Journal of the Institute of Polytechnics,
Osaka City University,
Vol. 4, No. 2, Series A

Bemerkungen über die Erweiterungstheorie von Gruppen

Keizo ASANO

(Received July 10, 1954)

Es seien $\mathfrak{N}$ und Γ zwei gegebene Gruppen und M sei die Menge aller Paare (ξ, X) $(\xi \in \Gamma, X \in \mathfrak{N})$. Zu jeder Erweiterung $\mathfrak{G} = \sum u_\sigma \mathfrak{N} (\sigma \in \Gamma)$ von $\mathfrak{N}$ nach Γ gehört bekanntlich ein Faktorensystem $(S_\sigma, C_{\rho,\sigma})$ mit einer Menge aus Automorphismen von $\mathfrak{N}$, so dass

$$(1) \qquad u_\sigma u_\tau = u_{\sigma\tau} C_{\sigma,\tau} (C_{\sigma,\tau} \in \mathfrak{N}), \quad A^{S_\sigma} = u_\sigma^{-1} A u_\sigma (A \in \mathfrak{N})$$

$$(2) \qquad C_{\rho,\sigma\tau} C_{\sigma,\tau} = C_{\rho\sigma,\tau} C_{\rho,\sigma}^{S_\tau}, \quad A^{S_\sigma S_\tau} = C_{\sigma,\tau}^{-1} A^{S_{\sigma\tau}} C_{\sigma,\tau}.$$

Umgekehrt gehört zu gegebenem Faktorensystem $(S_\sigma, C_{\sigma,\tau})$ mit der Eigenschaft (2) eine Erweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{N}$ mit der Eigenschaft (1). In der vorliegenden Note bemerken wir zunächst, dass man diese Erweiterung in der Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_M$ von M konstruieren kann. Im Falle, wo Γ durch einige Relationen bestimmt ist, ist der Shodasche Erweiterungssatz zweckmässig ([1], [2]). Wir werden seinen Satz etwas modifizieren und als eine unmittelbare Folge die Erweiterungen mit abelschen Faktorgruppe behandeln.

Die Abbildung φ_σ von M in sich mit $(\xi, X)\varphi_\sigma = (\xi\sigma, C_{\xi,\sigma} X^{S_\sigma})$ ist ersichtlich eine Permutation von M. Die Permutationen $(\xi, X) \to (\xi, XA)$ $(A \in \mathfrak{N})$ bilden eine mit $\mathfrak{N}$ isomorphe Gruppe, die wir mit $\mathfrak{N}$ idenzifizieren: $(\xi, X)A = (\xi, XA)$. Mann kann daher $\mathfrak{N}$ als eine Untergruppe von $\mathfrak{P}_M$ ansehen. Wir haben

$$A\varphi_\sigma = \varphi_\sigma A^{S_\sigma}, \quad \varphi_\sigma \varphi_\tau = \varphi_{\sigma\tau} C_{\sigma,\tau}, \quad \varphi_1 = C_{1,1}.$$

Denn es gelten

$$(\xi, X)A\varphi_\sigma = (\xi, XA)\varphi_\sigma = (\xi\sigma, C_{\xi,\sigma} X^{S_\sigma} A^{S_\sigma}) = (\xi, X)\varphi_\sigma A^{S_\sigma},$$

$$(\xi, X)\varphi_\sigma\varphi_\tau = (\xi\sigma, C_{\xi,\sigma} X^{S_\sigma})\varphi_\tau = (\xi\sigma\tau, C_{\xi\sigma,\tau} C_{\xi,\sigma}^{S_\tau} X^{S_\sigma S_\tau})$$

$$= (\xi\sigma\tau, C_{\xi,\sigma\tau} C_{\sigma,\tau} C_{\sigma,\tau}^{-1} X^{S_{\sigma\tau}} C_{\sigma,\tau}) = (\xi, X)\varphi_{\sigma\tau} C_{\sigma,\tau}.$$

Die Menge $\cup \varphi_\sigma \mathfrak{N}$ bildet ersichtlich eine Gruppe, die eine Erweiterung von $\mathfrak{N}$ nach Γ ist.

