Journal of the Institute of Polytechnics,
Osaka City University,
Vol. 8, No. 2, Series A

Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique

Par Nobuyuki NINOMIYA

(Received April 25, 1957)

Introducton

L'objet principal de la théorie classique du potentiel dans l'espace euclidien R^m à m dimensions est l'étude du problème de l'équilibre et du problème du balayage.

PROBLÈME DE L'EQUILIBRE : Etant donné un compact C dans R^m, y-a-t'il toujours une distribution de masse positive λ portée par C dont le potentiel

$$U^{\lambda}(M) = \int \varphi(M, Q)\, d\lambda(Q)$$

est égal à une constante sur C ?

PROBLÈME DU BALAYAGE : Etant donnée une distribution de masse positive μ dans R^m, y-a-t'il toujours sur un compact arbitraire C une distribution de masse positive μ' portée par C dont le potentiel

$$U^{\mu'}(M) = \int \varphi(M, Q)\, d\mu'(Q)$$

est égal au potentiel de μ sur C ?

Ici, la fonction fondamentale φ (appelée noyau) est

$$\varphi(M, Q) = \overline{MQ}^{-1} \qquad (\text{si } m = 3)\ ,$$
$$= -\log \overline{MQ} \quad (\text{si } m = 2)\ .$$

Dépuis que ces problèmes ont été résolus en toute généralité par C de La Vallée-Poussin ([18]) en 1932, les recherches du potentiel pris par rapport à un noyau généralisé montaient sur la scène de la théorie du potentiel. En 1935, O. Frostman ([10]) a complété dans sa thèse célèbre la théorie générale du potentiel pris par rapport au noyau d'ordre α

$$\varphi(M, Q) = \overline{MQ}^{\alpha - m} \qquad (0 < \alpha \leqq 2)\ ,$$

dans laquelle il a résolu le problème de l'équilibre pour le noyau d'ordre α. Sa théorie est fondée sur un théorème du maximum qui est une conséquence du fait que le potentiel d'une distribution de masse positive pris par rapport au noyau d'ordre α est sousharmonique dans tout domaine ne contenant aucune masse positive. Récemment, K. Kunugui ([13]) et N. Ninomiya ([14]) ont étendu la théorie de O. Frostman au cas où le noyau $\varphi(M,Q)$ est positif, fonction décroissante de la seule distance $\overline{MQ}$ et convexe de $\overline{MQ}^{-1}$ (si m=3) ou $-\log \overline{MQ}$ (si m=2). En 1938, M. Riesz ([19]) a résolu le problème du balayage pour le noyau d'ordre α

en s'appuyant sur la théorie de O. Frostman.

Mais, la méthode du balayage n'était jamais simple même dans le cas du noyau newtonien dans l'espace ordinaire. Il est donc un travail remarquable dans la théorie récente du potentiel que H. Cartan ([1], [2]) a complété la théorie générale du balayage pour le noyau newtonien

$$\varphi(M, Q) = \overline{MQ}^{2-m} \qquad (m \geqq 3) .$$

En démontrant son théorème du maximum pour les potentiels newtoniens et son théorème fondamental sur le fait que l'ensemble $\mathfrak{E}$ des distributions positives d' énergie finie est complet pour la norme-énergie, il a étudié systématiquement le balayage des distributions positives sur les ensembles quelconques et la notion des points réguliers ou irréguliers des ensembles quelconques. Son théorème fondamental est le point de départ des recherches de J. Deny ([7]). Il a construit l'espace hilbertien complet dans lequel l'espace linéaire $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{E}$ ayant l'énergie mutuelle comme produit scalaire est partout dense. Alors, les éléments ajoutés à $\mathfrak{A}$ ne sont plus des distributions usuelles de masses (mesures de Radon), mais des distributions au sens de L. Schwartz. Il a donc défini le potentiel comme produit de composition de deux distributions K et T au sens de L. Schwartz

$$U^T = K * T,$$

et fait le développement de la théorie de H. Cartan pour le potentiel de ce type en faisant des hypothèses convenables sur le noyau K.

Les recherches les plus nouvelles et les plus générales sur les problèmes de l'équilibre et du balayage progressent surtout par l'effort de quelques mathématiciens en France. H. Cartan et J. Deny ([31]) ont démontré en collaboration qu'il y a identité entre les noyaux satisfaisant aux théorèmes du maximum et les noyaux pour lesquel les problèmes de l'équilibre et du balayage sont solubles. Mais, il me semble qu'ils s'appuient trop sur l'hypothèse de l'énergie. J. Deny ([8], [9]) a encore étudié les problemes de l'équilibre et du balayage pour les noyaux s'appelés noyaux élémentaires. Le problème fondamental de la théorie du potentiel consiste à la détermination effective des noyaux pour lesquels les problèmes de l'équilibre et du balayage sont solubles. Sous ce point de vue, ses résultats nous donnent satisfaction. Il me semble que les recherches de M. Riesz ([19]) ont inspiré son idée de noyau élémentaire.

Le travail présent est consacré à profondir les recherches de H. Cartan et J. Deny, c'est-à-dire, à envisager les relations entre les théorèmes du maximum et les problèmes de l'équilibre et du balayage. Dans l'espace euclidien R^m à m ($\geqq 1$) dimension ou plus généralement l'espace localement compact topologique Ω, soit $K(x, y)$ une fonction positive, continue, et symétrique en x et en y de Ω, $K(x,x)$ pouvant être $+\infty$. Le potentiel et l'énergie d'une mesure μ dans Ω (distribution de masse) pris par rapport au noyau K sont définis comme

$$U^{\mu}(x) = \int K(x, y)\, d\mu(y)$$

et

$$I(\mu) = \iint K(x, y)\, d\mu(y)\, d\mu(x)$$

respectivement. On doit naturellement admettre l'hypothèse que tout ensemble ouvert dans Ω porte des mesures positives ($\neq 0$) dont les potentiels sont bornés sur tout compact dans Ω[1]. Le potentiel $U^{\mu}(x)$ d'une mesure positive μ à support compact S_{μ} est semi-continu inférieurement en tout point x de Ω et continu en tout point x du complémentaire de S_{μ}. Le noyau K étant symétrique, on a toujours la relation réciproque

$$\int U^{\mu}\, d\nu = \int U^{\nu}\, d\mu$$

pour tout couple (μ, ν) de deux mesures quelconques μ et ν. Comme cette relation évidente joue un rôle très utile au cours du raisonnement, l'hypothèse que le noyau K est symétrique est indispensable dans ce travail.

Dans le premier paragraphe, on étudiera la quantité

$$G(\mu, \nu) = \frac{I(\mu) \times I(\nu)}{[\int U^{\mu}\, d\nu]^2}$$

définie pour tout couple (μ, ν) de deux mesures positives μ et ν portées par chacun de deux ensembles boréliens et disjoints. Elle est le point de départ de ce travail. Un couple (μ, ν) pour lequel $G(\mu, \nu)$ est minimum, s'il existe, jouit de la propriété caractéristique. On sait que, étant donnés un compact C et une mesure positive μ, la variation de Gauss

$$G(\nu) = I(\nu) - 2\int U^{\mu}\, d\nu$$

définie pour des mesures positives ν portées par C fournit un outil très important dans la théorie classique du potentiel, et encore que K. Kunugui ([13]) et S. Kametani ([12]) ont obtenu des résultats sur la forme plus générale de la variation de Gauss. Mais je signalerai que la quantité $G(\mu, \nu)$ est un outil plus utile que la variation classique de Gauss dans la théorie du potentiel pris par rapport au noyau positif et symétrique. Dans le second paragraphe, on étudiera la condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau K soit de type positif ou satisfasse au principe d'énergie. Il en résulte qu'un noyau satisfaisant au théorème du maximum au sens de O. Frostman ou au sens de H. Cartan est nécessairement de type positif. Dans le 3-ième paragraphe, on démontrera que, pour que le problème de l'équilibre (resp. du balayage)soit soluble pour un noyau, il faut et il suffit qu'il satisfasse au théorème du maximum au sens de O. Frostman [resp. de H. Cartan]. Il en résulte que, si le problème de l'équilibre ou du balayage est soluble pour un noyau, il est nécessairement de type positif. Dans le 4-ième paragraphe, on étudiera la relation entre le théorème du maximum au sens de O. Frostman et le théorème du

1) Il est connu que, pour cela, si le noyau est de type $K(x, y) = K(x-y)$ dans R^m, il faut et il suffit que $K(x)$ soit sommable dans un voisinage de l'origine 0. Voir K. Kunugui [13], p. 69.

maximum au sens de H. Cartan. On verra que le théorème du maximum au sens de H. Cartan entraîne le théorème de maximum au sens de O. Frostman toutes les fois qu'un noyau K est une fonction décroissante de la seule distance $|x-y|$ dans R^m. Mais, inversement, sous quelles conditions posées au noyau K le théorème du maximum au sens de O. Frostman entraîne-t'il le théorème du maximum au sens de H. Cartan ? Au grand regret, j'en ne peux donner aucune réponse. Il me semble que la recherche de M. Riesz ([19]) fait une référence à ce problème, mais son raisonnement n'est valide qu'au noyau d'ordre α. Dans le 5-ième paragraphe, on étudiera la condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau satisfasse au principe d'unicité. Il n'y a guère les résultats sur l'unicité des mesures produisant un potentiel donné pris par rapport au noyau généralisé. Au cas où le noyau satisfait au théorème du maximum au sens de H. Cartan on donne un résultat, ce qui a été obtenu toutefois, je me confesse, par suggestion d'un résultat de J. Deny ([18]).

J'ai publié autrefois ([15], [16]) les résultats de la première partie de ce travail. Je veux les reprendre pour y apporter quelques précisions et compléments. Ce travail se borne aux recherches des potentiels pris par rapport aux noyaux symétriques. Mais, je signale que quelques mathématiciens en France progressent dans les recherches sur les potentiels pris par rapport aux noyaux quelconques (symétriques ou non) ([4], [5]).

1. La quantité $G(\mu, \nu)$ définie pour tout couple de deux mesures positives

Soient E_1 et E_2 deux ensembles boréliens et disjoints contenus dans un compact fixé. On pose

$$G(\mu, \nu)=\frac{I(\mu)\times I(\nu)}{[\int U^{\mu}\,d\nu]^2}$$

pour tout couple (μ, ν) de deux mesures positives μ et ν ($\neq 0$) portées par E_1 et par E_2 respectivement. Elle a le sens seulement au cas où il y a des couples (μ, ν) telles que $I(\mu)$, $I(\nu)$ et $\int U^{\mu}\,d\nu$ ensemble soient positifs et finis. On appelle couple minimal sur E_1 et E_2 tout couple (μ_0, ν_0) pour lequel $G(\mu, \nu)$ est minimum parmi tous les couples (μ, ν) de deux mesures positives μ et ν portées par E_1 et par E_2 respectivement. Alors, on a

LEMME 1. *S'il existe un couple minimal (μ_0, ν_0) sur E_1 et E_2, en posant*

$$a=I(\mu_0)\,,\quad b=I(\nu_0)\,,\quad c=\int U^{\mu_0}\,d\nu_0$$

et

$$g_1(x)=c\,U^{\mu_0}(x)-a\,U^{\nu_0}(x)\,,\quad g_2(x)=c\,U^{\nu_0}(x)-b\,U^{\mu_0}(x)$$

dans la supposition $0<a,b,c<+\infty$, $g_1(x)$ [resp. $g_2(x)$] jouit des propriétés suivantes :

(1) *$g_1(x)$ [resp. $g_2(x)$] $\leqq 0$ sur E_1 [resp. E_2] presque partout pour μ_0 [resp. ν_0],*

(2) *$g_1(x)$ [resp. $g_2(x)$] $\geqq 0$ sur E_1 [resp. E_2] presque partout pour toute mesure*

positive dont le potentiel est borné sur tout compact[2], *en particulier, si* E_1 *et* E_2 *sont des compacts,* $g_1(x)$ [*resp.* $g_2(x)$] $\geqq 0$ *sur* E_1 [*resp.* E_2] *presque partout pour toute mesure positive d'énergie finie*[2].

