Journal of the Institute of Polytechnics,
Osaka City University,
Vol. 1, No. 1, Series A

Zur Arithmetik in Schiefringen II.

Von Keizo ASANO

Die vorliegende Arbeit ist die Fortsetzung der früheren Arbeit[1]. S sei ein Schiefring mit Einselement 1. Wir nennen im folgenden eine Ordnung von S (im Sinn von A. I.) eine Schiefordnung und unter einer Ordnung von S verstehen wir immer eine reguläre Ordnung (im Sinn von A. I.). Ein Teilring $\mathfrak{o}$ von S heisst nämlich eine Ordnung (Schiefordnung), wenn $\mathfrak{o}$ 1 enthält und wenn es für jedes $x \in S$ reguläre Elemente α, β aus $\mathfrak{o}$ gibt, so dass $x\, \mathfrak{o}\, \alpha \subseteq \mathfrak{o}$, $\beta\, \mathfrak{o}\, x \subseteq \mathfrak{o}$ ($x\, \alpha \in \mathfrak{o}$, $\beta\, x \in \mathfrak{o}$) sind. Nach einigen Ergänzungen in §1 werden wir in §2 die Arithmetik in allgemein-halbeinfachen Ringen näher untersuchen. Ein allgemein-halbeinfacher Ring bedeutet dabei eine direkte Summe von endlich vielen allgemein-einfachen Ringen und ein allgemein-einfacher Ring ist ein Ring, welcher zweiseitig einfach ist und dessen Element entweder eine Einheit oder ein Nullteiler ist. Wir zeigen unter allen andern, dass für eine Schiefordnung $\mathfrak{o}$ eines allgemein-halbeinfachen Rings S die drei von Noether herrührenden Axiome A_1, A_2, A_3 mit den fünf von Artin herrührenden Axiomen P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 äquivalent sind:

A_1: $\mathfrak{o}$ ist eine Maximalordnung.

A_2: Es gilt der Teilerkettensatz für die in $\mathfrak{o}$ enthaltenen zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale.

A_3: Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$ ist stark teilerlos, d. h. der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ist ein einfacher Ring.

P_1: Es gibt ein System $\{\mathfrak{o}_\tau\}$ von Ordnungen von S, so dass $\mathfrak{o} = \bigcap_\tau \mathfrak{o}_\tau$ eine Schiefordnung ist.

P_2: Die zweiseitigen $\mathfrak{o}_\tau$-Ideale bilden eine unendliche zyklische Gruppe. Das erzeugende ist dann ein (einziges) Primideal $\mathfrak{P}_\tau$ von $\mathfrak{o}_\tau$.

P_3: Es gibt ein $\mathfrak{P}_\tau$ enthaltendes minimales Linksideal von $\mathfrak{o}_\tau$.

P_4: Für jedes reguläre Element λ aus S gilt $\mathfrak{o}_\tau\, \lambda\, \mathfrak{o}_\tau = \mathfrak{o}_\tau$ bis auf endlich viele $\mathfrak{o}_\tau$

P_5: Für zwei $\mathfrak{o}_\tau, \mathfrak{o}_\sigma$ gibt es ein $\mathfrak{o}$-Element a, so dass $a \equiv 1$ $(\mathfrak{P}_\tau)$,

1) K. Asano, Zur Arithmetik in Schiefringen I, Osaka Math. Journ. 1 (1949), zitiert im folgenden mit A. I. Vgl. auch K. Asano, Arithmetische Idealtheorie in nichtkommutativen Ringen, Japan. Journ. Math. 16 (1939); N. Jacobson, Theory of rings (1943).

$a \equiv 0$ $(\mathfrak{P}_\sigma)$ sind.

$\{\mathfrak{o}_\tau\}$ ist dann nichts anderes als $\{\mathfrak{o}_\mathfrak{p}\}$, wo $\mathfrak{p}$ auf alle Primideale von $\mathfrak{o}$ durchläuft. $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ist ein maximaler Teilring von S und jedes $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-Links- sowie $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-Rechtsideal ein Hauptideal. Daraus folgt eine bemerkenswerte Tatsache, dass die drei Axiome A_1, A_2, A_3 auch für jede mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Maximalordnung gelten. Demnach lässt sich das Gruppoid der normalen Ideale definieren. Der Begriff der P-Komponenten von einseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale (A. I. §3) wird natürlicherweise auf normale Ideale übertragen.

In §3 werden wir die Beziehungen zwischen der Arithmetik im Schiefring S und der Struktur von S untersuchen. Setzt man voraus, dass jedes Element von S entweder eine Einheit oder ein Nullteiler ist und dass $\mathfrak{o}$ eine Ordnung von S mit den Bedingungen A_1, A_2, A_3 ist, so ist S dann und nur dann allgemein-einfach, wenn der Vielfachenkettensatz für die ganzen zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale gilt, die ein festes Element $a \neq 0$ enthalten. S ist sogar dann allgemein-einfach, wenn es ein Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$ gibt, so dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}^n = 0$. Ist S allgemein-einfach und ausserdem regulär, so ist S ein einfacher Ring (mit Kettensatz). Ist S allgemein-halbeinfach und ist $\mathfrak{o}$ eigentlich, d. h. enthält $\mathfrak{o}$ ausser Null kein zweiseitiges Ideal von S (im gewöhnlichen Sinn), so ist für jedes ganze zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$, das keines der Einsen e_i der einfachen Bestandteile S_i von S enthält, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$. Wenn es umgekehrt ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$ gibt, so dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$ ist, so ist S allgemein-halbeinfach und $\mathfrak{o}$ ist eigentlich; ist S ausserdem regulär, so ist S ein halbeinfacher Ring (mit Kettensatz).

Ist S allgemen-einfach, so ist die Deuringsche $\mathfrak{m}$-adische Bewertung[2] definiert. Sie ist eine nichtarchimedische Bewertung φ von S mit den folgenden Eigenschaften:

1) $\varphi(a) \leq 1$ für jedes a aus $\mathfrak{o}$,

2) Es gibt ein S-Element c mit $0 < \varphi(c) < 1$.

Umgekehrt ist jede nichtarchimedische Bewertung, welche die obigen zwei Bedingungen erfüllt, ist mit einer $\mathfrak{m}$-adischen Bewertung äquivalent. Die Arithmetik in der bezüglich der $\mathfrak{m}$-adischen Bewertung perfekten Erweiterung von S ist mit Hilfe von §2 übersichtlich. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$ der Kapazität κ, so ist die $\mathfrak{p}$-adische Erweiterung $S_\mathfrak{p}$ von S

2) M. Deuring, Algebren, Ergebnisse d. Math. 4 (1935).

ein einfacher Ring und zwar ein voller Matrizenring vom Grade κ in einem Schiefkörper. Die $\mathfrak{p}$-adische Komponente (Grenzmenge) $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{o}$ hat ein System von Matrizeneinheiten e_{ij} $(i, j = 1, \dots, \kappa)$ und es ist $S_{\mathfrak{p}} = \sum_{i,j=1}^{\kappa} K e_{ij}$, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = \sum_{i,j} \boldsymbol{o}\, e_{ij}$. $\boldsymbol{o} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \wedge K$ ist eine Maximalordnung von K und K hat ausser $\boldsymbol{o}$ keine mit $\boldsymbol{o}$ äquivalente Maximalordnung. Die $\mathfrak{p}$-adische Komponente $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ ist ein einziges Primideal von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, $\boldsymbol{p} = \mathfrak{P} \wedge K$ ist ein einziges Primideal von $\boldsymbol{o}$ und $\boldsymbol{o}/\boldsymbol{p}$ ist ein Schiefkörper. Die einseitigen $\boldsymbol{o}$-Ideale sind zweiseitig, sie sind die Potenzen von $\boldsymbol{p}$.

§ 1. Einige Ergänzungen

S sei ein Schiefring mit Einselement und $\mathfrak{o}$ sei eine Ordnung von S.

Satz 1.1. *Es sei $\mathfrak{a}$ ein mit $\mathfrak{o}$ äquivalenter Teilmodul von S; d.h. es gebe reguläre Elemente $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$, so dass $\lambda\, \mathfrak{a}\, \mu \subseteq \mathfrak{o}$, $\lambda'\, \mathfrak{o}\, \mu' \subseteq \mathfrak{a}$ sind. Dann bildet $\mathfrak{o}_l = \{x \mid x\,\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a},\ x \in S\}$ bzw. $\mathfrak{o}_r = \{y \mid \mathfrak{a}\, y \subseteq \mathfrak{a},\ y \in S\}$ eine mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Ordnung und $\mathfrak{a}$ ist ein $\mathfrak{o}_l$-$\mathfrak{o}_r$-Ideal. $\mathfrak{o}_l$ bzw. $\mathfrak{o}_r$ ist die Links- bzw. Rechtsordnung von $\mathfrak{a}$.*

Beweis. Es genügt zu beweisen, dass $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{o}_l$ äquivalent sind. $\mathfrak{a}^2 \mu'^{-1}$ ist in einem zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{o}\,(\lambda^{-1}\,\mathfrak{o}\,\mu^{-1})^2\, \mu'^{-1}\,\mathfrak{o}$ enthalten. Es gibt also ein reguläres Element γ mit $\gamma\,\mathfrak{a}^2 \mu'^{-1} \subseteq \mathfrak{o}$, d. h. $\lambda'\gamma\,\mathfrak{a}\mathfrak{a} \subseteq \lambda'\,\mathfrak{o}\,\mu' \subseteq \mathfrak{a}$, folglich $\lambda'\gamma\,\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}_l$. Andererseits ist $\mathfrak{o}_l\,\lambda'\mu' \subseteq \mathfrak{o}_l\,\lambda'\,\mathfrak{o}\,\mu' \subseteq \mathfrak{o}_l\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

Hilfssatz 1. *Wenn $\mathfrak{o}$ ein Links- oder Rechtsideal von S (im gewöhnlichen Sinn) enthält, so ist es in jedem mit $\mathfrak{o}$ äquivalenten Teilmodul enthalten.*

Beweis. $\mathfrak{l}$ sei ein in $\mathfrak{o}$ enthaltenes Linksideal von S. Ein mit $\mathfrak{o}$ äquivalenter Teilmodul $\mathfrak{a}$ ist ein $\mathfrak{o}_l$-$\mathfrak{o}_r$-Ideal. Da $\mathfrak{o}_r$ mit $\mathfrak{o}$ äquivalent ist, gibt es ein reguläres λ mit $\lambda\,\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}_r$, es ist also $\lambda\,\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{o}_r$. Wegen $\lambda\,\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}$, $\lambda^{-1}\,\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}$ ist $\mathfrak{l} = \lambda\,\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{o}_r$. Demnach ist für ein reguläres Element μ aus $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{l} = \mu\,\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{o}_r = \mathfrak{a}$. Ebenso ist für ein in $\mathfrak{o}$ enthaltenes Rechtsideal von S.

Definition. $\mathfrak{o}$ heisst *eigentlich*, wenn $\mathfrak{o}$ ausser Null kein Links- sowie Rechtsideal von S enthält.

Hilfssatz 2. *Ist $\mathfrak{o}$ eigentlich, so enthält jeder mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Teilmodul $\mathfrak{a}$ (ausser Null) kein Links- sowie Rechtsideal von S. Insbesondere ist jede mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Ordnung auch eigentlich.*

Beweis. Es sei $\lambda\,\mathfrak{a}\,\mu \subseteq \mathfrak{o}$. Ist ein Linksideal $\mathfrak{l}$ von S in $\mathfrak{a}$ enthalten, so ist $\mathfrak{l}\mu = \lambda\mathfrak{l}\mu \leq \lambda\mathfrak{a}\mu \leq \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{l}\mu = 0$, $\mathfrak{l} = 0$.

Satz 1. 2. *Die folgenden Bedingungen sind einander äquivalent:*

1) $\mathfrak{o}$ *ist eigentlich.*

2) $\mathfrak{o}$ *enthält ausser Null kein zweiseitiges Ideal von* S.

3) *Der Duchschnitt aller zweiseitigen* $\mathfrak{o}$*-Ideale ist Null.*

4) *Der Durchschnitt aller* $\mathfrak{o}\alpha\mathfrak{o}$ *ist Null, wobei* α *auf alle regulären Elemente von* $\mathfrak{o}$ *durchläuft.*

5) *Der Durchschnitt aller mit* $\mathfrak{o}$ *äquivalenten Teilmoduln von* S *ist Null.*

Beweis. Weil jedes zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideal ein $\mathfrak{o}\alpha\mathfrak{o}$ enthält, so ist (3) ersichtlich mit (4) äquivalent. Wir zeigen nun (1)→(2)→(3)→(5)→(1). (1)→(2) und (3)→(5) sind klar. Der Beweis von (2)→(3) wird folgendermassen durchgeführt. $\mathfrak{z}$ sei der Durchschnitt aller zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale $\{\mathfrak{a}_\tau\}$. Für ein beliebiges S-Element $x = a\lambda^{-1}$ $(a \in \mathfrak{o}, \lambda \in \mathfrak{o})$ ist dann $\mathfrak{z}x \leq \bigwedge_\tau \mathfrak{a}_\tau x \leq \bigwedge_\tau \mathfrak{a}_\tau \lambda^{-1}\mathfrak{o} \leq \mathfrak{z}$. Ebenso ist $x\mathfrak{z} \leq \mathfrak{z}$. $\mathfrak{z}$ ist demnach ein in $\mathfrak{o}$ enthaltenes zweiseitiges Ideal von S, also $\mathfrak{z} = 0$. Wir beweisen Schliesslich (5)→(1). Ist $\mathfrak{o}$ nicht eigentlich, so enthält $\mathfrak{o}$ ein einseitiges Ideal $\neq 0$ von S, das nach Hilfssatz 1 in jedem mit $\mathfrak{o}$ äquivalenten Teilmodul enthalten. Der Durchschnitt aller mit $\mathfrak{o}$ äquivalenten Teilmoduln ist also von Null verschieden. Damit ist der Satz bewiesen.

Ist S die direkte Summe von Schiefringen; $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$, so ist jedes Element $x \in S$ in der Form $x = x_1 + \dots + x_n = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in S_i$, dargestellt und die Kompositionsregel wird durch

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),\ xy = (x_1y_1, \dots, x_ny_n)$$

definiert. Ist insbesondere $1 = e_1 + \dots + e_n$, so ist e_i das Einselement von S_i, also ein Zentrumselement von S und $x_i = xe_i = e_ix$, $i = 1, \dots, n$. Es gilt dann:

1. Ist $\mathfrak{o}$ eine $e_1, \dots, e_n$ enthaltende Ordnung von S, so ist $\mathfrak{o}_i = \mathfrak{o}e_i$ eine Ordnung von S_i, $i = 1, \dots, n$, und $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \dots + \mathfrak{o}_n$. Ist umgekehrt $\mathfrak{o}_i$ eine Ordnung von S_i, $i = 1, \dots, n$, so ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \dots + \mathfrak{o}_n$ eine $e_1, \dots, e_n$ enthaltende Ordnung von S.

2. $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \dots + \mathfrak{o}_n$ sei eine $e_1, \dots, e_n$ enthaltende Ordnung von S. Ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-Linksideal ($\mathfrak{o}$-Rechtsideal) in S, so ist $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}e_i = e_i\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}_i$-Linksideal ($\mathfrak{o}_i$-Rechtsideal) in S_i, $i = 1, \dots, n$, und $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_n$. Ist umgekehrt $\mathfrak{a}_i$ ein $\mathfrak{o}_i$-Linksideal ($\mathfrak{o}_i$-Rechtsideal) in S_i, $i = 1, \dots, n$, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_n$ ein $\mathfrak{o}$-Linksideal ($\mathfrak{o}$-Rechtsideal) in S. Ist $\mathfrak{p}$ ein

Primideal von $\mathfrak{o}$, so ist für ein i

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{o}_1+\dots+\mathfrak{o}_{i-1}+\mathfrak{p}_i+\mathfrak{o}_{i+1}+\dots+\mathfrak{o}_n,$$

wo $\mathfrak{p}_i$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_i$, und umgekehrt. Dann und nur dann ist $\mathfrak{p}$ (stark) teilerlos, wenn $\mathfrak{p}_i$ (stark) teilerlos ist.

3. $\mathfrak{o}=\mathfrak{o}_1+\dots+\mathfrak{o}_n$, $\mathfrak{o}'=\mathfrak{o}_1'+\dots+\mathfrak{o}_n'$ seien $e_1,\dots,e_n$ enthaltende Ordnungen von S. Dann und nur dann ist $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{o}'$ äquivalent, wenn $\mathfrak{o}_i$ mit $\mathfrak{o}_i'$ (als Ordnung von S_i) äquivalent ist.

4. Jede Maximalordnung $\mathfrak{o}$ von S enthält $e_1,\dots,e_n$, denn $\mathfrak{o}'=(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}e_1,\dots,\mathfrak{o}e_n)$ ist eine $\mathfrak{o}$ umfassende, mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Ordnung, also $\mathfrak{o}'=\mathfrak{o}$. Es ist $\mathfrak{o}=\mathfrak{o}_1+\dots+\mathfrak{o}_n$ und $\mathfrak{o}_i$ ist eine Maximalordnung von S_i, $i=1,\dots,n$. Ist umgekehrt $\mathfrak{o}_i$ eine Maximalordnung von S_i, so ist $\mathfrak{o}=\mathfrak{o}_1+\dots+\mathfrak{o}_n$ eine Maximalordnung von S.

