Journal of the Institute of Polytechnics,
Osaka City University,
Vol. 8, No. 1, Series A

Sur le principe de continuité dans la théorie du potentiel.

par

Nobuyuki NINOMIYA.

(Received Sep. 28, 1956)

Dans l'espace euclidien R^m à dimension m ($m \geqq 2$), on désignera par x ou y un point de coordonnées $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ ou $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$, par $x \pm y$ un point de coordonnées $(x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \cdots, x_m \pm y_m)$ et par $|x|$ la distance du point x à l'origine 0. Soit $K(x)$ une fonction continue dans R^m telle que $\lim\limits_{x \to 0} K(x) = +\infty$. Alors, le potentiel d'une mesure μ de R^m pris par rapport au noyau K est défini comme

$$U^\mu(x) = \int K(x-y) d\mu(y).$$

Le potentiel d'une mesure positive à support compact est semi-continu inférieurement dans R^m et continu dans le complémentaire du support. On étudiera les noyaux K satisfaisant au

PRINCIPE DE CONTINUITÉ : *Le potentiel d'une mesure positive est toujours continu comme une fonction dans tout l'espace en tout point où il est continu comme une fonction sur son support.*

Le théorème d'Evans-Vasilesco ([1], [4]) exprime que le noyau newtonien $K(x) = 1/|x|$ satisfait au principe de continuité dans l'espace ordinaire. Comme son raisonnement montre qu'un noyau K satisfait au principe de continuité toutes les fois que la relation $K(x) \leqq K(y)$ entraîne toujours la relation

$$K(x) \leqq CK(x-y) \qquad [C\text{: une constante}],$$

on sait ([3], p.26) que le noyau $K(x) = 1/|x|^\alpha$ $(0 < \alpha < m)$ satisfait au principe de continuité dans R^m. Encore, J. Deny a démontré en collaboration avec H. Cartan ([2], § 7) qu'un noyau K satisfait à cette relation d'où au principe de continuité dans R^m, lorsque

[A] l'ensemble de points $E_s = \{x : K(x) \geqq s\}$ est un compact convexe contenant l'origine 0 pour tout nombre s assez grand, et

[B] il existe une constante positive h $(< m)$ telle que $K(x) \leqq 2^h K(2x)$ pour tout point x d'un voisinage de l'origine 0.

1) M. S. Kametani a prouvé le résultat plus étendu: un noyau K satisfait au principe de continuité s'il est une fonction continue en x et en y dans R^m et

$$\frac{1}{k} \varphi(|x-y|) \leq K(x, y) \leq k \cdot \varphi(|x-y|)$$

pour une constante $k(\geq 1)$ et une fonction positive et décroissante $\varphi(t)$ dans $0 < t < +\infty$ telle que $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = +\infty$. On peut voir ce résultat dans le record des conférences aux réunions de la Société Mathématique du Japon en printemps 1947. Voir "Sûgaku, Vol. 1, 1947–8, p.155 (en japonais)".

D'autre part, récemment T. Ugaheri ([5], §2) a publié le résultat[1] intéressant qu'un noyau K satisfait au principe de continuité, s'il est une fonction décroissante de la seule distance $|x|$ dans R^m. Son raisonnement tient au fait différent de celui du théorème d'Evans-Vasilesco, c'est-à-dire, à une sorte du principe du maximum : si le potentiel d'une mesure positive à support compact pris par rapport à un noyau K qui est une fonction décroissante de la seule distance $|x|$ est $\leqq M$ sur son support, il est $\leqq k\cdot M$ partout dans tout l'espace R^m, k étant une constante.

L'ensemble de points $E_s=\{x\,;K(x)\geqq s\}$ est un ensemble fermé contenant l'origine 0, et particulièrement il est une boule fermée centrée en 0 si le noyau K est une fonction décroissante de la seule distance $|x|$. Dans cet article, on va étendre le résultat de T. Ugaheri au noyau qui n'est pas toujours une fonction décroissante de la seule distance $|x|$, en posant une condition géométrique à l'ensemble E_s.

THÉORÈME. *Si un noyau K satisfait à la condition :*

[C] *Pour tout nombre assez grand s ($\geqq s_0$) et une constante positive α ($\leqq 1$), il existe un compact convexe $\overline{E}_s$ tel que $E_s\subset\overline{E}_s\subset E_{\alpha s}$ et dont deux rayons*[2] *quelconques sont dans la proportion bornée,*

il satisfait au principe de continuité dans R^m.