Demnach kann man jede Erweiterung von $\mathfrak{N}$ nach Γ in $\mathfrak{P}_M$ isomorph einbetten. Wie M. Takahasi bemerkte ([4]), kann man sogar in $\mathfrak{P}_M$ auch eine Zerfällungsgruppe der Erweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{N}$ befinden. Es sei nämlich f eine Abbildung von Γ in $\mathfrak{N}$: $f(\xi) \in \mathfrak{N}$, $\xi \in \Gamma$. Definiert man $fg(\xi) = f(\xi)g(\xi)$, so bildet die Gesamtheit von f eine Gruppe $\mathfrak{N}^*$. Idenzifiziert man die Funktion f mit dem konstanten Wert C mit C, so ist $\mathfrak{N}^*$ eine $\mathfrak{N}$ umfassende Gruppe. Man kann ferner durch $(\xi, X)f=(\xi, Xf(\xi))$ die Abbildung f als ein Element von $\mathfrak{P}_M$ betrachten. Dann ist $\mathfrak{N}^*$ eine Untergruppe von $\mathfrak{P}_M$. Es ist $f\varphi_\sigma=\varphi_\sigma f^{T_\sigma}$, $f^{T_\sigma}(\xi)=f(\xi\sigma^{-1})^{S_\sigma}$, und die Grupse $\mathfrak{G}^*=\mathfrak{G}\mathfrak{N}^*=\sum\varphi_\sigma\mathfrak{N}^*$ ist eine Zerfällungsgruppe von $\mathfrak{G}$. Denn bedeutet $\psi_\sigma=\varphi_\sigma f_\sigma$, $f_\sigma(\xi)=C^{-1}_{\xi\sigma^{-1},\sigma}$, so ist

$$(\xi, X)\psi_\sigma=(\xi\sigma, C_{\xi,\sigma}X^{S_\sigma}C^{-1}_{\xi,\sigma})=(\xi\sigma, X^{S_\xi^{-1}S_{\xi\sigma}}),$$

$$(\xi, X)\psi_\sigma\psi_\tau=(\xi\sigma\tau, X^{S_\xi^{-1}S_{\xi\sigma}S_{\xi\sigma}^{-1}S_{\xi\sigma\tau}})=(\xi, X)\psi_{\sigma\tau}$$

d. h. $\psi_\sigma\psi_\tau=\psi_{\sigma\tau}$.

Jedes zu Γ gehörige Faktorensystem $(S_\sigma, C_{\sigma,\tau})$ aus $\mathfrak{N}$ kann also als ein Faktorensystem $(T_\sigma, C_{\sigma,\tau})$ aus $\mathfrak{N}^*$ betrachtet werden und als solches ist es ein zerfallendes Faktorensystem.

Dies kann man auch leicht direkt beweisen. Man kann nämlich ohne Mühe direkt zeigen, dass die Abbildung T_σ von $\mathfrak{N}^*$ in sich mit $f\to f^{T_\sigma}(f^{T_\sigma}(\xi)=f(\xi\sigma^{-1})^{S_\sigma})$ ein Automorphismus von $\mathfrak{N}^*$ ist, welcher eine Erweiterung von S_σ ist, und dass $f^{T_\sigma T_\tau}=C^{-1}_{\sigma,\tau}f^{T_{\sigma\tau}}C_{\sigma,\tau}$. Dann ist

$$g=f^{-1}_{\sigma\tau}C_{\sigma,\tau}f^{T_\tau}_\sigma f_\tau=1 \qquad (f_\sigma(\xi)=C^{-1}_{\xi\sigma^{-1},\sigma}).$$

Denn es gilt für jedes ξ aus Γ $f^{T_\tau}_\sigma(\xi\sigma\tau)=f_\sigma(\xi\sigma)^{S_\tau}=(C^{-1}_{\xi,\sigma})^{S_\tau}$,

$$g(\xi\sigma\tau)=C_{\xi,\sigma\tau}C_{\sigma,\tau}C^{-S_\tau}_{\xi,\sigma}C^{-1}_{\xi\sigma,\tau}=1.$$