5. $\mathfrak{o}=\mathfrak{o}_1+\dots+\mathfrak{o}_n$ sei eine $e_1,\dots,e_n$ enthaltende Ordnung von S. Wenn die Bedingungen A_1, A_2, A_3 für $\mathfrak{o}$ gelten, so gelten sie für jedes $\mathfrak{o}_i$, und umgekehrt.

Von jetzt an sei $\mathfrak{o}$ eine Ordnung von S, welche die Bedingungen A_1, A_2, A_3 erfüllt. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$, so ist der Restklassenring $\bar{\mathfrak{o}}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\rho$ ein primärer, einreihiger Ring, also ein voller Matrizenring in einem vollständig primären Ring $\mathfrak{t}$: $\bar{\mathfrak{o}}=\sum_{i,j=1}^{\kappa}\mathfrak{t}\,c_{ij}$, der Grad κ der Matrizen ist die Kapazität von $\mathfrak{p}$, also von ρ unabhängig. Das Radikal von $\bar{\mathfrak{o}}$ ist $\bar{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\rho$ und das von $\mathfrak{t}$ ist $\bar{\mathfrak{p}}_0=\bar{\mathfrak{p}}\bigwedge\mathfrak{t}$ und $\bar{\mathfrak{p}}=\sum_{i,j}\bar{\mathfrak{p}}_0\,c_{ij}$. $\mathfrak{t}$ hat nur zweiseitige Ideale und $\mathfrak{t},\bar{\mathfrak{p}}_0,\dots,\bar{\mathfrak{p}}_0^{\rho}=0$ sind die einzigen Ideale von $\mathfrak{t}$. Bedeutet π ein Element aus $\bar{\mathfrak{p}}_0$, aber nicht aus $\bar{\mathfrak{p}}_0^2$, so ist $\bar{\mathfrak{p}}_0=\mathfrak{t}\,\pi=\pi\,\mathfrak{t}$. Jedes Element von $\mathfrak{t}$ ist in der Form $\pi^\nu\varepsilon=\varepsilon'\pi^\nu$ mit Einheiten ε,ε' aus $\mathfrak{t}$ darstellbar $(0\le\nu\le\rho,\ \pi^0=1)$. Demnach lassen sich für $\bar{\mathfrak{o}}$ die Schlüsse der arithmetischen Elementarteilertheorie durchführen. Es gibt nämlich für ein Element a aus $\bar{\mathfrak{o}}$ zwei Einheiten η,η' von $\bar{\mathfrak{o}}$ derart, dass $\eta\,a\,\eta'$ eine Diagonalform

$$\eta\,\bar{a}\,\eta'=\sum_{\nu=1}^{t}\pi^{\rho_\nu}c_{\nu\nu},\quad 0\le\rho_1\le\dots\le\rho_t<\rho,\quad t\le\kappa,$$

hat. $\rho_1,\dots,\rho_t$ werden von der Wahl der Matrizeneinheiten c_{ij} unabhängig durch a und $\mathfrak{p}^\rho$ eindeutig bestimmt. Jedem Element a aus $\mathfrak{o}$ wird, modulo $\mathfrak{p}^\rho$ betrachtet, das System $(\rho_1,\dots,\rho_t)$ zugeordnet. Wenn man a modulo $\mathfrak{p}^{\rho'}$, $\rho'>\rho$, betrachtet, so erhält man das System $(\rho_1',\dots,\rho_s')$ wobei $t\le s$, $\rho_i=\rho_i'$, $i=1,\dots,t$, $\rho\le\rho'_{t+1}\le\dots\le\rho_s'<\rho'$. Demnach wird also das System

$$(\rho_1,\dots,\rho_\kappa)=(\rho_1,\dots,\rho_r,\infty,\dots,\infty)=\lim(\rho_1,\dots,\rho_t,\rho,\dots,\rho)$$

eindeutig festgelegt. $(\rho_1, \dots, \rho_\kappa)$ heisst die $\mathfrak{p}$-*Höhe* von a. Wenn $r = \kappa$ ist, d. h. das Symbol ∞ nicht auftritt, so heisst die $\mathfrak{p}$-Höhe endlich.

Man ernält leicht [3]

Satz 1. 3. *Ein Element a aus $\mathfrak{o}$ ist dann und nur dann eine Einheit modulo $\mathfrak{p}^\rho$, wenn die $\mathfrak{p}$-Höhe von a $(0, \dots, 0)$ ist.*

Satz 1. 4. *$\mathfrak{a}$ sei ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal. Ein Element a aus $\mathfrak{o}$ ist dann und nur dann eine Einheit modulo $\mathfrak{a}$, wenn die $\mathfrak{p}$-Höhe von a für jeden Primteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ $(0, \dots, 0)$ ist.*

Satz 1. 5. *$\mathfrak{a}$ sei ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal und a sei ein Element aus $\mathfrak{o}$. Ist die $\mathfrak{p}$-Höhe von a für jeden Primteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ $(0, \dots, 0)$, so ist $(\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{a}) = (a\, \mathfrak{o}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$.*

Satz 1. 6. *Ein reguläres Element α aus $\mathfrak{o}$ ist dann und nur dann eine Einheit von $\mathfrak{o}$, wenn α für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ eine Einheit modulo $\mathfrak{p}$ ist, d. h. wenn die $\mathfrak{p}$-Höhe von α $(0, \dots, 0)$ ist.*

Satz 1. 7. *Ist die $\mathfrak{p}$-Höhe $(\rho_1, \dots, \rho_\kappa)$ von $a \in \mathfrak{o}$ endlich, so ist für jedes $n > e = \rho_\kappa$ $(\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{p}^n) = (\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{p}^e)$, $(a\, \mathfrak{o}, \mathfrak{p}^n) = (a\, \mathfrak{o}, \mathfrak{p}^e)$.*

Beweis. Es sei $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^n$, $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n$, $\bar{a} = \eta\, (\sum_{\nu=1}^{\kappa} \pi^{\rho_\nu} c_{\nu\nu})\, \eta'$. Setzt man $\bar{b} = (\sum_{\nu=1}^{\kappa} \pi^{e-\rho_\nu} c_{\nu\nu})\, \eta^{-1}$, so ist $\bar{b}\bar{a} = \pi^e\, \eta'$ und $\bar{\mathfrak{p}}^e = \bar{\mathfrak{p}}^e\, \eta' = \bar{\mathfrak{o}}\, \pi^e\, \eta' = \bar{\mathfrak{o}}\, \bar{b}\, \bar{a} \leq \bar{\mathfrak{o}}\, \bar{a}$. Es ist also $(\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{p}^e)/\mathfrak{p}^n = (\bar{\mathfrak{o}}\, \bar{a}, \bar{\mathfrak{p}}^e) = \bar{\mathfrak{o}}\, \bar{a} = (\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{p}^n)/\mathfrak{p}^n$ und folglich $(\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{p}^e) = (\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{p}^n)$. Ebenso ist $(a\, \mathfrak{o}, \mathfrak{p}^e) = (a\, \mathfrak{o}, \mathfrak{p}^n)$.

Satz 1. 8. *Es seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ r verschiedene Primideale von $\mathfrak{o}$. Ist die $\mathfrak{p}_i$-Höhe $(\rho_{i1}, \dots \rho_{i\kappa_i})$ von $a \in \mathfrak{o}$ endlich, so ist für jedes $n_i > \rho_{i\kappa_i} = e_i$, $i = 1, \dots, r$,*

$$(\mathfrak{o}\, a, \Pi_{i=1}^{r}\, \mathfrak{p}_i^{n_i}) = (\mathfrak{o}\, a, \Pi_{i=1}^{r}\, \mathfrak{p}_i^{e_i}),\ (a\, \mathfrak{o}, \Pi_{i=1}^{r}\, \mathfrak{p}_i^{n_i}) = (a\, \mathfrak{o}, \Pi_{i=1}^{r}\, \mathfrak{p}_i^{e_i})$$

Beweis. Nach Satz 1. 7 ist $(\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{p}_i^{n_i}) = (\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{p}_i^{e_i})$. Es ist also [4]

$$\begin{aligned}(\mathfrak{o}\, a, \Pi_{i=1}^{r}\, \mathfrak{p}_i^{n_i}) &= (\mathfrak{o}\, a, \textstyle\bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{n_i}) = \textstyle\bigcap_{i=1}^{r} (\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{p}_i^{n_i}) \\ &= \textstyle\bigcap_i (\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{p}_i^{e_i}) = (\mathfrak{o}\, a, \textstyle\bigcap_i \mathfrak{p}_i^{e_i}) = (\mathfrak{o}\, a, \Pi_i\, \mathfrak{p}_i^{e_i})\end{aligned}$$

Hilfssatz 3. *$\mathfrak{a}$ sei ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal, so dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$ ist. Ist $(\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{a}^n)$ für jedes n, so ist a kein Linksnullteiler.*

Beweis. Es sei $ax = 0$, $x = b\lambda^{-1} \in S$, $b, \lambda \in \mathfrak{o}$; dann ist wegen $ab = 0$ $\mathfrak{a}\, b = (\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{a})\, b = (\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{a}^n)\, b = \mathfrak{a}^n\, b \leq \mathfrak{a}^n$, also $b \in \mathfrak{a}^{n-1}$ für jedes n, folglich $b = 0$, $x = 0$.

Satz 1. 9. *$\mathfrak{a}$ sei ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal, so dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$,*

3) Vgl. A. I. Satz 2.14, 2.15.

4) Vgl. A. I. §2 Hilfssatz 3.

und a sei ein Element aus $\mathfrak{o}$. Ist die $\mathfrak{p}$-Höhe von a für jeden Primteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ endlich, so ist a kein Nullteiler.

Beweis. Nach Satz 1.8. gibt es eine natürliche Zahl m, so dass $(\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{a}^n) = (\mathfrak{o}\, a, \mathfrak{a}^m)$, $(a\, \mathfrak{o}, \mathfrak{a}^n) = (a\, \mathfrak{o}, \mathfrak{a}^m)$, $n > m$. Nach Hilfssatz 3 ist a kein Nullteiler.

Satz 1.10. *Es sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal mit der Primidealzerlegung $\mathfrak{a} = \Pi_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{e_i}$. Jede Restklasse von $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ hat ein Element c, dessen $\mathfrak{p}_i$-Höhe $(\rho_{i1}, \dots, \rho_{i\kappa_i})$ nicht gösser als e_i ist: $\rho_{i1} \leq \dots \leq \rho_{i\kappa_i} \leq e_i$, $i = 1, \dots, r$.*

Beweis. Es sei a ein beliebiges Element von $\mathfrak{o}$. In $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i^{e_i+1}$ übergehend gilt $\bar{a} = \bar{\eta} (\sum_{\nu=1}^{t} \bar{\pi}^{\rho_\nu} \bar{c}_{\nu\nu}) \bar{\eta}'$, $0 \leq \rho_1 \leq \dots \leq \rho_t \leq e_i$, $t \leq \kappa$. Setzt man

$$a_i = \eta \left(\sum_{\nu=1}^{t} \pi^{\rho_\nu} c_{\nu\nu} + \sum_{\nu=t+1}^{\kappa_i} \pi^{e_i} c_{\nu\nu}\right) \eta' ,$$

so ist $a \equiv a_i \, (\mathfrak{p}_i^{e_i})$ und die $\mathfrak{p}_i$-Höhe von a_i ist $(\rho_1, \dots, \rho_t, e_i, \dots, e_i)$. Nimmt man ein Element c aus $\mathfrak{o}$, so dass $c \equiv a_i \, (\mathfrak{p}_i^{e_i+1})$, $i = 1, \dots, r$, so ist $c \equiv a \, (\mathfrak{p}_i^{e_i})$, $i = 1, \dots, r$, also $c \equiv a \, (\mathfrak{a})$ und die $\mathfrak{p}_i$-Höhe von c stimmt mit der von a_i überein.

§ 2. Arithmetik in allgemein-halbeinfachen Ringen

Ein Schiefring mit Einselement heisst ein allgemein-einfacher Ring, wenn er ausser Null und sich selbst kein zweiseitiges Ideal hat und wenn sein jedes Element entweder eine Einheit oder ein Nullteiler ist.[5] Eine direkte Summe von endlich vielen allgemein-einfachen Ringen heisst ein allgemein-halbeinfacher Ring. Im folgenden sei S allgemein-halbeinfach und $\mathfrak{o}$ soll, falls nicht anders gesagt, eine Ordnung von S bedeuten, welche die Bedingungen A_1, A_2, A_3 erfüllt.

Satz 2.1. *S sei ein allgemein-einfacher Ring und $\mathfrak{o}$ sei eine Ordnung von S. Ist $a \neq 0$ ein Element von S, so ist $\mathfrak{o}\, a\, \mathfrak{o}$ ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal.*

Beweis. Es genügt zu beweisen, dass $\mathfrak{o}\, a\, \mathfrak{o}$ ein reguläres Element enthält. SaS ist ein von Null verschiedenes, zweiseitiges Ideal von S, also $SaS = S$ und es ist $1 = \sum_{i=1}^{r} b_i a c_i$ $(b_i, c_i \in S)$. Wenn man reguläre α, β so wählt, dass $\alpha\, b_i \in \mathfrak{o}$, $c_i\, \beta \in \mathfrak{o}$ $(i = 1, \dots, r)$, so ist $\alpha\beta = \sum_i (\alpha\, b_i)\, a\, (c_i\, \beta) \in \mathfrak{o}\, a\, \mathfrak{o}$.

---

5) Ein zweiseitig einfacher Ring R mit Einselement ist ein einfacher Ring (mit Kettensatz), wenn er ein manimales Linksideal $L \neq 0$ besitzt. Denn es ist $0 \subset LR \subset R$, also $LR = R \ni 1$, $a_1 c_1 + \dots + a_r c_r = 1$, $a_i \in L$, $c_i \in R$, $i = 1, \dots, r$, d. h. $R = (L c_1, \dots, L c_r)$ ist die Summe von endlich vielen einfachen Linksidealen.

Satz 2.2. *S sei allgemein-einfach. Es gilt der Vielfachenkettensatz für die ganzen zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale, die ein beliebiges festes Element $a \neq 0$ enthalten.*

Beweis. Jedes a enthaltende zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideal enthält ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{o}\, a\, \mathfrak{o}$.

Korollar. *Ist S allgemein-einfach, so ist für jedes ganze zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$.*

Satz 2.3. *Es sei S allgemein-einfach und $\mathfrak{p}$ sei ein Primideal von $\mathfrak{o}$. Jedes Element a aus $\mathfrak{o}$ mit endlichen $\mathfrak{p}$-Höhe ist ein reguläres Element.*

Beweis. Es ist $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}^n = 0$. Nach Satz 1.9 ist a kein Nullteiler, also ein reguläres Element.

Korollar. *Ist S allgemein-einfach, so ist ein Element a aus $\mathfrak{o}$, welches eine Einheit modulo einem Primideal $\mathfrak{p}$ ist, ein reguläres Element.*

Nach Satz 1.6 gilt

Satz 2.4. *S sei allgemein-einfach. Ein Element a aus $\mathfrak{o}$ ist dann und nur dann eine Einheit von $\mathfrak{o}$, wenn a für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ eine Einheit modulo $\mathfrak{p}$ ist, d. h. wenn die $\mathfrak{p}$-Höhe von a $(0, \dots, 0)$ ist.*

Satz 2.5. *Jede Restklasse von $\mathfrak{o}$ modulo einem ganzen zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$ hat ein reguläres Element.*

Beweis. Zunächst sei S allgemein-einfach. Nach Satz 1.10 hat jede Restklasse von $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ für jeden Primteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ ein Element c mit endlichen $\mathfrak{p}$-Höhe, welches nach Satz 2.3 ein reguläres Element ist. Ist S die direkte Summe von allgemein-einfachen Ringen: $S = S_1 + \dots + S_r$, so gilt $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \dots + \mathfrak{o}_r$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_r$. Für jedes $a_i \in \mathfrak{o}_i$ gibt es ein Element $c_i \in \mathfrak{o}_i$, so dass $a_i \equiv c_i\,(\mathfrak{a}_i)$ und c_i ein reguläres Element von S_i ist.[6] Für jedes $a = a_1 + \dots + a_r$ aus $\mathfrak{o}$ gibt es also ein reguläres Element $c = c_1 + \dots + c_r$ aus $\mathfrak{o}$, so dass $a \equiv c\,(\mathfrak{a})$ ist.

Satz 2.6. *Es seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r$ einander teilerfremde, ganze zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideale. Dann sind die Kongruenzen*

$$x \equiv a_i \pmod{\mathfrak{a}_i}, \quad i = 1, \dots, r$$

durch ein reguläres Element x aus $\mathfrak{o}$ lösbar.

Beweis. $c \in \mathfrak{o}$ sei eine beliebige Lösung. Nach Satz 2.5 gibt es ein reguläres Element γ mit $\gamma \equiv c\,(\mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_r)$ und es gilt $\gamma \equiv a_i\,(\mathfrak{a}_i)$, $i =$

6) Falls $\mathfrak{o}_i = S_i$, also $\mathfrak{a}_i = S_i$, ist dies trivial.

$1, \ldots, r$.