Démonstration. Soient $\rho_1(s)$ et $\rho_2(s)$ les rayons le plus grand et le plus petit de $\overline{E}_s$ respectivement. Supposons que le potentiel $U^\lambda(x)$ d'une mesure positive λ à support compact F est continu en un point ξ de F comme une fonction sur F. Alors, étant donné un nombre positif quelconque ε, on peut trouver un nombre positif assez petit δ tel que $0<U^{\lambda'}(\xi)<\varepsilon$ et $U^{\lambda'}(x)$ soit continu en ξ comme une foncition sur F, où λ' désigne la restriction de λ à l'ensemble de points de F contenu dans $|x-\xi|\leqq\delta$. Donc, on peut encore trouver un nombre positif δ_0 $\left[<\min\left(\delta,\ \frac{\rho_2(s_0)}{2}\right)\right]$ tel que $0<U^{\lambda'}(x)<\xi$ en tout x de F contenu $|x-\xi|\leqq\delta_0$. En désignant par λ'' la restriction de λ' à l'ensemble de points de F contenu dans $|x-\xi|\leqq\delta_0$, on a

$$0<U^{\lambda''}(x)<\varepsilon$$

en tout point x de F contenu dans $|x-\xi|\leqq\delta_0$. Alors, une fois qu'on prouve

$$U^{\lambda''}(x)\leqq k\cdot\varepsilon \qquad [k:\text{ constante}]$$

en tout point x contenu dans $|x-\xi|\leqq\delta_0$, on a

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{x\to\xi}}\,U^\lambda(x) &\leqq \overline{\lim_{x\to\xi}}\,U^{\lambda''}(x)+\overline{\lim_{x\to\xi}}\,U^{\lambda-\lambda''}(x)\\ &\leqq k\cdot\varepsilon+U^{\lambda-\lambda''}(\xi)\leqq k\cdot\varepsilon+U^\lambda(\xi),\end{aligned}$$

car $U^{\lambda-\lambda''}(x)$ est continu en ξ comme une fonctiun dans R^m. ε étant arbitraire, on a d'ailleurs

$$\overline{\lim_{x\to\xi}}\,U^\lambda(x)\leqq U^\lambda(\xi),$$

ce qui montre que $U^\lambda(x)$ est continu en ξ comme une fonction dans R^m. Donc,

2) On dira un rayon de $\overline{E}_s$ un segment de l'origine 0 à son point-frontière.

il suffit de prouver que si le noyau K satisfait à la condition [C], il satisfait au

PRINCIPE DU MAXIMUM (DILATÉ) : *Si le potentiel $U^{\mu}(x)$ d'une mesure positive μ dont le support est contenu dans une boule S de diamètre $< \rho_2(S_0)$ est $\leqq M$ sur son support, il est $\leqq k \cdot M$ partout dans S, k étant une constante.*

Comme on a

$$1 \geqq \frac{\rho_2(s)}{\rho_1(s)} > a > 0$$

pour tout s ($\geqq s_0$), on peut prendre un angle positif θ plus petit que la valeur principale de $\cos^{-1}\left(1-\frac{a^2}{2}\right)$. Pour un point-frontière quelconque x de E_s, observons que tout point y tel que $|x-y| \leqq |x|$ et $\widehat{0xy} \leqq \theta$ appartient à $\overline{E}_s$. En effet, soit $\overline{S}_s$ l'ensemble des points-frontière z de la plus petite sphère S_s contenue dans $\overline{E}_s$ et centrée en 0 tels que $|x-z| \geqq |x|$, et soit 2ω l'angle[3] au sommet du cône construit par tout segment du point x à tout point de $\overline{S}_s$. Alors, on a

$$\cos\omega = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_2(s)}{|x|}\right)^2,$$

ce qui est

$$< 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_2(s)}{\rho_1(s)}\right)^2 < 1 - \frac{a^2}{2}$$

en vertu du

$$a \cdot |x| \leqq a \cdot \rho_1(s) < \rho_2(s).$$

On a donc $\omega > \theta$. Par suite, pour un angle quelconque θ' ($\leqq \theta$), tout point z tel que $|x-z| = |x|$ et $\widehat{0xz} = \theta'$ appartient *à* S_s. Comme S_s est contenue dans un compact convexe $\overline{E}_s$, tout point y sur un segment $\overline{xz}$ appartient à $\overline{E}_s$. Maintenant, soit x un point quelconque de S qui n'appartient pas au compact F. On va trouver une constante k telle que $U^{\mu}(x) \leqq k \cdot M$. On peut décomposer tout l'espace R^m en la somme finie des cônes angulaires R_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) avec les intérieurs disjoints dont tous les sommets sont placés en x et dont tous les angles[3] au sommet sont $< \theta : R^m = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$. Ici, n est une constante, par exemple, la $(m-1)$-ième puissance d'un nombre entièr plus grand que $2\pi/\theta$. Ils décomposent F en la somme de n compacts: $F = F \cdot R_1 + F \cdot R_2 + \cdots + F \cdot R_n$. Soit x_i un point le plus rapproché à x parmi tous points de $F \cdot R_i$. Alors, on a pour tout point y de $F \cdot R_i$

