Journal of Mathematics
Osaka City University
Vol. 13, No. 1.

Sur un principe du maximum pour 1e potentiel de Riesz-Frostman

Par Nobuyuki NINOMIYA

(*Received June 28, 1962*)

Dans 1'espace euclidien ou plus généralement dans 1'espace topologique localement compact, soient $K(x,y)$ et $N(x,y)$ des fonctions positives et continues en x et y, qui peuvent être $+\infty$ en $x=y$, et soit $K(x,y)$ symétrique $[K(x,y)=K(y,x)]$. On considère les potentiels d'une mesure μ pris par rapport aux noyaux K et N:

$$U^{\mu}(x)=\int K(x,y)\,d\mu(y),\quad V^{\mu}(x)=\int N(x,y)\,d\mu(y).$$

Un noyau K est dit satisfaire au principe du balayage par rapport au noyau N si, étant donnes un compact F et un point p n'appartenant pas à F, il existe au moins une mesure positive λ portée par F telle que

(1) $U^{\mu}(x)=N(x,p)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\mu}(x)\leqq N(x,p)$ dans tout 1'espace.

Si un noyau K satisfait au principe du balayage par rapport au noyau N, on a les résultats suivants ([4], p. 121, p.122):

1. Etant donnes un compact F et un point p appartenant à F, il existe au moins une mesure positive λ portée par F telle que

(1) $U^{\lambda}(x)=N(x,p)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\lambda}(x)\leqq N(x,p)$ dans tout l'espace.

2. Si le noyau N est fini et continu en x et y, étant donnés un compact F et une mesure positive μ à support compact, il existe au moins une mesure positive μ' portée par F telle que

(1) $U^{\mu'}(x)=V^{\mu}(x)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\mu'}(x)\leqq V^{\mu}(x)$ dans tout l'espace.

3. Si le noyau $N(x,y)$ peut être $+\infty$ en $x=y$ mais satisfait au principe de continuité, étant donnés un compact F et une mesure positive μ à support compact, il existe au moins une mesure positive μ' portée par F telle que

(1) $U^{\mu'}(x)=V^{\mu}(x)$ sur F sauf un ensemble de $(K+N)$-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\mu'}(x)\leqq V^{\mu}(x)$ dans tout l'espace sauf un ensemble de $(K+N)$-diamètre transfini nul.

Un noyau K est dit satisfaire au principe du maximum par rapport au noyau N si, étant donnés une mesure positive λ à support compact F et un point p n'appartenant pas à F, l'inégalité

$$U^{\lambda}(x)\leqq N(x,p)$$

sur F entraîne la même inégalité dans tout l'espace. Alors, on a démontré les théorèmes suivants ([4], p.119; [5], p.140).

Théorème. Pour qu'un noyau K satisfasse au principe du balayage par rapport au noyau N, il faut et il suffit qu'il satisfasse au principe du maximum par rapport au noyau N.

Théorème. Pour qu'un noyau K satisfasse au principe du maximum par rapport au noyau N, il faut et il suffit qu'on aie la propriété:

[P] Etant donnés une mesure positive λ à support compact F et un point p n'appartenant pas à F, l'inégalité

$$U^{\lambda}(x) \leqq K(x,p)$$

sur F entraîne l'inégalité

$$\widetilde{V}^{\lambda}(x) \leqq \widetilde{N}(x,p)$$

dans tout l'espace, où $\widetilde{V}^{\lambda}$ est le potentiel de λ pris par rapport au noyau $\widetilde{N}(x,y)=N(y,x)$.