Satz 2. 7. *Wenn es in* $\mathfrak{o}$ *nur endlich viele Primideale, so ist jedes* $\mathfrak{o}$*-Ideal ein Hauptideal. Ist* $\mathfrak{c}$ *nämlich ein* $\mathfrak{o}$*-Linksideal* ($\mathfrak{o}$*-Rechtsideal*), *so ist* $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}\gamma$ ($\mathfrak{c} = \gamma\mathfrak{o}$). *Ist* $\mathfrak{c}$ *ferner zweiseitig, so ist* $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}\gamma = \gamma\mathfrak{o}$.

Beweis. $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ seien die sämtlichen Primideale von $\mathfrak{o}$ und sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_r$. $\mathfrak{c}$ sei ein ganzes $\mathfrak{o}$-Linksideal. $\mathfrak{c}$ enthält ein Produkt von Primidealen, also sicher eine Potenz von $\mathfrak{a} : \mathfrak{c} \supset \mathfrak{a}^m$. Da $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}^m$ ein Hauptidealring ist, gilt $\mathfrak{c} = (\mathfrak{o}c, \mathfrak{a}^m)$. Nach Satz 1. 10 gibt es ein Element c', so dass $c' \equiv c\,(\mathfrak{a}^m)$ und die $\mathfrak{p}_i$-Höhe $(i = 1, \ldots, r)$ von c' nicht grösser als m ist. Nach Satz 2. 5 gibt es ferner ein reguläres Element γ mit $\gamma \equiv c'\,(\mathfrak{a}^{m+1})$. Da die $\mathfrak{p}_i$-Höhe von γ mit der von c' übereinstimmt, so gilt nach Satz 1. 8 $(\mathfrak{o}\gamma, \mathfrak{a}^n) = (\mathfrak{o}\gamma, \mathfrak{a}^m) = (\mathfrak{o}c, \mathfrak{a}^m) = \mathfrak{c}$ $(n > m)$. Weil aber $\mathfrak{o}\gamma$ eine Potenz von $\mathfrak{a}$ enthält, so ist $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}\gamma$. Ist $\mathfrak{c}$ nicht ganz, so ist $\mathfrak{c}\lambda$ für ein reguläres λ ganz, also $\mathfrak{c}\lambda = \mathfrak{o}\gamma'$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}\gamma'\lambda^{-1} = \mathfrak{o}\gamma$. Die Rechtsordnung von $\mathfrak{o}\gamma$ ist ersichtlich $\gamma^{-1}\mathfrak{o}\gamma$. Ist $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}\gamma$ zweiseitig, so ist $\gamma^{-1}\mathfrak{o}\gamma = \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{o}\gamma = \gamma\mathfrak{o}$.

Satz 2. 8. *Es sei* P *eine Menge von endlich vielen Primidealen. Jedes* $\mathfrak{o}_P$*-Ideal ist ein Hauptideal. Ist* $\mathfrak{a}$ *ein* $\mathfrak{o}$*-Linksideal* ($\mathfrak{o}$*-Rechtsideal*), *so gibt es ferner ein reguläres Element* $\alpha \in \mathfrak{a}$ *mit* $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{o}_P\alpha$ ($\mathfrak{a}_P = \alpha\mathfrak{o}_P$).

Beweis. Nach A. I. § 3 sind die Primideale von $\mathfrak{o}_P$ endlich viel, nämlich die P-Kamponenten der zu P gehörigen Primideale. Nach Satz 2. 7 ist jedes $\mathfrak{o}_P$-Ideal ein Hauptideal. Ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-Linksideal, so ist $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{o}_P\alpha$, wo $\mathfrak{n}\alpha \subseteq \mathfrak{a}$ mit einem zu P primen ganzen zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{n}$. Es gibt ein reguläres γ, so dass $\gamma \equiv 1\,(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \in P$, $\gamma \equiv 0\,(\mathfrak{n})$. Nach Satz 2. 4 ist γ eine Einheit von $\mathfrak{o}_P$. Es ist also $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{o}_P\gamma\alpha$, $\gamma\alpha \in \mathfrak{a}$.

Satz 2. 9. *Jede* $\mathfrak{o}$*-Linksidealklasse* ($\mathfrak{o}$*-Rechtsidealklasse*)[7] *enthält ein ganzes Ideal, das zu vorgegebenen endlich vielen Primidealen von* $\mathfrak{o}$ *teilerfremd ist.*

Beweis. P sei die Menge der vorgegebenen Primideal $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$. C sei eine $\mathfrak{o}$-Linksidealklasse. C enthält ein ganzes Linksideal $\mathfrak{a}$. Es ist $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{o}_P\alpha\,(\alpha \in \mathfrak{a})$. Setzt man $\mathfrak{a}\alpha^{-1}\mathfrak{o} = \mathfrak{b}\mathfrak{n}^{-1}$ mit teilerfremden ganzen zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Idealen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{n}$, so sind $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$ wegen $(\mathfrak{a}\alpha^{-1}\mathfrak{o})_P = \mathfrak{o}_P$ zu P prim. Es gibt ein reguläres Element β, so dass $\beta \equiv 1\,(\mathfrak{p}_i)$, $i = 1, \ldots, r$, $\beta \equiv 0\,(\mathfrak{n})$. β ist eine Einheit von $\mathfrak{o}_P$ und $\mathfrak{n}^{-1}\beta \subseteq \mathfrak{o}$. Es gilt also

7) Zwei $\mathfrak{o}$-Linksideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gehören dann und nur dann zur selben Idealklasse, wenn es ein reguläres Element γ mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\gamma$ gibt.

$\mathfrak{a}\,\alpha^{-1}\beta \subseteq \mathfrak{a}\,\alpha^{-1}\,\mathfrak{o}\,\beta = \mathfrak{b}\mathfrak{n}^{-1}\,\beta \subseteq \mathfrak{o}$, $(\mathfrak{a}\,\alpha^{-1}\beta)_P = \mathfrak{o}_P\,\beta = \mathfrak{o}_P$, d. h. $\mathfrak{a}\,\alpha^{-1}\beta$ ist ganz, in C enthalten und zu P prim. Damit ist der Satz bewiesen.

Jetzt $\mathfrak{p}$ durchlaufe auf alle Primideale von $\mathfrak{o}$. Die Menge $\{\mathfrak{o}_\mathfrak{p}\}$ hat ersichtlich die folgenden Eigenschaften:

1) $\mathfrak{o} = \bigwedge_\mathfrak{p} \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$.

2) Die zweiseitigen $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-Ideale bilden eine unendliche zyklische Gruppe, nämlich den vom (einzigen) Primideal $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ erzeugten Zyklus.

3) $\mathfrak{P}$ ist ein stark teilerloses Primideal von $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$.

4) Für jedes reguläre Element λ aus S gilt $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}\,\lambda\,\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ bis auf endlich viele $\mathfrak{p}$.

5) Für zwei (verschiedene) Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ gibt es ein $\mathfrak{o}$-Element a, so dass $a \equiv 1\ (\mathfrak{P})$, $a \equiv 0\ (\mathfrak{P}')$.

Bermerkung. Ist S nicht allgemein-einfach, so ist $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ nicht eigentlich. Es sei nämlich $S = S_1 + \dots + S_n$ die direkte Summe von allgemein-einfachen Ringen und sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \dots + \mathfrak{o}_n$. Jedes Primideal von $\mathfrak{o}$ ist in der Form $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_1 + \dots + \mathfrak{o}_{i-1} + \mathfrak{p}_i + \mathfrak{o}_{i+1} + \dots + \mathfrak{o}_n$ darstellbar und es ist

$$\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = S_1 + \dots + S_{i-1} + \mathfrak{o}_{i\mathfrak{p}_i} + S_{i+1} + \dots + S_n$$

Es gilt ferner die Umkehrung: [8]

Satz 2.10. *S sei ein allgemein-halbeinfacher Ring und $\{\mathfrak{o}_\tau\}$ sei ein System von Ordnungen von S mit den folgenden Eigenschaften*:

P_1: *$\mathfrak{o} = \bigwedge_\tau \mathfrak{o}_\tau$ ist eine Schiefordnung von S.*

P_2: *Die zweiseitigen $\mathfrak{o}_\tau$-Ideale bilden eine unendliche zyklische Gruppe. Das erzeugende ist dann ein einziges Primideal $\mathfrak{P}_\tau$ von $\mathfrak{o}_\tau$.*

P_3: *Es gibt ein $\mathfrak{P}_\tau$ enthaltendes minimales Linksideal von $\mathfrak{o}_\tau$. Dann ist $\mathfrak{P}_\tau$ stark teilerlos, d. h. der Restklassenring $\mathfrak{o}_\tau/\mathfrak{P}_\tau$ ist ein einfacher Ring.* [9]

P_4: *Für jedes reguläre λ aus S gilt $\mathfrak{o}_\tau\,\lambda\,\mathfrak{o}_\tau = \mathfrak{o}_\tau$ bis auf endlich viele $\mathfrak{o}_\tau$.*

P_5: *Für zwei $\mathfrak{o}_\tau$, $\mathfrak{o}_\sigma$ gibt es ein $\mathfrak{o}$-Element a, so dass*

$$a \equiv 0\ (\mathfrak{P}_\tau),\quad a \equiv 1\ (\mathfrak{P}_\sigma)$$

Dann gelten für $\mathfrak{o}$ die Bedingungen A_1, A_2, A_3 und $\{\mathfrak{o}_\tau\}$ ist nichts anderes als $\{\mathfrak{o}_\mathfrak{p}\}$.

---

8) Vgl. K. Matusita, Ueber ein bewertungstheoretisches Axiomensystem für die Dedekind-Noethersche Idealtheorie, Japan. Journ. Math. 19 (1944).

9) Nach P_2 ist $\mathfrak{o}_\tau/\mathfrak{P}_\tau$ zweiseitig einfach. Gibt es ein minimales Linksideal von $\mathfrak{o}_\tau/\mathfrak{P}_\tau$, so ist es ein einfacher Ring.

Bevor wir den Satz beweisen, bemerken wir, dass die folgenden Bedingungen aus den obigen fünf Bedingungen folgen:

P_6: *Jedes* $\mathfrak{P}_\tau$ *enthält reguläre Elemente aus* $\mathfrak{o}$.

Beweis. Ist S allgemein-einfach, so ist das Element a in P_5 nach Satz 2.4 eine Einheit von $\mathfrak{o}_\sigma$, also ein reguläres Element von S. Jedes $\mathfrak{P}_\tau$ enthält also reguläre Elemente aus $\mathfrak{o}$. Es sei nun

$$S = S_1 + \dots + S_n,\ S_i = Se_i\ (i = 1, \dots, n)$$

die direkte Summe von allgemein-einfachen Ringen, wo e_i das Einselement von S_i bedeutet. Jedes $\mathfrak{o}_\tau$ und somit $\mathfrak{o} = \bigwedge_\tau \mathfrak{o}_\tau$ enthält $e_1, \dots, e_n$, also

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}\, e_1 + \dots + \mathfrak{o}\, e_n,\ \mathfrak{o}_\tau = \mathfrak{o}_\tau\, e_1 + \dots + \mathfrak{o}_\tau\, e_n\,.$$

Ist $\mathfrak{P}_\tau\, e_t \neq \mathfrak{o}_\tau\, e_t$, so ist $\mathfrak{P}_\tau\, e_i = \mathfrak{o}_\tau\, e_i\ (i \neq t)$ und da die zweiseitigen $\mathfrak{o}_\tau$-Ideale die Potenzen von $\mathfrak{P}_\tau = \sum_i \mathfrak{P}_\tau\, e_i$ sind, so muss $\mathfrak{o}_\tau\, e_i = S_i\ (i \neq t)$ sein, d. h.

$$\mathfrak{o}_\tau = S_1 + \dots + S_{t+1} + \mathfrak{o}_\tau\, e_t + S_{t+1} + \dots + S_n\,,$$

$$\mathfrak{P}_\tau = S_1 + \dots + S_{t+1} + \mathfrak{P}_\tau\, e_t + S_{t+1} + \dots + S_n\,.$$

Für die Menge $\{\mathfrak{o}_\tau\, e_i\}$ $(\mathfrak{o}_\tau\, e_i \neq S_i)$ der Ordnungen von S_i gelten ersichtlich auch die obigen fünf Bedingungen. Da $\mathfrak{P}_\tau\, e_t$ reguläre S_t-Elemente aus $\mathfrak{o}\, e_t$ enthält, so enthält $\mathfrak{P}_\tau$ sicher reguläre Elemente aus $\mathfrak{o}$.

P_7: *Für jedes einseitige* $\mathfrak{o}$*-Ideal* $\mathfrak{a}$ *gilt* $\mathfrak{o}_\tau \mathfrak{a} \mathfrak{o}_\tau = \mathfrak{o}_\tau$ *bis auf endlich viele* $\mathfrak{o}_\tau$.

Beweis. $\mathfrak{a}$ sei ein $\mathfrak{o}$-Linksideal. Es gibt reguläre Elemente α, β so dass $\mathfrak{o}\,\alpha \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}\,\beta$, also $\mathfrak{o}_\tau\,\alpha\,\mathfrak{o}_\tau \subseteq \mathfrak{o}_\tau\mathfrak{a}\mathfrak{o}_\tau \subseteq \mathfrak{o}_\tau\,\beta\,\mathfrak{o}_\tau$.

P_8: *Für jedes Element* a *aus* S *ist* $a \in \mathfrak{o}_\tau$ *bis auf endlich viele* $\mathfrak{o}_\tau$.

Beweis. Setzt man $\mathfrak{a} = (\mathfrak{o}, \mathfrak{o}\, a\, \mathfrak{o})$, so ist $\mathfrak{o}_\tau\mathfrak{a}\mathfrak{o}_\tau = (\mathfrak{o}_\tau, \mathfrak{o}_\tau\, a\, \mathfrak{o}_\tau) = \mathfrak{o}_\tau$, also $a \in \mathfrak{o}_\tau$ bis auf endlich viele $\mathfrak{o}_\tau$.

P_9: *Für vorgegebene endlich viele* $\mathfrak{o}_{\tau_0}, \mathfrak{o}_{\tau_1}, \dots, \mathfrak{o}_{\tau_m}$ *und eine natürliche Zahl* N *gibt es ein reguläres Element* α *aus* $\mathfrak{o}$, *so dass*

$$\alpha \equiv 1\,(\mathfrak{P}^N_{\tau_0}),\ \alpha \equiv 0\,(\mathfrak{P}^N_{\tau_i})\,,\ i = 1, \dots, m$$

Beweis. Nach P_5 gibt es ein Element a_i aus $\mathfrak{o}$, so dass $a_i \equiv 1$ $(\mathfrak{P}_{\tau_0})$, $a_i \equiv 0\,(\mathfrak{P}_{\tau_i})$, $i = 1, \dots, m$. $p_i = 1 - a_i$ ist ein Element von $\mathfrak{P}_{\tau_0} \bigwedge \mathfrak{o}$. Setzt man

$$c_i = a_i^N (1 + p_i + \dots + p_i^{N-1})^N = (1 - p_i^N)^N\ (i = 1, \dots, m)\,,$$

so gilt $c_i \in \mathfrak{o}$, $c_i \equiv 1\,(\mathfrak{P}^N_{\tau_0})$, $c_i \equiv 0\,(\mathfrak{P}^N_{\tau_i})$, also $c \equiv c_1 c_2 \dots c_n \equiv 1\,(\mathfrak{P}^N_{\tau_0})$, $\equiv 0\,(\mathfrak{P}^N_{\tau_i})$, $i = 1, \dots, m$. Ist S allgemein-einfach, so ist c wegen $c \equiv 1$ $(\mathfrak{P}_{\tau_0})$ ein reguläres S-Element. Ist $S = S_1 + \dots + S_n$ die direkte Summe von allgemeine-einfachen Ringen, so gibt es ein reguläres S_k-Element α_k aus $\mathfrak{o}\, e_k$, so dass $\alpha_k \equiv e_k\,(\overset{N}{\mathfrak{P}}\tau_0\, e_k)$, $\alpha_k \equiv 0\,(\overset{N}{\mathfrak{P}}\tau_i\, e_k)$, $i = 1, \dots, m$. Denn ist $\mathfrak{P}\tau_0\, e_k \neq S_k$, su ist dies klar; ist $\mathfrak{P}\tau_0\, e_k = S_k$, so sei α_k ein reguläres S_k-Element aus $(\overset{N}{\mathfrak{P}}\tau_1 \wedge \dots \wedge \overset{N}{\mathfrak{P}}\tau_m \wedge \mathfrak{o})\, e_k$. Dann ist $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ein gewünschtes Element.

P_{10}: *Für vorgegebene endlich viele* $\mathfrak{o}_{\tau_1}, \dots, \mathfrak{o}_{\tau_n}$, *S-Elemente* $a_1, \dots, a_n$ *und eine natürliche Zahl* N *gibt es ein S-Element* a, *so dass* $a \equiv a_i$ $(\overset{N}{\mathfrak{P}}\tau_i)$, $i = 1, \dots, n$, $a \in \mathfrak{o}_\tau$ *für jedes* $\tau \neq \tau_1, \dots, \tau_n$.

