Journal of Mathematics,
Osaka City University,
Vol. 12, No. 1-2.

Sur le problème du balayage généralisé

Par Nobuyuki NINOMIYA

(Reçu le 15 juin, 1961)

Introduction

Soient $K(x, y)$ et $N(x, y)$ des fonctions positives et continues en x et y dans l'espace[1], qui pourront être $+\infty$ en $x=y$, et soit $K(x, y)$ symétrique $[K(x, y) = K(y, x)]$. On considère les potentiels d'une mesure μ pris par rapport aux noyaux K et N

$$U^{\mu}(x) = \int K(x, y)\, d\mu(y)$$

et

$$V^{\mu}(x) = \int N(x, y)\, d\mu(y)\,.$$

Dans ce travail on s'occupe à l'étude sur le balayage généralisé : étant donnée une mesure positive μ, y-a-t'il sur un compact arbitraire F au moins une mesure positive μ' portée par F telle que

$$U^{\mu'}(x) = V^{\mu}(x)$$

sur F? Il est plein d'intérêt d'établir la théorie du balayage généralisé, car, dans la théorie usuelle du potentiel, le problème de l'équilibre est le balayage généralisé au cas où $N(x, y)=1$ et le problème du balayage est le balayage généralisé au cas où $N(x, y)=K(x, y)$. Le balayage généralisé était présenté par Choquet et Deny ([2]) dans l'espace de modèl fini (l'espace ne contenant que le nombre fini des points), mais on n'avait aucune étude plus avancée dans l'espace général.

Dans le premier paragraphe, on étudiera le balayage en posant l'hypothèse de majoration: $U^{\mu'}(x) \leqq V^{\mu}(x)$. Ce balayage s'appellera le balayage ordinaire. Dans le deuxième paragraphe, on étudiera le balayage en posant l'hypothèse de majoration: $U^{\mu'}(x) \geqq V^{\mu}(x)$. Ce balayage s'appellera le balayage inverse. On verra que le balayage ordinaire ou inverse est caractérisé par un principe du maximum ou minimum. Dans le dernier paragraphe, on considérera le balayage sans poser aucune hypothèse de majoration. Ce balayage s'appellera le balayage faible. On verra que le balayage faible est ramené au balayage ordinaire ou inverse pour des noyaux K du certain type. Ce travail généralise des résultats

1) Dans ce travail, on s'agit de l'espace euclidien ou plus généralement l'espace topologique localement compact satisfaisant aux axiomes de dénombrabilité.

obtenus dans les travaux ([3], [4]).

§ 1. Le balayage ordinaire.

DÉFINITION. Un noyau K est dit satisfaire au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N, lorsque, étant donnés un compact F et un point p n'appartenant pas à F, il existe au moins une mesure positive λ portée par F telle que

(1) $U^{\lambda}(x)=N(x, p)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul[2)],

(2) $U^{\lambda}(x)\leqq N(x, p)$ dans tout l'espace.

Cette mesure λ est dite une mesure balayée de la mesure ponctuelle placée en p sur F.

DÉFINITION. Un noyau K est dit satisfaire au principe du maximum par rapport au noyau N, lorsque, pour une mesure positive λ à support compact F et un point p n'appartenant pas à F, l'inégalité

$$U^{\lambda}(x)\leqq N(x, p)$$

sur F entraîne la même inégalité dans tout l'espace.

Soient E_1 et E_2 des ensembles boréliens disjoints tels que $\bar{E}_1$ et $\bar{E}_2$ soient compacts. Pour une mesure positive μ portée par E_1 et une mesure positive ν portée par E_2, posons

$$G(\mu, \nu) = \frac{\int U^{\mu} d\mu \times \int U^{\nu} d\nu}{(\int U^{\mu} d\nu)^2} .$$

Il a sens seulement pour tout couple (μ, ν) tel que $0<\int U^{\mu} d\mu<+\infty$, $0<\int U^{\nu} d\nu <+\infty$ et $0<\int U^{\mu} d\nu<+\infty$. On appelle un couple minimal (μ_0, ν_0) qui rend minimum $G(\mu, \nu)$ parmi tout couple (μ, ν), μ portée par E_1 et ν portée par E_2.

LEMME 1. *Si* (μ_0, ν_0) *est un couple minimal, la fonction*

$$g_1(x) = cU^{\mu_0}(x)-aU^{\nu_0}(x) ,$$

où

$$a = \int U^{\mu_0} d\mu_0 , \quad b = \int U^{\nu_0} d\nu_0 \quad et \quad c = \int U^{\mu_0} d\nu_0 ,$$

jouit de la propriété:

---

2) Un ensemble borélien est dit de K-diamètre transfini nul s'il est de mesure nulle pour toute mesure positive d'énergie finie prise par rapport au noyau K, et est dit de K-capacité nulle s'il est de mesure nulle pour toute mesure positive dont le potentiel pris par rapport au noyau K est borné sur tout compact. Naturellement, tout ensemble de K-diamètre transfini nul est de K-capacité nulle. Inversement, tout ensemble de K-capacité nulle est de K-diamètre transfini nul si le noyau K satisfait au principe de continuité : pour une mesure positive λ à support compact F, si $U^{\lambda}(x)$ est continu comme fonction considérée sur F, il est aussi continu dans tout l'espace ([3], p. 160).