En effet, la relation

$$G(\mu_0+\sigma\,,\,\nu_0) \geqq G(\mu_0\,,\,\nu_0)$$

a lieu pour toute mesure σ (signe quelconque) portée par E_1 telle que $\mu+\sigma$ soit positive, d'énergie finie et $\int U^{\nu_0}\,d\sigma < +\infty$. En tenant compte de la relation réciproque entre deux mesures quelconques, elle entraîne l'inégalité

$$0 \leqq 2\int g_1\,d\sigma + [c^2 I(\sigma) - a\,(\int U^{\nu_0}\,d\sigma)^2]\,.$$

D'abord, supposons qu'un compact quelconque A contenu dans l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(x) > \delta > 0$ est de mesure positive pour μ_0. Alors, si on prend pour σ la mesure $-\varepsilon\mu'_0$ $(0<\varepsilon<1)$ en désignant par μ'_0 la restriction de μ'_0 à A, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} 0 &\leqq -2\,\varepsilon\int g_1\,d\mu_0 + \varepsilon^2\,[c^2 I(\mu'_0) - a(\int U^{\nu_0}\,d\mu'_0)^2] \\ &\leqq -2\varepsilon\,\delta\cdot\mu_0(A) + \varepsilon^2\,[\qquad \text{"} \qquad]\,. \end{aligned}$$

Puisque le coefficient de ε^2 est fini en vertu de l'hypothèse $0<a,b,c<+\infty$, c'est contradictoire pour tout nombre positif assez petit ε. δ étant arbitraire, l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(x)>0$ est d'ailleurs de mesure nulle pour μ_0. Ensuite, supposons qu'un compact A contenu dans l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(x) \leqq -\delta<0$ est de mesure positive pour une certaine mesure positive τ dont le potentiel est borné sur tout compact. Alors, si on prend pour σ la mesure $\varepsilon\tau'$ $(0<\varepsilon<1)$ en désignant par τ' la restriction de τ à A, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} 0 &\leqq 2\,\varepsilon\cdot\int g_1\,d\tau + \varepsilon^2\,[c^2 I(\tau') - a\int U^{\nu_0}\,d\tau'^2] \\ &\leqq -2\,\varepsilon\,\delta\cdot\tau'(A) + \varepsilon^2\,[\qquad \text{"} \qquad]\,. \end{aligned}$$

Le coefficient de ε^2 est fini, car $U^{\tau'}$ est borné sur tout compact et le support de ν_0 est un compact. C'est contradictoire pour tout nombre positif assez petit ε. δ étant arbitraire, l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(x)<0$ est d'ailleurs de mesure nulle pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact. En particulier, soient E_1 et E_2 les compacts. Supposons qu'un compact A contenu dans l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(x) \leqq -\delta<0$ est de mesure positive pour une certain mesure positive τ d'énergie finie. Alors, si on prend pour σ la mesure $\varepsilon\tau'$ $(0<\varepsilon<1)$ en désignant par τ' la restriction de τ à A, $\mu_0+\varepsilon\tau'$ est d'énergie finie et le coefficient de ε^2 est fini, car on a

2) Dans la théorie usuelle du potentiel, l'énoncé "de mesure nulle pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact" signifie "de capacité nulle", et l'énoncé "de mesure nulle pour toute mesure positive d'énergie finie" signifie "de diamètre transfini nul". Les deux ne sont pas toujours équivalents. On dira désormais qu'une propriété a lieu "à peu près partout (à p p.p.)", si elle ne tombe en défaut qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle pour toute mesure positive d'énergie finie.

$$I(\mu_0) < +\infty, \quad I(\tau') < +\infty$$

et

$$\int U^{\mu_0} d\tau' \leqq \int \frac{a\, U^{\nu_0} - \delta}{c} d\tau' = \frac{a}{c} \int U^{\tau'} d\nu_0 - \frac{\delta}{c} \int_A d\tau < +\infty$$

du fait que $U^{\tau'}$ est fini et continu sur le support de ν_0. Il en résulte que l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(x) < 0$ est de mesure nulle pour toute mesure positive d'énergie finie.

REMARQUE 1. Si E_1 et E_2 sont les compacts disjoints qui portent des mesures positives d'énergie finie, il y a toujours un couple minimal sur E_1 et E_2.

En effect, posons

$$G_0 = \inf G(\mu, \nu) ,$$

où inf est pris par rapport à tous les couples (μ, ν) de deux mesures positives μ et ν portées par E_1 et par E_2 respectivement. Alors, il existe une suite de couples (μ_n, ν_n) de deux mesures positives μ_n et ν_n portées par E_1 et par E_2 respectivement, tels que

$$G(\mu_n, \nu_n) \downarrow G_0 .$$

G_0 et les masses totales de μ_n et de ν_n étant finies, posons

$$\mu_n^{(1)} = \frac{\mu_n}{\int d\mu_n} \quad \text{et} \quad \nu_n^{(1)} = \frac{\nu_n}{\int d\nu_n} ,$$

alors on a

$$G(\mu_n^{(1)}, \nu_n^{(1)}) = G(\mu_n, \nu_n) \downarrow G_0 .$$

A partir de chacune des suites $\{\mu_n^{(1)}\}$ et $\{\nu_n^{(1)}\}$, on peut extraire des suites partielles $\{\mu_{ni}^{(1)}\}$ et $\{\nu_{ni}^{(1)}\}$ qui convergent (vaguement) vers des mesures positives μ_0 et ν_0 de masse totale un portées par E_1 et par E_2 respectivement. Alors, comme il est bien connu, on a

$$I(\mu_0) \leqq \varliminf_{i\to\infty} I(\mu_{ni}^{(1)}), \ I(\nu_0) \leqq \varliminf_{i\to\infty} I(\nu_{ni}^{(1)})$$

et

$$\int U^{\mu_0} d\nu_0 = \lim_{i\to\infty} \int U^{\mu_{ni}^{(1)}} d\nu_{ni}^{(1)}$$

en vertu de la convergence uniforme de $U^{\mu_{ni}^{(1)}}(x)$ vers $U^{\mu_0}(x)$ sur E_2. On a donc

$$G(\mu_0, \nu_0) \leqq \varliminf_{i\to\infty} G(\mu_{ni}^{(1)}, \nu_{ni}^{(1)}) = G_0 .$$

D'autre part, on a naturellement

$$G(\mu_0, \nu_0) \geqq G_0.$$

Ainsi, le couple (μ_0, ν_0) possède les propriétés requises.

En fixant dans $G(\mu, \nu)$ une mesure positive μ portée par E_1, posons

$$G^*(\nu) = \frac{I(\nu)}{[\int U^{\mu} d\nu]^2}$$

pour toute mesure positive ν ($\neq 0$) portée par E_2. Elle a un sens seulement au cas où il y a des mesures ν telles que $I(\nu)$ et $\int U^{\mu} d\nu$ soient positifs et finis. La mesure

μ peut donc être d'énergie infinie. Alors, on a, de la même façon que le lemme 1,

LEMME 1*. *S'il existe une mesure positive ν_0 pour laquelle $G(\nu)$ est minimum parmi toutes les mesures positives portées par E_2, en posant $b=I(\nu_0)$, $c=\int U^{\nu_0}\,d\mu$ et*

$$g(x)=c\,U^{\nu_0}(x)-b\,U^{\mu}(x)$$

dans l'hypothèse $0<b$, $c<+\infty$, $g(x)$ jouit des propriétés suivantes :

(1) $g(x)\leqq 0$ *sur E_2 presque partout pour ν_0,*

(2) $g(x)\geqq 0$ *sur E_2 presque partout pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact ; en particulier, si E_1 et E_2 sont des compacts, $g(x)\geqq 0$ p.p.p. sur E_2.*

REMARQUE 1*. Soient E_1 et E_2 des compacts disjoints et μ une mesure positive ($\not\equiv 0$) quelconque portée par E_1. Si E_2 porte des mesures positives d'énergie finie, il existe toujours une mesure positive pour laquelle $G^*(\nu)$ est minimum parmi toutes les mesures positives ($\not\equiv 0$) portées par E_2.

REMARQUE 2. Soient E_1 et E_2 des compacts disjoints et μ une mesure positive ($\not\equiv 0$) quelconque portée par E_1. Si E_2 porte des mesures positives d'énergie finie, on peut trouver d'après le lemme 1 une mesure positive μ' portée par E_2 telle que

(1) $U^{\mu'}(x)\leqq U^{\mu}(x)$ sur E_2 presque partout pour μ' ,

(2) $U^{\mu'}(x)\geqq U^{\mu}(x)$ p.p.p. sur E_2 .

Mais, pour cela, on peut aussi utiliser au lieu de $G^*(\nu)$ la variation de Gauss

$$G'(\nu)=I(\nu)-2\int U^{\mu}d\nu \ .$$

Comme il est bien connu ([10], p. 65), il existe une mesure positive μ' pour laquelle $G'(\nu)$ est minimum parmi toutes les mesures positives ν de masse totale un portées par E_2, et il existe une constante c telle que

(1) $U^{\mu'}(x)\leqq U^{\mu}(x)+c$ sur E_2 presque partout pour μ' ,

(2) $U^{\mu'}(x)\geqq U^{\mu}(x)+c$ p.p.p. sur E_2 .

On ne peut ici placer toujours $c=0$. S. Kametani ([12]) a démontré qu'il existe une mesure μ' pour laquelle $G'(\nu)$ est minimum parmi toutes les mesures non-négatives ν portées par E_2, et que cette μ' jouit des prepriétés suivantes :

(1) $U^{\mu'}(x)\leqq U^{\mu}(x)$ sur E_2 presque partout pour μ' ,

(2) $U^{\mu'}(x)\geqq U^{\mu}(x)$ p.p.p. sur E_2 .

Il signale que cette μ' s'annule seulement au cas où E_2 est de mesure nulle pour toute mesure positive d'énergie finie. Sa démonstration de l'existence de μ' n'est pas simple. Toutefois, l'existence d'une mesure positive pour laquelle $G^*(\nu)$ est minimum parmi toutes les mesures positives portées par E_2 est presque évidente, car on peut se borner aux mesures positives de masse totale un portées par E_2 comme plus haut. De ce point de vue, $G^*(\nu)$ est plus utile que $G'(\nu)$.

Ensuite, supposons qu'on a toujours

$$G(\mu,\nu)\geqq 1$$

pour tout couple (μ,ν) de deux mesures positives μ et ν portées par chacun de deux ensembles boréliens et disjoints contenus dans un compact. Alors, on a

LEMME 2. *Soient E_1 et E_2 deux ensembles boréliens et disjoints contenus dans un compact fixé. Si $G(\mu_0, \nu_0)=1$ pour un couple (μ_0, ν_0) de deux mesures positives μ_0 et ν_0 $(\neq 0)$ d'énergie finie portées par E_1 et par E_2 respectivement, on a*

$$g_1(x)=g_2(x)=0$$

dans tout l'espace Ω presque partout pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact, $g_1(x)$ et $g_2(x)$ désignant les fonctions définies dans le lemme 1.

En effet, le couple (μ_0, ν_0) est un couple minimal sur E_1 et E_2. Soit E_1' l'ensemble des points de E_1 tels que $g_1(x) \leqq 0$. Alors, comme μ_0 est portée par E_1' en vertu du lemme 1, le couple (μ_0, ν_0) est aussi un couple minimal sur E_1' et $E_2+(E_1-E_1')$, ce que entraîne

$$g_2(x) \geqq 0$$

sur $E_2+(E_1-E_1')$ presque partout pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact. En particulier, il en est ainsi sur E_1-E_1'. D'après l'égalité

$$cg_1(x)+ag_2(x)=0\ ,$$

on a

$$g_1(x) \leqq 0$$

sur E_1-E_1' presque partout pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact. D'autre part, comme on a

$$g_1(x)>0$$

sur E_1-E_1', E_1-E_1' est de mesure nulle pour toute telle mesure. On a d'ailleurs

$$g_1(x)=0$$

sur E_1 presque partout pour toute telle mesure. D'autre part, on a de même

$$g_2(x)=0$$

sur E_2 presque partout pour toute telle mesure. Par suite, on a

$$g_1(x)=g_2(x)=0$$

sur E_1 et sur E_2 presque partout pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact. Ensuite, soit E un ensemble borélien quelconque, contenu dans un compact, tel que $E \cdot E_1 = E \cdot E_2 = 0$. Alors, puisque le couple (μ_0, ν_0) est un couple minimal sur E_1+E et E_2 ou E_1 et E_2+E, on a

$$g_1(x) \geqq 0 \text{ et } g_2(x) \geqq 0$$

sur E presque partout pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact. En tenant compte de

$$cg_1(x)+ag_2(x) \equiv 0\ .$$

on a d'ailleurs

$$g_1(x)=g_2(x)=0$$

sur E presque partout pour toute telle mesure.

2. Principe d'énergie

Dans ce paragraphe, on va caractériser les noyaux de type positif ou satisfaisant au principe d'énergie. Un noyau K est dit de type positif dans Ω si l'intégrale d'énergie

$$I(\sigma) = \iint K(x, y)\, d\sigma(y)\, d\sigma(x)$$

de toute mesure σ (signe quelconque), lorsqu'elle existe, est toujours $\geqq 0$. Un noyau K est dit satisfaire au principe d'énergie dans Ω, si l'intégrale d'énergie $I(\sigma)$ de toute mesure σ (signe quelconque) portée par un compact, lorsqu'elle existe, est toujours $\geqq 0$ et l'égalité n'a lieu qu'au cas de $\sigma \equiv 0$. Ce principe signifie qu'un noyau est strictement de type positif. L'étude sur le principe d'énergie est très important, car il conduisait à l'unicité des mesures dans les théorèmes de la théorie usuelle du potentiel. Comme bien connu, le noyau

$$K(x, y) = |x-y|^{\alpha-m} \quad (0 < \alpha < m)$$

satisfait au principe d'énergie dans R^m ([10], p. 28). Plus généralement, T. Ugaheri ([20], p. 174) a démontré qu'un noyau K satisfait au principe d'énergie dans R^m ($m \geqq 3$) s'il est une fonction de la seule distance $r = |x-y|$ telle que $r^{m-2} K(r)$ soit décroissante de r.