Beweis. Sind $a_1 = \dots = a_n = 0$, so setze man $a = 0$. Ee seien $a_1, \dots, a_r$ von Null verschieden und $a_{r+1} = \dots = a_n = 0$. Nach P_8 $a_i \in \mathfrak{o}_\tau$ $(i = 1, \dots, r)$ bis auf $\tau_1, \dots, \tau_n$ und endlich viele $\tau_{n+1}, \dots, \tau_m$. Nach P_2 ist $(\mathfrak{o}_{\tau_j}, \mathfrak{o}_{\tau_j}\, a_i\, \mathfrak{o}_{\tau_j})$ eine Potenz von $\mathfrak{P}\tau_j\, (i = 1, \dots, r;\ j = 1, \dots, m)$. Es gibt also eine natürliche Zahl ρ, so dass $a_i \in \overset{-\rho}{\mathfrak{P}}\tau_j\, (i = 1, \dots, r;\ j = 1, \dots, m)$. Es sei $N' > N + \rho$. Nach P_{10} gibt es für jedes $i\, (1 \leq i \leq r)$ ein $\mathfrak{o}$-Elemente c_i, so dass

$$c_i \equiv 1\,(\overset{N'}{\mathfrak{P}}\tau_i),\ c_i \equiv 0\,(\overset{N'}{\mathfrak{P}}\tau_j)\ (j = 1, \dots, i-1,\ i+1, \dots, n)$$

Dann ist $a_i c_i \equiv a_i\,(\overset{N}{\mathfrak{P}}\tau_i)$, $a_i c_i \equiv 0\,(\overset{N}{\mathfrak{P}}\tau_j)\ (i \neq j)$, $a_i c_i \in \mathfrak{o}_\tau\ (\tau \neq \tau_1, \dots, \tau_m)$. Demnach ist $a = a_1 c_1 + \dots + a_r c_r$ ein gewünschtes Element

Beweis von Satz 2.10. $\mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{P}_\nu \wedge \mathfrak{o}$ ist ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal, da $\mathfrak{p}_\nu$ reguläre S-Elemente enthält. Jede Restklasse von $\mathfrak{o}_\nu/\mathfrak{P}_\nu$ enthält $\mathfrak{o}$-Elemente, denn es gibt für jedes $c \in \mathfrak{o}_\nu$ ein a, so dass $a \equiv c\,(\mathfrak{P}_\nu)$, $a \in \mathfrak{o}_\tau$ $(\tau \neq \nu)$, also $a \in \mathfrak{o}$. Liegen a, b in $\mathfrak{o}$, so gilt $a \equiv b\,(\mathfrak{P}_\nu) \rightleftarrows a \equiv b\,(\mathfrak{p}_\nu)$. Demnach ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_\nu$ mit $\mathfrak{o}_\nu/\mathfrak{P}_\nu$ ringisomorph. $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_\nu$ ist also ein einfacher Ring, d. h. $\mathfrak{p}_\nu$ ist stark teilerlos. Es gilt ferner

$$\mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{o}_\nu = \mathfrak{o}_\nu \mathfrak{p}_\nu,\ \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{o}_\tau = \mathfrak{o}_\tau \mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{o}_\tau\ (\tau \neq \nu)$$

Es gibt ein reguläres Element $a \in \mathfrak{o}$, so dass $a \equiv 0\,(\mathfrak{P}_\nu)$, $a \equiv 1\,(\mathfrak{P}_\tau)$, also $a \in \mathfrak{p}_\nu$. Da a eine Einheit von $\mathfrak{o}_\tau$ ist, gilt $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{o}_\tau = \mathfrak{o}_\tau \mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{o}_\tau\ (\tau \neq \nu)$. $\mathfrak{o}_\nu$ hat nur ein einziges Primideal $\mathfrak{P}_\nu$. Jedes $\mathfrak{o}_\nu$-Ideal ist also ein Hauptideal und $\mathfrak{P}_\nu = \pi_1\, \mathfrak{o}_\nu = \mathfrak{o}_\nu\, \pi_1$. Es ist $\pi_1 \in \mathfrak{o}_\tau$ bis auf endlich viele $\tau_1, \dots, \tau_n$, und es sei $\pi_1 \in \overset{-\rho}{\mathfrak{P}}\tau_i$, $i = 1, \dots, n$, $\rho > 0$. Bedeutet α ein reguläres Element aus $\mathfrak{o}$ derart, dass $\alpha \equiv 1\,(\mathfrak{P}_\nu)$, $\alpha \equiv 0\,(\overset{\rho}{\mathfrak{P}}\tau_i)$, $i = 1, \dots, n$, so gilt $\pi = \alpha\pi_1 \in \mathfrak{o}_\tau$ für jedes τ, also $\pi \in \mathfrak{P}_\nu \wedge \mathfrak{o} = \mathfrak{p}_\nu$. Wegen $\alpha \equiv 1$ $(\mathfrak{P}_\nu)$ ist α eine Element von $\mathfrak{o}_\nu$ und daher $\mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{o}_\nu\, \pi_1 = \mathfrak{o}_\nu\, \alpha\, \pi_1 = \mathfrak{o}_\nu\, \pi$ $\leq \mathfrak{o}_\nu\, \mathfrak{p}_\nu \leq \mathfrak{P}_\nu$, $\mathfrak{o}_\nu \mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{P}_\nu$. Ebenso ist $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{o}_\nu = \mathfrak{P}_\nu$.

Die Schiefordnung $\mathfrak{o}$ ist nun eine Ordnung von S. Es sei nämlich x ein S-Element und sei $x \in \overset{-\rho}{\mathfrak{P}}\tau_i\ (\rho > 0)$, $i = 1, \dots, m$, $a \in \mathfrak{o}_\tau\ (\tau \neq \tau_1,$

$\ldots, \tau_m)$; bedeutet λ ein reguläres Element aus $\mathfrak{p}_{\tau_1}^{\rho} \ldots \mathfrak{p}_{\tau_m}^{\rho}$, so gilt $\lambda\, \mathfrak{o}\, x \subseteq \mathfrak{P}_{\tau_i}^{\rho}\, x \subseteq \mathfrak{o}_{\tau_i}\ (i=1, \ldots, m)$, $\lambda\, \mathfrak{o}\, x \subseteq \mathfrak{o}_\tau\ (\tau \neq \tau_1, \ldots, \tau_m)$, also $\lambda\, \mathfrak{o}\, x \subseteq \mathfrak{o}$. Ebenso ist $x\, \mathfrak{o}\, \lambda \subseteq \mathfrak{o}$.

Es sei $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal, so dass $\mathfrak{o}_\tau \mathfrak{a} \mathfrak{o}_\tau = \mathfrak{o}_\tau$ für jedes τ. Wir zeigen $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$. Da $\mathfrak{a}$ in allen $\mathfrak{o}_\tau$ enthalten ist, ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}$. Es gibt für jedes ν ein Element $a_\nu \in \mathfrak{a}$ mit $a_\nu \not\equiv 0\, (\mathfrak{P}_\nu)$. Weil $\mathfrak{o}_\nu/\mathfrak{P}_\nu$ ein einfacher Ring ist, so gibt es Elemente b_i, c_i aus $\mathfrak{o}_\nu$, so dass $\alpha_\nu = \sum_i b_i a_\nu c_i \equiv 1\, (\mathfrak{P}_\nu)$ ist, und da jede Restklasse von $\mathfrak{o}_\nu/\mathfrak{P}_\nu$ $\mathfrak{o}$-Elemente enthält, so kann man b_i, c_i aus $\mathfrak{o}$ wählen. Dann ist $\alpha_\nu \in \mathfrak{a}$, $\alpha_\nu \equiv 1\, (\mathfrak{P}_\nu)$. Ist S allgemein-einfach, so ist α_ν eine Einheit von $\mathfrak{o}_\nu$ und sei $\gamma_\nu = \alpha_\nu$. Ist $S = S_1 + \ldots + S_n$ die direkte Summe von allgemein-einfachen Ringen, so ist

$$\mathfrak{o}_\nu = S_1 + \ldots + S_{t-1} + \mathfrak{o}_\nu e_t + S_{t+1} + \ldots + S_n,$$
$$\mathfrak{P}_\nu = S_1 + \ldots + S_{t-1} + \mathfrak{P}_\nu e_t + S_{t+1} + \ldots + S_n,$$

und wegen $\alpha_\nu e_t \equiv e_t\, (\mathfrak{P}_\nu e_t)$ ist $\alpha_\nu e_t$ ein reguläres S_t-Element. Ee sei α ein reguläres Element aus $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{o}$ und sei $\gamma_\nu = \alpha(1-e_t) + \alpha_\nu e_t$. γ_ν ist ein reguläres S-Element aus $\mathfrak{o}_\nu$ und $\gamma_\nu \equiv 1\, (\mathfrak{P}_\nu)$, also ist γ_ν eine Einheit von $\mathfrak{o}_\nu$, andererseits ist $\gamma_\nu \in \mathfrak{a}$. Diejenigen τ sind endlich viel, für die $\mathfrak{o}_\tau \gamma_\nu^{-1} \mathfrak{o}_\tau$ nicht ganz sind. Es seien $\mathfrak{o}_{\tau_i} \gamma_\nu^{-1} \mathfrak{o}_{\tau_i} = \mathfrak{P}_{\tau_i}^{-\rho_i}\ (\rho_i > 0)$, $i = 1, \ldots, m$, $\gamma_\nu^{-1} \in \mathfrak{o}_\tau\ (\tau \neq \tau_1, \ldots, \tau_m)$. Setzt man $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_{\tau_1}^{\rho_1} \ldots \mathfrak{p}_{\tau_m}^{\rho_m}$, $\mathfrak{c} = \gamma_\nu^{-1} \mathfrak{b}$, so gilt $\mathfrak{o}_\tau \mathfrak{c} \mathfrak{o}_\tau \subseteq \mathfrak{o}_\tau$ für jedes τ, also $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{b} \subseteq \gamma_\nu\, \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{a}$. Da γ_ν eine Einheit von $\mathfrak{o}_\nu$ ist, so ist $\nu \neq \tau_i$ und $\mathfrak{p}_\nu \neq \mathfrak{p}_{\tau_i}\ (i = 1, \ldots, m)$, also $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$. $\mathfrak{a}$ enthält somit für jedes $\mathfrak{p}_\nu$ ein zu $\mathfrak{p}_\nu$ teilerfremdes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{b}_\nu$. Nun sei $\mathfrak{p}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{p}_{\nu_r} \subseteq \mathfrak{a}$, dann ist $(\mathfrak{b}_{\nu_1}, \ldots, \mathfrak{b}_{\nu_r})$ mit $\mathfrak{p}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{p}_{\nu_r}$ teilerfremd und $\mathfrak{o} = (\mathfrak{b}_{\nu_1}, \ldots, \mathfrak{b}_{\nu_r}, \mathfrak{p}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{p}_{\nu_r}) \subseteq \mathfrak{a}$. Man erhält also $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$.

$\mathfrak{a}$ sei ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal. Es gibt ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{b}$, so dass $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{o}$ ist, z. B. $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}\, \alpha^{-1}\, \mathfrak{o}$, $\alpha \in \mathfrak{a}$. Diejenigen τ, für die $\mathfrak{o}_\tau \mathfrak{a}\mathfrak{b} \mathfrak{o}_\tau \neq \mathfrak{o}_\tau$, sind endlich viel; es seien $\mathfrak{o}_{\tau_i} \mathfrak{a}\mathfrak{b} \mathfrak{o}_{\tau_i} = \mathfrak{P}_{\tau_i}^{-\rho_i} \neq \mathfrak{o}_{\tau_i}\ (i = 1, \ldots, m)$, $\mathfrak{o}_\tau \mathfrak{a}\mathfrak{b} \mathfrak{o}_\tau = \mathfrak{o}_\tau\ (\tau \neq \tau_1, \ldots, \tau_m)$. Wegen $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{o}$ ist $\rho_i > 0$. Es gilt dann $\mathfrak{o}_\tau (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{p}_{\tau_1}^{\rho_1} \ldots \mathfrak{p}_{\tau_m}^{\rho_m})\, \mathfrak{o}_\tau = \mathfrak{o}_\tau$ für jedes τ, also $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{p}_{\tau_1}^{\rho_1} \ldots \mathfrak{p}_{\tau_m}^{\rho_m} = \mathfrak{o}$, d. h. $\mathfrak{a}$ ist umkehrbar. Die zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale bilden also eine (abelsche) Gruppe. Jedes zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideal ist ferner ein Potenzprodukt von $\mathfrak{p}_\tau$. Es sei nämlich $\mathfrak{o}_\tau \mathfrak{a} \mathfrak{o}_\tau = \mathfrak{P}_\tau^{e_\tau}$, dann ist $e_\tau = 0$ bis auf endlich viele τ, und $\mathfrak{a} = \Pi_\tau\, \mathfrak{p}_\tau^{e_\tau}$, da $\mathfrak{o}_\nu \mathfrak{a}\, \Pi_\tau\, \mathfrak{p}_\tau^{-e_\tau}\, \mathfrak{o}_\nu = \mathfrak{o}_\nu$ für jedes ν, also $\mathfrak{a}\, \Pi\, \mathfrak{p}_\tau^{-e_\tau} = \mathfrak{o}$ ist.

Es sei $c \in \mathfrak{o}_\tau$. Dann ist $\mathfrak{n} = (\mathfrak{o}, \mathfrak{o}\, c\, \mathfrak{o})^{-1}$ ganz und mit $\mathfrak{p}_\tau$ teilerfremd, denn sonst wäre $\mathfrak{o}_\tau = (\mathfrak{o}_\tau, \mathfrak{o}_\tau\, c\, \mathfrak{o}_\tau) = \mathfrak{o}_\tau \mathfrak{n}^{-1} \mathfrak{o}_\tau \supseteq \mathfrak{P}_\tau^{-1}$. Somit ist $\mathfrak{n}\, c \subseteq \mathfrak{n}\mathfrak{n}^{-1} = \mathfrak{o}$, $c \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_\tau}$. Es ist also $\mathfrak{o}_\tau \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_\tau}$. Jetzt sei $c \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_\tau}$. Es gibt ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{n}$, so dass $\mathfrak{n}c \subseteq \mathfrak{o}$, $(\mathfrak{n}, \mathfrak{p}_\tau) = \mathfrak{o}$. Weil $\mathfrak{n}$ durch $\mathfrak{p}_\tau$ nicht teilbar ist, ist $\mathfrak{o}_\tau \mathfrak{n} = \mathfrak{o}_\tau$, $c \in \mathfrak{o}_\tau c = \mathfrak{o}_\tau \mathfrak{n} c \subseteq \mathfrak{o}_\tau \mathfrak{o} = \mathfrak{o}_\tau$. Damit ist $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_\tau} \subseteq \mathfrak{o}_\tau$. Es ist daher $\mathfrak{o}_\tau = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_\tau}$.

Satz 2.11. *Es sei* $\mathfrak{a}$ *ein* $\mathfrak{o}$*-Linksideal mit der Rechtsordnung* $\mathfrak{o}'$ *und* $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p} \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ *sei die* $\mathfrak{p}$*-Komponente von* $\mathfrak{a}$, *wobei* $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ *bis auf endlich viele* $\mathfrak{p}$ *gleich* 1 *ist. Dann ist* $\mathfrak{o}' = \bigwedge_\mathfrak{p} \mathfrak{a}_\mathfrak{p}^{-1} \mathfrak{o}_\mathfrak{p} \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, *wo* $\mathfrak{p}$ *auf alle Primideale von* $\mathfrak{o}$ *durchläuft.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{o}'_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p}^{-1} \mathfrak{o}_\mathfrak{p} \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{o}^* = \bigwedge_\mathfrak{p} \mathfrak{o}'_\mathfrak{p}$. Ist $c \in \mathfrak{o}'$, so gilt $\mathfrak{a} c \subseteq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} c \subseteq \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, also $c \in \mathfrak{o}'_\mathfrak{p}$, $c \in \bigwedge_\mathfrak{p} \mathfrak{o}'_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}^*$. Es ist $\mathfrak{o}' \subseteq \mathfrak{o}^*$. Ist andererseits $c \in \mathfrak{o}^*$, so gilt $\mathfrak{a} c \subseteq \mathfrak{a}_\mathfrak{p} c \subseteq \mathfrak{a}_\mathfrak{p} \mathfrak{o}'_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a} c \subseteq \bigwedge_\mathfrak{p} \mathfrak{a}_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$, d. h. $c \in \mathfrak{o}'$. Es ist also $\mathfrak{o}^* \subseteq \mathfrak{o}'$. Man erhält somit $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}^*$.

Korollar *Jede mit* $\mathfrak{o}$ *äquivalente Maximalordnung* $\mathfrak{o}'$ *ist in der Form* $\mathfrak{o}' = \bigwedge_\mathfrak{p} a_\mathfrak{p}^{-1} \mathfrak{o}_\mathfrak{p} a_\mathfrak{p}$ *darstellbar, wobei* $a_\mathfrak{p}$ *reguläre S-Elemente bedeuten und bis auf endlich viele* $\mathfrak{p}$ $a_\mathfrak{p} = 1$ *sind.*

Beweis. $\mathfrak{o}'$ ist die Rechtsordnung von $\mathfrak{o}$-Linksideal $\mathfrak{o}\mathfrak{o}'$.

