Journal of the Institute of Polytechnics,
Osaka City University,
Vol. 6, No. 2, Series A

Sur le théorème du balayage et le théorème d'équilibre

Par Nobuyuki NINOMIYA

(Received September 25, 1955)

Dans l'espace euclidien R^m à dimension m ($\geqq 1$), on désignera par x ou y un point de coordonnées $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ ou $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$, par $x \pm y$ un point de coordonnées $(x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \cdots, x_m \pm y_m)$ et par $|x|$ la distance du point x à l'origine 0. Soit $K(x)$ une fonction dans R^m satisfaisant aux conditions:

[A] $K(x)$ est positive et continue en $x \neq 0$, et symétrique $[K(x) = K(-x)]$.

[B] $\lim_{|x| \to 0} K(x) = K(0)$ ($\leqq +\infty$) et $\int K(x)\, d\tau(x) < +\infty$,[1)]

τ étant la mesure de Lebesgue dans la sphère centrée en 0 de rayon unité. Alors, le potentiel et l'intégrale d'énergie d'une mesure (de Radon) μ dans R^m par rapport au noyau $K(x)$ sont définis comme

$$U^\mu(x) = \int K(x-y)\, d\mu(y)$$

et

$$I(\mu) = \iint K(x-y)\, d\mu(y)\, d\mu(x) = \int U^\mu(x)\, d\mu(x)$$

respectivement. Tout potentiel d'une mesure positive à support compact est semi-continu inférieurement dans R^m et continu dans le complémentaire du support. Un noyau $K(x)$ étant symétrique, on a toujours la relation réciproque d'entre deux mesures quelconques μ et ν:

$$\int U^\mu d\nu = \int d\nu(x) \int K(x-y)\, d\mu(y) = \int d\mu(x) \int K(x-y)\, d\nu(y) = \int U^\nu d\mu .$$

Si l'intégrale d'énergie $I(\sigma)$ de toute mesure σ (signe quelconque), lorsqu'elle existe, est toujours $\geqq 0$, le noyau $K(x)$ est dit de type positif dans R^m. Encore si, ajoutant à cela, l'égalité n'a lieu qu'au cas de $\sigma \equiv 0$, le noyau $K(x)$ est dit de satisfaire au principe d'énergie dans R^m. Si toute mesure positive μ d'énergie finie à support compact peut être "balayée" sur un compact quelconque F, c'est-à-dire, s'il existe une mesure positive μ' portée par F telle que

(1) $U^{\mu'}(x) = U^\mu(x)$ p.p.p.[2)] sur F,

(2) $U^{\mu'}(x) \leqq U^\mu(x)$ p.p.p. dans R^m,

le noyau $K(x)$ est dit de satisfaire au théorème du balayage dans R^m. Encore, si

---

1) S'il n'en est pas ainsi, tout potentiel d'une mesure positive quelconque sera non-borné.

2) On dira du'une propriété a lieu "à peu près partout (à p.p.p.)", si elle ne tombe en défaut qu'aux points d'un ensemble de masse nulle pour toute mesure positive d'énergie finie.

tout compact F admet une mesure d'équilibre, c'est-à-dire, s'il existe une mesure positive λ portée par F telle que

(1) $U^{\lambda}(x)=1$ p.p.p. sur F,

(2) $U^{\lambda}(x)\leqq 1$ partout dans R^m,

le noyau $K(x)$ est dit de satisfaire au théorème d'équilibre dans R^m. Récemment, J. Deny a démontré les théorèmes suivants en collaboration avec H. Cartan.[3]

THÉORÈME. *Pour qu'un noyau $K(x)$ satisfaisant au principe d'énergie satisfasse au théorème du balayage dans R^m, il faut et il suffit qu'il satisfasse au second principe du maximum.*[4]

THÉORÈME. *Pour qu'un noyau $K(x)$ satisfaisant au principe d'énergie satisfasse au théorème d'équilibre et au théorème du balayage tous deux dans R^m, il faut et il suffit qu'il satisfasse au premier principe du maximum*[4] *et au second principe du maximum tous deux.*