On peut montrer qu'il y a identité entre les noyaux de type positif ou satisfaisant au principe d'énergie et les noyaux satisfaisant à une sorte de principe du maximum. On a

Théorème 1. *Pour qu'un noyau K soit de type positif dans Ω, il faut et il suffit qu'il juisse de la propriété suivante :*

[P_1] *Soient μ et ν des mesures positives d'énergie finie à support compact. Si on a*

$$U^{\mu}(x) \leqq U^{\nu}(x)$$

sur le support S_μ de μ, on a la même inégalité au moins en un point du support S_ν de ν.

Théorème 2. *Pour qu'un noyau K satisfasse au principe d'énergie dans Ω, il faut et il suffit qu'il juisse de la propriété suivante :*

[P_2] *Soient μ et ν des mesures positives distinctes ($\mu \not\equiv \nu$) d'énergie finie à support compact. Si on a*

$$U^{\mu}(x) \leqq U^{\nu}(x)$$

sur le support S_μ de μ, on a

$$U^{\mu}(x) < U^{\nu}(x)$$

sur un ensemble de mesure positive pour ν.

On les démontre ensemble pour plus de commodité.

Démonstration. Les conditions sont évidemment nécessaires. En effet, on a

$$\begin{aligned} I(\mu-\nu) &= I(\mu) - 2\int U^{\mu} d\nu + I(\nu) \\ &= \int (U^{\mu} - U^{\nu})\, d\mu + \int (U^{\nu} - U^{\mu})\, d\nu \,. \end{aligned}$$

Si le noyau K est de type positif, $I(\mu-\nu)\geqq 0$ et $\int(U^{\mu}-U^{\nu})\,d\mu\leqq 0$ entraînent naturellement $\int(U^{\nu}-U^{\mu})\,d\nu\geqq 0$. Si le noyau K satisfait au principe d'énerige, $I(\mu-\nu)>0$ et $\int(U^{\mu}-U^{\nu})\,d\mu\leqq 0$ entraînent naturellement $\int(U^{\nu}-U^{\mu})\,d\nu>0$. Il s'agit donc de démontrer que les conditions sont suffisantes. Etant donnée une mesure σ $(\neq 0)$ de signe variable, on peut trouver deux ensembles boréliens et disjoints E_1 et E_2 tels que σ soit représentée comme différence de deux mesures positives $(\neq 0)$ μ et ν portées par E_1 et par E_2 respectivement. Pour démontrer $I(\sigma)\geqq 0$ [resp. >0], il suffit de démontrer $G(\mu,\nu)\geqq 1$ [resp. >1]. Supposons que le noyau K jouit de la propriété (P_1). D'abord, si E_1 et E_2 sont les compacts disjoints, il existe d'après la remarque 1 un couple (μ_0,ν_0) pour lequel $G(\mu,\nu)$ est minimum parmi tous les couples (μ,ν) de deux mesures positives μ et ν portées par E_1 et par E_2 respectivement. On a en vertu du lemme 1

$$cU^{\mu_0}(x)\leqq aU^{\nu_0}(x)$$

sur E_1 presque partout pour μ_0. Comme tout potentiel d'une mesure positive à support compact est semi-continu inférieurement dans tout l'espace et continu dans le complémentaire du support, on a

$$(1)\quad cU^{\mu_0}(x)\leqq aU^{\nu_0}(x) \text{ sur le support de } \mu_0\,,$$

et similairement

$$(2)\quad cU^{\nu_0}(x)\leqq bU^{\mu_0}(x) \text{ sur le support de } \nu_0\,.$$

Alors, puisque le noyau K jouit de la propriété (P_1), ces relations ont lieu en même temps au moins en un point ξ du support de ν_0. On a donc

$$\frac{c}{a}U^{\mu_0}(\xi)\leqq U^{\nu_0}(\xi)\leqq \frac{b}{c}U^{\mu_0}(\xi)\,,$$

ce qui entraîne

$$G(\mu_0,\nu_0)=\frac{ab}{c^2}\geqq 1\,.$$

Par suite, on a

$$G(\mu,\nu)\geqq 1\,,$$

pour tout couple (μ,ν) de mesures positives portées l'une par E_1, l'autre par E_2. Ensuite, supposons que E_1 et E_2 ne sont pas les compacts. On peut trouver des suites $\{F_n^{(1)}\}$ et $\{F_n^{(2)}\}$ de compacts tels que

$$(1)\quad F_1^{(1)}\subset F_2^{(1)}\subset F_3^{(1)}\subset\cdots\subset F_n^{(1)}\subset\cdots\subset E_1\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\mu(F_n^{(1)})=\mu(E_1)\,(\leqq+\infty)\,,$$

$$(2)\quad F_1^{(2)}\subset F_2^{(2)}\subset F_3^{(2)}\subset\cdots\subset F_n^{(2)}\subset\cdots\subset E_2\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\nu(F_n^{(2)})=\nu(E_2)\,(\leqq+\infty)\,.$$

Soient μ_n et ν_n les restrictions de μ et de ν à $F_n^{(1)}$ et à $F_n^{(2)}$ respectivement, alors on a d'apres ce qui précède

$$G(\mu_n,\nu_n)\geqq 1\,.$$

On a donc

$$G(\mu, \nu) = \lim_{n\to\infty} G(\mu_n, \nu_n) \geqq 1 \ .$$

Enfin, supposons que le noyau K jouisse de la propriété $[P_1]$. Alors, on a

$$G(\mu, \nu) \geqq 1$$

pour tout couple (μ, ν) de mesures positives portées par deux ensembles boréliens et disjoints E_1 et E_2 contenus dans un compact. Par suite, si on avait

$$G(\mu_0, \nu_0) = 1$$

pour un certain couple (μ_0, ν_0), ce serait un couple minimal sur E_1 et E_2. Soient

$$a = I(\mu_0) \ , \quad b = I(\nu_0) \ , \quad c = \int U^{\mu_0} d\nu_0 \ ,$$

$$g_1(x) = c\, U^{\mu_0}(x) - a\, U^{\nu_0}(x) \ \text{ et } \ g_2(x) = c\, U^{\nu_0}(x) - b\, U^{\mu_0}(x) \ .$$

Alors, on a en vertu du lemme 1

$$g_2(x) \leqq 0$$

sur E_2 presque partout pour ν_0. On a encore

$$cg_1(x) + ag_2(x) \equiv 0$$

partout dans tout l'espace Ω en vertu de

$$G(\mu_0, \nu_0) = \frac{ab}{c^2} = 1 \ .$$

Par conséquent, on a

$$g_1(x) \geqq 0$$

sur E_2 presque partout pour ν_0. D'autre part, comme on a en vertu de lemme 1

$$g_1(x) \leqq 0$$

sur E_1 presque partout pour μ_0, on a d'après la propriété $[P_2]$

$$g_1(x) < 0$$

sur un ensemble de mesure positive pour ν_0, ce qui est contradictoire. Ainsi, on a

$$G(\mu, \nu) > 1$$

pour tout couple (μ, ν) de mesures positives portées par deux ensembles boréliens et disjoints contenus dans un compact. C.Q.E.D.

Considérons les noyaux K satisfaisant au principe du maximum au sens de O. Frostman ou de H. Cartan.

Premier principe du maximum (O. Frostman) : Soit λ une mesure positive à support compact. Si on a

$$U^{\lambda}(x) \leqq 1$$

sur le support S_λ de λ, on a la même inégalité partout dans tout l'espace Ω.

Second principe du maximum (H. Cartan) : Soient μ une mesure positive d'énergie finie à support compact et ν une mesure positive quelconque. Si on

$$U^{\mu}(x) \leqq U^{\nu}(x)$$

sur le support S_μ de μ, on a la même inégalité partout dans tout l'espace Ω.

Alors, on a

Théorème 3. *Si un noyau K satisfait au premier ou second principe du maximum dans Ω, il est nécessairement de type positif dans Ω.*

Démonstration. Un noyau K satisfaisant au second principe du maximum est évidemment de type positif en vertu du théorème 1. Il s'agit donc de démontrer qu'un noyau K satisfaisant au premier principe du maximum est de type positif. Pour cela, comme il a été dit dans la démonstration des théorèmes antérieurs, il suffit de démontrer

$$G(\mu, \nu) \geqq 1$$

pour tout couple (μ, ν) de deux mesures positives μ et ν portées par chacun de deux ensembles boréliens et disjoints E_1 et E_2. Il suffit de le démontrer dans le cas où E_1 et E_2 sont tous deux des compacts. En effet, s'il en est ainsi, $\{F_n^{(1)}\}$ et $\{F_n^{(2)}\}$ étant des suites des compacts tels que

$$(1) \quad F_1^{(1)} \subset F_2^{(1)} \subset F_3^{(1)} \subset \cdots\cdot \subset F_n^{(1)} \subset \cdots\cdot \subset E_1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n^{(1)}) = \mu(E_1) \, (\leqq +\infty),$$

$$(2) \quad F_1^{(2)} \subset F_2^{(2)} \subset F_3^{(2)} \subset \cdots\cdot \subset F_n^{(2)} \subset \cdots\cdot \subset E_2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \nu(F_n^{(2)}) = \nu(E_2) \, (\leqq +\infty) .$$

et μ_n et ν_n désignant les restrictions de μ et de ν à $F_n^{(1)}$ et à $F_n^{(2)}$ respectivement, on a

$$G(\mu, \nu) = \lim_{n\to\infty} G(\mu_n, \nu_n) \geqq 1 .$$

Lorsque E_1 et E_2 sont des compacts, il existe un couple minimal (μ_0, ν_0) sur E_1 et E_2 en vertu de la remarque 1. Alors, on a en vertu du lemme 1

$$c\, U^{\mu_0}(x) \leqq a\, U^{\nu_0}(x)$$

sur E_1 presque partout pour μ_0. Comme tout potentiel d'une mesure positive à support compact est semi-continu inferieurement dans tout l'espace Ω et continu dans le complémentaire du support, on a

$$(1) \quad c\, U^{\mu_0}(x) \leqq a\, U^{\nu_0}(x) \text{ sur le support } F_1 \text{ de } \mu_0 ,$$

et similairement

$$(2) \quad c\, U^{\nu_0}(x) \leqq b\, U^{\mu_0}(x) \text{ sur le support } F_2 \text{ de } \nu_0 .$$

Si le noyau K satisfait au premier principe du maximum, on a

$$\frac{c}{a} \sup_{x\in F_1} U^{\mu_0}(x) \leqq \sup_{x\in F_1} U^{\nu_0}(x) \leqq \sup_{x\in F_2} U^{\nu_0}(x)$$
$$\leqq \frac{b}{c} \sup_{x\in F_2} U^{\mu_0}(x) \leqq \frac{b}{c} \sup_{x\in F_1} U^{\mu_0}(x) ,$$

ce qui entraîne

$$G(\mu_0, \nu_0) = \frac{ab}{c^2} \geqq 1 .$$

Ainsi, on a

$$G(\mu, \nu) \geqq 1$$

pour tout couple (μ, ν) de deux mesures positives μ et ν portées par E_1 et par E_2 respectivement. C.Q.F.D.

3. Principe d'équilibre et principe du balayage

Les recherches concernant les principes d'équilibre et du balayage occupent la place la plus importante dans la théorie du potentiel. Un noyau K est dit satisfaire au principe d'équilibre dans Ω, lorsque, étant donné un compact quelconque F, il existe au moins une mesure positive λ portée par F telle que

$$(1) \quad U^{\lambda}(x)=1 \qquad \text{p.p.p. sur } F\,,$$
$$(2) \quad U^{\lambda}(x)\leqq 1 \qquad \text{partout dans tout l'espace } \Omega\,.$$

Cette λ (peut-être nulle) s'appelle une mesure d'équilibre sur F et $U^{\lambda}(x)$ un potentiel d'équilibre sur F. Un noyau K est dit satifaire au principe du balayage dans Ω, lorsque, étant donné un compact quelconque F, on peut associer à toute mesure positive μ au moins une mesure positive μ' portée par F telle que

$$(1) \quad U^{\mu'}(x)=U^{\mu}(x) \qquad \text{p.p.p. sur } F\,,$$
$$(2) \quad U^{\mu'}(x)\leqq U^{\mu}(x) \qquad \text{partout dans tout l'espace } \Omega\,,$$
$$(3) \quad \int U^{\mu'}d\nu=\int U^{\mu}d\nu' \quad \text{pour toute mesure positive } \nu \text{ d'énergie finie.}$$

Cette λ' (peut-être nulle) s'appelle une mesure balayée de μ sur F. La relation de réciprocité (3) était utilisée pour construire la mesure balayée d'une mesure positive d'énergie infinie sur F ([2], § 18, [11]), mais on l'ajoute à la définition du balayage pour plus de commodité. Comme bien connu, le noyau

$$K(x,y)=|x-y|^{\alpha-m} \qquad (0<\alpha\leqq 2)$$

satisfait aux principes d'équilibre et du balayage ensemble dans R^m ([10], [9]). D'autre part, un noyau K satisfait au principe d'équilibre dans R^m s'il est une fonction de la seule distance $r=|x-y|$ telle que $K(r)=K(x,y)$ soit convexe de r^{-1} (si $m=3$) ou $-\log r$ (si $m=2$) ([13], [14]).

