Journal of Mathematics,
Osaka City University
Vol. 14, No. 1.

SUR LE BALAYAGE POUR DES ENSEMBLES ANALYTIQUES

Shirô OGAWA

(Received May 4, 1963)

1. Introduction

H. Cartan [2] a introduit la notion du balayage intérieur (resp. extérieur) pour un ensemble quelconque dans la théorie du potentiel newtonien. B. Fuglede [4] a étudié surtout, en définissant les noyaux consistant et parfait du côté de la convergence des mesures, la capacité intérieure (resp. extérieure) d'un ensemble dans un espace localement compact E et leur capacitabilité sous la condition que l'espace E soit parfaitement normal. Dans ce présent travail on exposera le balayage intérieur (resp. extérieur) en définissant la mesure balayée intérieurement (resp. extérieurement) pour des potentiels pris par rapport au noyau parfait, et introduira la μ-capacité intérieure (resp. extérieure) qui est définie par l'énergie de la mesure balayée intérieurement (resp. extérieurement). Cette μ-capacité est une extension de la capacité ordinaire définie comme la masse totale de la distribution capacitaire. Pour les μ-capacités, on va étudier leur capacitabilité qui entraîne la balayabilité pour des ensembles K-analytiques relatif au noyau parfait satisfaisant au principe de domination.

2. Prèliminaires

Soit E un espace localement compact séparé. Par un noyau sur E on comprend une application semi- continue inférieurement $\phi(x, y)$ de $E\times E$ dans $\bar{R}_+=[0, +\infty]$. Le potentiel d'une mesure μ sur E et l'énergie mutuelle des mesures μ et ν sur E pris par rapport au noyau $\phi(x, y)$ sont définis par

$$U^{\mu}(x) = \int \phi(x, y)d\mu(y)$$

et

$$(\mu, \nu) = \iint \phi(x, y)d\mu(x)d\nu(y)$$

respectivement. Lorsque $\nu=\mu$, on obtient l'énergie d'une mesure μ

$$||\mu||^2 = (\mu, \mu).$$

On considère les ensembles suivants,

$$\mathcal{E}^+ \equiv \{\mu \,;\, \mu \geqq 0 \quad \text{et} \quad ||\mu||^2 < +\infty\}$$

et

$$\mathcal{E} \equiv \{\nu \,;\, \nu = \mu_1 - \mu_2,\ \mu_1,\ \mu_2 \in \mathcal{E}^+\} .$$

Un noyau ϕ est dit de type positif s'il est symétrique $[\phi(x, y) = \phi(y, x)]$ et $(\sigma, \sigma) \geqq 0$ pour toute mesure de Radon σ sur E telle que l'intégrale double (σ, σ) soit bien définie. Un noyau ϕ est dit satisfaire au principe d'énergie si le noyau ϕ est de type positif et $(\sigma, \sigma) = 0$ n'a lieu qu'au cas de $\sigma \equiv 0$. Lorsqu'un noyau satisfait au principe d'énergie, le produit scalaire (μ, ν) et la norme $||\mu|| = \sqrt{(\mu, \mu)}$ définissent sur $\mathcal{E}$ une structure préhilbertienne. Dans ce cas, la topologie sur $\mathcal{E}$ définie par la distance $||\mu - \nu||$ s'appelle la topologie forte. Un noyau de type positif ϕ est dit parfait par B. Fuglede ([4], p. 166) s'il satisfait aux conditions suivantes,

(P_1) l'espace $\mathcal{E}^+$ est fortement complet,

(P_2) sur $\mathcal{E}^+$, la topologie forte est plus fine que la topologie vague. Autrement dit, un filtre arbitraire sur $\mathcal{E}^+$ convergeant fortement vers $\mu_0 \in \mathcal{E}^+$ converge vaguement vers μ_0.

La condition (P_2) entraîne qu'un noyau parfait satisfait au principe d'énergie.