Dans ce travail, on étudiera les théorèmes sans l'hypothèse qu'un noyau $K(x)$ satisfait au principe d'énergie. On a les théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. *Pour qu'un noyau $K(x)$ satisfasse au théorème du balayage dans R^m, il faut et il suffit qu'il satisfasse au second principe du maximum.*

THÉORÈME 2. *Pour qu'un noyau $K(x)$ satisfasse au théorème d'équilibre dans R^m, il faut et il suffit qu'il satisfasse au premier principe du maximum.*

THÉORÈME 3. *Si un noyau $K(x)$ satisfait au théorème du balayage [resp. d'équilibre] dans R^m, tous les potentiels des mesures balayées d'une mesure [resp. tous les potentiels d'équilibre] sur un compact quelconque coïndident deux à deux p.p.p. dans tout l'espace.*

Soient E_1 et E_2 deux ensembles boréliens et *bornés* disjoints. Pour deux mesures positives μ et ν ($\neq 0$) portées par E_1 et par E_2 respectivement, on pose

$$G(\mu, \nu)=\frac{\int U^{\mu}\,d\mu\times\int U^{\nu}\,d\nu}{\left(\int U^{\mu}\,d\nu\right)^2}.$$

On appelle une paire minimale sur E_1 et E_2 (μ_0, ν_0) pour laquelle $G(\mu, \nu)$ est minimum parmi toutes les paires (μ, ν) de deux mesures susmentionnées. Alors, on a

3) H. Cartan et J. Deny; Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique, Acta Si. Math., Szeged, **12**, 1950, pp. 81-100.

Pour prouver les théorèmes, ils ne supposent pas la condition (2) des théorèmes du balayage et d'équilibre. Encore, ils les prouvent pour un noyau K qui n'est pas nécessairement fonction, mais qui est une mesure de type positif dont la transformée de Fourier $F(K)$ est une fonction positive à croissance lente ainsi que son inverse.

4) Le premier principe du maximum (O. Frostman): Si le potentiel d'une mesure positive est $\leqq M$ sur son support, il l'est ainsi partout dans tout l'espace.

Le second principe du maximum (H. Cartan): Si, μ étant une mesure positive d'énergie finie à support compact et ν étant une mesure positive quelconque, $U^{\mu}(x)\leqq U(x)$ p.p.p. sur le support de μ, il l'est ainsi p.p.p. dans tout l'espace.

LEMME 1. *S'il existe une paire minimale* (μ_0, ν_0) *sur* E_1 *et* E_2, *en posant*

$$a=\int U^{\mu_0}d\mu_0\,, \quad b=\int U^{\nu_0}d\nu_0\,, \quad c=\int U^{\mu_0}d\nu_0$$

et

$$g_1(x)=cU^{\mu_0}(x)-aU^{\nu_0}(x)\,, \quad g_2(x)=c\,U^{\nu_0}(x)-b\,U^{\mu}{}_0(x)$$

dans la supposition $0<a, b, c<+\infty$, $g_1(x)$ [*resp.* $g_2(x)$] *jouit des propriétés suivantes.*

(1) $g_1(x)$ [*resp.* $g_2(x)$] *est* $\leqq 0$ *sur* E_1 [*resp.* E_2] *presque partout pour* μ_0 [*resp.* ν_0].

(2) $g_1(x)$ [*resp.* $g_2(x)$] *est* $\geqq 0$ *sur* E_1 [*resp.* E_2] *presque partout pour toute mesure positive de potentiel borné à distance finie*; *en particulier, si* E_1 *et* E_2 *sont les compacts*, $g_1(x)$ [*resp.* $g_2(x)$] *est* $\geqq 0$ *p.p.p. sur* E_1 [*resp.* E_2].