Les relations entre le principe d'équilibre ou du balayage et le principe du maximum sont très importantes. H. Cartan et J. Deny ([3]) les ont recherchés en collaboration pour un noyau K qui n'est pas nécessairement une fonction, mais qui est une mesure de type positif (naturellement symétrique) dont la transformée de Fourier est une fonction positive à croissance lente ainsi que son inverse. En s'appuyant sur le fait qu'un tel noyau K satisfait à deux principes d'énergie — l'un au sens cité plus haut et l'autre concernant le fait que l'ensemble des mesures positives d'énergie finie est complet pour la norme-énergie —, ils ont démontré qu'il y a dans R^m identité entre le principe du balayage et le second principe du maximum et qu'il y a dans R^m identité entre les principes d'équilibre et du balayage ensemble et les premier et second principes du maximum ensemble. Dans ces études, une mesure d'équilibre sur tout compact et une mesure balayée d'une mesure positive sur tout compact sont évidemment uniques respectivement.

Dans ce paragraphe, on étudie ces problèmes sans aucune hypothèse sur l'énergie au cas où un noyau K est une fonction positive et symétrique. On a besoin de trois lemmes. Un noyau K est dit satisfaire au principe de continuité dans Ω, si le potentiel d'une mesure positive quelconque λ est continu considéré comme fonction dans tout l'espace Ω toutes les fois qu'il est continu considéré comme fonction sur le support de λ. T. Ugaheri ([20], § 2) a démontré qu'un noyau K satisfait au principe de continuité dans R^m s'il est une fonction décroissante de la seule distance $|x-y|$, en s'appuyant sur son principe du maximum dilaté : si le potentiel d'une mesure positive λ est $\leqq M$ sur le support de λ, il est $\leqq k\cdot M$ partout dans tout l'espace R^m, k étant une constante. Au moyen de son idée, on a

LEMME 3. *Si un noyau K (symétrique ou non) satisfait au premier ou second principe du maximum dans Ω, il satisfait au principe de continuité dans Ω.*

En effet, supposons que le potentiel d'une mesure positive λ à support compact F soit fini et continu en un point ξ de F comme fonction sur F. Alors, étant donné un nombre positif quelconque ε, on peut trouver un voisinage V de ξ tel que $0<U^{\lambda'}(\xi)<\varepsilon$ et $U^{\lambda'}(x)$ soit continu en ξ comme fonction sur F, λ' désignant la restriction de λ à V. Par suite, on peut encore trouver un voisinage W de ξ contenu dans V tel que $0<U^{\lambda'}(x)=<\varepsilon$ en tout point x de F contenu dans $\overline{W}$. En désignant par λ'' la restriction de λ' à W, on a

$$0<U^{\lambda''}(x)<\varepsilon$$

en tout point x de F contenu dans $\overline{W}$. Par conséquent, si le noyau K satisfait au principe du maximum dilaté, on a

$$\begin{aligned}U^{\lambda}(x) &\leqq \varliminf_{x\to\xi} U^{\lambda}(x) \leqq \varlimsup_{x\to\xi} U^{\lambda}(x) \leqq \varlimsup_{x\to\xi} U^{\lambda''}(x)+\varlimsup_{x\to\xi} U^{\lambda-\lambda''}(x)\\ &\leqq k\cdot\varepsilon+U^{\lambda-\lambda''}(\xi)<k\cdot\varepsilon+U^{\lambda}(\xi)\ .\end{aligned}$$

Donc, il s'agit de démontrer que, si un noyau K satisfait au premier ou second principe du maximum, il satisfait au principe du maximum dilaté au sens local : si le potentiel d'une mesure positive λ est $\leqq M$ sur le support F de λ, il est $\leqq k\cdot M$ partout sur un ensemble ouvert 0 contenant F, où 0 et K dépendent seulement de F. Evidemment, il en est ainsi pour des noyaux satisfaisant au premier principe du maximum. Supposons qu'un noyau K satisfasse au second principe du maximum. Etant donnée une mesure positive μ à support compact telle que $U^{\mu}(x)\leqq M$ sur le support F de μ, on peut trouver une mesure positive ν, à support compact, contenu dans le complémentaire de F, telle que $1\leqq U^{\nu}(x)<k<+\infty$ sur F. On a en vertu de second principe du maximum

$$U^{\mu}(x)\leqq U^{M\nu}(x)$$

dans tout l'espace Ω. Soit 0 un ensemble ouvert contenant F dans lequel $U^{\nu}(x)<k'$ partout. Alors, on a partout sur 0.

$$U^{\mu}(x)<kM\ .$$

LEMME 4. *Soit K un noyau (symétrique ou non) satisfaisant au principe de continuité dans Ω. Si un ensemble E est de mesure nulle pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact, il est aussi de mesure nulle pour toute mesure positive d'énergie finie.*

En effet, étant donnée une mesure positive μ d'énergie finie à support compact, on peut trouver une restriction ν de μ telle que $U^{\mu}(x)$ soit continu comme fonction sur le support de ν. $U^{\mu}(x)$ étant la somme de deux fonctions positives et semi-continues inférieurement (i.e. $U^{\mu}=U^{\nu}+U^{\mu-\nu}$), $U^{\nu}(x)$ et $U^{\mu-\nu}(x)$ sont tous deux continus comme fonction sur le support de ν. Comme le noyau K satisfait au principe de continuité dans Ω, $U^{\nu}(x)$ est continu dans tout l'espace Ω, d'où il est borné sur tout compact. E est donc de mesure nulle pour ν, donc ainsi pour μ.

LEMME 5. *Soit K un noyau satisfaisant au principe de continuité dans Ω. Si une suite de mesures positives $\{\mu_n\}$ portées par un compact F converge (vaguement) vers une mesure positive μ, on a*

$$U^{\mu}(x)=\underline{\lim}_{n\to\infty} U^{\mu_n}(x)$$

p.p.p. dans tout l'espace Ω.

En effet, on a, comme il est bien connu,

$$U^{\mu}(x)\leqq\underline{\lim}_{n\to\infty} U^{\mu_n}(x)$$

partout dans Ω. Si l'ensemble des points tels que

$$U^{\mu}(x)<\underline{\lim}_{n\to\infty} U^{\mu_n}(x)$$

porte une mesure positive ν ($\not\equiv 0$) d'énergie finie, on peut trouver une restriction ν' de ν telle que la masse totale de $\nu-\nu'$ soit arbitrairement petite et telle que $U^{\nu'}(x)$ soit continu comme fonction sur le support de ν'. Puisque le noyau K satisfait au principe de continuité dans Ω, $U^{\nu'}(x)$ est continu comme fonction dans tout l'espace Ω. Alors, on a

$$\int U^{\mu}d\nu'<\underline{\lim}_{n\to\infty}\int U^{\mu_n}d\nu'=\underline{\lim}_{n\to\infty}\int U^{\nu'}d\mu_n=\int U^{\nu'}d\mu=\int U^{\mu}d\nu',$$

ce qui est contradictoire.

THÉORÈME 4. *Pour qu'un noyau K satisfasse au principe d'équilibre dans Ω, il faut et il suffit qu'il satisfasse au premier principe du maximum dans Ω. Alors, tous les potentiels d'équilibre sur un compact quelconque coïncident deux à deux p.p.p. dans tout l'espace Ω.*

Démonstration. D'abord, supposons qu'un noyau K satisfasse au premier principe du maximum dans Ω. Si un compact donné F ne porte aucune mesure positive d'énergie finie, on peut prendre $\lambda\equiv 0$ comme une mesure d'équilibre sur F. Si un compact donné F porte des mesures positive d'énergie finie, on peut trouver une mesure positive μ_0 pour laquelle l'intégrale d'énergie $I(\mu)$ est minimum parmi toutes les mesures positives μ portées par F de masse totale un. Si on pose

$$\lambda_0=\frac{\mu_0}{I(\mu_0)}$$

on a comme il est bien connu

(1) $U^{\lambda_0}(x)\geqq 1$ sur F presque partout pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact,

(2) $U^{\lambda_0}(x)\leqq 1$ sur le support de λ_0.

Alors, on a, en vertu du premier principe du maximum et les lemmes 3 et 4,

(1) $U^{\lambda_0}(x)=1$ p.p.p. sur F.

(2) $U^{\lambda_0}(x) \leqq 1$ partout dans tout l'espace Ω.
Ainsi, λ_0 est ce qu'on demande. Ensuite, supposons qu'un noyau K satisfasse au principe d'équilibre dans Ω. Soit λ une mesure positive à support compact dont le potentiel est $\leqq M$ (une constante positive) sur son support F. Si l'ensemble des points tels que $U^{\lambda}(x) > M$ n'est pas vide, on peut trouver un compact C, contenu dans cet ensemble ouvert, qui porte une mesure positive μ d'énergie finie de masse totale un. Soit ν_0 une mesure positive de masse totale un pour laquelle

$$G^*(\nu) = \frac{I(\nu)}{[\int U^{\mu} d\nu]^2}$$

est minimum parmi toutes les mesures positives ν portées par F. Alors, on a en vertu du lemme 1*

$$g(x) = c\, U^{\nu_0}(x) - b\, U^{\mu}(x) \geqq 0$$

p.p.p. sur F, où $b = I(\nu_0)$ et $c = \int U^{\mu} d\nu_0$. Par suite, on a

$$0 \leqq \int g(x)\, d\lambda(x) = c \int U^{\nu_0} d\lambda - b \int U^{\mu} d\lambda$$
$$= c \int U^{\lambda} d\nu_0 - b \int U^{\lambda} d\mu < (c-b) M .$$

D'autre part, comme on a $g(x) \leqq 0$ sur le support F_0 de ν_0, on a pour une mesure λ_0 d'équilibre sur F_0,

$$0 \geqq \int g(x)\, d\lambda_0(x) = c \int U^{\nu_0} d\lambda_0 - b \int U^{\mu} d\lambda_0$$
$$= c \int U^{\lambda_0} d\nu_0 - b \int U^{\lambda_0} d\mu \geqq c - b$$

car $U^{\lambda_0}(x) = 1$ p.p.p. sur F_0 et $\leqq 1$ partout dans tout l'espace Ω. C'est contradictoire. Par suite, on a partout dans tout l'espace Ω

$$U^{\lambda}(x) \leqq M .$$

Enfin, soient λ_1 et λ_2 deux mesures d'équilibre sur un compact donné F. Si F ne porte aucune mesure positive ($\not\equiv 0$) d'énergie finie, λ_1 et λ_2 sont tous deux identiquement nulles. Par suite, soit F un compact portant des mesures positives ($\not\equiv 0$) d'énergie finie. Si $\lambda_1 \not\equiv \lambda_2$, on peut trouver deux ensembles boréliens et disjoints E_1 et E_2 tels que $E_1 + E_2 = F$ et $\lambda_1 - \lambda_2 = \mu_0 - \nu_0$, μ_0 et ν_0 étant des mesures positives d'énergie finie portées par E_1 et par E_2 respectivement. Puisque le noyau K satisfait au premier principe du maximum, il est de type positif d'après le théorème 3. D'autre part, comme on a

$$G(\mu_0, \nu_0) = 1$$

moyennant l'hypothèse $U^{\lambda_1}(x) = U^{\lambda_2}(x)$ p.p.p. sur F, on a en vertu du lemme 2

$$c\, U^{\mu_0}(x) = a\, U^{\nu_0}(x)$$

dans tout l'espace Ω presque partout pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact, où

$$c = \int U^{\nu_0} d\mu_0 = I(\mu_0) = a .$$

Par suite, on a

$$U^{\mu_0}(x) = U^{\nu_0}(x)$$

dans tout l'espace Ω presque partout pour toute telle mesure. Puisque le noyau K satisfait au premier principe du maximum dans Ω, on a d'ailleurs en vertu des lemmes 3 et 4

$$U^{\mu_0}(x) = U^{\nu_0}(x)$$

p.p.p. dans tout l'espace Ω. Ainsi, on a

$$U^{\lambda_1}(x) = U^{\lambda_2}(x)$$

p.p.p. dans tout l'espace Ω. C.Q.F.D.