Es sei nun $\Gamma=\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$, wo $\mathfrak{F}$ eine freie Gruppe aus den Erzeugenden $\{a_\lambda\}$ und $\mathfrak{N}$ aus $\{c_\mu\}$ erzeugter Normalteiler voh $\mathfrak{F}$ ist. Γ ist also eine Gruppe aus den Erzeugenden $\{a_\lambda\}$ mit den definierenden Relationen

$$\Pi_{i=1}^n a_{\nu_i}^{e_i}=1 \qquad (c_\mu=\Pi_{i=1}^n a_{\nu_i}^{e_i}).$$

$\mathfrak{N}$ ist eine $\mathfrak{F}$-Gruppe, d. h. eine Gruppe mit $\mathfrak{F}$ als Operatorenbereich: $r^F=F^{-1}rF$ $(r\in\mathfrak{N}, F\in\mathfrak{F})$. Die definierenden Relationen von $\mathfrak{N}$ als $\mathfrak{F}$-Gruppe aus den Erzeugenden $\{c_\mu\}$ seien

$$\Pi_{i=1}^m c_{\mu_i}^{\varepsilon_i F_i}=1 \qquad (\varepsilon_i=\pm 1,\ F_i\in\mathfrak{F}).$$

Ist $\mathfrak{G}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{N}$ nach Γ, so entspricht zu a_λ mod $\mathfrak{N}$ eine Restklasse $u_\lambda\mathfrak{N}$ aus $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Durch $A^{S_\lambda}=u_\lambda^{-1}Au_\lambda$ ist ein Automorphismus S_λ von $\mathfrak{N}$ definiert. Wir setzen

$$S(F)=\Pi_i S_{\lambda_i}^{n_i}, \quad u(F)=\Pi_i u_{\lambda_i}^{n_i}, \quad \text{falls} \quad F=\Pi_i a_{\lambda_i}^{n_i}.$$

$C_\mu=u(c_\mu)=\Pi_i u_{\nu_i}^{e_i}$ ist ersichtlich ein Element aus $\mathfrak{N}$. Wegen $A^{S(F)}=u(F)^{-1}Au(F)$ $(A\in\mathfrak{N})$ gilt

$$\Pi_{i=1}^m C_{\mu_i}^{\varepsilon_i S(F_i)}=\Pi_i u(F_i)^{-1}u(c_{\mu_i})^{\varepsilon_i}u(F_i)=u(\Pi_i C_{\mu_i}^{\varepsilon_i F_i})=1, \quad A^{S(c_\mu)}=C_\mu^{-1}AC_\mu.$$

SATZ. *Es seien eine Menge* $\{C_\mu\}$ *von Elementen aus* $\mathfrak{N}$ *und eine Menge* $\{S_\lambda\}$ *aus Automorphismen von* $\mathfrak{N}$ *mit den folgenden Eigenschaften gegeben:*

1) $\Pi_i C_{\mu_i}^{\varepsilon_i S(F_i)}=1$ *für jede Relation* $\Pi_i c_{\mu_i}^{\varepsilon_i F_i}=1$ *aus einem System der definierenden Relationen von* $\mathfrak{N}$ *als* $\mathfrak{F}$*-Gruppe aus den Erzeugenden* $\{c_\mu\}$.

2) $A^{S(c_\mu)} = C_\mu^{-1} A C_\mu$ *für jedes* A *aus* $\mathfrak{N}$.

Dann existiert eine Erweiterungsgruppe $\mathfrak{G}$ *von* $\mathfrak{N}$ *mit erzeugenden Elementen* u_λ *über* $\mathfrak{N}$, *so dass* $\Gamma \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ *nach der Zuordnung* $a_\lambda \pmod{\mathfrak{N}} \to u_\lambda \pmod{\mathfrak{N}}$ *und* $u_\lambda^{-1} A u_\lambda = A^{S_\lambda}$ $(A \in \mathfrak{N})$, $\Pi_i u_{\nu_i}^{e_i} = C_\mu$ $(c_\mu = \Pi_i a_{\nu_i}^{e_i})$. *Die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist bis auf Isomorphie über* $\mathfrak{N}$ *eindeutig und zwar ist sie mit der Gruppe* $\overline{\mathfrak{G}}$ *aus den Erzeugenden* a_λ, $\bar{A}(A \in \mathfrak{N})$ *mit den folgenden definierden Relationen isomorph:*

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}\,(A,\ B \in \mathfrak{N}),\quad a_\lambda^{-1}\bar{A}a_\lambda = \overline{A^{S_\lambda}},\quad \Pi_i a_{\nu_i}^{e_i} = \bar{C}_\mu\,.$$