En effet, faisons attention à la relation

$$G(\mu_0+\sigma, \nu_0)\geqq G(\mu_0, \nu_0)$$

qui a lieu pour toute mesure (signe quelconque) σ portée par E_1 telle que $\mu_0+\sigma$ soit positive, d'énergie finie et $\int U^{\nu_0}d\sigma<+\infty$. En tenant compte de la relation réciproque d'entre deux mesures quelconques, elle entraîne l'inégalité

$$0\leqq 2\int g_1\,d\sigma+\left[c^2I(\sigma)-a\left(\int U^{\nu_0}\,d\sigma\right)^2\right].$$

D'abord, supposons qu'un compact quelconque A contenu dans l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(x)>\delta>0$ est de masse positive pour μ_0. Alors, si on prend pour σ la mesure $-\varepsilon\mu_0'$ $(0<\varepsilon<1)$ en désignant par μ_0' la restriction de μ_0 à A, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} 0 &\leqq -2\varepsilon\int g_1\,d\mu_0'+\varepsilon^2\left[cI(\mu_0')-a\left(\int U^{\nu_0}\,d\mu_0'\right)^2\right] \\ &\leqq -2\varepsilon\delta\cdot\mu_0(A)+\varepsilon^2[\quad \text{"} \quad]. \end{aligned}$$

Puisque le coefficient de ε^2 est fini en vertu de la supposition $0<a, b, c<+\infty$, c'est contradictoire pour tout ε assez petit. δ étant arbitraire, l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(x)>0$ est d'ailleurs de masse nulle pour μ_0. Ensuite, supposons qu'un compact A contenu dans l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(x)\leqq-\delta<0$ est de masse positive pour une mesure positive de potentiel borné à distance finie. Alors, si on prend pour σ la mesure $\varepsilon\tau$ $(0<\varepsilon<1)$ en désignant par τ une mesure positive $(\neq 0)$ portée par A de potentiel borné à distance finie, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} 0 &\leqq 2\varepsilon\int g_1\,d\tau+\varepsilon^2\left[c^2I(\tau)-a\left(\int U^{\nu_0}\,d\tau\right)^2\right] \\ &\leqq -2\varepsilon\delta\cdot\tau(A)+\varepsilon^2[\quad \text{"} \quad]. \end{aligned}$$

Le coefficient de ε^2 est fini, car τ est de potentiel borné et ν_0 est à support compact. C'est contradictoire pour tout ε assez petit. δ étant arbitraire, l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(x)<0$ est d'ailleurs de masse nulle pour toute mesure positive de potentiel borné à distance finie. En particulier, soient E_1 et E_2 les compacts. Alors, si on prend pour σ la mesure $\varepsilon\tau$ $(0<\varepsilon<1)$ en désignant par τ une mesure positive d'énergie finie portée par A, $\mu_0+\varepsilon\tau$ est d'énergie finie et le coefficient de ε^2 est fini, car U^τ est continu sur un compact qui est le support de ν_0. On en verra tout comme que l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(x)<0$ est de masse nulle pour toute mesure positive d'énergie finie.

REMARQUE. En vertu de $\int g_1\, d\mu_0=0$ $\left[resp.\ \int g_2\, d\nu_0=0\right]$, on a toujours

$$g_1(x)=0 \ [resp.\ g_2(x)=0]$$

sur E_1 $[resp.\ E_2]$ presque partout pour μ_0 $[resp.\ \nu_0]$.

Etant donnée une mesure positive fixée μ portée par E_1, posons

$$G(\nu)=\frac{\int U^\nu d\nu}{\left(\int U^\mu d\nu\right)^2}$$

pour une mesure positive $\nu(\neq 0)$ portée par E_2. Alors, on peut prouver le lemme suivant de la même façon que le lemme 1.

LEMME 1'. *S'il existe une mesure positive ν_0 pour laquelle $G(\nu)$ est minimum parmi toutes les mesures positives ν portées par E_2, en posant*

$$b=\int U^{\nu_0} d\nu_0\,, \qquad c=\int U^{\nu_0} d\mu$$

et

$$g(x)=c\, U^{\nu_0}(x)-b\, U^\mu(x)$$

dans la supposition $0<b,\ c<+\infty$, $g(x)$ jouit des propriétés suivantes.