THÉORÈME 5. *Pour qu'un noyau K satisfasse au principe du balayage dans Ω, il faut et il suffit qu'il satisfasse au second principe du maximum dans Ω. Alors, tous les potentiels des mesures balayées d'une mesure positive sur un compact quelconque coïncident deux à deux p.p.p. dans tout l'espace Ω.*

Démonstration. Supposons qu'un noyau K satisfasse au principe du balayage dans Ω. Etant données une mesure positive μ d'énergie finie à support compact et une mesure positive quelconque ν telles que

$$U^{\mu}(x) \leqq U^{\nu}(x)$$

sur le support F de μ, si on désigne par ε' la mesure balayée de la masse ponctuelle ε placée en un point x sur F, on a

$$\int U^{\mu} d\varepsilon = \int U^{\varepsilon} d\mu = \int U^{\varepsilon'} d\mu = \int U^{\mu} d\varepsilon'$$

$$\leqq \int U^{\nu} d\varepsilon' = \int U^{\varepsilon'} d\nu \leqq \int U^{\varepsilon} d\nu = \int U^{\nu} d\varepsilon$$

Par suite, on a

$$U^{\mu}(x) \leqq U^{\nu}(x)$$

partout dans tout l'espace Ω. Supposons qu'un noyau K satisfasse au second principe du maximum dans Ω. Si un compact donné F ne porte aucune mesure positive ($\neq 0$) d'énergie finie, une mesure associée à une mesure positive quelconque sur F se réduit à une mesure identiquement nulle. Par suite, soit F un compact qui porte des mesures positives d'énergie finie. Soient $\{\Omega_n^{(1)}\}$ et $\{\Omega_n^{(2)}\}$ des suites d'ensembles ouverts tels que

$$\Omega_1^{(1)} \supset \Omega_2^{(1)} \supset \Omega_3^{(1)} \supset \cdots \supset \Omega_n^{(1)} \supset \cdots \to F$$

et

$$\Omega_1^{(1)} = \Omega_1^{(2)} \subset \Omega_2^{(2)} \subset \Omega_3^{(2)} \subset \cdots \subset \Omega_n^{(2)} \subset \cdots \to \Omega$$

$\overline{\Omega_n^{(1)}}$ et $\overline{\Omega_n^{(2)}}$ étant tous deux compacts. D'abord, à une mesure positive quelconque μ portée par $\Omega - F$, on associe la mesure positive μ' portée par F obtenue de la manière suivante. Pour la restriction μ_{1n} (d'énergie finie ou non) de μ à $\Omega_n^{(1)} - \Omega_{n+1}^{(1)}$, il existe d'après la remarque 1* une mesure positive ν_{1n} pour laquelle

$$G^*(\nu) = \frac{I(\nu)}{[\int U^{\mu_{1n}} d\nu]^2}$$

est minimum parmi toutes les mesures positives ν portées par F. Si on pose

$$\mu'_{1n} = \frac{\int U^{\mu_{1n}} d\nu_{1n}}{I(\nu_{1n})} \cdot \nu_{1n},$$

on a en vertu du lemme 1*

(1) $U^{\mu'_{1n}}(x) \geqq U^{\mu_{1n}}(x)$ p.p.p. sur F,

(2) $U^{\mu'_{1n}}(x) \leqq U^{\mu_{1n}}(x)$ sur le support de μ'_{1n}.

On a en vertu du second principe du maximum,

(1) $U^{\mu'_{1n}}(x) = U^{\mu_{1n}}(x)$ p.p.p. sur F,

(2) $U^{\mu'_{1n}}(x) \leqq U^{\mu_{1n}}(x)$ partout dans tout l'espace Ω.

Pour la restriction μ_{2n} (d'énergie finie ou non) de μ à $\Omega^{(2)}_{n+1} - \Omega^{(2)}_n$, on a de même une mesure positive μ'_{2n} portée par F comme ci-dessus. Ce qu'on fait associer à μ est

$$\mu' = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu'_{2n}$$

Naturellement, cette mesure μ' jouit de la propriété suivante:

(1) $U^{\mu'}(x) = U^{\mu}(x)$ p.p.p. sur F,

(2) $U^{\mu'}(x) \leqq U^{\mu}(x)$ partout dans tout l'espace Ω.

Encore, à une mesure positive ν d'énergie finie, on associe

$$\nu' = \nu'_1 + \nu_2$$

ν_1 et ν_2 désignant les restrictions de ν à $\Omega - F$ et à F respectivement. Puisque $U^{\mu_{1n}}(x)$ est borné sur F, μ_{1n} et Ω'_{1n} sont d'énergie finie. Par suite, on a

$$\int U^{\mu'_{1n}} d\nu = \int U^{\mu_{1n}} d\nu' \ (= \int U^{\mu'_{1n}} d\nu')$$

pour toute mesure positive ν d'énergie finie. Comme il en est ainsi pour μ_{2n}, on a d'ailleurs

$$\int U^{\mu'} d\nu = \int U^{\mu} d\nu' \ (= \int U^{\mu'} d\nu')$$

pour toute mesure positive ν d'énergie finie et pour toute mesure positive quelconque μ portée par $\Omega - F$. Ensuite, à une mesure positive quelconque μ (d'énergie finie ou non) portée par F, on associe la mesure positive μ' portée par F obtenue de la manière suivante. Soit E_n l'ensemble (ouvert) des points tels que $U^{\mu}(x) > n$. Comme bien connu ([10], p, 81), l'ensemble $E = \bigwedge_{n=1}^{\infty} E_n$ est de mesure nulle pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact. Comme le noyau K satisfait au second principe du maximum, E est d'après les lemmes 3 et 4 de mesure nulle pour toute mesure positive d'énergie finie. Soient μ_{1n} et μ_{2n} les restrictions de μ à E_n et à $F - E_n$ respectivement, et μ'_{1n} la mesure associeé de μ_{1n} sur $F - E_n$. La mesure positive

$$\mu'_n = \mu'_{1n} + \mu_{2n}$$

est d'énergie finie et de masse totale uniformément borné, car on a

$$(1) \quad U^{\mu'_n}(x) = U^{\mu}(x) \quad (\leqq n) \quad \text{p.p.p. sur } F - E_n ,$$

$$(2) \quad U^{\mu'_n}(x) \leqq U^{\mu}(x) \qquad \text{partout dans tout l'espace } \Omega .$$

A partir de $\{\mu'_n\}$, on peut extraire une suite partielle $\{\mu'_i\}$ convergante (vaguement) vers une mesure positive μ' portée par F. Alors, $\{U^{\mu'_i}(x)\}$ étant la suite crois sante avec i, on a

$$U^{\mu'}(x) \leqq \varliminf_{i\to\infty} U^{\mu'_n}(x) = \lim_{i\to\infty} U^{\mu'_i}(x) ,$$

l'égalité ayant lieu p.p.p. dans Ω d'apres le lemme 5. Cette mesure μ' jouit des propriétés suivantes :

$$(1) \quad U^{\mu'}(x) = U^{\mu}(x) \qquad \text{p.p.p. sur } F ,$$
$$(2) \quad U^{\mu'}(x) \leqq U^{\mu}(x) \qquad \text{partout dans tout l'espace } \Omega .$$

Encore, μ'_i étant d'énergie finie, on a

$$\int U^{\mu'} d\nu = \lim_{i\to\infty} \int U^{\mu'_i} d\nu = \lim_{i\to\infty} \int U^{\mu'_i} d\nu' = \int U^{\mu'} d\nu' = \int U^{\mu} d\nu'$$

pour toute mesure positive ν d'énergie finie et sa mesure associée ν' sur F. Enfin, à une mesure positive quelconque μ (d'énergie finie ou non), on fait associer

$$\mu' = \mu'_1 + \mu'_2$$

μ_1 et μ_2 étant les restrictions de μ à $\Omega - F$ et à F respectivement. Le balayage d'une mesure positive sur F est ainsi achévé. Alors, si μ' et μ'' ensemble sont deux mesures balayées d'une mesure positive μ sur un compact F, on a

$$\int U^{\mu'} d\nu = \int U^{\mu} d\nu' = \int U^{\mu''} d\nu$$

pour toute mesure positive ν d'énergie finie. Donc, on a

$$U^{\mu'}(x) = U^{\mu''}(x)$$

p.p.p. dans tout l'espace Ω. C.Q.F.D.

REMARQUE 3. L'unicité des mesures d'équilibre sur un compact ou des mesures balayées d'une mesure positive sur un compact n'est pas toujours assurée, comme un noyau $K(x, y) \equiv 1$ la montre. On la recherchera dans le paragraphe 5.

COROLLAIRE. *Un noyau K satisfaisant au principe d'équilibre ou du balayage est nécessairement de type positif.*

4. Principes du maximum

Dans le paragraphe antérieur, on a recherché l'identité entre le principe d'équilibre [resp. du balayage] et le premier [resp. second] principe du maximum. La détermination effective des noyaux satisfaisant au premier ou second principe du maximum est donc le problème fondamental de la théorie du potentiel. Mais, elle n'est pas facile. D'autre part, on pense que la relation entre le principe d'-équilibre et le principe du balayage — c'est-à-dire, la relation entre les premier et second principes du maximum — est très importante.

Considérons dans R^m le noyau d'ordre α

$$K(x, y)=|x-y|^{\alpha-m} \qquad (0<\alpha\leqq 2).$$

M. Riesz ([19], § 15) a construit la mesure balayée de la masse ponctuelle placée en l'origine 0 sur un compact quelconque F, en faisant la transformation de Lord-Kelvin à la mesure d'équilibre sur le compact distinct F'. En associant au noyau d'ordre α la famille des mesures balayées (appelée famille fondamentale) de la masse ponctuelle placée en l'origine 0 sur l'extérieur des sphères centrées en l'origine 0, J. Deny ([8], § 9) a démontré que le noyau d'ordre α satisfait au second principe du maximum. Ainsi, le résultat de Frostman que le noyau d'ordre α $(0<\alpha\leqq 2)$ satisfait au principe d'équilibre, c'est-à-dire, au premier principe du maximum dans R^m $(m\geqq 3)$ entraîne le résultat de Riesz-Deny qu'il satisfait aussi au principe du balayage, c'est-à-dire, au second principe du maximum dans $R^m (m\geqq 3)$. Mais, son raisonnement (l'utilisation de la transformation de Lord-Kelvin) n'est valable que dans le cas du noyau d'ordre α $(0<\alpha\leqq 2)$ dans R^m $(m\geqq 3)$.

Dans ce paragraphe, on donne un énoncé plus simple équivalent au premier ou second principe du maximum, et on en conclut que le second principe du maximum entraîne le premier principe du maximum toutes les fois qu'un noyau K est dans R^m de type $K(x-y)$ et satisfait à une condition supplémentaire à l'infini. On a

THÉORÈME 6. *Pour qu'un noyau K satisfasse au premier principe du maximum dans Ω, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété suivante :*

$[Q_1]$ *Soient ξ un point quelconque et λ une mesure positive à support compact ne contenant pas ξ. Si on a*

$$U^{\lambda}(x)\leqq K(x, \xi)$$

sur le support S_λ de λ, la masse totale de λ est $\leqq 1$.

Démonstration. D'abord, supposons qu'un noyau K satisfait au premier principe du maximum dans Ω. Etant donnés un point quelconque ξ et une mesure positive λ à support compact ne contenant pas ξ telle que $U^{\lambda}(x)\leqq K(x, \xi)$ sur le support S_λ de λ, une mesure d'équilibre λ_0 sur S_λ n'est pas nulle, car S_λ porte la mesure positive λ d'énergie finie. Alors, puisque $U^{\lambda_0}(x)=1$ p.p.p. sur S_λ et $\leqq 1$ partout dans tout l'espace Ω, on a

$$\int d\lambda=\int U^{\lambda_0}d\lambda=\int U^{\lambda}d\lambda_0\leqq U^{\lambda_0}(\xi)\leqq 1 .$$

Ensuite, supposons qu'un noyau K jouisse de la propriété $[Q_1]$. Soit μ une mesure positive à support compact telle que $U^{\mu}(x)\leqq 1$ sur le support S_μ de μ. S'il y a un point ξ tel que $U^{\mu}(\xi)>1$, posons

$$b=I(\nu_0)\,, \qquad c=\int K(x, \xi)\,d\nu_0(x)$$

et

$$g(x)=c\,U^{\nu_0}(x)-b\,K(x, \xi)\,,$$

ν_0 étant une mesure positive $(\neq 0)$ pour laquelle

$$G^*(\nu) = \frac{I(\nu)}{[\int K(x, \xi)\, d\nu(x)]^2}$$

est minimum parmi toutes les mesures positives ν portées par S_μ. Alors, on a en vertu du lemme 1*

$$g(x) \leqq 0$$

sur S_μ presque partout pour ν_0. Comme $g(x)$ est semi-continue inférieurement, on a

$$g(x) \leqq 0 \quad \text{i.e.} \quad c\, U^{\nu_0}(x) \leqq b\, K(x, \xi)$$

sur le support de ν_0. On a

$$c \leqq b$$

en vertu de la propriété $[Q_1]$. D'autre part, $g(x)$ étant $\geqq 0$ p.p.p. sur S_μ, on a

$$0 \leqq \int g(x)\, d\mu(x) = c \int U^{\nu_0} d\mu - b \int K(x, \xi)\, d\mu(x)$$
$$= c \int U^\mu\, d\nu_0 - b\, U^\mu(\xi) < c - b\ ,$$

ce qui est contradictoire. Ainsi, on a

$$U^\mu(x) \leqq 1$$

partout dans tout l'espace Ω. C.Q.F.D.