On a vu ([4], p.123) que, dans l'espace euclidien R^m à dimension m ($\geqq 3$), le noyau

$$K(x,y) = |x-y|^{-\alpha}, \quad m-2 \leqq \alpha < m,$$

satisfait au principe du maximum par rapport au noyau

$$N(x,y) = |x-y|^{-\beta}, \quad 0 < \beta \leqq m-2.$$

C'est-à-dire, en désignant le potentiel d'ordre α d'une mesure μ (au sens de Riesz-Frostman) par

$$U_{\alpha}^{\mu}(x) = \int |x-y|^{-\alpha} \, d\mu\,(y),$$

pour une mesure positive λ à support compact F, un point p n'appartenant pas à F et deux nombres α et β tels que $m-2 \leqq \alpha < m$ et $0 < \beta \leqq m-2$, l'inégalité

$$U_{\alpha}^{\lambda}(x) \leqq |x-p|^{-\beta}$$

sur F entraîne la même inégalité dans tout l'espace. Dans ce travail, on va démontrer que ce résultat est aussi valid pour tout nombre positif β ($\leqq \alpha$) et que le noyau d'ordre α tel que $m-2 \leqq \alpha < m$ satisfait au principe du maximum (ou du balayage) par rapport au noyau d'ordre β tel que $0 < \beta \leqq \alpha$. Ainsi, on obtient une extension de la théorie de Riesz-Frostman ([2], [3], [6]).

THEOREME 1. *Dans R^m ($m \geqq 3$), le noyau d'ordre α satisfait au principe du maximum par rapport au noyau d'ordre β lorsque*

$$m-2 \leqq \alpha < m \quad \textit{et} \quad 0 < \beta \leqq \alpha\,.$$

Démonstration. Soient λ une mesure positive à support compact F et p un point n'appartenant pas à F. On va démontrer que l'inégalité

$$U_{\alpha}^{\lambda}(x) \leqq |x-p|^{-\beta}$$

sur F entraîne la même inégalité dans tout l'espace. Comme on en a vu au cas où $0 < \beta \leqq m-2$, il suffit de borner au cas où $m-2 \leqq \beta \leqq \alpha$. Soit S une boule disjointe avec F, centrée en le point p et de rayon r. En associant à chaque point x le point x' du rayon $\overrightarrow{px}$ tel que

$$|p-x| \cdot |p-x'| = r^2,$$

soit

$$F' = \{x' \; ; \; x \in F\} \; .$$

Alors, comme on a

$$\frac{|x'-y'|}{|x-y|} = \frac{|p-y'|}{|p-x|}$$

pour deux points quelconques x et y, on a

$$\begin{aligned} |x-p|^{\beta} \, . \; U_{\alpha}^{\lambda}(x) &= |x-p|^{\beta} . \int |x-y|^{-\alpha} d\lambda(y) \\ &= |x-p|^{\beta-\alpha} . \int |x'-y'|^{-\alpha} . |p-y'|^{\alpha} \, d\lambda(y) \\ &= |x-p|^{\beta-\alpha} . \; U_{\alpha}^{\lambda'}(x') \\ &= r^{-2(\alpha-\beta)} \, |x'-p|^{\alpha-\beta} . \; U_{\alpha}^{\lambda'}(x') \end{aligned}$$

où

$$d\lambda'(y') = |p-y'|^{\alpha} \, a\lambda(y) \, .$$

Par suite, on a pour des points x de F

$$U_{\alpha}^{\lambda'}(x') \leqq \mathrm{r}^{2(\alpha-\beta)} \, |x'-p|^{-(\alpha-\beta)} .$$

Le support de λ' étant F', on a

$$U_{\alpha}^{\lambda'}(x') \leqq r^{2(\alpha-\beta)} \, |x'-p|^{-(\alpha-\beta)}$$

dans tout l'espace, lorsque

$$0 < \alpha-\beta \leqq m-2,$$

c'est-à-dire,

$$\alpha-(m-2) \leqq \beta < \alpha.$$

Donc, on a

$$U_{\alpha}^{\lambda}(x) \leqq |x-p|^{-\beta}$$

dans tout l'espace, lorsque

$$m-2 \leqq \alpha < m \quad \text{et} \quad \alpha - (m-2) \leqq \beta < \alpha \, .$$

Considérons en partagant en deux cas.