(1) *$g(x)$ est $\leqq 0$ sur E_2 presque partout pour ν_0.*

(2) *$g(x)$ est $\geqq 0$ sur E_2 presque partout pour toute mesure positive de potentiel borné à distance finie; en particulier, si E_1 et E_2 sont les compacts, $g(x)$ est $\geqq 0$ p.p.p. sur E_2.*

REMARQUE. Si E_1 et E_2 sont les compacts, il existe toujours une mesure positive ν_0 de masse totale unité pour laquelle $G(\nu)$ est minimum parmi toutes mesures positives ν portées par E_2.

En effet, lorsqu'on pose

$$G_0=\inf_\nu G(\nu)\ ,$$

on peut trouver une suite $\{\nu_n\}$ de mesures positives portées par E_2 de masse totale unité telle que $\lim_{n\to\infty} G(\nu_n)=G_0$. A partir de $\{\nu_n\}$, on peut en extraire une suite partielle $\{\nu_{n_i}\}$ qui converge (vaguement) vers une mesure positive ν_0. E_2 étant un compact, ν_0 est portée par E_2 et de masse totale unité. Puisque

$$\int U^{\nu_0}\, d\nu_0 \leqq \underset{n_i \to \infty}{p.p.l.} \int U^{\nu_{n_i}}\, d\nu_{n_i}$$

et

$$\int U^{\nu_0}\, d\mu = \lim_{n_i \to \infty} \int U^{\nu_{n_i}}\, d\mu\,,$$

on a

$$G_0 \leqq G(\nu_0) \leqq \underset{n_i \to \infty}{p.p.l.}\ G(\nu_{n_i}) = G_0\,.$$

Par suite, ν_0 est ce qui donne satisfaction.

Démonstration du théorème 1. D'abord, supposons qu'un noyau $K(x)$ satisfait au second principe du maximum. Soient μ une mesure positive d'énergie finie à support compact et F un compact qui charge une mesure positive d'énergie finie. Encore, en désignant par μ_n la restriction de μ à l'ensemble des points dont la distance d à F vérifie $\frac{1}{n+1} \leqq d < \frac{1}{n}$, soit ν_n une mesure positive de masse totale unité pour laquelle

$$G(\nu) = \frac{\int U^{\nu}\, d\nu}{\left(\int U^{\mu_n}\, d\nu\right)^2}$$

est minimum parmi toutes mesures positives ν portées par F. Alors, on a naturellement $\int U^{\nu_n}\, d\nu_n < +\infty$ et $\int U^{\nu_n}\, d\mu_n < +\infty$. Si on pose

$$\mu_n' = \frac{\int U^{\nu_n}\, d\mu_n}{\int U^{\nu_n}\, d\nu_n} \cdot \nu_n\,,$$

on a en vertu du lemme 1′

(1) $U^{\mu_n'}(x) \geqq U^{\mu_n}(x)$ p.p.p. sur F,

(2) $U^{\mu_n'}(x) \leqq U^{\mu_n}(x)$ sur le support de μ_n'.

On a d'ailleurs, d'après le second principe du maximum,

(1) $U^{\mu_n'}(x) = U^{\mu_n}(x)$ p.p.p. sur F,

(2) $U^{\mu_n'}(x) \leqq U^{\mu_n}(x)$ p.p.p. dans tout l'espace.

Alors, en désignant par μ^* la restriction de μ à F, $\mu' = \mu^* + \sum \mu_n'$ est ce qui donne satisfaction. Ensuite, supposons qu'un noyau $K(x)$ satisfait au théorème du balayage. Alors, si, μ étant une mesure positive d'énergie finie à support compact et ν étant une mesure positive quelconque, $U^{\mu}(x) \leqq U^{\nu}(x)$ p.p.p. sur le support F de μ, on peut prouver facilement

$$\int U^{\mu}\, d\lambda \leqq \int U^{\nu}\, d\lambda$$

pour toute mesure positive λ d'énergie finie à support compact. En effet, en désignant par λ' la mesure balayée de λ sur F, on a