THÉORÈME 7. *Pour qu'un noyau K satisfasse au second principe du maximum dans Ω, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété suivante :*

$[Q_2]$ *Soient ξ un point quelconque et λ une mesure positive à support compact ne contenant pas ξ. Si on a*

$$U^\lambda(x) \leqq K(x, \xi)$$

sur le support S_λ de λ, on a la même inégalité dans tout l'espace Ω.

Démonstration. Si un noyau K satisfait au second principe du maximum dans Ω, il jouit de la propriété $[Q_2]$, car $K(x, \xi)$ est lui-même un potentiel de la masse ponctuelle placée en ξ. Inversement, supposons qu'un noyau K jouisse de la propriété $[Q_2]$. Soient μ une mesure positive à support compact d'énergie finie et ν une mesure positive quelconque telle que $U^\mu(x) \leqq U^\nu(x)$ sur le support S_μ de μ. S'il y a un point ξ tel que $U^\mu(\xi) > U^\nu(\xi)$, posons

$$b = I(\nu_0)\ , \qquad c = \int K(x, \xi)\, d\nu_0(x)$$

et

$$g(x) = c\, U^{\nu_0}(x) - b\, K(x, \xi)\ ,$$

ν_0 étant une mesure positive ($\not\equiv 0$) pour laquelle

$$G^*(\nu) = \frac{I(\nu)}{[\int K(x, \xi)\, d\nu(x)]^2}$$

est minimum parmi toutes les mesures positives portées par S_μ. Alors, comme on a

$$g(x) \leqq 0$$

sur le support de ν_0, on a la même inégalité dans tout l'espace Ω. D'autre part, comme on a

$$g(x) \geqq 0$$

p.p.p. sur S_μ, on a

$$0 \leqq \int g(x)\, d\mu(x) = c \int U^{\nu_0} d\mu - b \int K(x, \xi)\, d\mu(x)$$
$$= c \int U^{\mu} d\nu_0 - b\, U^{\mu}(\xi) < c \int U^{\nu} d\nu_0 - b\, U^{\nu}(\xi)$$
$$= c \int U^{\nu_0} d\nu - b \int K(x, \xi)\, d\nu = \int g(x)\, d\nu(x) \leqq 0\,,$$

ce qui est contradictoire. Ainsi, on a

$$U^{\mu}(x) \leqq U^{\nu}(x)$$

partout dans tout l'espace Ω. C.Q.F.D.

Dans l'espace euclidien R^m $(m \geqq 1)$, soit $K(x)$ une fonction positive, continue, symétrique et sommable dans tout voisinage de l'origine 0 telle que $K(0) = \lim_{x \to 0} K(x) \leqq +\infty$. Considérons le potentiel

$$U^{\mu}(x) = \int K(x-y)\, d\mu(y)$$

d'une mesure positive μ pris par repport au noyau $K(x)$. Pour les potentiels de ce type, on étudie la relation entre les premier et second principes du maximum. Remarquons que, pour les potentiels de ce type, les théorèmes 6 et 7 s'expriment sous les formes suivantes.

THÉORÈME 6*. *Pour qu'un noyau $K(x)$ satisfasse au premier principe du maximum dans R^m, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété suivante :*

[Q^*_1] *Soit λ une mesure positive à support compact ne contenant pas l'origine 0. Si on a*

$$U^{\lambda}(x) \leqq K(x)$$

sur le support S_λ de λ, la masse totale de λ est $\leqq 1$.

THÉORÈME 7.* *Pour qu'un noyau $K(x)$ satisfasse au second principe du maximum dans R^m, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété suivante :*

[Q^*_2] *Soit λ une mesure positive à support compact ne contenant pas l'origine 0. Si on a*

$$U^{\lambda}(x) \leqq K(x)$$

sur le support S_λ de λ, on a la même inégalité dans tout l'espace R^m.

Alors, on a

THÉORÈME 8. *Si un noyau $K(x)$ satisfait au second principe du maximum dans R^m et à la condition :*

$$[R] \qquad \lim_{r \to +\infty} \frac{\int_{B(O,r)} K(x)\, dx}{\int_{B(O,r-c)} K(x)\, dx} = 1$$

pour tout nombre positif c, $B(a, \rho)$ désignant la boule de rayon ρ centrée en le point a, il satisfait au premier principe du maximum dans R^m.

Démonstration. Soit λ une mesure positive à support compact ne contenant pas l'origine 0 telle que $U^{\lambda}(x) \leqq K(x)$ sur le noyau S_λ de λ. Il s'agit de démontrer $\int d\lambda \leqq 1$. Comme le noyan $K(x)$ satisfait au second principe du maximum, on a

$$U^{\lambda}(x) \leqq K(x)$$

partout dans R^m. On a donc

$$\int_{B(O,r)} U^{\lambda}(x)\,dx \leqq \int_{B(O,r)} K(x)\,dx$$

pour tout nombre positif r. Comme, pour tout nombre assez grand r et la plus grande distance c de l'origine 0 aux points de S_λ, toute boule de rayon $r-c$ contrée en tout point de S_λ est contenue dans la boule B (0, r), on a

$$\begin{aligned}
\int_{B(O,r)} U^{\lambda}(x)\,dx &= \int_{B(O,r)} dx \int_{S_\lambda} K(x-y)\,d\lambda(y) \\
&= \int_{S_\lambda} d\lambda(y) \int_{B(O,r)} K(x-y)\,dx \geqq \int_{S_\lambda} d\lambda(y) \int_{B(y,r-c)} K(x-y)\,dx \\
&= \Big(\int_{S_\lambda} d\lambda\Big) \cdot \Big(\int_{B(O,r-c)} K(x)\,dx\Big)
\end{aligned}$$

par suite, on a

$$\int_{S_\lambda} d\lambda \leqq \frac{\int_{B(O,r)} K(x)\,dx}{\int_{B(O,r-c)} K(x)\,dx}$$

Comme $r \to +\infty$, la condition [R] entraîne $\int d\lambda \leqq 1$. Ainsi, le noyau $K(x)$ satisfait au premier principe du maximum dans R^m. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Si un noyau $K(x)$, sommable dans tout l'espace R^m, satisfait au second principe du maximum dans R^m, il satisfait au premier principe du maximum dans R^m.*

En effet, on a pour tout nombre positif c

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\int_{B(O,r)} K(x)\,dx}{\int_{B(O,r-c)} K(x)\,dx} = \frac{\int_{R^m} K(x)\,dx}{\int_{R^m} K(x)\,dx} = 1 .$$

COROLLAIRE. *Si un noyau $K(x)$, fonction décroissante de la seule distance $|x|$, satisfait au second principe du maximum dans R^m, il satisfait au premier principe du maximum dans R^m.*

En effet, on a pour tout nombre positif c et tout nombre assez grand r

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to+\infty} \frac{\int_{B(O,r)} K(x)\,dx}{\int_{B(O,r-c)} K(x)\,dx} &= \lim_{r\to+\infty} \left[1 + \frac{\int_{B(O,r)-B(O,r-c)} K(x)\,dx}{\int_{B(O,r-c)} K(x)\,dx}\right] \\
&\leqq \lim_{r\to+\infty} \left[1 + \frac{K(r-c)\cdot \mathrm{mes}\,[B(O,r) - B(O,r-c)]}{K(r-c)\cdot \mathrm{mes}\,[B(O,r-c)]}\right] \\
&= \lim_{r\to+\infty} \frac{\mathrm{mes}\,[B(O,r)]}{\mathrm{mes}\,[B(O,r-c)]} = \lim_{r\to+\infty} \Big(\frac{r}{r-c}\Big)^m = 1 .
\end{aligned}$$

5. Principe d'unicité

Dans ce paragraphe, on recherche les noyaux satisfaisant au principe d'unicité : si on a

$$U^{\mu}(x) = U^{\nu}(x)$$

p.p.p. dans Ω pour deux mesures quelconques μ et ν à support compact, on a nécessairement $\mu \equiv \nu$. La recherche de ce principe, simple au premier abord, est très importante dans la théorie du potentiel. Le résultat classique montre que le noyau newtonien

$$K(x, y) = |x - y|^{2-m}$$

satisfait au principe d'uncité dans R^m ($m \geqq 3$). On souligne qu'il y a des démonstrations nouvelles dues à H. Delange ([6]) et A. Pfluger ([17]). Plus généralement, un résultat récent de J. Deny ([8], § 5) montre qu'un noyau K satisfait au principe d'unicité si on peut lui associer une famille fondamentale (c'est-à-dire, la famille des mesures balayées de la masse ponctuelle placée en l'origine sur les complémentaires de tous les voisinages de l'origine). Il en résulte que le noyau d'ordre α

$$K(x, y) = |x - y|^{\alpha - m} \qquad (0 < \alpha \leqq 2)$$

satisfait au principe d'unicité dans R^m ($m \geqq 3$). Mais, comme il est dificile d'exprimer en toute généralité un critère pour les noyaux satisfaisant au principe d'unicité, on le recherche dans le cas où un noyau K satisfait au second principe du maximum et à une condition supplémentaire.

Un noyau K est dit régulier lorsque, pour tout point ξ et un voisinage quelconque $V(\xi)$ de ξ, il existe une constante A (seulement dépendant de ξ) et une mesure positive λ portée par $V(\xi)$ d'énergie finie et de masse totale un telle que

$$U^{\lambda}(x) \leqq A \cdot K(x, \xi)$$

dans tout l'espace. Lorsqu'un noyau K est régulier et symétrique, le résultat obtenu est ce qui améliore un peu le résultat de J. Deny cité dessus, car un noyau associé à une famille fondamentale satisfait au second principe du maximum. D'abord, on a besoin d'un lemme.

LEMME 6. *Si un noyau K satisfait dans Ω au premier ou second principe du maximum et aussi au principe d'unicitié, il satisfait au principe d'énergie dans Ω.*

En effet, puisque le noyau K satisfait au premier ou second principe du maximum dans Ω, il est de type positif dans Ω. On a donc

$$G(\mu, \nu) = \frac{I(\mu) \times I(\nu)}{[\int U^{\mu} d\nu]^2} \geqq 1$$

pour tout couple (μ, ν) de deux mesures positives μ et ν portées par chacun de deux ensembles boréliens et disjoints E_1 et E_2 contenus dans un compact, comme on l'a déjà dit. Ici, soulignons que l'égalité n'a lieu jamais. S'il n'en était pas ainsi pour un certain couple (μ, ν), on aurait en vertu du lemme 2

$$c\, U^{\mu}(x) = a\, U^{\nu}(x)$$

dans Ω presque partout pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact, où $a = I(\mu)$, $b = I(\nu)$ et $c = \int U^{\mu} d\nu$. Par suite, on a encore en vertu du lemme 4

$$c\, U^{\mu}(x) = a\, U^{\nu}(x)$$

p.p.p. dans Ω, ce qui est en contradiction avec le principe d'unicité. Donc, on a

$$G(\mu, \nu) > 1$$

pour tout couple (μ, ν), ce qui montre que le noyau K satisfait au principe d'énergie dans Ω.

Alors, on a

THÉORÈME 9. *Soit K un noyau régulier satisfaisant au second principe du maximum dans Ω. Pour qu'il satisfasse au principe d'unicité dans Ω, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété suivante :*

[S] *Soient ξ un point quelconque et λ une mesure positive à support compact ne contenant pas ξ. Si on a*

$$U^{\lambda}(x) \leqq K(x, \xi)$$

sur le support S_{λ} de λ, on a

$$U^{\lambda}(x) < K(x, \xi)$$

dans un voisinage $V(\xi)$ de ξ.