H. Cartan ([2], p. 239) a développé la théorie du balayage en mettant à la base le principe suivant qui a lieu toujours dans un espace préhilbertien. Nous le mentionnons ici avec quatre propositions utiles dans la suite.

PRINCIPE. *Etant donnés un sous-ensemble $\mathcal{F}$ fortement complet convexe non vide de $\mathcal{E}$ et un point μ de $\mathcal{E}$, il existe, dans $\mathcal{F}$, un point $\mu_{\mathcal{F}}$ et un seul qui minimise la distance au point μ; autrement dit, tel que*

$$||\mu - \nu|| > ||\mu - \mu_{\mathcal{F}}|| \qquad \textit{pour tout } \nu \in \mathcal{F} \textit{ tel que } \nu \neq \mu_{\mathcal{F}}.$$

Le point $\mu_{\mathcal{F}}$ ainsi défini s'appellera la projection de μ sur $\mathcal{F}$.

PROPOSITION 1. *Si $\mathcal{F}$ est le complété de la réunion d'une famille filtrante croissante*[1] *d'ensembles fortement complets convexes non vides $\mathcal{F}_p$,*

1) Une famille d'ensembles $\mathcal{F}_p$ (où p parcourt un ensemble d'indices I absolument quelconque) est dite filtrante croissante si, quels que soient les indices p et q dans I, il existe dans I un indice r tel que $\mathcal{F}_r \supset \mathcal{F}_p$ et $\mathcal{F}_r \supset \mathcal{F}_q$. Définition analogue pour une famille filtrante décroissante, le signe $\supset$ étant remplacé par $\subset$.

la projection de $\mu \in \mathcal{E}$ *sur* $\mathcal{F}$ *est limite forte des projections de* μ *sur les* $\mathcal{F}_p$.

PROPOSITION 2. *Si* $\mathcal{F}$, *supposé non vide, est l'intersection d'une famille filtrante décroissante d'ensembles fortement complets convexes* $\mathcal{F}_p$, *la projection de* $\mu \in \mathcal{E}$ *sur* $\mathcal{F}$ *est limite forte des projections de* μ *sur les* $\mathcal{F}_p$.

PROPOSITION 3. *Soit* $\mathcal{F}$ *un cône fortement complet contenant l'élément* 0. *Pour qu'un élément* $\mu_{\mathcal{F}}$ *de* $\mathcal{F}$ *soit égal à la projection de* $\mu \in \mathcal{E}$ *sur* $\mathcal{F}$, *il faut et il suffit que les conditions suivants* (a) *et* (b) *soient remplies ensemble* ;

$$\text{(a)}\quad (\mu-\mu_{\mathcal{F}}, \nu) \leqq 0 \qquad \textit{pour tout } \nu \in \mathcal{F},$$
$$\text{(b)}\quad (\mu-\mu_{\mathcal{F}}, \mu_{\mathcal{F}}) = 0 .$$

PROPOSITION 4. *Lorsque* $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ *sont deux cônes fortement complets contenant l'élément* 0, *on a*

$$||\mu_{\mathcal{F}_1}-\mu_{\mathcal{F}_2}||^2 \leqq ||\mu_{\mathcal{F}_2}||^2-||\mu_{\mathcal{F}_1}||^2 \quad \textit{pour } \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 .$$

3. Balayages intérieur et extérieur

Supposons désormais qu'un noyau ϕ est parfait. Par suite, un sous-ensemble quelconque fortement fermé dans $\mathcal{E}^+$ est complet, parce que l'espace $\mathcal{E}^+$ est fortement complet.