Satz 2.12. *Es sei* $\{a_\mathfrak{p}\}$ *ein System von regulären S-Elementen, wo* $\mathfrak{p}$ *auf alle Primideale von* $\mathfrak{o}$ *durchläuft und bis auf endlich viele* $\mathfrak{p}$ $a_\mathfrak{p} = 1$ *sind. Dann ist* $\mathfrak{o}' = \bigwedge_\mathfrak{p} a_\mathfrak{p}^{-1} \mathfrak{o}_\mathfrak{p} a_\mathfrak{p}$ *eine mit* $\mathfrak{o}$ *äquivalente Ordnung, für die* A_1, A_2, A_3 *gelten.*

Beweis. $\mathfrak{o}'_\mathfrak{p} = a_\mathfrak{p}^{-1} \mathfrak{o}_\mathfrak{p} a_\mathfrak{p}$ ist eine Ordnung von S und die Menge $\mathfrak{o}'_\mathfrak{p}$ erfüllt die fünf Bedingungen von Satz 2.10.

$\mathfrak{o}' = \bigwedge_\mathfrak{p} \mathfrak{o}'_\mathfrak{p}$ ist ein Schiefring mit 1 und da es reguläre Elemente λ, μ aus $\mathfrak{o}$ gibt, so dass $\lambda a_\mathfrak{p}^{-1}$, $a_\mathfrak{p} \mu \in \mathfrak{o}$ für jedes $\mathfrak{p}$, so gilt $\lambda \mathfrak{o}' \mu \subset \lambda a_\mathfrak{p}^{-1} \mathfrak{o}_\mathfrak{p} a_\mathfrak{p} \mu \subset \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, $\lambda \mathfrak{o}' \mu \subseteq \bigwedge_\mathfrak{p} \mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$. Andererseits ist $\mu \mathfrak{o} \lambda \subset a_\mathfrak{p}^{-1} \mathfrak{o} a_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}'_\mathfrak{p}$, $\mu \mathfrak{o} \lambda \subseteq \bigwedge_\mathfrak{p} \mathfrak{o}'_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}'$. $\mathfrak{o}'$ ist eine mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Ordnung. Die Bedingungen P_2, P_3, P_4 sind klar. Wir zeigen nun, dass für beliebige $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1$ ein $\mathfrak{o}'$-Element a gibt, so dass $a \equiv 1\ (\mathfrak{P}'_0)$, $a \equiv 0\ (\mathfrak{P}'_1)$ wobei $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}' = a_\mathfrak{p}^{-1} \mathfrak{P} a_\mathfrak{p}$ ist. Es sei $a_\mathfrak{p} = 1$ bis auf endlich viele $a_{\mathfrak{p}_0}$, $a_{\mathfrak{p}_1}$,, $\dots, a_{\mathfrak{p}_m}$. Dann ist $\mathfrak{o}'_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$ für jedes $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i\ (i = 0, 1, \dots, m)$. Es ist $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} a_{\mathfrak{p}_i} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{P}_i^{-\rho_i}$, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} a_{\mathfrak{p}_i}^{-1} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{P}_i^{-\rho'_i}\ (i = 0, 1, \dots, m)$ und wegen $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} \subseteq \mathfrak{P}_i^{-(\rho_i + \rho'_i)}$ ist $\rho_i + \rho'_i \geq 0$. Es sei $\rho = \mathrm{Max}_i\,(\rho_i + \rho'_i)$. Dann ist

$$a_{\mathfrak{p}_i} \mathfrak{P}^{\rho+1} a_{\mathfrak{p}_i}^{-1} \subseteq \mathfrak{P}_i^{\rho+1-(\rho_i+\rho'_i)} \subseteq \mathfrak{P}_i, \quad \mathfrak{P}_i^{\rho+1} \subseteq \mathfrak{P}'_i\ (i = 0, 1, \dots, m)$$

Es gibt ein $\mathfrak{o}$-Element a, so dass $a \equiv 1\ (\mathfrak{P}_0^{\rho+1})$, $a \equiv 0\ (\mathfrak{P}_i^{\rho+1})$, $i = 1, \dots, m$. Wegen $\mathfrak{P}_i^{\rho+1} \subseteq \mathfrak{P}'_i \subset \mathfrak{o}'_{\mathfrak{p}_i}\ (i = 0, 1, \dots, m)$, $\mathfrak{o}'_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}\ (\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i,\ i = 0, 1, \dots, m)$ gilt $a \equiv 1\ (\mathfrak{P}'_0)$, $a \equiv 0\ (\mathfrak{P}'_1)$ und $a \in \mathfrak{o}'_\mathfrak{p}$ für jedes $\mathfrak{p}$, also $a \in \mathfrak{o}'$. Nach Satz 2.10 gelten für $\mathfrak{o}'$ die Bedingungen $A_{,1}\ A_2, A_3$.

Korollar. *Jedes einseitige $\mathfrak{o}$-Ideal ist normal, d. h. die Rechtsordnung (Linksordnung) eines $\mathfrak{o}$-Linksideals ($\mathfrak{o}$-Rechtsideals) ist eine Maximalordnung.*

Satz 2.13. *Wenn die Bedingungen A_1, A_2, A_3 für eine Maximalordnung $\mathfrak{o}$ von S gelten, so gelten sie auch für jede mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Maximalordnung.*

Nach A. I. § 4 und Satz 2.13 ist jedes einseitige Ideal bezüglich einer mit $\mathfrak{o}$ äquivalenten Maximalordnung normal und alle normalen Ideale bilden bei der eigentlichen Multiplikation ein Gruppoid G. Wie bei A. I. unterscheiden wir die verschiedenen Maximalordnungen durch Indizen: $\mathfrak{o}^i, \mathfrak{o}^j, \ldots$. Ein normales Ideal mit der Linksordnung $\mathfrak{o}^i$ und der Rechtsordnung $\mathfrak{o}^j$ soll mit $\mathfrak{a}^{ij}, \mathfrak{b}^{ij}, \ldots$ bezeichnet werden.

Wir bezeichnen die Menge $\mathfrak{p}^{ii}, \mathfrak{p}^{jj}, \ldots$, aller einander zusammengehörigen Primideale mit $\mathbf{p}$ und nennen sie eine *Primstelle*. Ist für ein ganzes normales Ideal $\mathfrak{a}^{ik}$ $(\mathfrak{a}^{ik}, \mathfrak{p}^{ii}) = \mathfrak{o}^i$, also auch $(\mathfrak{a}^{ik}, \mathfrak{p}^{kk}) = \mathfrak{o}^k$, so heisst $\mathfrak{a}^{ik}$ zu $\mathbf{p}$ prim. Es sei $\mathbf{P}$ eine Menge von Primstellen. Ein ganzes normales Ideal heisst zu $\mathbf{P}$ prim, wenn es zu jeder Primstelle von $\mathbf{P}$ prim ist. Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ik}$ ein normales Ideal, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}$ die Menge aller $c \in S$ derart, dass es ein ganzes zu $\mathbf{P}$ primes $\mathfrak{n}^{ii}$ mit $\mathfrak{n}^{ii} c \leq \mathfrak{a}$. Aus $\mathfrak{n}^{ii} c \leq \mathfrak{a}$ folgt $c \in (\mathfrak{n}^{ii})^{-1} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} (\mathfrak{n}^{ii})^{-1} \mathfrak{a} = \mathfrak{a} (\mathfrak{n}^{kk})^{-1}$, d. h. $c\, \mathfrak{n}^{kk} \leq \mathfrak{a}$ mit zu $\mathbf{P}$ primen $\mathfrak{n}^{kk}$ und umgekehrt. $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}$ heisst die $\mathbf{P}$-Komponente von $\mathfrak{a}$. Bedeutet P_i (P_k) die Menge der zu Primstellen von $\mathbf{P}$ entsprechenden Primideale von $\mathfrak{o}^i$ $(\mathfrak{o}^k)$, so ist die $\mathbf{P}$-Komponente von $\mathfrak{a}$ ist nichts anderes als die P_i-Komponente (P_k-Komponente) von $\mathfrak{a}$ als $\mathfrak{o}_i$-Linksideal ($\mathfrak{o}_k$-Rechtsideal) im Sinn von A. I. § 3. Es gilt somit

$$\mathfrak{a}^{ik}_{\mathbf{P}} = \mathfrak{o}^i_{\mathbf{P}} \mathfrak{a}^{ik} = \mathfrak{a}^{ik} \mathfrak{o}^k_{\mathbf{P}} = \mathfrak{o}^i_{\mathbf{P}} \mathfrak{a}^{ik} \mathfrak{o}^k_{\mathbf{P}}$$

Bei dem (nicht notwendig eigentlichen) Produkt von normalen Idealen gilt also

$$(\mathfrak{a}^{ik}\mathfrak{b}^{jl})_{\mathbf{P}} = \mathfrak{o}^i_{\mathbf{P}} (\mathfrak{a}^{ik}\mathfrak{b}^{jl})\, \mathfrak{o}^l_{\mathbf{P}} = \mathfrak{a}^{ik}_{\mathbf{P}} \mathfrak{b}^{jl}_{\mathbf{P}}$$

Für ein ganzes $\mathfrak{a}^{ik}$ ist dann und nur dann $\mathfrak{a}^{ik}_{\mathbf{P}} = \mathfrak{o}^i_{\mathbf{P}} = \mathfrak{o}^k_{\mathbf{P}}$, wenn $\mathfrak{a}^{ik}$ zu $\mathbf{P}$ prim ist.

Satz 2.14. *Die Gesamtheit von $\mathfrak{o}^i_{\mathbf{P}}$ ist ein System aller einander äquivalenten Maximalordnungen von S, in denen A_1, A_2, A_3 gelten. Alle mit $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}$ äquivalenten normalen Ideale bilden also bei der eigentlichen Multiplikation ein Gruppoid $G_{\mathbf{P}}$ mit den $\mathfrak{o}^i_{\mathbf{P}}$ als Einheiten. $G_{\mathbf{P}}$ besteht* *aus den* $\mathbf{P}$*-Komponenten der Ideale aus* G.

Beweis. $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^{ik}$ und $\mathfrak{b}_{\mathbf{P}}^{jl}$ seien dann und nur dann komposierbar, wenn $\mathfrak{o}_{\mathbf{P}}^{k}=\mathfrak{o}_{\mathbf{P}}^{j}$ ist und das Produkt $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^{ik}\mathfrak{b}_{\mathbf{P}}^{jl}$ sei das übliche Modulprodukt. Dann bildet die Menge $G_{\mathbf{P}}$ aller $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^{ik}$ ein Gruppoid. Man sieht leicht, dass die Bedingungen C_1, C_2, C_3 im Satz 4.4 von A. I. erfüllt sind. Daraus folgt der Satz unmittelbar.

Man erhält leicht

Satz 2.15. *Die unzerlegbaren Ideale ans* $G_{\mathbf{P}}$ *bestehen aus den* $\mathbf{P}$*-Komponenten der zu* $\mathbf{P}$ *nicht primen unzerlegbaren Ideale aus* G.

Satz 2.16. *Ist* $\mathbf{P}$ *eine Menge von endlich vielen Primstellen, so ist jedes* $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^{ik}$ *ein Hauptideal und es ist* $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^{ik}=\mathfrak{o}_{\mathbf{P}}^{i}\,\alpha=\alpha\,\mathfrak{o}_{\mathbf{P}}^{k}$ $(\alpha\in\mathfrak{a}^{ik})$.

Satz 2.17. *Für ein ganzes normales Ideal* $\mathfrak{a}^{ik}$ *gibt es ein ganzes, zu vorgegebenen endlich vielen Primstellen* $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_r$ *primes, normales Ideal* $\mathfrak{b}^{kl}$ $(\mathfrak{b}^{li})$, *so dass* $\mathfrak{a}^{ik}\mathfrak{b}^{kl}=\mathfrak{o}^{i}\,\alpha$ $(\mathfrak{b}^{li}\mathfrak{a}^{ik}=\alpha\,\mathfrak{o}^{k})$.

Beweis. $\mathbf{P}$ sei die Menge von $\mathfrak{p}_1,\dots\mathfrak{p}_r$. Jedes $\mathfrak{o}_{\mathbf{P}}^{i}$-Ideal ist ein Hauptideal und $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^{ik}=\mathfrak{o}_{\mathbf{P}}^{i}\,\alpha\,(\alpha\in\mathfrak{a}^{ik})$. Da $\mathfrak{a}^{ik}\supseteq\mathfrak{o}^{i}\,\alpha$ ist, so ist $\mathfrak{a}^{ik}\mathfrak{b}^{kl}=\mathfrak{o}^{i}\,\alpha$. Aus $\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^{ik}\mathfrak{b}_{\mathbf{P}}^{kl}=\mathfrak{o}_{\mathbf{P}}^{i}\,\alpha=\mathfrak{a}_{\mathbf{P}}^{ik}$ folgt $\mathfrak{b}_{\mathbf{P}}^{kl}=\mathfrak{o}_{\mathbf{P}}^{k}$, d. h. $\mathfrak{b}^{kl}$ ist zu $\mathbf{P}$ prim.

Satz 2.18. *Jedes normale Ideal* $\mathfrak{a}^{ik}$ *wird als* $\mathfrak{o}^{i}$*-Linksideal* ($\mathfrak{o}^{k}$*-Rechtsideal*) *von zwei regulären Elementen erzeugt.*

Beweis. $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^{ik}$ sei ganz. Bedeutet β ein reguläres Element aus $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{o}^{i}\beta$ ein ganzes $\mathfrak{o}^{k}$-Linksideal. $\mathbf{P}$ sei die Menge der zur Linkshülle von $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{o}^{i}\beta$ nicht primen Primstellen. Nach Satz 2.17 gibt es ein ganzes zu $\mathbf{P}$ primes Ideal $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}^{kl}$, so dass $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{o}^{i}\,\alpha$ ist. Da $(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{o}^{i}\beta,\mathfrak{b})=\mathfrak{o}^{k}$ ist, gilt $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{o}^{i}\beta,\mathfrak{b})=(\mathfrak{o}^{i}\beta,\mathfrak{a}\mathfrak{b})=(\mathfrak{o}^{i}\alpha,\mathfrak{o}^{i}\beta)$. Ist $\mathfrak{a}$ nicht ganz, so gibt es ein reguläres Element λ, so dass $\mathfrak{a}\,\lambda$ ganz ist; also $\mathfrak{a}\,\lambda=(\mathfrak{o}^{i}\alpha,\mathfrak{o}^{i}\beta)$, $\mathfrak{a}=(\mathfrak{o}^{i}\alpha\lambda^{-1},\mathfrak{o}^{i}\beta\lambda^{-1})$.

§ 3. Beziehungen zwischen der Arithmetik in S und der Struktur von S

Es sei S ein Schiefring mit Einselement 1, in dem jedes Element entweder eine Einheit oder ein Nullteiler ist, und $\mathfrak{o}$ sei (falls nicht anders gesagt) eine Ordnung von S, welche A_1, A_2, A_3 erfüllt.

Satz 3.1. *Gibt es ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{o}$, *so dass* $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{p}^{n}=0$, *so ist* S *allgemein-einfach.*

Beweiz. $\mathfrak{z}\neq 0$ sei ein zweiseitiges Ideal von S. $\mathfrak{z}$ enthält ersichtlich ein von Null verschiedenes Element a von $\mathfrak{o}$. Wegen $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{p}^{n}=0$ gilt für ein ρ $a\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}^{\rho})$. In $\bar{\mathfrak{o}}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\rho}$ betrachtet sei $\bar{\eta}\,\bar{a}\,\bar{\eta}'=\sum_{\nu=1}^{\kappa}\bar{\pi}^{\rho_\nu}\,\bar{c}_{\nu\nu}$,

$\bar{\pi}^{\rho_1} \neq 0$; dann ist $b = \sum_\nu c_{\nu 1}\, \eta\, a\, \eta'\, c_{1\nu} \in \mathfrak{z}$, $\bar{b} = \bar{\pi}^{\rho_1}$; die $\mathfrak{p}$-Höhe von b ist $(\rho_1, \dots, \rho_1)$. Nach Satz 1. 9 ist b ein reguläres Element, also $1 = bb^{-1} \in \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z} = S$.