$$|x_i - x| \leqq |x-y| \leqq \rho_2(s_0)$$

et $\widehat{yxx_i} \leqq \theta$. Désignons par $E_s^{(y)}$, $\overline{E}_s^{(y)}$ et $E_{\alpha s}^{(y)}$ respectivement les ensembles déduits des E_s, $\overline{E}_s$ et $E_{\alpha s}$ par la transformation de l'origine 0 au point y de $F \cdot R_i$. Si le point x est un point-frontière d'un $E_s^{(y)}$, x_i appartient à $\overline{E}_s^{(y)}$ d'où à $E_{\alpha s}^{(y)}$ d'après ce qui précède. On a donc pour tout point y de $F \cdot R_i$

3) L'angle au sommet du cône signifie le plus grand angle entre deux génératrice quelconques.

$$0 < s = K(x-y) \leqq \frac{1}{\alpha} K(x_i - y)$$

En désignant par μ_i la restriction de μ à $F \cdot R_i$, on a

$$U^\mu(x) \leqq \sum_{i=1}^n U^{\mu_i}(x) \leqq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha} U^{\mu_i}(x_i)$$

$$\leqq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha} U^\mu(x_i) \leqq \frac{n}{\alpha} \cdot M.$$

Ainsi, il suffit de prendre $\frac{n}{\alpha}$ comme la constante k qu'on demande.

Corollaire. *Si un noyau K satisfait à la condition:*

[C′] *Pour tout nombre assez grand $s(\geqq s_0)$, l'ensemble E_s est un compact convexe contenant l'origine 0 dont deux rayons quelconques sont dans la proportion bornée,*

il satisfait au principe de continuité dans R^m.

En effet, c'est le cas qu'on peut placer $\alpha = 1$ dans le théorème.

Corollaire. *Si un noyau K satisfait à la condition:*

[C″] *Pour tout nombre assez grand $s(\geqq s_0)$, l'ensemble E_s est un compact dont le complémentaire est un domaine contenant l'infini, et*

$$\varlimsup_{r \to 0} \frac{\max_{|x|=r} K(x)}{\min_{|x|=r} K(x)} < +\infty,$$

il satisfait au principe de continuité dans R^m.

En effet, il existe une constante positive $\alpha(<1)$ telle que

$$\min_{|x|=r} K(x) > \alpha \cdot \max_{|x|=r} K(x)$$

pour tout nombre positif assez petit $r(\leqq r_0)$. Pour tout nembre $s(\geqq s_0/\alpha)$ tel que le plus grand rayon de E_s est $\leqq r_0$, la surface de la plus petite sphère S_s contenant E_s et centrée en l'origine 0 est contenue dans $E_{\alpha s}$. D'autre part, $E_{\alpha s}$ contient l'intérieur de la sphère S_s en vertu de l'hypothèse. D'où le résultat.

Remarque. On considère le potentiel d'une mesure positive

$$U^\mu(x) = \int K(x, y) \; d\mu(y)$$

pris par rapport au noyau K qui est une fonction continue en x et en y et $+\infty$ en $x = y$ dans R^m. Soulignons que le théorème obtenu est vrai sans modification pour tout noyau K satisfaisant à la condition:

[C*] *$E_s^{(y)}$ désignant l'ensemble de points $\{x; K(x, y) \geqq s\}$, on peut trouver trois constantes positives $\alpha(\leqq 1)$, S_0 et M telles que pour tout point y et pour tout nombre $s(\geqq s_0)$ il existe un compact convexe $\overline{E}_s^{(y)}$ tel que $E_s^{(y)} \subset \overline{E}_s^{(y)} \subset E_{\alpha s}^{(y)}$ et dont deux rayons quelconques sont dans la proportion $\leqq M$.*