Nous noterons $\mathcal{E}_A^i$ l'adhérence forte de l'ensemble des mesures de $\mathcal{E}^+$ portées par un sous-ensemble quelconque A contenu dans E. On peut considérer $\mathcal{E}_A^i$ comme l'adhérence de la réunion des $\mathcal{E}_K^i$ relatifs aux ensembles compacts K contenus dans A. D'autre part, nous noterons $\mathcal{E}_A^e$ l'intersection des ensembles $\mathcal{E}_G^i$ relatifs aux ensembles ouverts G contenant A. Tous deux $\mathcal{E}_A^i$ et $\mathcal{E}_A^e$ sont bien les cônes complets contenant la mesure nulle. Par la définition, on conclut que $\mathcal{E}_A^i \subset \mathcal{E}_A^e$, $\mathcal{E}_A^i \subset \mathcal{E}_B^i$ et $\mathcal{E}_A^e \subset \mathcal{E}_B^e$ pour $A \subset B$ et $\mathcal{E}_A^i \equiv \mathcal{E}_A^e$ pour tout ensemble ouvert A. Lorsque les familles $\mathcal{E}_A^i$ et $\mathcal{E}_A^e$ sont identiques, on les note $\mathcal{E}_A$ simplement.

LEMME 1. *Soit* A *un sous-ensemble quelconque dans* E. *Toute mesure de* $\mathcal{E}_A^i$ *est portée par l'adhérence* $\bar{A}$ *de* A. *En particulier, si* K *est un ensemble compact, on a alors*

$$\mathcal{E}_K^i \equiv \mathcal{E}_K^e .$$

En effet, étant donnée une mesure $\mu \in \mathcal{E}_A^i$, il existe une suite des mesures $\{\nu_n\} \subset \bigcup_{K \subset A} \mathcal{E}_K^i$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} ||\mu-\nu_n|| = 0 ,$$

parce que la famille $\mathcal{E}_A^i$ est l'adhérence forte de la réunion des $\mathcal{E}_K^i$ relatifs aux ensembles compacts K contenus dans A. En vertu de la condition (P_2) du noyau parfait, cette suite converge vaguement vers μ. Autrement dit, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int f d\nu_n = \int f d\mu \quad \text{pour toute } f \in C,$$

où l'on désigne par C la famille des fonctions numériques (finies) continues à support compact dans E. Si l'on suppose que le support $S\mu$ de la mesure μ n'est pas contenu dans $\bar{A}$, il existe un ensemble ouvert U ne rencontrant pas $\bar{A}$ et une fonction $f_0 \in C$ dont le support est contenu dans U et qui est telle que

$$\int f_0 d\mu > 0 .$$

D'après le support $S\nu_n \subset \bar{A}$, on a

$$\int f_0 d\nu_n = 0 \quad \text{pour tout } n ,$$

ce qui est évidemment contradictoire. Ensuite, nous allons montrer $\mathcal{E}_K^i \equiv \mathcal{E}_K^e$ pour tout ensemble compact $K \subset E$. Pour cela, il suffit de prouver que toute mesure de $\mathcal{E}_K^e$ est portée par K. Le support $S\mu$ de toute mesure $\mu \in \mathcal{E}_K^e$ est contenu dans l'adhérence $\bar{G}$ pour tout ensemble ouvert G contenant K, en vertu de ce qui précède et de $\mathcal{E}_K^e = \bigcap_{G\supset K} \mathcal{E}_G^i$. Si l'on suppose le support $S\mu \not\subset K$, il existe un ensemble ouvert N, ne rencontrant pas K, tel que $\mu(N) > 0$. Naturellement on peut trouver un ensemble compact K' contenu dans N tel que $\mu(K') > 0$. Il existe un voisinage compact de K et un voisinage compact de K' sans point commun ([1], § 10, cf. ex. 21), parce que K et K' sont deux ensembles compacts sans point commun dans E. C'est en contradiction avec le fait que le support $S\mu$ est contenu dans l'adhérence $\bar{G}$ pour tout ensemble ouvert $G \supset K$.

DEFINITION. Pour chaque $\mu \in \mathcal{E}^+$, on notera μ_A^i (resp. μ_A^e) la projection de μ sur $\mathcal{E}_A^i$ (resp. $\mathcal{E}_A^e$) et on dira que μ_A^i (resp. μ_A^e) est obtenue par le balayage intérieur (resp. extérieur) de μ pour l'ensemble A. On dira simplement μ_A^i (resp. μ_A^e) la mesure balayée intérieurement (resp. extérieurement).

