Journal of Mathematics,
Osaka City University,
Vol. 12, No. 1–2.

Sur un principe du maximum dans la théorie du potentiel

Par Nobuyuki NINOMIYA

(Reçu le 4 août, 1961)

Soient $K(x, y)$ et $N(x, y)$ des fonctions positives et continues en x et y dans l'espace euclidien ou topologique localement compact qui pourront être $+\infty$ en $x=y$, et soit $K(x, y)$ symétrique $[K(x, y)=K(y, x)]$. Considérons les potentiels d'une mesure μ pris par rapport aux noyaux K et N

$$U^{\mu}(x) = \int K(x, y)d\mu(y)$$

et

$$V^{\mu}(x) = \int N(x, y)d\mu(y) .$$

Dans le travail antérieur ([3]), on a étudié le balayage généralisé. Un noyau K est dit satisfaire au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N lorsque, étant donnés un compact F et un point p n'appartenant pas à F, il existe au moins une mesure positive λ portée par F telle que

(1) $U^{\lambda}(x) = N(x, p)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,
(2) $U^{\lambda}(x) \leqq N(x, p)$ dans tout l'espace.

Alors, on a démontré ([3], §1) que, si $N(x, y)$ est un noyau fini et continu en x et y et si un noyau K satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N, à tout compact F et à toute mesure positive μ à support compact on peut associer une mesure positive μ' portée par F telle que

(1) $U^{\mu'}(x) = V^{\mu}(x)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,
(2) $U^{\mu'}(x) \leqq V^{\mu}(x)$ dans tout l'espace,

et que, si $N(x, y)$ est un noyau qui peut être $+\infty$ en $x=y$ mais satisfait au principe de continuité, et si un noyau K satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N, à tout compact F et à toute mesure positive μ à support compact on peut associer une mesure positive μ' portée par F telle que

(1) $U^{\mu'}(x) = V^{\mu}(x)$ sur F sauf un ensemble de $(K+N)$-diamètre transfini nul,
(2) $U^{\mu'}(x) \leqq V^{\mu}(x)$ dans tout l'espace sauf un ensemble de $(K+N)$-diamètre transfini nul.

Un noyau K est dit satisfaire au principe du maximum par rapport au noyau N lorsque, pour une mesure positive λ à support compact F et un point p n'appartenant pas à F, l'inégalité

$$U^{\lambda}(x) \leqq N(x, p)$$

sur F entraîne la même inégalité dans tout l'espace. Pour qu'un noyau K satisfasse au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N, il faut et il suffit qu'il satisfasse au principe du maximum par rapport au noyau N ([3], §1). Dans ce travail, on va donner un énoncé équivalent à ce principe du maximum et en donner une extension du principe du maximum de H. Cartan ([1]).

THÉORÈME 1. *Pour qu'un noyau K satisfasse au principe du maximum par rapport au noyau N, il faut et il suffit qu'on ait la propriété*:

Pour une mesure positive λ à support compact F et
[P] *un point p n'appartenant pas à F, l'inégalité*

$$U^{\lambda}(x) \leqq K(x, p)$$

sur F entraîne l'inégalité

$$\tilde{V}^{\lambda}(x) \leqq \tilde{N}(x, p)$$

dans tout l'espace, où $\tilde{V}^{\lambda}$ est le potentiel de λ pris par rapport au noyau $\tilde{N}(x, y) = N(y, x)$.

Démonstration. Supposons qu'un noyau K satisfait au principe du maximum par rapport au noyau N. Et supposons que, pour une mesure positive λ à support compact F et un point p n'appartenant pas à F, on a l'inégalité

$$U^{\lambda}(x) \leqq K(x, p)$$

sur F. En désignant par ε une mesure balayée de la mesure ponctuelle placée en un point t sur F, on a

(1) $U^{\varepsilon}(x) = N(x, t)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\varepsilon}(x) \leqq N(x, t)$ dans tout l'espace.

En effet, si le point t n'appartient pas à F, cela est la définition. Si le point t appartient à F, cela est dû au travail antérieur ([3], voir Théorème 2). Comme λ est d'énergie finie prise par rapport au noyau K, elle ne charge aucune masse positive sur des ensemble de K-diamètre transfini nul. Par suite, on a

$$\begin{aligned}\tilde{V}^{\lambda}(t) &= \int N(x, t)d\lambda(x) = \int U^{\varepsilon}(x)d\lambda(x)\\ &= \int U^{\lambda}(x)d\varepsilon(x) \leqq \int K(x, p)d\varepsilon(x)\\ &= \int K(p, x)d\varepsilon(x) \leqq N(p, t) = \tilde{N}(t, p)\,.\end{aligned}$$

Donc, on a la propriété [P]. Inversement, supposons qu'on a la propriété [P]. Et supposons que, pour une mesure positive λ à support compact F et un point p n'appartenant pas à F, on a

$$U^{\lambda}(x) \leqq N(x, p)$$

sur F. Pour tout point t n'appartenant pas à F, soit μ_0 une mesure qui rend minimum

$$G(\mu) = \frac{\int\int K(x, y) d\mu(y) d\mu(x)}{[\int K(x, t) d\mu(x)]^2}$$

parmi toute mesure positive μ ($\neq 0$) portée par F. En posant

$$a = \iint K(x, y)\, d\mu_0(y)\, d\mu_0(x)\,, \qquad c = \int K(x, t)\, d\mu_0(x)$$

et

$$\varepsilon = \frac{c}{a}\, \mu_0\,,$$

on a ([2], § 1)

(1) $U^{\varepsilon}(x) \geqq K(x, t)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,
(2) $U^{\varepsilon}(x) \leqq K(x, t)$ sur le support de ε.