$$\begin{aligned} \int U^{\mu}\, d\lambda &= \int U^{\lambda}\, d\mu = \int U^{\lambda'}\, d\mu = \int U^{\mu}\, d\lambda' \\ &\leqq \int U^{\nu}\, d\lambda' = \int U^{\lambda'}\, d\nu \leqq \int U^{\lambda}\, d\nu = \int U^{\nu}\, d\lambda\,, \end{aligned}$$

car λ' est une mesure positive d'énergie finie portée par F et $U^{\lambda'}(x)$ est égale à $U^{\lambda}(x)$ p.p.p. sur F et majoré par $U^{\lambda}(x)$ p.p.p. dans tout l'espace. Par suite, on a p.p.p. dans tout l'espace

$$U^{\mu}(x) \leqq U^{\nu}(x) .$$

Démonstration du théorème 2. D'abord, supposons qu'un noyau $K(x)$ satisfait au premier principe du maximum. Etant donné un compact quelconque F qui charge une mesure positive d'énergie finie, on peut trouver une mesure positive μ_0 pour laquelle l'intégrale d'énergie

$$I(\mu) = \int U^{\mu} d\mu$$

est minimum parmi toutes mesures positives portées par F de masse totale unité. Si on pose

$$\lambda_0 = \frac{\mu_0}{I(\mu_0)} ,$$

on a comme bien connu

(1) $U^{\lambda_0}(x) \geqq 1$ p.p.p. sur F,

(2) $U^{\lambda_0}(x) \leqq 1$ sur le support de λ_0,

On a d'ailleurs, d'après le premier principe du maximum,

(1) $U^{\lambda_0}(x) = 1$ p.p.p. sur F,

(2) $U^{\lambda_0}(x) \leqq 1$ partout dans tout l'espace.

Alors, λ_0 est ce qui donne satisfaction. Ensuite, supposons qu'un noyau $K(x)$ satisfait au théorème d'équilibre. Soit λ une mesure positive dont le potentiel est $\leqq M$ (une constante) sur son support compact F. Si l'ensemble des points tels que $U^{\lambda}(x) > M$ n'est pas vide, on pourra trouver un compact C, contenu dans cet ensemble ouvert, qui charge une mesure positive μ d'énergie finie de masse totale unité. Soit ν_0 une mesure positive de masse totale unité pour laquelle

$$G(\nu) = \frac{\int U^{\nu} d\nu}{\left(\int U^{\mu} d\nu\right)^2}$$

est minimum parmi toutes mesures positives ν portées par F. Encore, soient b, c et $g(x)$ les quantités définies dans le lemme 1'. Alors, puisque $g(x) \geqq 0$ p.p.p. sur F, on a

$$\begin{aligned} 0 \leqq \int g(x)\, d\lambda(x) &= c \int U^{\nu_0} d\lambda - b \int U^{\mu} d\lambda \\ &= c \int U^{\lambda} d\nu_0 - b \int U^{\lambda} d\mu < (c-b) M . \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $g(x) \leqq 0$ sur le support F_0 de ν_0, on a pour une mesure λ_0 d'équilibre sur F_0,

$$0 \geqq \int g(x)\, d\lambda_0(x) = c\int U^{\nu_0}\, d\lambda_0 - b\int U^{\mu}\, d\lambda_0$$
$$= c\int U^{\lambda_0}\, d\nu_0 - b\int U^{\lambda_0}\, d\mu \geqq c-b$$

car $U^{\lambda_0}(x)=1$ p.p.p. sur F et $\leqq 1$ partout dans tout l'espace. C'est contradictoire. Par suite, on a partout dans tout l'espace

$$U^{\lambda}(x) \leqq M.$$

COROLLAIRE. *Un noyau (symétrique) $K(x)$ satisfaisant au théorème du balayage ou d'équilibre est nécessairement de type positif.*