(1) $g_1(x) \geqq 0$ *sur* E_1 *sauf un ensemble de K-capacité nulle,*
(2) $g_1(x) \leqq 0$ *sur* E_1 *sauf un ensemble de mesure nulle pour* μ_0.
En particulier, lorsque E_1 *et* E_2 *sont des compacts disjoints, on a*
(1) $g_1(x) \geqq 0$ *sur* E_1 *sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,*
(2) $g_1(x) \leqq 0$ *sur* E_1 *sauf un ensemble de mesure nulle pour* μ_0.
Analoguement quant à la fonction

$$g_2(x) = cU^{\nu_0}(x) - bU^{\mu_0}(x)\,.$$

En effect, comme (μ_0, ν_0) est un couple minimal, on a l'inégalité

$$0 \leqq G(\mu_0 + \varepsilon\sigma, \nu_0) - G(\mu_0, \nu_0)$$

pour tout nombre positif ε et pour toute mesure positive σ portée par E_1 telle que $0 \leqq \int U^\sigma d\mu_0 < +\infty$, $0 \leqq \int U^\sigma d\nu_0 < +\infty$ et $0 \leqq \int U^\sigma d\sigma < +\infty$. Le noyau K étant symétrique, cela entraîne l'inégalité

$$0 \leqq 2c\varepsilon \int g_1(x)\, d\sigma(x) + \varepsilon^2 [c^2 \int U^\sigma d\sigma - a(\int U^{\nu_0} d\sigma)^2]\,.$$

On en déduit facilement le résultat ([3], p. 151).

LEMME 2. *Si* E_1 *et* E_2 *sont des compacts disjoints de K-diamètre transfini positive, il existe au moins un couple minimal* (μ_0, ν_0).

En effect, posons

$$G_0 = \inf G(\mu, \nu)\,.$$

Ici, inf est pris par rapport à tout couple (μ, ν) tel que $G(\mu, \nu)$ ait sens. Alors, il existe des suites $\{\mu_n\}$ et $\{\nu_n\}$ de mesures positives portées par E_1 et par E_2 respectivement telles que

$$G_0 = \lim_{n \to \infty} G(\mu_n, \nu_n)\,.$$

Soient

$$\mu_{1n} = \frac{\mu_n}{\int d\mu_n} \quad \text{et} \quad \nu_{1n} = \frac{\nu_n}{\int d\nu_n}$$

et soient μ_0 et ν_0 des mesures limites de $\{\mu_{1n}\}$ et de $\{\nu_{1n}\}$ respectivement (en prenant leurs suites partielles convenables). Le couple (μ_0, ν_0) est un couple minimal ([3], p. 152).

LEMME 3. *Etant donnés un compact* F *de K-diamètre transfini positive et un point* p *n'appartenant pas à* F, *il existe une mesure positive* μ_0 *portée par* F *qui rend minimum*

$$G(\mu) = \frac{\int U^\mu d\mu}{[\int N(x, p)\, d\mu(x)]^2}$$

parmi toute mesure positive μ *portée par* F. *Et, la fonction*

$$g(x) = cU^{\mu_0}(x) - aN(x, p)\,,$$

où

$$a=\int U^{\mu_0}d\mu_0 \quad et \quad c=\int N(x, p)\, d\mu_0(x)\ ,$$

jouit de la propriété:

(1) $g(x)\geqq 0$ *sur* F *sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,*

(2) $g(x)\leqq 0$ *sur le support de* μ_0.

En effect, posons

$$G_0=\inf G(\mu, \nu)\ .$$

Ici, inf est pris par rapport à toute mesure positive μ portée par F. F étant de K-diamètre transfini positif, G_0 est un nombre positif fini. Alors, il existe une suite $\{\mu_n\}$ de mesures positives portées par F telle que

$$G_0=\lim_{n\to\infty} G(\mu_n)\ .$$

On peut supposer que la suite de mesures positives

$$\mu_{1n}=\frac{\mu_n}{\int d\mu_n}$$

converge vers une mesure positive μ_0 de la masse totale un portée par F (en prenant une suite partielle convenable). Comme on a

$$\int U^{\mu_0}d\mu_0\leqq \varliminf_{n\to\infty}\int U^{\mu_{1n}}d\mu_{1n}$$

et

$$\int N(x, p)\, d\mu_0(x)=\lim_{n\to\infty}\int N(x, p)\, d\mu_{1n}(x)\ ,$$

on a

$$G_0=\lim_{n\to\infty} G(\mu_n)=\lim_{n\to\infty} G(\mu_{1n})\geqq G(\mu_0)\geqq G_0\,.$$