Beweis. Gibt es eine im Satz genannte Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist leicht einzusehen, dass $\mathfrak{G}$ mit $\overline{\mathfrak{G}}$ isomorph ist. Wir konstruieren nun in $\mathfrak{P}_M$ eine gesuchte Gruppe. Nach der Bedingung 1) des Satzes kann man durch

$$f(r) = \Pi_i C_{\mu_i}^{\varepsilon_i S(F_i)} \quad \text{für jedes} \quad r = \Pi_i c_{\mu_i}^{\varepsilon_i F_i} \quad \text{aus } \mathfrak{N}$$

eine operatorhomomorphe Abbildung f von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}$ definieren:

$$f(rr') = f(r)f(r'),\quad f(F^{-1}rF) = f(r^F) = f(r)^{S(F)}\,.$$

Es sei $\{b_\sigma\}$ ein festes Vertretersystem von $\mathfrak{F}$ mod $\mathfrak{N}$, wo b_σ der Vertreter von $\sigma \in \Gamma = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ ist; ferner sei $\sigma_F(F \in \mathfrak{F})$ die F enthaltende Restklasse von $\mathfrak{F}$ mod $\mathfrak{N}$. Setzt man $C(\xi,\ F) = f(b_{\xi\sigma_F}^{-1} b_\xi F)$, so erhält man leicht

$$C(\xi\sigma_F,\ F')C(\xi,\ F)^{S(F')} = C(\xi,\ FF')$$

Bedeutet $\pi(F)$ ein Element aus $\mathfrak{P}_M$ mit $(\xi,\ X)\pi(F) = (\xi\sigma_F,\ C(\xi,\ F)X^{S(F)})$, so gilt ersichtlich $\pi(F)\pi(F') = \pi(FF')$, $A\pi(F) = \pi(F)A^{S(F)}$. Es gilt ferner

$$(\xi,\ X)\pi(c_\mu) = (\xi,\ f(c_\mu)X^{S(c_\mu)}) = (\xi,\ C_\mu C_\mu^{-1} X C_\mu) = (\xi,\ X)C_\mu\,.$$

Wir haben also

$$\pi_\lambda^{-1} A \pi_\lambda = A^{S_\lambda}(\pi_\lambda = \pi(a_\lambda))\,,\quad \pi(c_\mu) = \Pi_i \pi_{\nu_i}^{e_i} = C_\mu(c_\mu = \Pi_i a_{\nu_i}^{e_i})\,.$$

Die von π_λ und $\mathfrak{N}$ erzeugte Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine gesuchte, weil aus $\pi(F) \equiv 1(\mathfrak{N})$ folgt $(\xi,\ X\pi(F)) = (\xi,\ X)\pi(F) = (\xi\sigma_F,\ C(\xi,\ F)X^{S(F)})$, also $\sigma_F = 1$, $F \in \mathfrak{N}$, d. h. $\Gamma = \mathfrak{F}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. (Q. E. D.)

Sind eine Menge $\{C_\mu\}$ von Elementen aus $\mathfrak{N}$ und eine Menge $\{S_\lambda\}$ aus Automorphismen von $\mathfrak{N}$ gegeben, die die Bedingungen des Satzes erfüllen, so gibt es eine Erweiterung von $\mathfrak{N}$ mit den Erzeugenden u_λ über $\mathfrak{N}$, die durch die Bedingungen

$$(3)\qquad u_\lambda^{-1} A u_\lambda = A^{S_\lambda}(A \in \mathfrak{N})\,,\quad u_{\nu_1}^{e_1} \cdots u_{\nu_n}^{e_n} = C_\mu(c_\mu = \Pi_i a_{\nu_i}^{e_i})$$

vollständig bestimmt wird. Auf diese Weise kann man alle Erweiterungen von $\mathfrak{N}$ nach Γ erhalten.

Beispiel 1. $\Gamma=\mathfrak{F}$ sei eine freie Gruppe aus den Erzeugenden $\{a_\lambda\}$. $\mathfrak{N}$ ist dann die Einheitengruppe. Da es in $\mathfrak{N}$ keine Relation existiert, ist die Erweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{N}$ durch die Bedingungen $a_\lambda^{-1}Aa_\lambda=A^{S_\lambda}$ bestimmt, wo $\{S_\lambda\}$ die beliebigen Automorphismen von $\mathfrak{N}$ sind. $\mathfrak{G}$ ist offenbar zerfallende Gruppe: $\mathfrak{G}=\mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

Beispiel 2. $\Gamma=\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ sei eine zyklische Gruppe mit der Ordnung n, also $\mathfrak{F}=(a)$, $\mathfrak{N}=(c)$, $c=a^n$. Die definierende Relation von $\mathfrak{N}$ als $\mathfrak{F}$-Gruppe ist offenbar $c^a=c$. Die Erweiterung von $\mathfrak{N}$ mit dem Erzeugenden u über $\mathfrak{N}$ ist durch die Bedingungen $u^{-1}Au=A^S$, $u^n=C$ bestimmt, wo S ein Automorphismus von $\mathfrak{N}$ und C ein Element aus $\mathfrak{N}$ ist, so dass $C^S=C$, $A^{S^n}=C^{-1}AC(A\in\mathfrak{N})$.

