Journal of the Institute of Polytechnics,
Osaka City University,
Vol. 6, No. 2, Series A

Une correction[1] sur mon travail: "Sur l'intégrale d'énergie dans la théorie du potentiel"

Par Nobuyuki NINOMIYA

(Received September 26, 1955)

Je publiais les théorèmes suivants dans mon travail: "Sur l'intégrale d'énergie dans la théorie du potentiel (Jour. Inst. Polytech. Osaka City Univ., 5, no. 2, pp. 97–100)". Etant donnée une mesure μ dans R^m, en désignant par MQ la distance du point M au point Q, considérons le potentiel généralisé

$$U^{\mu}(M)=\int \Phi(MQ)\, d\mu(Q)$$

et l'intégrale d'énergie

$$I(\mu)=\int U^{\mu} d\mu=\iint \Phi(MQ)\, d\mu(Q)\, d\mu(M)$$

dont le noyau Φ est la fonction satisfaisant aux conditions suivantes:

[A] $\Phi(r)$ est la fonction continue et positive pour $0<r<+\infty$, et $\lim_{r\to 0}\Phi(r)=+\infty$.

[B] $\int_0^1 \Phi(r)\cdot r^{m-1} dr<+\infty$.

Si l'intégrale d'énergie $I(\sigma)$ de toute mesure σ (signe quelconque) dans R^m, lorsqu'elle existe, est toujours $\geqq 0$, le noyau $\Phi(r)$ est dit de type positif dans R^m. Encore si, ajoutant à cela, l'égalité n'a qu'au cas de $\sigma\equiv 0$, le noyau $\Phi(r)$ est dit de satisfaire au principe d'énergie dans R^m. Alors,

THÉORÈME 1. *Pour que le noyau $\Phi(r)$ soit de type positif dans R^m, il faut et il suffit que tout Φ-potentiel possède la propriété suivante:*

Dans R^m, soient μ et ν des mesures positives à support compact et d'énergie finie. Si $U^{\mu}(M)\leqq U^{\nu}(M)$ presque partout pour μ sur son support, l'inégalité a lieu aussi au moins en un point du support de ν.

THÉORÈME 2. *Pour que le noyau $\Phi(r)$ satisfasse au principe d'énergie dans R^m, il faut et il suffit que tout Φ-potentiel possède la propriété suivante:*

Dans R^m, soient μ et ν des mesures positives distinctes d'énergie finie. Si $U^{\mu}(M)\leqq U^{\nu}(M)$ presque partout pour μ sur son support, on a $U^{\mu}(M)<U^{\nu}(M)$ sur un ensemble de masse positive pour ν.

Je devais la part essentielle des démonstrations des théorèmes au lemma suivant. Soient E_1 et E_2 deux ensembles boréliens disjoints. Pour deux mesures positives μ et ν portées par E_1 et par E_2 respectivement, posons

1) En hommage et remerciement à Monsieur Jacques Deny.

$$G(\mu, \nu)=\frac{\int U^{\mu}d\mu\times\int U^{\nu}d\nu}{\left(\int U^{\mu}d\nu\right)^{2}}\text{[2]}.$$

On appelle une paire minimale sur E_1 et $E_2(\mu_0, \nu_0)$ pour laquelle $G(\mu, \nu)$ est minimum parmi toutes les paires (μ, ν) de deux mesures susmentionées. Alors,

LEMME. *S'il existe une paire minimale* (μ_0, ν_0) *sur* E_1 *et* E_2, *en posant*

$$a=\int U^{\mu_0}d\mu_0,\quad b=\int U^{\nu_0}d\nu_0,\quad c=\int U^{\mu_0}d\nu_0$$

et

$$g_1(M)=cU^{\mu_0}(M)-aU^{\nu_0}(M),\quad g_2(M)=cU^{\nu_0}(M)-bU^{\mu_0}(M)$$

dans la supposition $0<a, b, c<+\infty$, $g_1(M)$ [*resp.* $g_2(M)$] *est* $\geqq 0$ *sur* E_1 [*resp.* E_2] *à l'exception d'un ensemble de* Φ*-capatité nulle et* $\leqq 0$ *sur* E_1 [*resp.* E_2] *presque partout pour* μ_0 [*resp.* ν_0].

Après avoir publié mon travail, M. J. Deny m'a communiqué personnellement que le noyau $\Phi(r)$ n'est pas supposé d'être décroissante mais il semble que le lemme suppose l'hypothèse:

"si un ensemble n'est le support d'aucune mesure positive de potentiel borné à distance finie, il n'est le support d'aucune mesure positive d'énergie finie",

et m'en a posé une question:

"ce fait simple, ne suppose-t'il pas le théorème d'Evans-Vasilesco (si le potentiel d'une mesure positive est continu, considéré comme fonction sur son support, il est aussi continu, considéré comme fonction dans tout l'espace), qui a lieu si $\Phi(r)$ est décroissante[3]?".

En étudier sérieusement à cette question, j'ai trouvé que, pour prouver le lemme[4], j'avais utilisé implicitement l'hypothèse comme il m'a indiqué. Par suite, je veux corriger le lemme comme suit.

Correction du lemme. *S'il existe une paire minimale* (μ_0, ν_0) *sur* E_1 *et* E_2, *on a*

$$g_1(M)=0\ [\textit{resp.}\ g_2(M)=0]$$

sur E_1 [*resp.* E_2] *presque partout pour* μ_0 [*resp.* ν_0].