En effet, on sait que, si un noyau (symétrique) $K(x)$ satisfait au premier ou second principe du maximum, il est nécessairement de type positif.[5]

LEMME 2. *Soient un noyau $K(x)$ de type positif, et E_1 et E_2 deux ensembles boréliens et bornés disjoints. Si $G(\mu_0, \nu_0)=1$ pour deux mesures positives μ_0 et ν_0 ($\neq 0$) d'énergie finie portées par E_1 et par E_2 respectivement, on a*

$$g_1(x) = g_2(x) = 0$$

dans tout l'espace presque partout pour toute mesure positive de potentiel borné à distance finie, $g_1(x)$ et $g_2(x)$ désignant les fonctions définies dans le lemme 1.

En effet, rappellons

$$G(\mu, \nu) \geqq 1$$

pour toute paire de deux mesures positives μ et ν portées par deux ensembles boréliens et bornés disjoints respectivement. (μ_0, ν_0) est une paire minimale sur E_1 et E_2. Si on désigne par E_1' l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(x) \leqq 0$, (μ_0, ν_0) est aussi une paire minimale sur E_1' et $E_2+(E_1-E_1')$, car μ_0 est portée par E_1' en vertu du lemme 1. Alors, $g_2(x)$ est $\geqq 0$ sur $E_2+(E_1-E_1')$ presque partout pour toute mesure positive de potentiel borné à distance finie. Particulièrement elle l'est ainsi sur E_1-E_1', ce qui entraîne que E_1-E_1' est de masse nulle pour toute mesure positive de potentiel borné à distance finie, car $g_1(x)>0$ sur E_1-E_1' et $c\, g_1(x)+a\, g_2(x)\equiv 0$. On a d'ailleurs

$$g_1(x) = 0$$

sur E_1 presque partout pour toute telle mesure. Encore, on a de même

$$g_2(x) = 0$$

sur E_2 presque partout pour toute telle mesure. Par suite, on a

$$g_1(x) = g_2(x) = 0$$

sur E_1 et sur E_2 presque partout pour toute mesure positive de potentiel borné à

5) N. Ninomiya; Sur l'intégrale d'énergie dans la théorie du potentiel, Jour. Inst. Polytech. Osaka City Univ., 5, no. 2, 1954, pp. 97-100. Une correction de ce travail, ce journal.

distance finie. Ensuite, soit E un ensemble borélien et borné quelconque tel que $E\cdot E_1=E\cdot E_2=0$. Alors, puisque (μ_0, ν_0) est une paire minimale sur E_1+E et E_2 ou sur E_1 et E_2+E, on a

$$g_1(x)\geqq 0 \quad \text{et} \quad g_2(x)\geqq 0$$

sur E presque partout pour toute mesure positive de potentiel borné à distance finie. En tenant compte de $c\, g_1(x)+a\, g_2(x)\equiv 0$, on a d'ailleurs

$$g_1(x)=g_2(x)=0$$

sur E presque partout pour toute telle mesure.

LEMME 3. *Si un noyau $K(x)$ (symétrique ou non) satisfait au premier ou second principe du maximum, il satisfait au théorème d'Evans-Vasilesco.*[6]

En effet, on connaît très bien que, si un noyau $K(x)$ qui est une fonction de la seule distance $|x|$ satisfait au principe du maximum de T. Ugaheri[7], il satisfait au théorème d'Evans-Vasilesco. Une simple adaptation de sa démonstration montre que le résultat est aussi vrai pour un noyau (symétrique ou non) qui n'est pas nécessairement une fonction de la seule distance $|x|$, et encore vérifié toutes les fois que la relation $U^{\mu}(x)\leqq M$ sur le support d'une mesure positive μ portée par un compact F entraîne $U^{\mu}(x)\leqq k\cdot M$ sur un ensemble ouvert 0 contenant F, où 0 et k dépendent seulement de F. Alors, cette propriété a lieu évidemment pour un noyau satisfaisant au premier principe du maximum. Supposons qu'un noyau $K(x)$ satisfait au second principe du maximum. Si le potentiel d'une mesure positive μ portée par F est $\leqq M$ sur son support, en prenant une mesure positive ν à support compact contenu dans le complémentaire de F, telle que