1. Le cas où $m \geqq 4$. On a

$$\alpha - (m-2) < m-2,$$

car on a

$$\begin{aligned} (m-2)-(\alpha-(m-2)) &= 2(m-2)-\alpha \\ &> 2(m-2)-m = m-4 \geqq 0 \; . \end{aligned}$$

Donc, on a

$$U_{\alpha}^{\lambda}(x) \leqq |x-p|^{-\beta}$$

dans tout l'espace, lorsque

$$m-2 \leqq \beta < \alpha \, .$$

D'autre part, comme l'inégalité

$$U_{\alpha}^{\lambda}(x) \leqq |x-p|^{-\beta}$$

a déjà lieu dans tout l'espace, lorsque

$$m-2 \leqq \alpha < m \quad \text{et} \quad 0 < \beta \leqq m-2\,,$$

on a la même inégalité dans tout l'espace, lorsque

$$m-2 \leqq \alpha < m \quad \text{et} \quad 0 < \beta < \alpha\,.$$

2. Le cas où $m=3$. R^3 étant une partie de R^4, on a

$$U_\alpha^\lambda(x) \leqq |x-p|^{-\beta}$$

dans tout l'espace, lorsque

$$2 \leqq \alpha < 3 \;(<4) \quad \text{et} \quad 0 < \beta < \alpha\,.$$

Si $1 \leqq \alpha < 2$, on a

$$\alpha-(m-2) < 2-(3-2)=1\,.$$

Par suite, on a

$$U_\alpha^\lambda(x) \leqq |x-p|^{-\beta}$$

dans tout l'espace, lorsque

$$1 \leqq \alpha < 2\,, \quad 1 \leqq \beta < \alpha\,.$$

D'autre part, comme l'inégalité

$$U_\alpha^\lambda(x) \leqq |x-p|^{-\beta}$$

a déjà lieu dans tout l'espace, lorsque

$$1 \leqq \alpha < 3 \quad \text{et} \quad 0 < \beta \leqq 1,$$

on a la même inégalité dans tout l'espace, lorsque

$$1 \leqq \alpha < 3 \quad \text{et} \quad 0 < \beta < \alpha\,.$$

Enfin, soit $\beta = \alpha$. Dans R^m ($m \geqq 3$), soient λ une mesure positive à support compact F et p un point n'appartenant pas à F. Si

$$U_\alpha^\lambda(x) \leqq |x-p|^{-\alpha} \quad (m-2 \leqq \alpha < m)$$

sur F, prenons une suite $\{\beta_n\}$ de nombres positifs croissant vers α et une suite $\{c_n\}$ de nombres positifs tendant vers 1 telle que

$$U_\alpha^\lambda(x) \leqq c_n\, |x-p|^{-\beta_n}$$

sur F. Comme on a

$$U_\alpha^\lambda(x) \leqq c_n\, |x-p|^{-\beta_n}$$

dans tout l'espace, on a

$$U_\alpha^\lambda(\mathrm{x}) \leqq |x-p|^{-\alpha}$$

dans tout l'espace. D'où le théorème.

Le théorème entraîne naturellement le corollaire suivant de la même manière que le travail antérieur ([5], p.142).

COROLLAIRE. *Dans* R^m ($m \geqq 3$), *soient* α *un nombre tel que* $m-2 \leqq \alpha < m$, μ *une mesure positive à support compact d'énergie finie d'ordre* α *et* ν *une mesure positive quelconque. Si on a l'inégalité*

$$U_\alpha^\mu(x) \leqq U_\alpha^\nu(x)$$

sur le support de μ, on a l'inégalité

$$U_\beta^\mu(x) \leqq U_\beta^\nu(x)$$

dans tout l'espace pour tout nombre positif β ($\leqq\alpha$).

Soulignons que, si on y pose $\alpha = \beta$, cela revient au principe du maximum de Riesz-Deny[1] dans R^m ($m\geqq 3$).