Korollar. *S ist dann und nur dann allgemein-einfach, wenn der Vielfachenkettensatz für die ganzen zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale gilt, die ein festes Element $a \neq 0$ enthalten.*

Satz 3. 2. *S sei ein allgemein-halbeinfacher Ring, also die direkte Summe von allgemein-einfachen Ringen: $S = S_1 + \dots + S_r$, und die Maximalordnung $\mathfrak{o}$ sei eigentlich. Wenn ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$ keines der Einsen e_i von S_i enthält, so ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \dots + \mathfrak{o}_r$, $\mathfrak{o}_i = \mathfrak{o}\, e_i \neq S_i$ $(i = 1, \dots, r)$, und $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}\, e_i \neq \mathfrak{o}_i$ $(i = 1, \dots, r)$. Da S_i allgemein-einfach und $\mathfrak{a}_i$ ein ganzes zeiseitiges $\mathfrak{o}_i$-Ideal ist, so ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}_i^n = 0$, also

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = (\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}_1^n) + \dots + (\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}_r^n) = 0.$$

Satz 3. 3. *Wenn es ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$ gibt, so dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$ ist, so ist S allegemein-halbeinfach und $\mathfrak{o}$ ist eine eigentliche Maximalordnung.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ die verschiedenen Primteiler von $\mathfrak{a}$. Setzt man $\mathfrak{m}_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i^n$, so ist $\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_r = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$. Es sei $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$ $(t \leq r)$ ein minimales Teilsystem von $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ derart, dass $\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_t = 0$ ist. Ist $t = 1$, so ist S allgemein-einfach. Jetzt sei $t > 1$. Dann ist

$$\mathfrak{n}_i = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{i-1} \cap \mathfrak{m}_{i+1} \cap \dots \cap \mathfrak{m}_t \neq 0 \; (i = 1, \dots, t)$$

Bedeutet $a_i \neq 0$ ein Element aus $\mathfrak{n}_i$, so ist für ein grcsses m_i $a_i \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p}_i^{m_i})$, sonst wäre $a_i \in \mathfrak{m}_i$, also $a_i \in \mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{n}_i = 0$, $a_i = 0$. Geht man in $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i^{m_i}$ über, so ist $\bar{a}_i \neq 0$ und $\bar{\mathfrak{o}}\, \bar{a}_i\, \bar{\mathfrak{o}}$ ist eine Potenz von $\bar{\mathfrak{p}}_i$: $\bar{\mathfrak{o}}\, \bar{a}_i\, \bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{p}}_i^{\rho_i}$. $\mathfrak{o}\, a_i\, \mathfrak{o}$ hat also ein Element λ_i, dessen $\mathfrak{p}_i$-Höhe $(\rho_i, \dots, \rho_i)$ ist. Es sei $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_t$. Da $\lambda_j \in \mathfrak{o}\, a_j\, \mathfrak{o} \subset \mathfrak{n}_j \subset \mathfrak{m}_i$ $(i \neq j)$ ist, so gilt für jedes n $\lambda_j \equiv 0\, (\mathfrak{p}_i^n)$, $i \neq j$, $\lambda \equiv \lambda_i\, (\mathfrak{p}_i^n)$, $i = 1, \dots, t$. Die $\mathfrak{p}_i$-Höhe von λ stimmt mit der von λ_i überein, also ist endlich. Weil $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_t)^n = \bigcap_{i=1}^{t} \mathfrak{m}_i = 0$ ist, so ist λ nach Satz 1. 9 kein Nullteiler, also ein reguläres Element.

Es gilt für jedes $a \in \mathfrak{o}$ $\lambda_i\, a\, \lambda_j \in \mathfrak{n}_i \cap \mathfrak{n}_j = 0$ $(i \neq j)$, $\lambda_i\, a\, \lambda_j = 0$, also $\lambda_i \lambda_j = \lambda_i\, 1\, \lambda_j = 0$ $(i \neq j)$, $\lambda\lambda_i = \lambda_i \lambda = \lambda_i^2$ $(i = 1, \dots, t)$. Setzt man $e_i = \lambda_i \lambda^{-1} = \lambda^{-1} \lambda_i$ $(i = 1, \dots, t)$ so gilt ersichtlich $e_1 + \dots + e_t = 1$, $e_i a e_j = 0$ $(i \neq j)$, also $e_i e_j = 0$ $(i \neq j)$, $e_i = e_i\,(e_1 + \dots + e_t) = e_i^2$. $e_1, \dots, e_t$ sind also orthogonale Idempotente von S. Sie gehören sogar zum Zentrum von S. Denn es ist

$$e_i a = e_i a (e_1 + \dots + e_t) = e_i a e_i = (e_1 + \dots + e_t) a e_i = a e_i \ (a \in \mathfrak{o}),$$

für ein reguläres α aus $\mathfrak{o}$ ist also $\alpha^{-1} e_i = e_i \alpha^{-1}$, demnach ist für jedes $x = a\alpha^{-1} \in S$ $e_i x = x e_i$. S ist daher die direkte Summe von Schiefringen $S_i = Se_i : S = S_1 + \dots + S_t$, dementsprechend ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \dots + \mathfrak{o}_t$, $\mathfrak{o}_i = \mathfrak{o}\, e_i$. S_i ist ersichtlich ein Schiefring mit Einselement e_i, in welchem jedes Element entweder eine Einheit oder ein Nullteiler ist, und $\mathfrak{o}_i$ ist eine Maximalordnung von S_i, welche A_1, A_2, A_3 erfüllt. Es ist

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{o}_1 + \dots + \mathfrak{o}_{\varphi(i)-1} + \mathfrak{q}_{\varphi(i)} + \mathfrak{o}_{\varphi(i)+1} + \dots + \mathfrak{o}_t\,,$$

wo $\mathfrak{q}_{\varphi(i)}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_{\varphi(i)}$ ist. $\varphi(1), \dots, \varphi(t)$ sind einander verschieden, sonst würden $\mathfrak{p}_1^n, \dots, \mathfrak{p}_t^n$ für jedes n ein $\mathfrak{o}_s$ enthalten, also $\bigwedge \mathfrak{m}_i \supset \mathfrak{o}_s$ sein. Es ist somit

$$0 = (\textstyle\bigwedge_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}_1^n) \wedge \dots \wedge (\bigwedge_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}_t^n) = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}_{\varphi(1)}^n + \dots + \bigwedge_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}_{\varphi(t)}^n\,,$$

folglich $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}_j^n = 0$, $j = 1, \dots, t$. Nach Satz 3.1 ist S_j allgemein-einfach.

Satz 3.4. *S sei ein allgemein-einfacher, regulärer Ring, d. h es gibt für jedes S-Element c ein S-Element c' mit $cc'c = c$. Dann ist S ein einfacher Ring.*

Beweis. Es genügt zu beweisen, dass es ein minimales Linksideal $\neq 0$ von S gibt. Wir nehmen jetzt an es gebe kein minimales Linksideal von S. Dann existiert eine unendliche Kette von Linksidealen $S \supset Sa_1 \supset Sa_2 \supset \dots$ Da ein Hauptlinksideal Sc $(c \neq 0)$ von S von einem Idempotent $e = c'c$ erzeugt wird, gilt $Sa_{i-1} = \mathfrak{l}_i + Sa_i$ $(a_0 = 1)$, also $S = \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2 + \dots + \mathfrak{l}_n + Sa_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Dementsprechend wird 1 als eine Summe von einander orthogonalen Idempotenten darstellbar. Man erhält somit einander orthogonale Idempotente $e_1, e_2, \dots$. Es sei nun $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$ mit der Kapazität κ. Es gibt eine $e_1, e_2, \dots, e_m$ $(m = \kappa + 1)$ enthaltende Maximalordnung $\mathfrak{o}'$ von S, z. B. die Rechtsordnung von $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}\, e_1, \dots, \mathfrak{o}\, e_m)$. Bedeutet $\mathfrak{p}'$ das mit $\mathfrak{p}$ zusammengehörige Primideal von $\mathfrak{o}'$, so ist die Kapazität von $\mathfrak{p}'$ gleich κ. $\mathfrak{p}'$ enthält kein Idempotent, (Wäre $e \in \mathfrak{p}'$, $e^2 = e \neq 0$, so wäre $e = e^n \in \mathfrak{p}'^n$, also $e \in \bigwedge_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}'^n = 0$). $e_1, \dots, e_m$ sind also modulo $\mathfrak{p}'$ einander orthogonale Idempotente. Da aber $\mathfrak{o}'/\mathfrak{p}'$ ein voller Matrizenring κ-ten Grades in einem Schiefkörper ist, ist $m \leq \kappa$. Es ergibt sich also ein Widerspruch.

Aus Satz 3.4 folgt sofort:

Satz 3.5. *S sei ein allgemein-halbeinfacher, regulärer Ring und $\mathfrak{o}$ sei eigentlich. Dann ist S ein halbeinfacher Ring.*

Nach den voraufgehenden kann man die Axiomensysteme der Idealtheorie in allgemein-halbeinfachen Ringen folgendermassen aufstellen. Es ist bemerkenswert, dass sie nur durch die Eigenschaften einer Ordnung $\mathfrak{o}$ bestimmt sind.

E_1: *$\mathfrak{o}$ ist ein Schiefring mit Einselement 1 und für jeden Nichtnullteiler α gibt es einen Nichtnullteiler α', so dass $\mathfrak{o}\alpha \supseteq \alpha'\mathfrak{o}$ ist.*

$\mathfrak{o}$ lässt sich demnach in seinen (linksseitigen) Quotientenring S einbetten.[10]

E_2: *Wenn es für ein Element c aus S einen Nichtnullteifer λ aus $\mathfrak{o}$ gibt, so dass $\lambda(\mathfrak{o}c)^n \subseteq \mathfrak{o}$, $n=1, 2, \dots$, so ist $c \in \mathfrak{o}$.*

Wie leicht gezeigt wird, ist diese Bedingung E_2 mit der folgenden Bedingung E_2' äquivalent.

E_2': *Es gibt keinen Teilring $\mathfrak{o}'$ von S, so dass $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}'$, $\lambda\mathfrak{o}' \subseteq \mathfrak{o}$ mit einem Nichtnullteiler λ aus $\mathfrak{o}$ ist.*

Nach E_1 und E_2 ist $\mathfrak{o}$ eine (reguläre) Maximalordnung von S.[11]

E_3: *Es gilt der Teilerkettensatz für die in $\mathfrak{o}$ enthaltenen zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale.*

E_3^*: *Es gilt der Vielfachenkettensatz für die in $\mathfrak{o}$ enthaltenen zweiseitigen $\mathfrak{o}$-Ideale, welche ein beliebiges festes Element $a \neq 0$ enthalten.*

E_4: *Jedes Primideal von $\mathfrak{o}$ ist stark teilerlos.*

E_5: *Es gibt ein in $\mathfrak{o}$ enthaltenes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$, so dass $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$ ist.*

E_6: *Für jedes $\mathfrak{o}$-Element a gibt es ein S-Element x mit $axa = a$.*

Nach E_6 gibt es für jedes S-Element c ein S-Element c' mit $cc'c = c$.

Satz 3.6. *Unter den fünf Bedingungen E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 ist der (linksseitige) Quotientenring S von $\mathfrak{o}$ ein allgemein-halbeinfacher Ring und $\mathfrak{o}$ ist eine eigentliche Maximalordnung von S mit den Eigenschaften A_1, A_2, A_3. Es gelten also für jede mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Maximalordnung*

10) K. Asano, Ueber die Quotientenbildung von Schiefringen, Proc. math. Soc. Japan 1 (1949).

11) Vgl. A. I. Satz 1.9.

die Bedingungen A_1, A_2, A_3. *Ist das Ideal* $\mathfrak{a}$ *in* E_5 *ein Primideal, so ist* S *ein allgemein-einfacher Ring. Wenn es ausser den fünf Bedingungen noch die Bedingung* E_6 *gilt, so ist* S *ein halbeinfacher Ring.*

Im Falle des allgemein-einfachen Ringes gilt der folgende Satz.[12]

Satz 3. 7. *Unter den vier Bedingungen* E_1, E_2, E_3^*, E_4 *ist* S *ein allgemein-einfacher Ring und* $\mathfrak{o}$ *ist eine Maximalordnung von* S *mit den Eigenschaften* A_1, A_2, A_3. *Gilt ferner noch die Bedingung* E_6, *so ist* S *ein einfacher Ring.*

§ 4. Deuringsche Bewertungen.

S sel ein Schiefring. Eine reellwertige Funktion $\varphi(a)$ der S-Elemente heisst bekanntlch eine *Bewertung* von S, wenn φ die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $\varphi(a) > 0 \; (a \neq 0), \; \varphi(0) = 0$
2. $\varphi(-a) = \varphi(a)$
3. $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$
4. $\varphi(ab) \leq \varphi(a) \varphi(b)$

Daraus folgt leicht

5. $|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \varphi(a-b)$

Wenn φ statt 3 die schärfere Bedingung 3′ erfüllt, so heisst φ *nicht-archimedisch*:

3′. $\varphi(a + b) \leq \text{Max}\,(\varphi(a), \varphi(b))$

Ist φ nicht archimedisch und ist $\varphi(a) > \varphi(b)$, so ist $\varphi(a + b) = \varphi(a)$. Denn es ist $\varphi(b) < \varphi(a) = \varphi(a + b - b) \leq \text{Max}\,(\varphi(a + b), \varphi(b)) = \varphi(a + b) \leq \varphi(a)$.

Eine Folge $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots\}$ der S-Elemente heisst eine Fundamentalfolge, wenn $\lim \varphi(a_m - a_n) = 0$ ist. $\{a_n\}$ heisst eine Konvergenzfolge, wenn es ein S-Element a gibt, so dass $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(a_n - a) = 0$ ist. Ist ferner $a = 0$, so heisst $\{a_n\}$ eine Nullfolge. Jede Konvergenzfolge ist eine Fundamentalfolge. Eine Bewertung φ von S definiert bekanntlich einen bewerteten Erweiterungsring, für den der Cauchysche Konvergenzsatz gilt. Definiert man nämlich die Kompositionsregeln von Fundamentalfolgen durch

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad \{a_n\}\{b_n\} = \{a_n b_n\},$$

so bilden die Fundamentalfolgen einen Schiefring R, in welchem die Nullfolgen ein zweiseitiges Ideal N bilden. Der Restklassenring $S_\varphi =$

12) Vgl. A. I. Satz 2. 16.

R/N ist ein Erweiterungsring von S, wenn man $a \in S$ mit der $\{a\} = \{a, a, \dots\}$ enthaltenden Restklasse identifiziert. Die Bewertung φ wird durch

$$\varphi(A) = \lim_{n \to \infty} \varphi(a_n), \quad A \in S_\varphi, \quad \{a_n\} \in A$$

auf S_φ übertragen und in Bezug auf φ ist S perfekt, d. h. jede Fundamentalfolge ist eine Konvergenzfolge. Zwei Bewertungen φ, φ' von S heissen *äquivalent*, wenn die Nullfolgen (und als Folge davon die Fundamentalfolgen) für φ und φ' die gleichen sind. Dann ist $S_\varphi = S_{\varphi'}$.

Von jetzt an sei S ein allgemein-halbeinfacher Ring und $\mathfrak{o}$ sei eine eigentliche Maximalordnung von S mit den Bedingungen A_1, A_2, A_3. Es sei $\mathfrak{m}$ ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal, so dass $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$ ist, und P sei die Menge aller Primteiler von $\mathfrak{m}$. Die Primideale von $\mathfrak{o}_P$ sind dann endlich viel und es ist $\mathfrak{m}_P = \mathfrak{o}_P \lambda = \lambda\, \mathfrak{o}_P$, $\lambda \in \mathfrak{m}$. Für jedes S-Element $x \neq 0$ gibt es eine ganze Zahl $\rho = \rho(x)$, so dass x in $\mathfrak{m}_P^{\rho}$, aber nicht in $\mathfrak{m}_P^{\rho+1}$ enthalten ist. x ist also in der Form $x = a\lambda^{\rho} = \lambda^{\rho} a'$ eindeutig darstellbar, we a, a' durch λ nicht teilbare $\mathfrak{o}_P$-Elemente sind. Ersichtlich ist ρ die grösste ganze Zahl, so dass $x\,\mathfrak{m}^{-\rho}$ zu $\mathfrak{m}$ ganz ist. Die durch

$$\varphi_{\mathfrak{m}}(x) = c_0^{\rho}\ (0 < c_0 < 1) \quad \varphi_{\mathfrak{m}}(0) = 0$$

definierte Funktion ist eine nichtarchimedische Bewertung von S mit den folgenden Eigenschaften:

1) Es ist $\varphi_{\mathfrak{m}}(a) \leq 1$ für jedes a aus $\mathfrak{o}$.

2) Es gibt ein reguläres S-Element c so dass $0 < \varphi_{\mathfrak{m}}(c) < 1$.

Ferner ist ersichtlich $\mathfrak{o}_P = \{a \mid \varphi_{\mathfrak{m}}(a) \leq 1,\ a \in S\}$. $\varphi_{\mathfrak{m}}$ heisst die $\mathfrak{m}$-adische Bewertung. Wie leicht gezeigt wird, sind die Bewertungen $\varphi_{\mathfrak{m}}$, $\varphi_{\mathfrak{n}}$ einander äquivalent, wenn $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ dieselben Primteiler hat. Ist weiter $\mathfrak{m}'$ ein mit $\mathfrak{m}$ zusammengehöriges $\mathfrak{o}'$-Ideal, so ist $\varphi_{\mathfrak{m}'}$ mit $\varphi_{\mathfrak{m}}$ äquivalent.[13]

Satz 4. 1. *φ sei eine nichtarchimedische Bewertung von S mit den folgenden Eigenschaften*:

1) $\varphi(a) \leq 1$ *für jedes* $a \in \mathfrak{o}$.