Démonstration. D'abord, supposons qu'un noyau K satisfasse au principe d'unicité dans Ω. Si $K(\xi, \xi) = +\infty$, on a

$$U^{\lambda}(x) < K(x, \xi)$$

dans un voisinage $V(\xi)$ de ξ, car $U^{\lambda}(x)$ est fini et continu en ξ. Si $K(\xi, \xi) < +\infty$, la masse ponctuelle ε placée en ξ est d'énergie finie. Comme le noyau K satisfait dans Ω au second principe du maximum (donc est de type positif) et aussi au principe d'uncité, il satisfait au principe d'énergie en vertu du lemme 6. Si on a

$$U^{\lambda}(x) \leqq K(x, \xi)$$

sur le support S_{λ} de λ, on a en vertu du théorème 2

$$U^{\lambda}(x) < K(x, \xi)$$

sur un ensemble de masse positive pour ε, c'est-à-dire, en $x = \xi$. On a donc

$$U^{\lambda}(x) < K(x, \xi)$$

dans un voisinage $V(\xi)$ de ξ. Ensuite, supposons qu'un noyau K jouisse de la propriété [S]. Soient μ et ν deux mesures positives à support compact telles que

$$U^{\mu}(x) = U^{\nu}(x)$$

p.p.p. dans Ω. Soient ω un ensemble ouvert contenant les supports de μ et de ν tel que $\bar{\omega}$ soit un compact, et τ une mesure positive à support $\bar{\omega}$ dont le potentiel est borné sur tout compact. En chaque point ξ de ω, prenons une suite $\{D_n\}$ d'ensembles ouverts tels que

$$D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \cdots\cdots \supset D_n \supset \cdots\cdots \to \xi\ .$$

On pose

$$V_n(x, \xi) = U^{\lambda_n}(x)\ ,$$

λ_n désignant la mesure balayée de la masse ponctuelle placée en sur $\bar{\omega} - D_n$. Alors, on a

(1) $V_n(x, \xi) \leqq K(x, \xi)$ partout dans Ω,

(2) $V_n(x, \xi) < K(x, \xi)$ dans un voisinage de ξ contenu dans D_n,

(3) $V_n(x, \xi) = K(x, \xi)$ p.p.p. sur $\bar{\omega} - D_n$.

On va démontrer qu'on a, pour tout nombre assez grand n et pour tout point arbitrairement fixé x de ω,

(1) $V_n(x, \xi) \leqq K(x, \xi)$ pour tout ξ,

(2) $V_n(x, \xi) < K(x, \xi)$ pour tout ξ d'un certaine voisinage $W(x)$ de x (réduisant vers x avec $n \to +\infty$),

(3) $V_n(x, \xi)$ pour tout ξ de $\bar{\omega} - W_n(x)$.

Etant donnés un nombre quelconque n et un point quelconque x de $\bar{\omega}$, soient G un voisinage quelconque de x et $\{G_i\}$ une suite de voisinages de x tels que

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots\cdots \supset G_i \supset \cdots\cdots \to x .$$

Le noyau K étant régulier, on peut trouver une mesure positive α_i portée par G_i d'énergie finie et de masse totale un telle que

$$U^{\alpha_i}(y) \leqq A \cdot K(x, y)$$

pour tout point y de Ω. Alors, on a

$$U^{\lambda}(x) = \lim_{i \to +\infty} \int U^{\alpha_i} d\lambda$$

pour toute mesure positive λ telle que $U^{\lambda}(x) < +\infty$. Prenons un point quelconque ξ de $\bar{\omega}$ tel qu'on ait

$$G \cdot D_n = 0$$

pour l'ensemble ouvert D_n de la suite $\{D_n\}$ réduisant vers ξ. Comme on a

$$U^{\lambda_n}(y) = K(y, \xi)$$

p.p.p. dans $\bar{\omega} - D_n$, on a

$$V_n(x, \xi) = U^{\lambda_n}(x) = \lim_{i \to +\infty} \int U^{\lambda_n} d\alpha_i = \lim_{i \to +\infty} U^{\alpha_i}(\xi) = K(x, \xi) .$$

Encore, on peut trouver un voisinage $G' (\subset G)$ de x tel qu'on ait

$$G' \subset D_n$$

pour tous les ensembles ouverts D_n des suites $\{D_n\}$ réduisant vers chaque point ξ de G'. Soient ε'_x et ε'_ξ les mesures balayées (d'énergie finie) des mesures ponctuelles ε_x et ε_ξ placées en x et en ξ sur $\bar{\omega} - G'$ respectivement. Comme on a

$$U^{\varepsilon'_x}(x) < K(x, x)$$

en vertu de la propriété $[S]$, on a

$$U^{\varepsilon'_x}(\xi) < K(x, \xi)$$

en tout point ξ d'un voisinage $G^* (\subset G)$ de x. Alors, on a en tout point ξ de G^*

$$K(x, \xi) > U^{\varepsilon'_x}(\xi) = \int U^{\varepsilon'_x} d\varepsilon_\xi = \int U^{\varepsilon'_\xi} d\varepsilon_x = \int U^{\varepsilon'_\xi}(x) ,$$

ce qui est encore

$$\geqq U^{\lambda_n}(x) = V_n(x, \xi)$$

en vertu de $G' \subset D_n$. On a donc

$$V_n(x, \xi) < K(x, \xi)$$

en tout point ξ de G^*. G étant un voisinage quelconque de x, l'ensemble $W(x)$ des points ξ tels que

$$V_n(x, \xi) < K(x, \xi)$$

réduit vers x avec $n\to+\infty$. Alors, on a

(1) $V_n(x, \xi) < K(x, \xi)$ pour tout ξ de $W_n(x)$,

(2) $V_n(x, \xi) = K(x, \xi)$ pour tous les autres ξ de $\bar{\omega}$.

Si on pose

$$A_n = \int [K(x, \xi) - V_n(x, \xi)]\, d\tau(\xi) > 0\,,$$

les mesures positives

$$\frac{1}{A_n}[K(x, \xi) - V_n(x, \xi)]\, d\tau(\xi)$$

convergent (vaguement) vers la masse ponctuelle ε_x placée en x. On a donc, pour toute fonction positive et continue $f(\xi)$ à support compact,

$$\lim_{n\to\infty} \int \frac{f(\xi)}{A_n}[K(x, \xi) - V_n(x, \xi)]\, d\tau(\xi) = f(x)\,.$$

D'autre part, en tout point ξ de $\bar{\omega}$ (à l'exception de masse nulle pour toute mesure positive d'énergie finie), on a

$$\int [K(x, \xi) - V_n(x, \xi)]\, d\mu(x) = U^{\mu}(\xi) - \int U^{\mu}\, d\lambda_n$$

$$= U^{\nu}(\xi) - \int U^{\nu}\, d\lambda_n = \int [K(x, \xi) - V_n(x, \xi)]\, d\nu(x)\,.$$

Donc, on a

$$\int \frac{f(\xi)}{A_n}\, d\tau(\xi) \int [K(x, \xi) - V_n(x, \xi)]\, d\mu(x)$$

$$= \int \frac{f(\xi)}{A_n}\, d\tau(\xi) \int [K(x, \xi) - V_n(x, \xi)]\, d\nu(x)$$

En altérant l'ordre d'intégration, on a

$$\int d\mu(x) \int \frac{f(\xi)}{A_n}[K(x, \xi) - V_n(\ , \xi)]\, d\tau(\xi)$$

$$= \int d\nu(x) \int \frac{f(\xi)}{A_n}[K(x, \xi) - V_n(x, \xi)]\, d\tau(\xi)\,.$$

Comme $n \to +\infty$, on a

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \int f(x)\, d\nu(x)\,.$$

Ainsi, on a

$$\mu \equiv \nu\,. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

REMARQUE 4. Evidemment, l'hypothèse qu'un noyau K satisfait au second principe du maximum dans Ω n'est pas indispensable dans la démonstration de la condition nécessaire, mais indispensable dans la démonstration de la condition suffisante. Peut-on remplacer par une hypothèse plus faible—par exemple, d'être de type positif ?

REMARQUE 5. Si un noyau K satisfait au principe d'unicité dans Ω, la mesure d'équilibre sur tout compact (ou la mesure balayée d'une mesure positive quelconque sur tout compact) est toujours unique. En effet, comme on l'a déja dit, les potentiels d'équilibre sur tout compact (ou les potentiels der mesures balayées d'une mesure positive quelconque sur tout compact) coïncident deux à deux p.p.p.

dans tout l'espace Ω,

COROLLAIRE. *Soit K un noyau régulier satisfaisant à la fois aux premier et second principe du maximum dans Ω. Pour qu'il satisfasse au principe d'unicité dans Ω, il suffit que $K(x, y) < K(x, x)$ $(\leqq +\infty)$ pour tout point $x \neq y$; en particulier, elle est nécessaire lorsque $K(x, x) = K(y, y)$ $(\leqq +\infty)$ pour tout point $x \neq y$.*

En effet, pour un point quelconque ξ et une mesure positive λ à support compact ne contenant pas ξ, si on a

$$U^{\lambda}(x) \leqq K(x, \xi)$$

sur le support S_{λ} de λ, on a $\int d\lambda \leqq 1$ en vertu du théorème 7. Alors, comme on a

$$\begin{aligned} U^{\lambda}(\xi) &= \int K(\xi, y)\, d\lambda(y) < K(\xi, \xi) \cdot \int d\lambda \\ &\leqq K(\xi, \xi) \quad (\leqq +\infty), \end{aligned}$$

on a

$$U^{\lambda}(x) < K(x, \xi)$$

dans un voisinage $V(\xi)$ de ξ. Donc, le noyau K satisfait au principe d'unicité dans Ω. Ensuite, supposons $K(x, x) = K(y, y)$ pour tout point $x \neq y$. Comme le noyau K satisfait au premier ou second principe du maximum et aussi au principe d'unicité dans Ω, il satisfait au principe d'énergie dans Ω en vertu du lemme 6. Il en résulte

$$[K(x, y)]^2 < K(x, x) \cdot K(y, y) \quad (\leqq +\infty)$$

pour tout point $x \neq y$. On a donc

$$K(x, y) < K(x, x) \qquad (\leqq +\infty)$$

pour tout point $x \neq y$. C.Q.F.D.

Dans R^m, soit $K(x)$ une fonction positive, continue, symétrique, et sommable dans tout voisinage de l'origine 0 telle que $K(0) = \lim_{x \to 0} K(x) (\leqq +\infty)$. Considérons le potentiel

$$U^{\mu}(x) = \int K(x - y)\, d\mu(y)$$

d'une mesure positive μ pris par rapport au noyau $K(x)$, Le noyau $K(x)$ est régulier lorsque, pour la mesure positive λ de masse totale un avec la densité uniforme dans toute boule assez petite centrée en l'origine 0, il existe une constante A telle que

$$U^{\lambda}(x) \leqq A \cdot K(x)$$

dans tout l'espace R^m, Le noyau d'ordre α

$$K(x, y) = |x - y|^{\alpha - m} \qquad (0 < \alpha \leqq 2)$$

est régulier dans R^m, car on peut poser toujours $A = m/\alpha$ ([10], p. 28), Plus généralement, le noyau $K(x)$ est régulier dans R^m s'il existe un nombre $h < m$ tel que

$$K(x) \leqq 2^h \cdot K(2x)$$

pour tout point x d'un voisinage de l'origine 0 ([3], § 6). Pour les potentiels de ce type, remarquons que le théorème 9 et son corollaire s'expriment sous les formes suivantes.

THÉORÈME 9*. *Soit $K(x)$ un noyau régulier satisfaisant au second principe du* *maximum dans R^m. Pour qu'il satisfasse au principe d'unicité dans R^m, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété suivante :*

[S^*] *Pour toute mesure positive λ à support compact ne contenant pas l'origine 0, si on a*

$$U^\lambda(x) \leqq K(x)$$

sur le support S_λ de λ, on a

$$U^\lambda(x) < K(x)$$

dans un voisinage de l'origine 0.

COROLLAIRE. *Soit $K(x)$ un noyau régulier satisfaisant à la fois aux premier et second principes du maximum dans R^m. Pour qu'il satisfasse au principe d'uncité dans R^m, il faut et il suffit que $K(x) < K(0)$ ($\leqq +\infty$) pour tout point $x \neq 0$.*

COROLLAIRE. *Soit $K(x)$ un noyau régulier décroissant de la seule distance $|x|$ (ou plus généralement, ayant la condition [R] du théorème 8) et satisfaisant au second principe du maximum. Pour qu'il satisfasse au principe d'unicite dans R^m, il faut et il suffit que $K(x) < K(0)$ ($\leqq +\infty$) pour tout point $x \neq 0$.*

6. Potentiels pris par rapport à un noyau symétrique de signe variable

Dans les paragraphes antérieurs on étudiait quelques problèmes fondamentaux dans la théorie du potentiel pris par rapport au noyau positif et symétrique, en sortant à partir de la quantité $G(\mu, \nu)$ définie par tout couple (μ, ν) de deux mesures positives portées par chacun de deux ensembles boréliens et disjoints. $G(\mu, \nu)$ n'a pas toujours de sens pour des noyaux de signe variable. Mais, les résultats obtenus dans les paragraphes antérieures ont lieu, en modifiant un peu l'énoncé, au cas où un noyau $K(x,y)$ est une fonction continue et symétrique de signe variable dans Ω, $K(x,x)$ pouvant être $+\infty$. Comme il est bien connu ([10], p. 61), le noyau logarithmique

$$K(x, y) = -\log|x-y|$$

satisfait au principe (restreint) d'énergie dans $R^m (m=2,3)$: Soit σ une mesure de masse totale nulle à support compact, alors l'intégrale d'énergie

$$I(\sigma) = \iint \log \frac{1}{|x-y|}\, d\sigma(y)\, d\sigma(x)\,,$$

lorsqu'elle existe, est toujours $\geqq 0$, l'égalité n'ayant lieu que si $\sigma \equiv 0$. Conformément à cet exemple, lorsqu'un noyau K est de signe variable, il est dit de type positif dans Ω si l'intégrale d'énergie

$$I(\sigma) = \iint K(x, y)\, d\sigma(y) d\sigma(x)$$

de toute mesure σ de masse totale nulle, lorqu'elle existe, est toujours $\geqq 0$. Encore, il est dit satisfaire au principe d'énergie dans Ω si l'intégrale d'énergie $I(\sigma)$ de toute mesure σ de masse totale nulle à support compact, lorsqu'elle existe, est toujours $\geqq 0$ et l'égalité n'a lieu qu'au cas de $\sigma \equiv 0$.