D'après l'unicité de la projection, si $\mathcal{E}_A^i = \mathcal{E}_A^e$, on a $\mu_A^i = \mu_A^e$ pour toute $\mu \in \mathcal{E}^+$. De plus, en vertu de la proposition 3, μ_A^i et μ_A^e sont caractérisées par les conditions suivantes,

(a) $(\mu_A^i - \mu, \nu) \geqq 0$ pour toute $\nu \in \mathcal{E}_A^i$

(b) $(\mu_A^i - \mu, \mu_A^i) = 0$

et

(a)′ $(\mu_A^e - \mu, \nu) \geqq 0$ pour toute $\nu \in \mathcal{E}_A^e$

(b)′ $(\mu_A^e - \mu, \mu_A^e) = 0$.

Si un noyau ϕ satisfait au principe de domination[2], on a d'après (b) et (b)′,

$$U^{\mu_A^i}(x) \leqq U^{\mu}(x) \quad \text{partout dans tout l'espace } E,$$
$$U^{\mu_A^e}(x) \leqq U^{\mu}(x) \quad \text{partout dans tout l'espace } E.$$

Par suite, dans ce cas, on a alors

$$U^{\mu_A^i}(x) = U^{\mu}(x)$$
$$(\text{resp. } U^{\mu_A^e}(x) = U^{\mu}(x))$$

sauf sur un ensemble qui est de mesure nulle pour toute mesure $\nu \in \mathcal{E}_A^i$ (resp. $\nu \in \mathcal{E}_A^e$).

En particulier, lorsque $\mu_A^i = \mu_A^e$, on dira qu'un noyau ϕ est balayable relativement à l'ensemble A.

4. μ-capacité

Definition. Etant donnés un ensemble quelconque A et une mesure $\mu \in \mathcal{E}^+$, on définira μ-capacité intérieure (resp. extérieure) de l'ensemble A de la manière suivante;

$$C_\mu^i(A) = \|\mu_A^i\|^2$$
$$(\text{resp. } C_\mu^e(A) = \|\mu_A^e\|^2).$$

Lemme 2. *Pour que $\mu_A^i = \mu_A^e$, il suffit que $C_\mu^i(A) = C_\mu^e(A)$.*

En effet, si l'on prend pour $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ dans la proposition 4 $\mathcal{E}_A^i$ et $\mathcal{E}_A^e$ respectivement, on a

$$\|\mu_A^i - \mu_A^e\|^2 \leqq C_\mu^e(A) - C_\mu^i(A).$$

Le fait que $C_\mu^i(A) = C_\mu^e(A)$ entraîne que $\mu_\mu^i = \mu_\mu^e$, parce qu'un noyau parfait satisfait au principe d'énergie.

---

2) Un noyau ϕ est dit satisfaire au principe de domination lorsque, étant données une mesure positive d'énergie finie μ à support compact et ν une mesure positive quelconque, si l'on a

$$U^{\mu} \leqq U^{\nu} \quad \text{presque partout pour } \mu,$$

on a la même inégalité partout dans tout l'espace.

Lorsque $\mu_A^i = \mu_A^e$, on les notera μ_A simplement.

DEFINITION. Soit $\mathcal{K}(E)$ la famille des sous-ensembles compacts dans E. Pour chaque $\mu \in \mathcal{E}^+$, une application numérique $C_\mu(K)$ de $\mathcal{K}(E)$ dans $\bar{R}_+ = [0, +\infty]$,

$$C_\mu(K) = ||\mu_K||^2,$$

s'appelle la μ-capacité d'ensemble compact K.

