squares*, Invent. Math., **101** (1990), 19-43.

Popa2] S. Popa, *Sur la classification des sous-facteurs d'indice fini du facteur hyperfini.*

[S] W. Szymanski, *Finite index subfactors and Hopf algebra crossed products*, à paraître dans "Proceedings of the AMS".

[VJ1] V. Jones, *Index for subfactors*, Invent. Math., **72** (1983), 1-25.

:se VJ] V. Jones, *Actions of finite groups on the hyperfinite type* II_1 *factor*, Memoirs of AMS, **237**.

Received February 15, 1993 and revised March 5, 1993.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
91405 ORSAY, FRANCE
E-mail address: Marie-Claude.David@math.u-psud.fr