Beispiel 3. $\mathfrak{F}$ sei eine freie Gruppe aus den Erzeugenden $\{a_\sigma\}(\sigma\in\Gamma)$ und $\mathfrak{N}$ sei der Normalteiler (also eine $\mathfrak{F}$-Gruppe) aus den Erzeugenden $\{c_{\sigma,\tau}\}$, $c_{\sigma,\tau}=a_{\sigma\tau}^{-1}a_\sigma a_\tau$. Dann sind

$$c_{\rho\sigma,\tau}c_{\rho,\sigma}^{a_\tau}=c_{\rho,\sigma\tau}c_{\sigma,\tau}, \tag{4}$$

gerade die definierenden Relationen von $\mathfrak{N}$ als $\mathfrak{F}$-Gruppe. Denn wir haben als Folgerelationen von (4)

$$c_{\rho,\sigma}^{a_\tau}=c_{\rho\sigma,\tau}^{-1}\,c_{\rho,\sigma\tau}c_{\sigma,\tau},\qquad c_{\rho,1}=c_{1,1},\qquad c_{1,\rho}=c_{1,1}^{a_\rho},$$

$$c_{\sigma,\tau}^{a_\rho^{-1}}=c_{1,1}c_{\rho,\rho^{-1}}c_{\sigma\tau,\rho^{-1}}^{-1}c_{\sigma,\tau\rho^{-1}}c_{\tau,\rho^{-1}}c_{\rho,\rho^{-1}}^{-1}c_{1,1}^{-1}.$$

Mit Hilfe dieser Relationen kann jedes $c_{\sigma,\tau}^F\,(F\in\mathfrak{F})$ als Potenzprodukt von $c_{\sigma,\tau}$ dargestellt werden. Demnach folgt aus einer Relation $\Pi\, c_{\sigma,\tau}^{\pm F}=1$ eine Relation der Form $\Pi\, c_{\sigma,\tau}^{\pm 1}=1$, darin kein $c_{\sigma,1}(\sigma\neq 1)$ enthalten ist. Wie leicht einzusehen ist, ist $\mathfrak{N}$ aus den Erzeugenden $c_{1,1}=a_1$, $c_{\rho,\sigma}(\sigma\neq 1)$ erzeugt und sogar sind sie freie Erzeugenden. Daraus folgt unsere Behauptung. Die Erweiterung von $\mathfrak{N}$ ist somit durch die Bedingungen $u_\sigma^{-1}Au_\sigma=A^{S_\sigma}$, $u_{\sigma\tau}^{-1}u_\sigma u_\tau=C_{\sigma,\tau}$ bestimmt. wobei $\{S_\sigma\}$ eine Menge aus Automorphismen von $\mathfrak{N}$ und $\{c_{\sigma,\tau}\}$ eine Menge von Elementen aus $\mathfrak{N}$ ist, so dass

$$C_{\rho\sigma,\tau}C_{\rho,\sigma}^{S_\tau}=C_{\rho,\sigma\tau}C_{\sigma,\tau},\quad A^{S_{\sigma\tau}^{-1}S_\sigma S_\tau}=C_{\sigma,\tau}^{-1}AC_{\sigma,\tau}.$$

Hilfssatz. $\mathfrak{F}$ sei eine freie Gruppe mit dem freien Erzeugendensystem M. Die Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{F}$ ist eine $\mathfrak{F}$-Gruppe aus den Erzeugenden $(a,b)=a^{-1}b^{-1}ab$ $(a,\ b\in M)$. Die definierenden Relationen von $\mathfrak{C}$ als $\mathfrak{F}$-Gruppe sind

$$(a,\ b)(b,\ a)=1,\quad (b,\ c)^a(a,\ c)(a,\ b)^c(c,\ b)(c,\ a)^b(b,\ a)=1^{1)}$$

$$(a,\ b)^{Fc^{-1}a^{-1}cd}=(c,\ d)^{-1}(a,\ b)^F(c,\ d)\ (a,\ b,\ c,\ d\in M,\ F\in\mathfrak{F}).$$