2) *Es gibt ein S-Element c mit $0 < \varphi(c) < 1$, so dass $\mathfrak{o}\, c\, \mathfrak{o}$ reguläre Elemente enthält.*

Dann bildet die Menge aller $\mathfrak{o}$-Elemente mit $\varphi(a) < 1$ ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{m}$. Bedeutet P die Menge aller Primteiler von $\mathfrak{m}$, so ist

13) Deuring, Algebren.

$$\mathfrak{o}^* = \{x \mid \varphi(x) \leq 1,\ x \in S\} = \mathfrak{o}_P,$$
$$\mathfrak{m}^* = \{y \mid \varphi(y) < 1,\ y \in S\} = \mathfrak{m}_P$$

Es ist $\mathfrak{m}_P = \mathfrak{o}_P \lambda = \lambda \mathfrak{o}_P$ $(\lambda \in \mathfrak{m})$, *und für jedes S-Element* $x = a\lambda^\rho$ $(a \in \mathfrak{o}_P,\ a \notin \mathfrak{m}_P)$ *liegt* $\varphi(x)$ *zwischen* c_0^ρ *und* c_1^ρ, *wobei* $c_0 = \varphi(\lambda)$, $c_1 = \varphi(\lambda^{-1})^{-1}$, $0 < c_1 \leq c_0 < 1$. φ *ist demnach mit der* $\mathfrak{m}$*-adischen Bewertung äquivalent.*[14]

Beweis. $\mathfrak{m}$ ist ersichtlich ein $\mathfrak{o}$-$\mathfrak{o}$-Doppelmodul. $\mathfrak{o}c\mathfrak{o}$ hat ein reguläres $\mathfrak{o}$-Element $\gamma = \sum_i a_i c b_i$ $(a_i, b_i \in \mathfrak{o})$ und es ist

$$\varphi(\gamma) \leq \mathrm{Max}_i(\varphi(a_i c b_i)) \leq \mathrm{Max}_i(\varphi(a_i)\varphi(c)\varphi(b_i)) \leq \varphi(c) < 1,$$

also $\gamma \in \mathfrak{m}$. Damit ist $\mathfrak{m}$ ein zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal. Für ein Idempotent e aus S ist $\varphi(e) \geq 1$, denn $\varphi(e) = \varphi(e^2) \leq \varphi(e)\varphi(e)$. Ist e in $\mathfrak{o}$ enthalten, so ist $\varphi(e) \leq 1$ und es ist $\varphi(e) = 1$. Insbesondere ist $\varphi(1) = 1$. Weil $\mathfrak{m}$ kein Idempotent enthält gilt nach Satz 3. 2 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$. Ferner ist $\varphi(x) \leq 1$ für jedes $x \in \mathfrak{o}_P$. Denn es gilt $\mathfrak{n}x \subseteq \mathfrak{o}$ mit einem zu P primen ganzen Ideal $\mathfrak{n}$, also $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}) = \mathfrak{o}$, $a + b = 1$ $(a \in \mathfrak{m},\ b \in \mathfrak{n})$, $x - ax = bx \in \mathfrak{o}$. Da $\varphi(ax) \leq \varphi(a)\varphi(x) < \varphi(x)$ ist, so ist $\varphi(x) = \varphi(x - ax) = \varphi(bx) \leq 1$. Es ist somit $\varphi(y) < 1$ für jedes $y \in \mathfrak{m}_P = \mathfrak{o}_P \mathfrak{m}$. Ist x in $\mathfrak{o}_P$, aber nicht in $\mathfrak{m}_P$ enthalten, so ist $\varphi(x) = 1$, denn sonst wäre $\varphi(x) < 1$ und für jedes $a \in \mathfrak{n}x \subseteq \mathfrak{o}$ wäre $\varphi(a) < 1$, also $\mathfrak{n}x \subseteq \mathfrak{m}$, $x \in \mathfrak{m}_P$ gegen die Voraussetzung. Für $x = a\lambda^\rho$ $(\rho > 0)$ ist also $\varphi(x) \leq \varphi(a)\varphi(\lambda)^\rho \leq c_0^\rho$ und $1 = \varphi(a) = \varphi(x\lambda^{-\rho}) \leq \varphi(x)\varphi(\lambda^{-1})^\rho$, $c_1^\rho \leq \varphi(x)$. Es ist somit $c_1^\rho \leq \varphi(x) \leq c_0^\rho$. Für $x = a\lambda^{-\rho}$ $(\rho > 0)$ erhält man ebenso $c_1^{-\rho} \geq \varphi(x) \geq c_0^{-\rho}$.

Korollar 1. *Ist* $\varphi(\lambda)\varphi(\lambda^{-1}) = 1$, *so ist* φ *eine* $\mathfrak{m}$*-adische Bewertung.*

Korollar 2. S *sei allgemein-einfach und* φ *sei eine nichtarchimedische Bewertung von* S *mit den folgenden Eigenschaften* :

1) $\varphi(a) \leq 1$ *für jedes* $a \in \mathfrak{o}$.

2) *Es gibt ein S-Element* c *mit* $0 < \varphi(c) < 1$.

Dann ist φ *mit einer* $\mathfrak{m}$*-adischen Bewertung äquivalent.*

Man erhält ohne Mühe:

Satz 4. 2. S *sei allgemein-einfach. Ist* φ *eine* $\mathfrak{p}$*-adische Bewertung mit einem Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{o}$, *so gilt* :

1) *Es ist* $\varphi(a) \leq 1$ *für jedes* a *aus* $\mathfrak{o}$.

2) *Es gibt ein S-Element* c, *so dass* $0 < \varphi(c) < 1$.

14) M. Moriya, Zur Bewertung der einfachen Algebren, Proc. Acad. Tokyo 13 (1937).

3) *Sind* $\mathfrak{o}^*\alpha = \alpha\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{o}^*\beta = \beta\mathfrak{o}^*$ $(\mathfrak{o}^* = \{x \mid \varphi(x) \leq 1,\ x \in S\})$, *so ist* $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$.

Ist φ *umgekehrt eine nichtarchimedische Bewertung, welche die obigen Bedingungen erfüllt, so ist* φ *eine* $\mathfrak{p}$*-adische Bewertung.*

Hilfssatz 1. *Es sei* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_r$ *ein Produkt von paarweise teilerfremden* $\mathfrak{o}$*-Idealen. Ist* $\{a_n\}$, $a_n \in S$, *eine* $\mathfrak{m}$*-Fundamentalfolge (Nullfolge), d. h. eine Fundamentalfolge (Nullfolge) bezüglich der* $\mathfrak{m}$*-adischen Bewertung, so ist* $\{a_n\}$ *für jedes* $\mathfrak{m}_i$ *eine* $\mathfrak{m}_i$*-Fundamentalfolge (Nullfolge). Ist* $\{a_n\}$ *umgekehrt eine* $\mathfrak{m}_i$*-Fundamentalfolge (Nullfolge) für jedes* $\mathfrak{m}_i$, *so ist* $\{a_n\}$ *eine* $\mathfrak{m}$*-Fundamentalfolge (Nullfolge).*

Wir bezeichnen im folgenden die perfekte Erweiterung von S in Bezug auf die $\mathfrak{m}$-adische Bewertung mit $S_{\mathfrak{m}}$ und die $\mathfrak{m}$-adische Grenzmenge einer Teilmenge M von S mit $\overline{M} = \overline{M}_{\mathfrak{m}}$. Es ist $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$. Nimmt man statt $\mathfrak{o}$ eine mit $\mathfrak{o}$ äquivalente Maximalordnung $\mathfrak{o}'$ an und bedeutet $\mathfrak{m}'$ das mit $\mathfrak{m}$ zusammengehörige $\mathfrak{o}'$-Ideal, so ist $\overline{M}_{\mathfrak{m}} = \overline{M}_{\mathfrak{m}'}$.

Satz 4.3. *Ist* $\mathfrak{m}$ *das Produkt von paarweise teilerfremden zweiseitigen* $\mathfrak{o}$*-Idealen* $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$, *so ist* $S_{\mathfrak{m}}$ *mit der direkten Summe von* $S_{\mathfrak{m}_i}$ *ringisomorph*: $S_{\mathfrak{m}} = S_{\mathfrak{m}_1} \oplus \dots \oplus S_{\mathfrak{m}_r}$.

Beweis. Es sei a ein $S_{\mathfrak{m}}$-Element und $\{a_n\}$ sei eine $\mathfrak{m}$-Fundamentalfolge mit dem Grenzweat a. Da $\{a_n\}$ eine $\mathfrak{m}_i$-Fundamentalfolge ist, so gibt es in in $S_{\mathfrak{m}_i}$ betrachtet $\lim a_n = a^i \in S_{\mathfrak{m}_i}$. $(a^1, \dots, a^r)$ ist von der Wahl von $\{a_n\}$ unabhängig durch a eindeutig bestimmt. Durch die Zuordnung $a \to (a^1, \dots, a^r)$ wird $S_{\mathfrak{m}}$ in $S_{\mathfrak{m}_1} \oplus \dots \oplus S_{\mathfrak{m}_r}$ ringisomorph abgebildet. Ferner sei $(a^1, \dots, a^r)$ ein beliebiges Element von $S_{\mathfrak{m}_1} \oplus \dots \oplus S_{\mathfrak{m}_r}$ und $\{a_n^i\}$ bedeute eine $\mathfrak{m}_i$-Fundamentalfolge mit dem Grenzwert a^i, $i = 1, \dots, r$. Wenn man ein S-Element a_n so wählt, dass $a_n \equiv a_n^i$ $(\mathfrak{o}_{P_i}\mathfrak{m}_i^n)$,[15] $i = 1, \dots, r$, so ist bezüglich der $\mathfrak{m}_i$-adischen Bewertung $\lim a_n = \lim a_n^i = a^i$. $\{a_n\}$ ist somit für jedes $\mathfrak{m}_i$ eine $\mathfrak{m}_i$-Fundameutalfolge, also eine $\mathfrak{m}$-Fundamentalfolge. Bedeutet $a \in S_{\mathfrak{m}}$ den Grenzwert von $\{a_n\}$, so ist $a \to (a^1, \dots a^r)$. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 4.4. *Ist* $\mathfrak{a}^{ik}$ *ein normales Ideal, so ist*

$$(\overline{\mathfrak{a}^{ik}_{\mathbf{P}}})_{\mathfrak{m}} = \overline{\mathfrak{a}^{ik}_{\mathfrak{m}'}}, \quad \overline{\mathfrak{a}^{ik}_{\mathfrak{m}}} \wedge S = \mathfrak{a}^{ik}_{\mathbf{P}},$$

wobei **P** *die Menge aller Primstellen, die den Primsteilern von* $\mathfrak{m}$ *entsprechen, bedeutet.*

Beweis. Ist $a \in \mathfrak{a}_{\mathbf{P}}$ $(\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ik})$, so gibt es ein zu **P** primes $\mathfrak{n}^{ii}$, so dass

15) P_i bedeute die Menge der sämtlichen Primteiler von $\mathfrak{m}_i$.

$\mathfrak{n}^{ii} a \subseteq \mathfrak{a}$. Es ist $(\mathfrak{n}^{ii}, (\mathfrak{m}^{ii})^n) = \mathfrak{o}^i$, $b_n + c_n = 1$ $(b_n \in \mathfrak{n}^{ii}, c_n \in (\mathfrak{m}^{ii})^n)$, also $a_n = a - c_n a = b_n a \in \mathfrak{a}$. Wegen $\lim c_n = 0$ ist $a = \lim a_n \in \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}$, also $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_P \subset \bar{\mathfrak{a}}$. Daher ist $\bar{\mathfrak{a}} \subseteq \bar{\mathfrak{a}}_P \subseteq \bar{\bar{\mathfrak{a}}} = \bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{a}}_P = \bar{\mathfrak{a}}$.

Ferner ist $\bar{\mathfrak{a}} \frown S \supseteq \mathfrak{a}_P$. Ist $a \in \bar{\mathfrak{a}} \frown S$, so ist $a = \lim a_n$, $a_n \in \mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}_P$ enthält eine Potenz von $\mathfrak{m}_P^{ii}$: $\mathfrak{a}_P \supseteq (\mathfrak{m}_P^{ii})^\rho$. Für ein grosses n ist $a - a_n$ durch $(\mathfrak{m}_P^{ii})^\rho$ teilbar, also $a = a_n + (a - a_n) \in \mathfrak{a}_P$, folglich $\bar{\mathfrak{a}} \frown S \subseteq \mathfrak{a}_P$. Damit ist $\bar{\mathfrak{a}} \frown S = \mathfrak{a}_P$.

Definition. $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}^{ik}$ heisst die $\mathfrak{m}$-*adiache Komponente* von $\mathfrak{a}^{ik}$.
Nach Satz 2.16 ist $\mathfrak{a}_P^{ik} = \mathfrak{o}_P^i \alpha = \alpha\, \mathfrak{o}_P^k$ $(\alpha \in \mathfrak{a}^{ik})$. Demnach erhält man leicht:

Satz 4.5. $$\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}^{ik} = \overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{m}}^i \alpha} = \overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{m}}^i}\, \alpha \quad (\alpha \in \mathfrak{a}^{ik})$$
$$= \overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{m}}^i \mathfrak{a}^{ik}} = \overline{\mathfrak{a}^{ik} \mathfrak{o}_{\mathfrak{m}}^k} = \overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{m}}^i \mathfrak{a}^{ik} \mathfrak{o}_{\mathfrak{m}}^k}$$
$$(\overline{\mathfrak{a}^{ik} \mathfrak{b}^{ji}})_{\mathfrak{m}} = \overline{\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}^{ik} \mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}^{ji}}$$

Hilfssatz 2. *φ bedeute die Bewertung von $S_{\mathfrak{m}}$, die eine Erweiterung der $\mathfrak{m}^{ii}$-adischen Bewertung von S ist. Dann ist* $\overline{\mathfrak{o}^i} = \overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{m}}^i} = \{x \mid \varphi(x) \leq 1,\ x \in S_{\mathfrak{m}}\}$

Beweis. Es ist $\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}^i = \{a \mid \varphi(a) \leq 1,\ a \in S\}$, also für jedes $x \in \overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}^i} = \overline{\mathfrak{o}^i}$ gilt $\varphi(x) \leq 1$. Es sei umgekehrt $\varphi(x) \leq 1$, $x \in S_{\mathfrak{m}}$. Dann ist $x = \lim a_n$ $(a_n \in S)$ und $\varphi(x) = \lim \varphi(a_n) = \lim c_0^{\rho_n} \leq 1$ $(0 < c_0 < 1)$, also $\rho_n \geq 0$ bis auf endlich viele n. Demnach $\varphi(a_n) \leq 1$ $(n > m)$, also $a_n \in \mathfrak{o}_P^i$, folglich $x = \lim a_n \in \overline{\mathfrak{o}_P^i} = \overline{\mathfrak{o}^i}$.

Hilfssatz 3. *$\overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{m}}^i}$ ist eine Ordnung von $S_{\mathfrak{m}}$.*

Beweis. $\overline{\mathfrak{o}^i}$ ist ersichtlich ein Schiefring mit 1. Es ist $\overline{\mathfrak{m}^{ii}} = \overline{\mathfrak{o}^i}\lambda = \lambda\overline{\mathfrak{o}^i}$ $(\lambda \in \mathfrak{m}^{ii})$, $\varphi(\lambda) < 1$. Es sei x ein $S_{\mathfrak{m}}$-Element und $\rho = \rho(x)$ sei so gross gewählt, dass $\varphi(x\lambda^\rho) \leq \varphi(x)\varphi(\lambda)^\rho < 1$ ist. Dann ist $x\lambda^\rho \in \overline{\mathfrak{o}^i}$, also $x\overline{\mathfrak{o}^i}\lambda^\rho = x\lambda^\rho\overline{\mathfrak{o}^i} \subseteq \overline{\mathfrak{o}^i}$. Ebenso ist $\lambda^\rho\overline{\mathfrak{o}^i}x \subseteq \overline{\mathfrak{o}^i}$.

Hilfssatz 4. *Ist $\mathfrak{a}^*$ ein in $\overline{\mathfrak{o}^i}$ enthaltenes $\overline{\mathfrak{o}^i}$-Linksideal ($\overline{\mathfrak{o}^i}$-Rechtsideal), so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^* \frown \mathfrak{o}^i$ ein $\mathfrak{o}^i$-Linkstdeal ($\mathfrak{o}^i$-Rechtsideal) und es gilt* $\mathfrak{a}^* = \overline{\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}}$.

Beweis. Es ist $\overline{\mathfrak{m}^{ii}} = \overline{\mathfrak{o}^i}\lambda = \lambda\overline{\mathfrak{o}^i}$ $(\lambda \in \mathfrak{m}^{ii})$, $\varphi(\lambda) < 1$. Ist γ ein reguläres Element aus $\mathfrak{a}^*$ und nimmt man ρ so gross, dass $\varphi(\lambda^\rho\gamma^{-1}) \leq \varphi(\lambda)^\rho\varphi(\gamma^{-1}) < 1$ ist, so ist $\lambda^\rho\gamma^{-1} \in \overline{\mathfrak{o}^i}$, also $\lambda^\rho = \lambda^\rho\gamma^{-1}\gamma \in \mathfrak{a}^*$. Da $\lambda \in \mathfrak{m}^{ii} \subseteq \mathfrak{o}^i$ ist, so ist $\lambda^\rho \in \mathfrak{a}^* \frown \mathfrak{o}^i = \mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}$ ist also ein $\mathfrak{o}^i$-Linksideal. Es ist ersichtlich $\mathfrak{a}^* \supseteq \overline{\mathfrak{o}^i\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{a}}$. Ist $x \in \mathfrak{a}^*$, so ist $x = \lim a_n$ $(a_n \in \mathfrak{o}^i)$ und für ein genügend grosses m $a_{n+1} - a_n \equiv 0$ $((\mathfrak{m}^{ii})^\rho)$, $n > m$, also $x = a_m + (a_{m+1} - a_m) + \ldots = a_m + b\lambda^\rho$ $(b \in \overline{\mathfrak{o}^i})$. Es ist $b\lambda^\rho \in \overline{\mathfrak{o}^i\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{a}^*$, $a_m =$

$x - b\lambda^\rho \in \mathfrak{a}^*$ und $\in \mathfrak{o}^i$, folglich $a_m \in \mathfrak{a}^* \wedge \mathfrak{o}^i = \mathfrak{a}$. Demnach ist $x = a_m + b\lambda^\rho \in \bar{\mathfrak{a}}$, und $\mathfrak{a}^* \subseteq \bar{\mathfrak{a}}$. Daher ist $\mathfrak{a}^* = \bar{\mathfrak{a}}$.