$$1\leqq U^{\nu}(x)<k<+\infty$$

sur F, on a en vertu du second principe du maximum

$$U^{\mu}(x)\leqq U^{M\nu}(x)$$

p.p.p. dans tout l'espace. Soit 0 un ensemble ouvert contenant F dans lequel $U^{\nu}(x)<k$ partout. Alors, on a partout sur 0

$$U^{\mu}(x)\leqq U^{M\nu}(x)<k\cdot M,$$

car l'ensemble des points de 0 tels que $U^{\mu}(x)>U^{M\nu}(x)$ est un ensemble ouvert qui

6) Le théorème d'Evans-Vasilesco ; Si le potentiel d'une mesure positive est continu, considéré comme fonction sur son support, il est aussi continu, considéré comme fonction dans tout l'espace.

7) Le principe du maximum de T. Ugaheri. Si le potentiel d'une mesure positive est $\leqq M$ sur son support, il est $\leqq kM$ partout dans tout l'espace, où k est la constante absolue. (Ce principe a lieu si un noyau $K(x)$ est une fonction décroissante de la seule distance $|x|$). T. Ugaheri ; On the general capacities and potentials, Bull. Tokyo Inst. Tech., **4**, 1953, pp. 149-179. Voir § 2.

peut charger des mesures positives d'énergie finie en vertu de l'hypothèse qu'un noyau $K(x)$ est sommable par rapport à la mesure de Lebesgue.

REMARQUE. Si un noyau $K(x)$ satisfait au théorème d'Evans-Vasilesco, toute mesure positive μ d'énergie finie est limite croissante de restrictions μ_n à support compact dont le potentiel U^{μ_n} est continu dans tout l'espace et converge partout vers U^{μ}, d'où on sait facilement que, si un ensemble est de masse nulle pour toute mesure positive de potentiel borné à distance finie, il est aussi de masse nulle pour toute mesure positive d'énergie finie.

Démonstration du théorème 3. On prouve que les potentiels de deux mesures balayées quelconques μ' et μ'' d'une mesure μ [resp. de deux mesures quelconques μ' et μ'' d'équilibre] sur un compact F coïncident p.p.p. dans tout l'espace. Si $\mu' \neq \mu''$, on peut trouver deux ensembles boréliens et bornés disjoints E_1 et E_2 et deux mesures positives μ_0 et ν_0 d'énergie finie portées par E_1 et par E_2 respectivement telles que $\mu' - \mu'' = \mu_0 - \nu_0$. Puisqu'un noyau $K(x)$ est de type positif et on a $G(\mu_0, \nu_0) = 1$ moyennant l'hypothèse $U^{\mu'}(x) = U^{\mu''}(x)$ p.p.p. sur F, on a en vertu du lemme 2

$$c\, U^{\mu_0}(x) = a\, U^{\nu_0}(x)$$

dans tout l'espace presque partout pour toute mesure positive de potentiel borné à distance finie, où

$$c = \int U^{\nu_0}\, d\mu_0 = \int U^{\mu_0}\, d\mu_0 = a\,.$$

Par suite, on a

$$U^{\mu'}(x) = U^{\mu''}(x)$$

dans tout l'espace presque partout pour toute telle mesure. Alors, puisqu'un noyau $K(x)$ satisfait au théorème d'Evans-Vasilesco, on a d'ailleurs p.p.p. dans tout l'espace

$$U^{\mu'}(x) = U^{\mu''}(x)\,.$$

REMARQUE. Comme il est bien connu en observant le cas de $K(x) \equiv 1$ (qui est de type positif, mais ne satisfait pas au principe d'énergie), on ne peut prouver en général l'unicité d'une mesure balayée [resp. d'équilibre]. Mais, si un noyau $K(x)$ satisfait au principe d'énergie, on verra facilement qu'une mesure balayée [resp. d'équilibre] est toujours unique.