Beweis. Dass die obigen Relationen gelten, ist leicht zu bestätigen. Es sei $\overline{\mathfrak{C}}$ die $\mathfrak{F}$-Gruppe aus den Erzeugenden $T_{a,b}(a,\ b\in M)$ mit den definierenden Relationen:

1) Eine Relation, die aus dieser Relation nach einer beliebigen Permutation von a, b, c entsteht, ist ihre Folgerelation.

$$T_{a,b}T_{b,a}=1,\quad T^{a}_{b,c}T_{a,c}T^{c}_{a,b}T_{c,b}T^{b}_{c,a}T_{b,a}=1$$

$$T^{Fc^{-1}a^{-1}cd}_{a,b}=T^{-1}_{c,d}\,T^{F}_{a,b}T_{c,d},\quad (F\in\mathfrak{F},\quad a,\ b,\ c,\ d\in M)$$

und $\{u_a\}(a\in M)$ sei eine Menge von freien Elementen. Wenn es für eine Telmenge N von M möglich ist, zu erweiterun $\overline{\mathfrak{C}}$ durch

$$(5)\qquad u_a^{-1}Tu_a=T^a\,(T\in\overline{\mathfrak{C}}),\quad u_a^{-1}u_b^{-1}u_au_b=T_{a,b}\,(a,\ b\in N)$$

so dass u_a mod $\overline{\mathfrak{C}}(a\in N)$ freie abelsche Gruppe erzeugen, so ist die Erweiterung durch N bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, die wir mit $\mathfrak{G}(N)$ bezeichnen. Wir mögen $\mathfrak{G}(N)\subset\mathfrak{G}(N')$ annehmen, falls $N\subset N'$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es unter den $\mathfrak{G}(N)$ eine maximale $\mathfrak{G}(N_0)$. Dann ist $N_0=M$. Wir nehmen jetzt an, es sei $N_0\neq M$. Es gibt ein x, so dass $x\in M$, $x\notin N_0$. Die Abbildung $T\rightarrow T'=T^x(T\in\overline{\mathfrak{C}})$, $u_a\rightarrow u_a'=u_aT_{a,x}(a\in N_0)$ lässt sich zu einem Automorphismus θ von $\mathfrak{G}(N_0)$ ergänzen. Denn entsprechend den Relationen (5) erhalten wir

$$u_a'^{-1}T'u_a'=(T^a)',\quad u_a'^{-1}u_b'^{-1}u_a'u_b'=T'_{a,b}.$$

Es ist in der Tat

$$\begin{aligned}u_a'^{-1}T'u_a'&=T^{-1}_{a,x}u_a^{-1}T^xu_aT_{a,x}=T^{xaa^{-1}x^{-1}ax}=(T^a)',\\ u_a'^{-1}u_b'^{-1}u_a'u_b'&=T^{-1}_{a,x}u_a^{-1}T^{-1}_{b,x}u_b^{-1}u_aT_{a,x}u_bT_{b,x}\\ &=T^{-1}_{a,x}T^{-a}_{b,x}u_a^{-1}u_b^{-1}u_au_bT^{b}_{a,x}T_{b,x}=T_{x,a}T^{a}_{x,b}T_{a,b}T^{b}_{a,x}T_{b,x}=T^{x}_{a,b}.\end{aligned}$$

Durch $u_x^{-1}Pu_x=P^\theta(P\in\mathfrak{G}(N_0))$ erhalten wir eine Erweiterung $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}(N_0)$. Wegen $u_x^{-1}Tu_x=T^\theta=T^x(T\in\overline{\mathfrak{C}})$, $u_x^{-1}u_au_x=u_a^\theta=u_aT_{a,x}$ ist $\mathfrak{G}'$ gerade die Gruppe $\mathfrak{G}(N_0\cup\{x\})$. Es ergibt sich also ein Widerspruch. Die Gruppe $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}(M)$ ist nun nur aus $u_a(a\in M)$ erzeugt. Also ist $\mathfrak{G}$ homomorph zu $\mathfrak{F}$ nach der Zuordnung $a\rightarrow u_a$, folglich ist $\overline{\mathfrak{C}}$ zu $\mathfrak{C}$ homomorph. Da aber $\mathfrak{C}$ zu $\overline{\mathfrak{C}}$ homomorph ist, ist $\mathfrak{C}$ mit $\overline{\mathfrak{C}}$ isomorph.