THEORÈME 2. *Dans $R^m(m\geqq 3)$, soient un nombre positif tel que $m-2\leqq\alpha<m$, une mesure positive à support compact et F un compact de capacité d'ordre α positive. A tout nombre positif $\beta(\leqq\alpha)$, il existe au moins une mesure positive portée par F telle que*

(1) $U_\alpha^{\mu'}(x) = U_\beta^\mu(x)$ *sur F sauf un ensemble de capacité d'ordre α nulle,*

(2) $U_\alpha^{\mu'}(x) \leqq U_\beta^\mu(x)$ *dans tout l'espace.*

Démonstration. Le noyau d'ordre α satisfait au principe du balayage par rapport au noyau d'ordre β, lorsque

$$m-2 \leqq \alpha < m \quad \text{et} \quad 0 < \beta \leqq \alpha.$$

Par suite, en vertu d'un résultat cité au début de ce travail, il existe au moins une mesure positive μ' portée par F telle que

(1) $U_\alpha^{\mu'}(x) = U_\beta^\mu(x)$ sur F sauf un ensemble de capacité d'ordre α nulle et un ensemble de capacité d'ordre β nulle,

(2) $U_\alpha^{\mu'}(x) \leqq U_\beta^\mu(x)$ dans tout l'espace sauf un ensemble de capacité d'ordre α nulle et un ensemble de capacité d'ordre β nulle.

Tout ensemble de capacité d'ordre β nulle est aussi sans doute de capacité d'ordre α nulle. Encore, comme l'inégalité (2) entraîne

$$\int U_\alpha^{\mu'} d\tau \leqq \int U_\beta^\mu d\tau$$

pour les mesures positives et uniformes τ de la masse totale un dans les boules centrées en tous les points x et de rayons r, on a en faisant $r \downarrow 0$

$$U_\alpha^{\mu'}(x) \leqq U_\beta^\mu(x)$$

dans tout l'espace. D'où le théorème.

REMARQUE. La mesure μ', naturellement dépendant de β, réduit à la mesure balayée de la mesure μ sur F de Riesz-Frostman lorsque $\beta=\alpha$, et réduit à la mesure d'équilibre sur F de Fronstman lorsque $\beta\downarrow 0$.

QUESTION. Les théorèmes 1 et 2 sont valids dans R^m ($m\geqq 3$). Comme R^2 est une partie de R^3, ils sont naturellement valids dans R^2 lorsque

$$1 \leqq \alpha < 2(<3) \quad \text{et} \quad 0 < \beta \leqq \alpha.$$

Mais, sont-ils valids dans R^2 lorsque

$$0 < \alpha < 2 \quad \text{et} \quad 0 < \beta \leqq \alpha\ ?$$

---

1) C'étaient Riesz et Deny qui ont établi ce résultat au cas où $\beta=\alpha$. En effet, c'était Deny qui a obtenu un principe du maximum pour des potentiels pris par rapport aux noyaux associés à une famille fondamentale ([1], p.92) et c'était Riesz qui a construit dans $R^m(m\geqq 2)$ une famille fondamentale pour des potentiels d'ordre α ($m-2 \leqq \alpha < m$) ([6], Chap. VII).

Bibliographie

[1] J. DENY; *Familles fondamentales, noyaux associés*, Ann. l'Inst. Fourier, **3**, 1951, pp. 73-101.

[2] O. FROSTMAN; *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles*, Thèse Lund, 1935, pp. 1-118.

[3] ———; *Sur le balayage des masses*, Acta Sci. Szeged, **9**, 1938, pp. 43-51.

[4] N. NINOMIYA; *Sur le problème du balayage généralisé*, Jour. Math., Osaka City Univ., **12**, no. 1-2, 1961, pp. 115-138.

[5] ———; *Sur un principe du maximum dans la théorie du potentiel*, Jour. Math., Osaka City Univ., **12**, no. 1-2, 1961, pp. 139-143.

[6] M. RIESZ; *Intégrale de Riemann-Liouville et potentiels*, Acta Sci. Szeged,**9**, 1938, pp.1-42.