LEMME 3. *La μ-capacité $C_\mu(K)$ est une fonction d'ensemble croissante et continue à droite*[3] *sur $\mathcal{K}(E)$.*

En effet, d'après la proposition 4, on a

$$||\mu_{K_1} - \mu_{K_2}||^2 \leqq ||\mu_{K_2}||^2 - ||\mu_{K_1}||^2$$

pour tout K_1 et K_2 de $\mathcal{K}(E)$ tels que $K_1 \subset K_2$. Ainsi on a

$$C_\mu(K_1) \leqq C_\mu(K_2).$$

Pour tout $K \in \mathcal{K}(E)$, d'après le lemme 1 on a

$$\mathcal{E}_K = \bigcap_{G \supset K} \mathcal{E}_G$$

pour tout ensemble ouvert G contenant K. La famille d'ensembles $\mathcal{E}_G$ (oú G parcourt comme il contient K) est une famille filtrante décroissante, parce que, quels que soient les ensembles ouverts G et G' contenant K, $G \cap G'$ est un ensemble ouvert contenant K et, de plus, on a $\mathcal{E}_{G \cap G'} \subset \mathcal{E}_G$ et $\mathcal{E}_{G \cap G'} \subset \mathcal{E}_{G'}$. En vertu de la proposition 2, on a alors

$$\lim_{G \supset K} ||\mu_G - \mu_K|| = 0.$$

En tenant compte de l'inégalité,

$$0 \leqq ||\mu_G||^2 - ||\mu_K||^2 \leqq ||\mu_G - \mu_K|| \cdot (||\mu_G|| + ||\mu_K||),$$

il s'ensuit que

$$C_\mu(K) = \inf_{G \supset K} ||\mu_G||^2.$$

Par suite, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble ouvert $G_\varepsilon(\supset K)$ tel que

$$||\mu_{G_\varepsilon}||^2 - C_\mu(K) < \varepsilon.$$

---

3) Soit $\mathfrak{M}$ une famille de sous-ensemble X dans E. Une fonction d'ensemble croissante $f(X)$ définie sur $\mathfrak{M}$ est dite continue à droite en $X_0 \in \mathfrak{M}$ si, étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de X_0 tel que

$$f(X) - f(X_0) < \varepsilon \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{M} \text{ tel que } X_0 \subset X \subset V.$$

La fonction $f(X)$ est dite continue à droite sur $\mathfrak{M}$ si elle l'est en tout $X \in \mathfrak{M}$.

Alors on a

$$C_\mu(K') - C_\mu(K) < \varepsilon$$

pour tout $K' \in \mathcal{K}(E)$ tel que $K \subset K' \subset G_\varepsilon$.

Ainsi nous savons que la μ-capacité $C_\mu(K)$ est une capacité définie sur $\mathcal{K}(E)$ au sens de G. Choquet ([3], p. 174).

LEMME 4. *Pour $C^i_\mu(A)$ et $C^e_\mu(A)$, on a*

$$C^i_\mu(A) = \sup_{K \subset A, K \in \mathcal{K}(E)} C_\mu(K)$$

et

$$C^e_\mu(A) = \inf_{\substack{G \supset A \\ G\,:\,\text{ouvert}}} C_\mu(G)$$

En effet, comme on a mentionné dans le paragraphe 3, $\mathcal{E}^i_A$ est l'adhérence forte de la réunion des $\mathcal{E}_K$ relatifs aux ensembles compacts K contenus dans A. D'autre part, la famille d'ensembles $\mathcal{E}_K$ (où K parcourt comme il est contenu dans A) forme une famille filtrante croissante, parce que, quels que soient les ensembles compacts K et K' contenus dans A, $K \cup K'$ est un ensemble compact contenu dans A et on a de nouveau $\mathcal{E}_K \subset \mathcal{E}_{K \cup K'}$ et $\mathcal{E}_{K'} \subset \mathcal{E}_{K \cup K'}$. On a alors d'après la proposition 1