Beispiel 4. $\Gamma=\mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ sei isomorph zu dem direkten Produkt von n zyklischen Gruppen (σ_i), von denen seien $(\sigma_1),\dots,(\sigma_m)$ endlich $(\sigma_i^{n_i}=1)$ und die übrigen unendlich. $\mathfrak{F}$ ist dabei freie gruppe aus den Erzeugenden $a_1, a_2,\dots,a_n$ und $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{F}$–Gruppe aus den Erzeugenden $(a_i,a_k)=a_i^{-1}a_k^{-1}a_ia_k$ $(i,k=1,\dots,n)$ und $c_i=a_i^{n_i}$ $(i=1,\dots,m)$. $\mathfrak{R}$ ist mit der $\mathfrak{F}$–Gruppe $\overline{\mathfrak{R}}$ aus den Erzeugenden T_{ik} und T_i mit den folgenden definierenden Relationen operatorisomorph:

$$\begin{aligned}&T_{ik}T_{ki}=1,\ T^{a_i}_{jk}T_{ik}T^{a_k}_{ij}T_{kj}T^{a_j}_{ki}T_{ji}=1,\\ &T_i^{a_k}=T_iT_{ik}^{a_i^{n_i-1}}\cdots T_{ik}^{a_i}T_{ik}=T_iT_{ik}^{a_i^{n_i-1}+\cdots+a_i+1}\quad(i\neq k)\\ &T_i^{a_i}=T_i,\ T_k^{-1}T_iT_k=T_i^{a_k^{n_k}},\\ &T^{-1}_{kl}T^{F}_{ij}T_{kl}=T_{ij}^{Fa_k^{-1}a_l^{-1}a_ka_l},\ T_k^{-1}T^F_{ij}T_k=T_{ij}^{Fa_k^{n_k}}\quad(F\in\mathfrak{F})\end{aligned}$$

Denn $\mathfrak{R}$ ist nach $T_{ik}\rightarrow(a_i,a_k)$, $T_i\rightarrow c_i$ zu $\overline{\mathfrak{R}}$ operatorhomomorph, da aber $\overline{\mathfrak{C}}$ zu $\mathfrak{C}$ nach dem Hilfssatz und $\overline{\mathfrak{R}}/\overline{\mathfrak{C}}$ zu $\mathfrak{R}/\mathfrak{C}$ als freie abelsche Gruppe isomorph abgebildet werden, so sieht man leicht, dass $\overline{\mathfrak{R}}$ und $\mathfrak{R}$ operatorisomorph sind. Die

Erweiterung von $\mathfrak{N}$ nach Γ ist also durch die folgenden Bedingungen bestimmt[2].

$$u_i^{-1}Au_i = A^{S_i}, \; u_i^{n_i} = A_i, \; u_i^{-1}u_k^{-1}u_iu_k = A_{ik},$$

wobei S_i Automorphismen von $\mathfrak{N}$ und A_i, A_{ik} Elemente von $\mathfrak{N}$ sind, so dass

$$A_{ik}A_{ki} = 1, \; A_{jk}^{S_i}A_{ik}A_{ij}^{S_k}A_{kj}A_{ki}^{S_j}A_{ji} = 1,$$

$$A_i^{S_i} = A_i, \; A_l^{S_k} = A_iA_{ik}^{S_i^{n_i-1}+\cdots+S_i+1},$$

$$A^{S_i^{-1}S_k^{-1}S_iS_k} = A_{ik}^{-1}AA_{ik}, \; A^{S_k^{n_k}} = A_k^{-1}AA_k \quad (A \in \mathfrak{N}).$$

Literaturverzeichnis

[1] K. Shoda, Über den Schreierschen Erweiterungssatz, Proc. Acad. Tokyo, 19 (1943) S. 518–9.

[2] H. Nagao, Über die Beziehungen zwischen dem Erweiterungssatz von O. Schreier und dem von K. Shoda, Proc. Acad. Tokyo, 21 (1945) S. 359–362.

[3] H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, Berlin, 1937.

[4] M. Takahasi, Group extensions and their splitting groups, erscheint in diesem Bd. dieses Journals.

---

2) Vgl. [3] S. 95.