Alors, on a d'après la propriété $[P]$

$$\tilde{V}^{\varepsilon}(x) \leqq \tilde{N}(x, t)$$

dans tout l'espace. Par suite, on a

$$\begin{aligned} U^{\lambda}(t) &= \int K(t, x)\, d\lambda(x) = \int K(x, t)\, d\lambda(x) \\ &\leqq \int U^{\varepsilon}(x)\, d\lambda(x) = \int U^{\lambda}(x)\, d\varepsilon(x) \\ &\leqq \int N(x, p)\, d\varepsilon(x) = \tilde{V}^{\varepsilon}(p) \leqq \tilde{N}(p, t) = N(t, p)\,. \end{aligned}$$

Donc, le noyau K satisfait au principe du maximum par rapport au noyau N.

REMARQUE. Le théorème généralise des résultats du travail ([2], § 4).

THÉORÈME 2. *Si un noyau K satisfait au principe du maximum par rapport au noyau N, pour une mesure positive μ à support compact F d'énergie finie prise par rapport au noyau K et une mesure positive ν, l'inégalité*

$$U^{\mu}(x) \leqq U^{\nu}(x)$$

sur F entraîne l'inégalité

$$\tilde{V}^{\mu}(x) \leqq \tilde{V}^{\nu}(x)$$

dans tout l'espace.

Démonstration. Désignons par ε une mesure balayée de la mesure ponctuelle placée en un point t sur F. Alors, on a

(1) $U^{\varepsilon}(x) = N(x, t)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,
(2) $U^{\varepsilon}(x) \leqq N(x, t)$ dans tout l'espace.

Comme μ est d'énergie finie prise par rapport au noyau K, elle ne charge aucune masse positive sur des ensemble de K-diamètre transfini nul. Par suite, on a

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{\mu}(t) &= \int N(x, t)\, d\mu(x) = \int U^{\varepsilon}(x)\, d\mu(x) \\ &= \int U^{\mu}(x)\, d\varepsilon(x) \leqq \int U^{\nu}(x)\, d\varepsilon(x) \\ &= \int U^{\varepsilon}(x)\, d\nu(x) \leqq \int N(x, t)\, d\nu(x) = \tilde{V}^{\nu}(t)\,. \end{aligned}$$

Dans l'espace euclidien à dimension m ($\geqq 3$), considérons le potentiel d'une mesure μ pris par rapport au noyau d'ordre α

$$U_\alpha^\mu(x) = \int |x-y|^{-\alpha} d\mu(y), \qquad 0 < \alpha < m.$$

Comme on a déjà connu ([3], §1), le noyau d'ordre α ($m-2 \leqq \alpha < m$) satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau d'ordre β ($0 < \beta \leqq m-2$). Naturellement, on a

COROLLAIRE. *Dans l'espace euclidien à dimension m ($\geqq 3$), soient α un nombre tel que $m-2 \leqq \alpha < m$, μ une mesure positive à support compact d'énergie finie d'ordre α et ν une mesure positive quelconque. Si on a l'inégalité*

$$U_\alpha^\mu(x) \leqq U_\alpha^\nu(x)$$

sur le support de μ, on a l'inégalité

$$U_\beta^\mu(x) \leqq U_\beta^\nu(x)$$

dans tout l'espace pour tout nombre positif β ($\leqq m-2$).

Soulignons que, si on y pose $\alpha = \beta = m-2$, cela revient au principe du maximum bien connu de H. Cartan.

REMARQUE. Un noyau E est dit satisfaire au principe du balayage inverse par rapport au noyau N lorsque, étant donnés un compact F et un point p n'appartenant pas à F, il existe au moins une mesure positive λ portée par F telle que

(1) $U^\lambda(x) = N(x, p)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^\lambda(x) \geqq N(x, p)$ dans tout l'espace sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul.

Lorsqu'un noyau K satisfait au principe de continuité, pour qu'il satisfasse au principe du balayage inverse par rapport au noyau N, il faut et il suffit qu'il satisfasse au principe du minimum par rapport au noyau N: pour une mesure positive λ à support compact F et un point p n'appartenant pas à F, l'inégalité

$$U^\lambda(x) \geqq N(x, p)$$

sur F entraîne la même inégalité dans tout l'espace ([3], §2). Alors, d'après le raisonnement analogue, on aura

THÉORÈME 1′. *Soit K un noyau satisfaisant au principe de continuité. Pour qu'il satisfasse an principe du minimum par rapport au noyau N, il faut et il suffit qu'on ait la propriété:*

Pour une mesure positive λ à support compact F d'énergie
[P′] *finie prise par rapport au noyau K et un point p n'appartenant pas à F,*

l'inégalité

$$U^{\lambda}(x) \geqq K(x, p)$$

sur F entraîne l'inégalité

$$\tilde{V}^{\lambda}(x) \geqq \tilde{V}(x, p)$$

dans tout l'espace.

THÉORÈME 2'. *Soit K un noyau satisfaisant au principe de continuité. S'il satisfait au principe du minimum par rapport au noyau N, pour une mesure positive μ à support compact F d'énergie finie prise par rapport au noyau K et une mesure positive ν, l'inégalité*

$$U^{\mu}(x) \geqq U^{\nu}(x)$$

sur F entraîne l'inégalité

$$\tilde{V}^{\mu}(x) \geqq \tilde{V}^{\nu}(x)$$

dans tout l'espace.

Bibliographie

[1] H. Cartan: Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels, Bull. Soc. Math. France, **73**, 1945, pp. 74–106.

[2] N. Ninomiya: Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique, Jour. Inst. Polytech., Osaka City Univ., 8, n° 2, 1957, pp. 147–179.

[3] N. Ninomiya: Sur le problème du balayage généralisé, ce journal.