En effet, soit δ un nombre positif quelconque. Si un compact quelconque A contenu dans l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(M)\leqq-\delta$ est de masse positive pour μ_0, en désignant par μ_0' la restriction de μ_0 à A, on aura

---

2) Il va sans dire qu'on se doit de supposer l'existence des mesures telles que $0<G(\mu, \nu)<+\infty$. Pour cela, il suffit par exemple que E_1 et E_2 soient de Φ-capacité positive.

3) T. Ugaheri; On the general capacities and potentials, Bull. Tokyo Inst. Tech., **4**, 1953, pp. 149-179. Voir p. 153.

4) N. Ninomiya; Equilibrium Potentials and Energy Integrals, Proc. Jap. Acad., **26**, 1950, no. 1, pp. 1-16. Voir p. 11.

$$G(\mu_0+\varepsilon\mu_0', \nu_0) \geqq G(\mu_0, \nu_0)$$

pour tout nombre positif ε, car $\mu_0+\varepsilon\mu_0'$ est une mesure positive d'énergie finie portée par E, d'où on aura en tenant compte de la relation réciproque $\int U^{\mu_0} d\nu_0 = U^{\nu_0} d\mu_0$,

$$\begin{aligned} 0 &\leqq 2\varepsilon \int g_1 \, d\mu_0' + \varepsilon^2 \left[c^2 \int U^{\mu_0'} d\mu_0 - a \left(\int U^{\nu_0} d\mu_0 \right)^2 \right] \\ &\leqq -2\varepsilon\delta\alpha + \varepsilon^2 [\quad \text{"} \quad], \end{aligned}$$

α désignant la masse totale de μ_0'. A cause de l'hypothèse $0<a, b, c<+\infty$, le coefficient de ε^2 est fini, ce qui entraîne la contradiction pour tout petit nombre ε. Par suite, le compact A est de masse nulle pour μ_0. δ étant arbitraire, on sait d'ailleurs que l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(M)<0$ est de masse nulle aussi. D'autre part, selon $\int g_1 \, d\mu_0 = 0$, on sait encore que l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(M)<0$ est de masse nulle aussi. C.Q.F.D.

En utilisant le lemme corrigé, la démonstration du théorème 1 ou 2 est sûrement achevée en modifiant un peu la terminologie.

Maintenant, je veux[5] prouver la remarque dans mon travail:

"*le noyau $\Phi(r)$ du potentiel généralisé satisfaisant au principe du maximum de O. Frostman est nécessairement de type positif*".

En effet, étant donnée une mesure quelconque $\sigma(\neq 0)$ d'énergie finie, on peut trouver deux ensembles boréliens disjoints E_1 et E_2 et deux mesures positives μ et ν d'énergie finie portées par E_1 et E_2 respectivement telles que $\sigma=\mu-\nu$. Pour prouver

$$I(\sigma) = \int U^{\mu} d\mu - 2\int U^{\mu} d\nu + \int U^{\nu} d\nu \geqq 0,$$

il suffit de prouver $G(\mu, \nu) \geqq 1$. Pour cela, il suffit de le prouver au cas où E_1 et E_2 sont les compacts. Lorsque E_1 et E_2 sont les compacts, il existe une paire minimale (μ_0, ν_0) sur E_1 et E_2 comme on a déjà dit dans la démonstration du théorème 1. Alors, puisque $g_1(M)$ [resp. $g_2(M)$] est semi-continue inférieurement sur E_1 [resp. E_2] et égale à zéro sur E_1 [resp. E_2] presque partout pour μ_0 [resp. ν_0] en vertu du lemme corrigé, on a

(1) $cU^{\mu_0}(M) \leqq aU^{\nu_0}(M)$ sur le support F_1 de μ_0,

(2) $cU^{\nu_0}(M) \leqq bU^{\mu_0}(M)$ sur le support F_2 de ν_0.

Si tout potentiel satisfait au principe du maximum de O. Frostman, on a l'inégalité

$$\frac{c}{a} \sup_{F_1} U^{\mu_0}(M) \leqq \sup_{F_1} U^{\nu_0}(M) \leqq \sup_{F_2} U^{\nu_0}(M) \leqq \frac{b}{c} \sup_{F_2} U^{\mu_0}(M) \leqq \frac{b}{c} \sup_{F_1} U^{\mu_0}(M),$$

ce qui entraîne

$$G(\mu_0, \nu_0) = \frac{ab}{c^2} \geqq 1. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

---

5) Quand je publiais mon travail haut-cité, je croyais qu'elle était presque évidente en vertu du théorème 1. Mais, il me semble qu'elle n'est pas évidente.

REMARQUE. Soit $K(x)$ une fonction dans $R^m(m\geqq 1)$ satisfaisant aux conditions:

[A] $K(x)$ est positive et continue en $x\neq 0$, et symétrique $[K(x)=K(-x)]$.

[B] $\lim_{x\to 0} K(x)=K(0) \quad (\leqq +\infty)$.

Considérons le potentiel et l'intégrale d'énergie d'une mesure μ dans R^m par rapport au noyau K

$$U^\mu(x)=\int K(x-y)\,d\mu(y)$$

et

$$I(\mu)=\iint K(x-y)\,d\mu(y)\,d\mu(x)$$

respectivement. Tous les résultats obtenus dans mon travail s'étendent sans modification à un tel noyau $K(x)$ qui n'est pas nécessairement fonction de la seule distance r, mais qui est symétrique.