$$\lim_{K \subset A} \|\mu^i_A - \mu_K\| = 0\,.$$

En vertu de l'inégalité

$$0 \leqq \|\mu^i_A\|^2 - \|\mu_K\|^2 \leqq \|\mu^i_A - \mu_K\| \cdot (\|\mu^i_A\| + \|\mu_K\|)\,,$$

on en conclut que

$$C^i_\mu(A) = \sup_{K \subset A, K \in \mathcal{K}(E)} C_\mu(K)$$

De la même façon que la démonstration du lemme 3, il s'ensuit que

$$C^e_\mu(A) = \inf_{\substack{G \supset A \\ G\,:\,\text{ouvert}}} C^i_\mu(G)$$

Ainsi on peut identifier $C^i_\mu(A)$ (resp. $C^e_\mu(A)$) avec la capacité intérieure (resp. extérieure) d'ensemble A au sens de G. Choquet. D'autre part, il a introduit la notion d'ordre relatif à la capacité ([3], p. 175). Pour la μ-capacité, on a

LEMME 5. *Si un noyau parfait ϕ satisfait au principe de domination, la μ-capacité $C_\mu(K)$ est une capacité alternée d'ordre $\mathfrak{A}_2$ sur $\mathcal{K}(E)$;*

$$C_\mu(K_1 \cup K_2) + C_\mu(K_1 \cap K_2) \leqq C_\mu(K_1) + C_\mu(K_2)$$

pour tout K_1, $K_2 \in \mathcal{K}(E)$.

En effet, pour le démontrer, il suffit d'indiquer que

$$U^{\mu_{K_1 \cup K_2}}(x) + U^{\mu_{K_1 \cap K_2}}(x) \leqq U^{\mu_{K_1}}(x) + U^{\mu_{K_2}}(x)$$

partout dans tout l'espace E, parce qu'on a d'après la proposition 3, (b)

$$C_\mu(K) = \int U^{\mu_K} d\mu \qquad \text{pour tout } K \in \mathcal{K}(E).$$

Signalons que, sous la condition du lemme, on a pour tout $K \in \mathcal{K}(E)$,

$$U^{\mu_K}(x) = U^{\mu}(x) \qquad \text{à p. p. p. sur } K^{4)}$$
$$U^{\mu_K}(x) \leqq U^{\mu}(x) \qquad \text{partout dans tout l'espace } E.$$

En conséquence, on a alors

$$U^{\mu_{K_1 \cup K_2}}(x) = U^{\mu_{K_1}}(x) \qquad \text{à p. p. p. sur } K_1$$

et

$$U^{\mu_{K_1 \cap K_2}}(x) = U^{\mu_{K_2}}(x) \qquad \text{à p. p. p. sur } K_1 \cap K_2.$$

En faisant attention aux

$$\mu_{K_1 \cap K_2} \in \mathcal{E}^+ \text{ et le support } S\mu_{K_1 \cap K_2} \subset K_1 \cap K_2,$$

on a d'après le principe de domination

$$U^{\mu_{K_1 \cap K_2}}(x) \leqq U^{\mu_{K_2}}(x) \qquad \text{partout dans tout l'espace } E.$$

Par suite, il s'ensuit que

$$U^{\mu_{K_1 \cup K_2}}(x) + U^{\mu_{K_1 \cap K_2}}(x) \leqq U^{\mu_{K_1}}(x) + U^{\mu_{K_2}}(x) \qquad \text{à p. p. p. sur } K_1.$$

En remplacant K_1 par K_2, on a la même inégalité à p. p. p. sur K_2, et par suite, à p. p. p. sur $K_1 \cup K_2$.

En tenant compte de

$$\mu_{K_1 \cup K_2} + \mu_{K_1 \cap K_2} \in \mathcal{E}^+ \text{ et le support de cette mesure } \subset K_1 \cup K_2,$$

on a d'après le principe de domination

$$U^{\mu_{K_1 \cup K_2}}(x) + U^{\mu_{K_1 \cap K_2}}(x) \leqq U^{\mu_{K_1}}(x) + U^{\mu_{K_2}}(x)$$

partout dans tout l'espace E.