Pour tout couple (μ, ν) de deux mesures positives de masse totale un portées par chacun de deux ensembles boréliens et disjoints E_1 et E_2 contenus dans un compact, posons

$$G(\mu, \nu) = I(\mu) - 2\int U^{\mu} d\nu + I(\nu) .$$

Naturellement, elle a un sens seulement au cas où il y a deux mesures μ et ν telles que $I(\mu)$, $I(\nu)$ et $\int U^{\mu} d\nu$ sont tous finies. On souligne que $G(\mu, \nu)$ revient à la variation de Gauss

$$G(\nu) = I(\nu) - 2\int U^{\mu} d\nu$$

si on fixe une mesure μ portée par E_1. On appelle couple minimal sur E_1 et E_2 un couple (μ_0, ν_0) pour lequell $G(\mu, \nu)$ est minimum parmi tous les couples (μ, ν) comme ci-dessus. Alors, on a de manière analogue au lemme 1

LEMME 1'. *S'il existe un couple minimal (μ_0, ν_0) sur E_1 et E_2, en posant*

$$g_1(x) = U^{\mu_0}(x) - U^{\mu_0}(x), \; g_2(x) = -g_1(x)$$

$$\gamma_1 = \int g_1(x)\, d\mu_0(x) \;\; et \;\; \gamma_2 = \int g_2(x)\, d\nu_0(x)$$

$g(x)$ jouit des propriétés suivantes :

(1) *$g_1(x) \leqq \gamma_1$ [resp $g_2(x) \leqq \gamma_2$] sur E_1 [resp. E_2] presque partout pour μ_0 [resp. ν_0],*

(2) *$g_1(x) \geqq \gamma_1$ [resp. $g_2(x) \geqq \gamma_2$] sur E_1 [resp. E_2] presque partout pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact; en particulier, si E_1 et E_2 sont les compacts, $g_1(x) \geqq \gamma_1$ [resp. $g_2(x) \geqq \gamma_2$] p.p.p. sur E_1 [resp. E_2].*

Ensuite, supposons

$$G(\mu, \nu) \geqq 0$$

pour tout couple (μ, ν) de deux mesures positives de masse totale un portées par deux ensembles boréliens et disjoints E_1 et E_2 contenus dans un compact, Alors, on a de la manière analogue au lemme 2

LEMME 2'. *Si $G(\mu_0, \nu_0) = 0$ pour un couple (μ_0, ν_0) de deux mesures positives de masse totale un portées par chacun de E_1 et E_2, on a*

$$U^{\mu_0}(x) = U^{\nu_0}(x)$$

dans Ω presque partout pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact.

Au cas où des noyaux sont de signe variable, on pose quelques principes fondamentaux dans la théorie du potentiel sous les formes suivantes.

PREMIER PRINCIPE DU MAXIMUM : Soit λ une mesure positive de masse totale un à support compact. Si on a

$$U^{\lambda}(x) \leqq M \qquad (M\text{: une constante } \gtreqless 0)$$

sur le support S_{λ} de λ, on a la même inégalité partout dans tout l'espace Ω.

SECOND PRINCIPE DU MAXIMUM : Soient μ une mesure positive d'énergie finie, de masse totale un et à support compact et ν une mesure positive quelconque de masse totale un. Pour une constante γ ($\gtreqless 0$), si on a

$$U^{\mu}(x) \leqq U^{\nu}(x) + \gamma$$

sur le support S_μ de μ, on a la même inégalité partout dans tout l'espace Ω.

PRINCIPE D'ÉQUILIBRE : Etant donné dans Ω un compact F (portant des mesures positives d'énergie finie), il existe au moins une mesure positive λ de masse totale un portée par F telle que

(1) $U^\lambda(x) = M$ (M : une constante $\gtreqqless 0$) p.p.p. sur F,

(2) $U^\lambda(x) \leqq M$ partout dans tout l'espace Ω.

PRINCIPE DU BALAYAGE : Etant donné dans Ω un compact F (portant des mesures positives d'énergie finie), on peut faire associer à toute mesure positive μ de masse totale un au moins une mesure positive μ', de masse totale un, portée par F telle que, pour une constante γ ($\gtreqqless 0$)

(1) $U^{\mu'}(x) = U^\mu(x) + \gamma$ p.p.p. sur F ,

(2) $U^{\mu'}(x) \leqq U^\mu(x) + \gamma$ partout dans tout l'espace Ω,

(3) $\int U^{\sigma'} d\tau = \int U^\sigma d\tau'$ pour toute mesure σ et τ de masse totale nulle,

τ étant d'énergie finie.

PRINCIPE D'UNICITÉ : Si on a

$$U^\mu(x) = U^\nu(x)$$

p.p.p. dans Ω pour deux mesures quelconques μ et ν de masse totale un à support compact, on a nécessairement $\mu \equiv \nu$.

Alors, en s'appuyant sur les lemmes 1' et 2', on a

THÉORÈME 1'. *Pour qu'un noyau K soit de type positif dans Ω, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété suivante :*

[P_1'] *Soient μ et ν des mesures d'énergie finie, de masse totale un et à support compact.*

Pour une constante γ ($\gtreqqless 0$), si on a

$$U^\mu(x) \leqq U^\nu(x) + \gamma$$

sur le support S_μ de μ, on a la même inégalité au moins en un point du support S_ν de ν.

THÉORÈME 2'. *Pour qu'un noyau K satisfasse au principe d'énergie dans Ω, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété suivante :*

[P_2'] *Soient μ et ν des mesures positives differentes ($\mu \not\equiv \nu$) d'énergie finie, de masse totale un à support compact.*

Pour une constante γ ($\gtreqqless 0$), si on a

$$U^\mu(x) \leqq U^\nu(x) + \gamma$$

sur le support S_μ de μ, on a

$$U^\mu(x) < U^\nu(x) + \gamma$$

sur un ensemble de masse positive pour ν.

THÉORÈME 3'. (le même énoncé que le théorème 3)

THÉORÈME 4'. (" " " 4)

THÉORÈME 5'. (" " " 5)

COROLLAIRE. *Un noyau K satisfaisant au principe d'équilibre ou du balayage est nécessairement de type positif dans Ω.*

THÉORÈME 6'. *Pour qu'un noyau K satisfasse au premier principe du maximum dans Ω, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété suivante :*

[Q_1'] *Soient ξ un point quelconque et λ une mesure positive de masse totale un à support compact ne contenant pas ξ.*

Pour une constante γ, si on a

$$U^{\lambda}(x) \leqq K(x, \xi) + \gamma$$

sur le support S_λ de λ, on a nécessairement $\gamma \geqq 0$.

THÉORÈME 7'. *Pour qu'un noyau K satisfasse au second principe du maximum dans Ω, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété suivante :*

[Q_2'] *Soient ξ un point quelconque et λ une mesure positive de masse totale un à support compact ne contenant pas ξ.*

Pour une constante γ, si on a

$$U^{\lambda}(x) \leqq K(x, \xi) + \gamma$$

sur le support S_λ de λ, on a la même inégalité dans tout l'espace Ω.

THÉORÈME 9'. *Soit K un noyau régulier satisfaisant au second principe du maximum dans Ω. Pour qu'il satisfasse au principe d'unicité dans Ω, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété suivante :*

[S'] *Soient ξ un point quelconque et λ une mesure positive de masse totale un à support compact ne contenant pas ξ.*

Pour une constante γ, si on a

$$U^{\lambda}(x) \leqq K(x, \xi) + \gamma$$

sur le support S_λ de λ, on a

$$U^{\lambda}(x) < K(x, \xi) + \gamma$$

dans un voisinage $V(\xi)$ de ξ.

On abrége les démonstration de ces théorèmes, car elles sont analogues aux démonstrations des théorèmes correspondants dans les paragraphes antérieurs. On n'a pas d'énoncé analogue au théorème 8. Mais, il est facile de démontrer que, le potentiel du type

$$U^{\mu}(x) = \int K(x-y)\, d\mu(y)$$

pris par rapport au noyau symétrique $K(x)$ sommable dans tout l'espace R^m ($m \geqq 1$), le second principe du maximum entraîne le premier principe du maximum. En effet, soit λ une mesure positive de masse totale un à support compact ne contenant pas l'origine 0 telle que, pour une constante γ, on ait

$$U^{\lambda}(x) \leqq K(x) + \gamma$$

sur le support S_λ de λ. Alors ,on a

$$\int_{B(O,r)} U^{\lambda}\, dx \leqq \int_{B(O,r)} K(x)\, dx + \gamma \cdot \text{mes.}\,[B(O, r)]$$

i.e.

$$\int d\lambda(y) \frac{1}{\text{mes.}\,[B(O, r)]} \int_{B(O,r)} K(x-y)\, dx$$

$$\leqq \frac{1}{\text{mes.}\,[B\,(O,\,r)]} \int_{B\,(O,\,r)} K\,(x)\,dx + \gamma$$

Comme $r \to +\infty$, $K\,(x)$ étant sommable dans tout l'espace R^m, on a $\gamma \geqq 0$.

Enfin, soulignons que les théorèmes 6′ et 7′ entraînent facilement les résultats bien connus que le noyau logarithmique

$$K\,(x, y) = -\log|x-y|$$

satisfait aux premier et second principes du maximum tous deux dans R^2.

Bibliographies

[1] H. Cartan : Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiels, Bull. Soc. Math. France. **73**, 1945, pp. 74-106.

[2] ——— : Théorie générale du balayage en potentiel newtonien, Ann. Univ. Grenoble, **22**, 1946, pp. 221-280.

[3] H. Cartan & J. Deny : Le principe du maximum en théorie du potentiel et notion de fonctions surharmoniques, Acta Sci. Szeged, **12**, 1950, pp. 81-100.

[4] G. Choquet & J. Deny : Aspects linéaires de la théorie du potentiel (1), Etude des modèles finis, C. R. Acad. Sci. Paris, **242**, 1956. pp. 222-225.

[5] ——— : Aspects linéaires de la théorie du potentiel [11], Théorème de dualité et applications, C. R. Acad. Sci. Paris, **243**, 1956, pp. 764-767.

[6] H. Delange : Sur l'unicité de la distribution de masse produisant un potentiel donné, Bull. Sci. Math., **69**, 1945, pp. 7-12.

[7] J. Deny : Les potentiels d'énergie finie, Acta Math., **82**, 1950, pp. 107-183.

[8] ——— : Familles fondamentales, noyaux associés, Ann. l'Inst. Fourier, **3**, 1951, pp. 73-101.

[9] ——— : Le balayage, Meddel. Lund Univ. Mat. Sem., Supplementband, tillägnat M. Riesz, 1952, pp. 47-61.

[10] O. Frostman : Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles, Thèse Lund, 1935, pp. 1-118.

[11] ——— : Sur le balayage des masses, Acta Sci. Szeged, **9**, 1938, pp. 43-51.

[12] S. Kametani : Positive definite integral quadratic forms and generalized potentials, Proc. Imp. Acad., **20**, 1944, pp. 7-14.

[13] K. Kunugui : Etude sur la théorie du potentiel généralisé, Osaka Math. Jour., **2**, 1950, pp. 63-103.

[14] N. Ninomiya : Equilibrium potentials and energy integrals, Proc. Jap. Acad., **26**, 1950, pp. 1-16.

[15] ——— : Sur I'intégrale d'énergie dans la théorie du potentiel, Jour. Inst. Polytech. Osaka City Univ., **5**, 1954, pp. 97-100. Une correction de ce travail, ce journal, **6**, 1955, pp. 79-82.

[16] ——— : Sur le théorème du balayage et le théorème d'équilibre, Jour. Inst. Polytech. Osaka City Univ., **6**, 1955, pp. 83-91.

[17] A. Pfluger : Sur l'unicité de la distribution de masses produisant un potentiel donné, Bull. Sci. Math., **71**, 1947, pp. 45-47.

[18] C. de La Vallée-Poussin : Extension de la méthode du balayage de problème de Dirichlet, Ann.l'Inst. H. Poincaré, **2**, 1932, pp. 169-232.

[19] M. Riesz : Intégrale de Riemann-Liouville et potentiels, Acta Sci.Szeged, **9**, 1938, pp. 1-42.

[20] T. Ugaheri : On the general capacities and potentials, Bull. Tokyo Inst. Tech., **4**, 1953, pp. 149-179.