Nach den voraufgehenden und A. I. § 3 erhält man leicht die folgenden Sätze.

Satz 4.6. *Die Gesamtheit von* $\overline{\mathfrak{o}^i} = \overline{\mathfrak{o}^i_{\mathfrak{m}}}$ *ist ein System aller einander äquivalenten Maximalordnungen von* $S_{\mathfrak{m}}$, *in denen* A_1, A_2, A_3 *gelten. Alle mit* $\bar{\mathfrak{o}}$ *äquivalenten normalen Ideale bilden also bei der eigentlichen Multiplikation ein Gruppoid* $G_{\mathfrak{m}}$ *mit den* $\overline{\mathfrak{o}^i}$ *als Einheiten.* $G_{\mathfrak{m}}$ *besteht aus den* $\mathfrak{m}$*-adischen Komponenten* $\overline{\mathfrak{a}^{ik}_{\mathfrak{m}}}$ *aller normalen Ideale* $\mathfrak{a}^{ik}$.

Satz 4.7. $\mathfrak{a}^{ik}$ *sei ein ganzes normales Ideal. Dann und nur dann ist* $\overline{\mathfrak{a}^{ik}_{\mathfrak{m}}} = \overline{\mathfrak{o}^i_{\mathfrak{m}}} = \overline{\mathfrak{o}^k_{\mathfrak{m}}}$, *wenn* $\mathfrak{a}^{ik}$ *zu* $\mathfrak{m}^{ii}$ *(also auch zu* $\mathfrak{m}^{kk}$*) prim ist.*

Satz 4.8. *Ist* $\mathfrak{a}^{ik}$ *ein Teiler von* $(\mathfrak{m}^{ii})^\rho$ *(also auch von* $(\mathfrak{m}^{kk})^\rho$*), so ist* $\overline{\mathfrak{a}^{ik}} \wedge \mathfrak{o}^i = \overline{\mathfrak{a}^{ik}} \wedge \mathfrak{o}^k = \mathfrak{a}^{ik}$.

Satz 4.9. *Ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ii}$ *ein Teiler von* $(\mathfrak{m}^{ii})^\rho$, *so gilt*

$$\overline{\mathfrak{o}^i_{\mathfrak{m}}}/\overline{\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}} \cong \overset{i}{\mathfrak{o}}_P/\mathfrak{a}_P \cong \mathfrak{o}^i/\mathfrak{a}.$$

Satz 4.10. *Die Primideale von* $\overline{\mathfrak{o}^i}$ *bestehen aus den* $\mathfrak{m}$*-adischen Komponenten der Primteiler von* $\mathfrak{m}^{ii}$. $\mathfrak{o}^i$ *hat also nur endlich viele Primideale.*

Satz 4.11. *Die unzerlegbaren Ideale aus* $G_{\mathfrak{m}}$ *bestehen aus den* $\mathfrak{m}$*-adischen Komponenten der zu* **P** *nicht primen unzerlegbaren Ideale* $\mathfrak{q}^{ik}$.

§ 5. $\mathfrak{p}$-adische Erweiterungen.

In diesem Paragraphen sei S ein allgemein-einfacher Ring und $\mathfrak{o}$ sei eine Maximalordnung von S mit den Bedingungen A_1, A_2, A_3. Für jedes ganze zweiseitige $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{o}$ gilt dann $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$, also wird in S die $\mathfrak{m}$-adische Bewertung degniert. Man erhält leicht

Satz 5.1. $\mathfrak{p}$ *durchlaufe auf alle Primideale von* $\mathfrak{o}$. *Ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ik}$ *ein normales Ideal, so ist* $\overline{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{o}^i_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}^k_{\mathfrak{p}}$ *bis auf endlich viele* $\mathfrak{p}$. $\mathfrak{a}$ *ist der Durchschnitt aller* $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ *und* S.

Satz 5.2. *Es sei* $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ *ein* $\overline{\mathfrak{o}^i_{\mathfrak{p}}}$*-Linksideal und* $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ *sei gleich* $\overline{\mathfrak{o}^i_{\mathfrak{p}}}$ *bis auf endlich viele* $\mathfrak{p}$. *Dann gibt es ein* $\mathfrak{o}^i$*-Linksideal, dessen* $\mathfrak{p}$*-adische Komponente gerade* $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ *ist. Entsprechendes gilt auch für Rechtsideale.*

Satz 5.3. *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal von* $\mathfrak{o}$ *der Kapazität* κ. $S_{\mathfrak{p}}$ *ist ein voller Matrizenring vom Grade* κ *in einem Schiefkörper.* $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ *hat ein System von Matrizeneinheiten* e_{ij} $(i, j = 1, \dots, \kappa)$ *und es ist* $S_{\mathfrak{p}} = \sum_{i,j=1}^{\kappa} K e_{ij}$, $\overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}} = \sum_{i,j=1}^{\kappa} \boldsymbol{o} e_{ij}$. $\boldsymbol{o} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \wedge K$ *ist eine Maximalordnung von* K *und* K *hat ausser* $\boldsymbol{o}$ *keine mit* $\boldsymbol{o}$ *äquivalente Maximalordnung.* $\boldsymbol{p} = \overline{\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}} \wedge K$

ist ein einziges Primideal von $\boldsymbol{o}$ *und* $\boldsymbol{o}/\boldsymbol{p}$ *ist ein Schiefkörper. Die einseitigen* $\boldsymbol{o}$*-Ideale sind zweiseitig, sie sind die Potenzen von* $\boldsymbol{p}$*. Es gilt ferner für K-Elemente* α, β $\varphi_{\mathfrak{p}}(\alpha\beta) = \varphi_{\mathfrak{p}}(\alpha)\,\varphi_{\mathfrak{p}}(\beta)$.

Beweis. Modulo $\mathfrak{p}^n$ betrachtet ist $\mathfrak{o}$ ein voller Matrizenring vom Grade κ in einem vollständig primären Ring. Es sei c_{ij} $(i, j = 1, \dots, \kappa)$ ein System von Matrizeneinheiten mod. $\mathfrak{p}^n$. Ist c'_{ij} $(i, j = 1, \dots, \kappa)$ ein System von Matrizeneinheiten mod. $\mathfrak{p}^{n+1}$, so ist

$$c_{ij} \equiv \varepsilon\, c'_{ij}\, \varepsilon'\ (\mathfrak{p}^n),\ \varepsilon\varepsilon' \equiv 1\ (\mathfrak{p}^n),\ i, j = 1, \dots, \kappa.$$

Da ε mod. $\mathfrak{p}^{n+1}$ eine Einheit von $\mathfrak{o}$ ist, gilt $\varepsilon\varepsilon'' \equiv 1\ (\mathfrak{p}^{n+1})$. $c''_{ij} = \varepsilon\, c'_{ij}\, \varepsilon''$ $(i, j = 1, \dots, \kappa)$ sind Matrizeneinheiten mod. $\mathfrak{p}^{n+1}$ und es gilt $\varepsilon'' \equiv \varepsilon'$, $c''_{ij} \equiv c_{ij}\ (\mathfrak{p}^n)$, $i, j = 1, \dots, \kappa$. Demnach kann man die Matrizeneinheiten $e_{ij}^{(n)}$ mod. $\mathfrak{p}^n$, $n = 1, 2, \dots$, so konstruieren, dass $e_{ij}^{(n)} \equiv e_{ij}^{(n+1)}\ (\mathfrak{p}^n)$ sind. Es gibt dann in $\overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} e_{ij}^{(n)} = e_{ij}$. e_{ij} $(i, j = 1, \dots, \kappa)$ sind Matrizeneinheiten in $\overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}$. Wegen $\sum_{i=1}^{\kappa} e_{ii}^{(n)} \equiv 1\ (\mathfrak{p}^n)$ ist $\sum_{i=1}^{\kappa} e_{ii} = 1$. Diejenigen $S_{\mathfrak{p}}$-Elemente, die mit jedem e_{ij} kommutativ sind, bilden einen Teilring K von $S_{\mathfrak{p}}$, und es ist $S_{\mathfrak{p}} = \sum_{i,j=1}^{\kappa} K e_{ij}$; ferner ist $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = \sum_{i,j=1}^{\kappa} \boldsymbol{o} e_{ij}$, $\boldsymbol{o} = K \wedge \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$.

Es gibt ein Element $\pi_2 \in \mathfrak{o}$, so dass $\pi_2 \equiv 0\ (\mathfrak{p})$, $\pi_2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^2)$, $\pi_2\, e_{ij}^{(2)} \equiv e_{ij}^{(2)}\, \pi_2\ (\mathfrak{p}^2)$, $i, j = 1, \dots, \kappa$. Setzt man $\pi_3 = \sum_{\nu=1}^{\kappa} e_{\nu 1}^{(3)}\, \pi_2\, e_{1\nu}^{(3)}, \dots, \pi_n = \sum_{\nu=1}^{\kappa} e_{\nu 1}^{(n)}\, \pi_{n-1}\, e_{1\nu}^{(n)}, \dots$, so gilt $e_{ij}^{(n)}\, \pi_n \equiv \pi_n\, e_{ij}^{(n)}\ (\mathfrak{p}^n)$ und

$$\pi_n \equiv \sum_{\nu=1}^{\kappa} e_{\nu 1}^{(n-1)}\, \pi_{n-1}\, e_{1\nu}^{(n-1)} \equiv \sum_{\nu=1}^{\kappa} e_{\nu\nu}^{(n-1)}\, \pi_{n-1} \equiv \pi_{n-1}\ (\mathfrak{p}^{n-1}),$$

also $\pi_n \equiv 0\ (\mathfrak{p})$, $\pi_n \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^2)$. Die $\mathfrak{p}$-Höhe von π_n ist $(1, 1, \dots, 1)$, folglich $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}\, \pi_n = \pi_n\, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$,[16] $\varphi(\pi_n) = \varphi_{\mathfrak{p}}(\pi_n) = c_0$ $(0 < c_0 < 1)$. Wegen $\pi_n \equiv \pi_{n+1}$ $(\mathfrak{p}^n)$ gibt es in $\overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}$ $\lim \pi_n = \pi$. Dann ist $e_{ij}\, \pi = \pi\, e_{ij}$ $(i, j = 1, \dots, \kappa)$, $\varphi(\pi) = \lim \varphi(\pi_n) = c_0$. Ferner ist $\varphi(\pi_n^{-1}) = c_0^{-1} = \varphi(\pi_n)^{-1}$, also

$$\varphi(\pi_n^{-1} - \pi_m^{-1}) = \varphi(\pi_m^{-1}(\pi_m - \pi_n)\,\pi_n^{-1}) \leq c_0^{-2}\, \varphi(\pi_m - \pi_n).$$

$\{\pi_n^{-1}\}$ ist somit eine Fundamentalfolge. Es gibt $\pi' = \lim \pi_n^{-1} \in S_{\mathfrak{p}}$ und $\pi\pi' = \pi'\pi = 1$. π ist ein reguläres Element von $S_{\mathfrak{p}}$. $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}\, \pi$ enthält eine Potenz von $\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}}$: $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}\, \pi \supseteq \mathfrak{P}^{\rho}$. Da für ein grosses ν $\pi_\nu \equiv \pi\ (\mathfrak{P}^{\rho})$ ist, so ist $\overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}\, \pi = (\overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}\, \pi, \mathfrak{P}^{\rho}) = (\overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}\, \pi_\nu, \mathfrak{P}^{\rho}) = \mathfrak{P}$, also $\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}\, \pi = \pi\, \overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}$.

Wie leicht gezeigt wird, ist $\varphi(a)$ für jedes $a \neq 0$ aus $S_{\mathfrak{p}}$ durch $\varphi(a) = c_0^{\rho}$, $\overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}\, a\, \overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{P}^{\rho}$ gegeben. Also ist $\varphi(\pi^{\nu} a) = \varphi(\pi)^{\nu}\, \varphi(a)$, da $\overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}\, \pi^{\nu}\, a\, \overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{P}^{\nu+\rho}$ ist. Es ist

$$\overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}} = \sum_{i,j=1}^{\kappa} \boldsymbol{o}\, e_{ij},\ S_{\mathfrak{p}} = \sum_{i,j=1}^{\kappa} K e_{ij},\ \boldsymbol{o} = K \wedge \overline{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}$$

und $\mathfrak{P} = \sum_{i,j=1}^{\kappa} \boldsymbol{p}\, e_{ij}$, $\boldsymbol{p} = \mathfrak{P} \wedge \boldsymbol{o} = \pi\, \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}\, \pi$. Wegen $(\boldsymbol{o}/\boldsymbol{p})_{\kappa} \simeq \overline{\mathfrak{o}}/\mathfrak{P} \simeq$

16) Denn es ist nach Satz 1.7 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}\, \pi_n, \mathfrak{p}) = (\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}\, \pi_n, \mathfrak{p}^{\nu})$ für jedes ν; da aber $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}\, \pi_n$ eine Potenz von $\mathfrak{p}$ enthält, so ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}\, \pi_n$.

$\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ist $\boldsymbol{o}/\boldsymbol{p}$ ein Schiefkörper. Ist $\varphi(\alpha)=1$, $\alpha \in K$, so ist α eine Einheit von $\boldsymbol{o}$. Denn α liegt dann in $\boldsymbol{o}$, aber nicht in $\boldsymbol{p}$, also gibt es ein $\boldsymbol{o}$-Element β, so dass $\alpha\beta \equiv 1\ (\boldsymbol{p})$ ist, folglich $\alpha\beta = 1-p\ (p \in \boldsymbol{p})$, $\alpha\beta\,(1+p+p^2+\ldots)=1$. α hat in $\boldsymbol{o}$ eine Rechtsinverse. Ebenso hat α auch eine Linksinverse. Ist $\varphi(\alpha)=c_0^{\rho}$, $\alpha \in K$, so ist $\varphi(\pi^{-\rho}\alpha)=\varphi(\pi)^{-\rho}\varphi(\alpha)=1$, also $\pi^{-\rho}\alpha=\varepsilon$, $\alpha=\pi^{\rho}\varepsilon$ mit einer Einheit ε von $\boldsymbol{o}$. Ebenso ist $\alpha=\varepsilon'\pi^{\rho}$. Jedes K-Element $\alpha \neq 0$ hat die Form $\pi^{\rho}\varepsilon$, also hat das Inverse $\varepsilon^{-1}\pi^{-\rho}$. Damit ist K ein Schiefkörper.

Da jedes K-Element $\neq 0$ in der Form $\varepsilon\pi^{\rho}=\pi^{\rho}\varepsilon'$ darstellbar ist, so sieht man leicht, dass jedes einseitige $\boldsymbol{o}$-Ideal ein von einer Potenz von π erzeugte Hauptideal ist. Die einseitigen $\boldsymbol{o}$-Ideale sind also zweiseitig und werden durch die Potenzen von $\boldsymbol{p}$ gegeben. Wegen $\boldsymbol{o}\,\alpha = \boldsymbol{o}\,\alpha\,\boldsymbol{o} = \alpha\,\boldsymbol{o}$ gilt $\varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)$ für K-Elemente α, β. K hat ausser $\boldsymbol{o}$ keine mit $\boldsymbol{o}$ äquivalente Maximalordnung, d. h. jede mit $\boldsymbol{o}$ äquivalente Ordnung $\boldsymbol{o}'$ von K ist in $\boldsymbol{o}$ enthalten. Denn $\boldsymbol{o}\boldsymbol{o}'$ ist ein $\boldsymbol{o}$-Linksideal, also ein zweiseitiges $\boldsymbol{o}$-Ideal und $\boldsymbol{o}'$ ist in der Rechtsordnung von $\boldsymbol{o}\boldsymbol{o}'$, nämlich in $\boldsymbol{o}$ enthalten.

Korollar. 1. *Ist π ein Element aus $\boldsymbol{p}$, aber nicht aus $\boldsymbol{p}^2$, so ist $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{o}\,\pi=\pi\,\boldsymbol{o}$ und jedes (von Null verschiedene) Element aus K wird in der Form $\varepsilon\pi^{\rho}=\pi^{\rho}\varepsilon'$ mit Einheiten $\varepsilon, \varepsilon'$ von $\boldsymbol{o}$ eindeutig dargestellt. Ist a ein Element aus $\overline{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{p}}$, so gibt es Einheiten η, η' von $\overline{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{p}}$, so dass*

$$\eta\, a\, \eta' = \sum\nolimits_{\nu=1}^{r} \pi^{\rho_\nu} e_{\nu\nu}, \quad 0 \leq \rho_1 \leq \cdots \leq \rho_r, \quad r \leq \kappa.$$

$(\rho_1, \ldots, \rho_\kappa)$, $\rho_{r+1} = \ldots = \rho_\kappa = \infty$, *ist nichts anderes als die $\mathfrak{p}$-Höhe von a.*

Korollar 2. *$\mathfrak{p}$ sei ein Primideal von $\mathfrak{o}$. Ein $\mathfrak{o}$-Element a ist dann und nur dann regulär, wenn die $\mathfrak{p}$-Höhe von a endlich ist.*

(Eingegangen 1. Nov., 1949)