REMARQUE. Le résultat de Cartan-Deny cité plus haut et le théorème obtenu donnent tous deux une condition suffisante pour qu'un noyau K satisfasse au principe de continuité. Ils ne donnent jamais une condition nécessaire. En effet, il y a des noyaux K qui ne satisfont pas à [A] et à [B] mais à [C]: par exemple, dan R^2

$$K(x) = K(x_1, x_2) = \exp. \frac{1}{x_1^2+x_2^2}.$$

D'autre part, il y a des noyaux K qui ne satisfont pas à [C] mais à [A] et à [B]: par exemple, dans R^2

$$K(x) = K(x_1, x_2) = \frac{2}{|x_1|+\sqrt{x_1^2+4|x_2|}}.$$

En passant, appelons l'extension du théorème fameux de G. C. Evans. T. Ugeheri ([5], §4) a étendu le théorème pour tout noyau $K(x, y)$ qui est une fonction décroissante de la seule distance $|x-y|$ dans R^m. Son raisonnement dois la partie essentielle à quatre résultats suivants:

1. $$\Gamma_n = \inf \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} K(x_i, x_j)$$

est croissante avec n, où *inf* est pris par rapport à toute paire de points $\{P_i\}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ du compact donné F.

2. $$\Gamma = \lim_{n\to\infty} \Gamma_n$$

est égale à *inf* de l'énergie $\iint K(x, y) d\mu(y) d\mu(x)$ des mesures positives μ portées par F de masse totale unité.

3. Si $\Gamma = +\infty$, il existe une mesure positive et ponctuelle portée par F, de masse totale arbitrairement petite, dont le potentiel (pris par rapport au noyau K) est $\geqq 1$ partout sur F.

4. Si un compact F n'est le support d'aucune mesure positive dont le potentiel (pris par rapport au noyau K) est borné à distance finie, il n'est le support d'aucune mesure positive dont l'énergie (pris par rapport au noyau K) est finie.

Trois résultats au début sont réalisés sans modification pour tout noyau K qui est une fonction continue en x et en y et $+\infty$ en $x = y$ dans R^m. Le résultat dernier est rempli pour tout noyau K satisfaisant au principe de continuité. En effet, s'il existe une mesure positive μ d'énergie finie portée par F, on peut trouver la restriction ν de μ telle que la masse totale de $\mu-\nu$ soit arbitrairement petite et telle que le potentiel $U^\mu(x)$ soit continu comme une fonction considérée sur le support de ν. Comme $U^\mu(x)$ est la somme des potentiels de deux mesures positives ν et $\mu-\nu$ (la somme de deux fonctions semi-continues inférieurement), $U^\nu(x)$ et $U^{\mu-\nu}(x)$ sont aussi continus comme une fonction considérée sur le support de ν. Si le noyau K satisfait au principe de continuité, $U^\nu(x)$ est continu partout comme une fonction considérée dans tout l'espace, d'où il est borné à distance finie. On a donc:

Extension du Théorème de G. C. Evans. *Etant donné un compact F de capacité nulle*[4] *par rapport au noyan K satisfaisant au principe de continuité, on peut trouver toujours une mesure positive μ portée par F dont le potentiel (pris par rapport au noyau K) est infini partout sur F et fini partout dans le complémentaire de F.*

Références

[1] G. C. Evans: On potentials of positive mass (I), Trans. Amer. Math. Soc., **37,** 1935, pp.226-253.

[3] H. Cartan & J. Deny: Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique, Acta Sci. Math. Szeged, **12,** 1950, pp. 81-100.

[3] O. Frostman: Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles…; Thèse, Lund, 1935.

[4] F. Vasilesco: Sur la continuité du potentiel à travers les masses, C. R. Acad. Sci. Paris, **200,** 1935, pp. 1173-1174.

[5] T. Ugaheri: On the general capacities and potentials, Bull. Tokyo Inst. Tech., series B, 1953, n°4, 149-179.

Addendum. Après cet article a été reçu, l'auteur a vu le travail de M. G. Choquet "Les noyaux réguliers en théorie du potentiel, C. R. Acad. Sci. Paris, **243,** 1956, pp. 635-638", dans lequel on trouve le résultat suivant: un noyau K satisfait au principe de continuité si l'ensemble $\{x; K(x) > s\}$ est un domaine D_s étoilé par rapport à l'origine 0, tel que pour tout point x de D_s, l'ensemble convexe engendré par x et la boule $B(0, k\cdot|x|)$ soit contenu dans D_s, k étant une constante positive. L'auteur insite qu'on peut en aussi obtenir Corollaire 1.

4) Il vaut dire que le potentiel de toute mesure positive portée par F n'est pas borné dans toute boule assez grande.