Dans le paragraphe 3, on a signalé que si A est un ensemble ouvert,

---

4) On dit qu'une propriété sur un ensemble A a lieu "à peu près partout sur A (à p.p.p. sur A) si elle ne tombe en défaut qu'aux points d'ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\mu \in \mathcal{E}^+$.

on a $\mathcal{E}_A^i=\mathcal{E}_A^e$ et naturellement $\mu_A^i=\mu_A^e$. Plus généralement on peut prouver le théorème suivant.

THEOREME. *Si un noyau parfait ϕ satisfait au principe de domination, on a alors*

$$\mu_A^i=\mu_A^e$$

pour toute $\mu\in\mathcal{E}^+$ et pour tout ensembe K-analytique A.

Autrement dit, le noyau ϕ est balayable pour tout ensemble K-analytique A.

Démonstration. En vertu des lemmes 3, 4, 5 et le fait qu' un espace localement compact est complètement regulier, on peut appliquer le théorème relatif à la capacitabilité par G. Choquet ([3], p. 223, voir le cas (ii)) et on a

$$C_\mu^i(A) = C_\mu^e(A)$$

pour tout ensemble K-analytique A. Au moyen du lemme 2, il résulte

$$\mu_\mu^i = \mu_\mu^e.$$

Ainsi le noyau parfait ϕ est balayable relativement à l'ensemble K-analytique A.

COROLLAIRE. *Si un noyan parfait ϕ satisfait au principe de domination, on a alors*

$$\mathcal{E}_A^i=\mathcal{E}_A^e$$

pour tout ensemble K-analytique A.

En effet, si $\mathcal{E}_A^i$ et $\mathcal{E}_A^e$ ne s'identifie pas, il existe une mesure $\mu\in\mathcal{E}_A^e$ mais $\mu\notin\mathcal{E}_A^i$. La projection de μ sur $\mathcal{E}_A^e$ est elle-même, mais celle de μ sur $\mathcal{E}_A^i$ ne l'est pas. C'est en contradiction avec le résultat du théorème.

REMARQUE. Un noyau de type positif est dit consistant par B. Fuglede ([4], p. 167) s'il satisfait à la condition suivante.

(C) Si un filtre de Cauchy pour la structure uniforme forte sur $\mathcal{E}^+$ converge vaguement vers une mesure $\mu_0\in\mathcal{E}^+$, alors ce filtre converge fortement vers μ_0.

En étudiant la relation entre un noyau consistant et un noyau parfait, il a obtenu un résultat suivant: pour qu'un noyau soit parfait, il faut et il suffit qu'il soit consistant et satisfasse au principe d'énergie. M. Ohtsuka ([5], p. 198) a démontré que consistants sont le noyau d'ordre α, $0<\alpha<n$, défini dans l'espace euclidien R^n à dimension n ($\geqq 3$) et le

noyau greenien défini dans un espace de Green à dimension $n(\geqq 2)$. Ces noyaux satisfont au principe de domination et sont parfaits parce qu'ils satisfont au principe d'énergie. En conséquence, on a le résultat suivant : le noyau d'ordre α $(n-2 \leqq \alpha \leqq n)$ est toujours balayable pour tout ensemble analytique A, et analoguement quant au noyau greenien.

Bibliographie

1. N. Bourbaki ; Topologie générale, Chap. I. Paris, Hermann.
2. H. Cartan ; *Théorie générale du balayage en potentiel newtonien*, Ann. Univ. Grenoble, **22** (1946), pp. 221–280.
3. G. Choquet ; *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier, **5** (1954), pp. 131–295.
4. B. Fuglede ; *On the theory of potentials in locally compact spaces*, Acta Math. **103** (1960), pp. 139–215.
5. M. Ohtsuka ; *On potentials in locally compact spaces*, Jour. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I. **25** (1961), pp. 136–352.