Par suite, μ_0 rend minimum $G(\mu)$ parmi toute mesure positive μ portée par F. Alors, on a

$$G(\mu_0)\leqq G(\mu_0+\varepsilon\sigma)$$

pour tout nombre positif ε et pour toute mesure positif σ de K-énergie finie portée par F. Cela entraîne l'inégalité

$$0\leqq 2c\varepsilon\int g(x)\, d\sigma(x)+\varepsilon^2[c^2\int U^{\sigma}d\sigma-a(\int N(x, p)\, d\sigma(x))^2]\,.$$

Le coefficient de ε^2 étant fini, on a

$$\int g(x)\, d\sigma(x)\geqq 0$$

pour toute mesure positive σ d'énergie finie portée par F. Donc, on a

$$g(x)\geqq 0$$

sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul. Encore, comme $g(x)$ est semi-continue inférieurement sur F et on a

$$\int g(x)\, d\mu_0(x) = 0\,,$$

on a

$$g(x) \leqq 0$$

sur le support de μ_0.

THÉORÈME 1. *Pour qu'un noyau K satisfasse au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N, il faut et il suffit qu'il satisfasse au principe du maximum par rapport au noyau N.*

Démonstration. Supposons qu'un noyau K satisfait au principe du maximum par rapport au noyau N. Etant donnés un compact F de K-diamètre transfini positif et un point p n'appartenant pas à F, soit μ_0 une mesure positive qui rend minimum

$$G(\mu) = \frac{\int U^{\mu} d\mu}{[\int N(x, p)\, d\mu(x)]^2}$$

parmi toute mesure positive μ portée par F. Alors, on a d'après le lemma 3, en posant

$$a = \int U^{\mu_0} d\mu_0\,, \quad c = \int N(x, p)\, d\mu_0(x) \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{c}{a}\,\mu_0\,,$$

(1) $U^{\lambda}(x) \geqq N(x, p)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,
(2) $U^{\lambda}(x) \leqq N(x, p)$ sur le support de λ.
On a d'après le principe du maximum
(1) $U^{\lambda}(x) = N(x, p)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,
(2) $U^{\lambda}(x) \leqq N(x, p)$ dans tout l'espace.
Donc, le noyau K satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N. Inversement, supposons qu'un noyau K satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N. Soient λ une mesure positive à support compact F et p un point n'appartenant pas à F tels que

$$U^{\lambda}(x) \leqq N(x, p)$$

sur F. Supposons qu'il y ait un point t tel que

$$U^{\lambda}(t) > N(t, p)\,.$$

En prenant une mesure positive μ_0 qui rend minimum

$$G(\mu) = \frac{\int U^{\mu} d\mu}{[\int K(x, t)\, d\mu(x)]^2}$$

parmi toute mesure positive μ portée par F, posons

$$g(x) = cU^{\mu_0}(x) - aK(x, t)\,,$$

où

$$a = \int U^{\mu_0} d\mu_0 \quad \text{et} \quad c = U^{\mu_0}(t)\,.$$

Alors, on a d'après le lemme 3

(1) $g(x)\geqq 0$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $g(x)\leqq 0$ sur le support de μ_0.

λ étant d'énergie finie par rapport au noyau K, on a

$$0\leqq\int g(x)\,d\lambda(x)=c\int U^{\mu_0}d\lambda-a\int K(x,t)\,d\lambda(x)$$
$$=c\int U^{\lambda}d\mu_0-aU^{\lambda}(t)<c\int N(x,p)\,d\mu_0(x)-aN(t,p)\,.$$

D'autre part, soient F_0 le support de μ_0 (K-diamètre transfini positif) et ε' une mesure balayée de la mesure unité ponctuelle placée en p sur F_0. Alors, on a

$$0\geqq\int g(x)\,d\varepsilon'(x)=c\int U^{\mu_0}d\varepsilon'-a\int K(x,t)\,d\varepsilon'(x)$$
$$=c\int U^{\varepsilon'}d\mu_0-aU^{\varepsilon'}(t)\geqq c\int N(x,p)\,d\mu_0(x)-aN(t,p)\,.$$

C'est contradictoire. Donc, on a

$$U^{\lambda}(x)\leqq N(x,p)$$

dans tout l'espace.

LEMME 4. *Si un noyau K satisfait au principe du maximum par rapport au noyau N, il satisfait au principe de continuité.*

En effet, on verra facilement que, si un noyau K satisfait au principe du maximum par rapport au noyau N, il satisfait au principe du maximum dilaté: étant donnée une mesure positive λ à support compact F, si on a

$$U^{\lambda}(x)\leqq M$$

sur F, on a

$$U^{\lambda}(x)\leqq c\cdot M$$

dans un ensemble ouvert contenant F, c étant une constante dependant de F. Tout tel noyau K satisfait au principe de continuité ([3], p. 160).

LEMME 5. *Soit K un noyau satisfaisant au principe de continuité. Si une suite $\{\mu_n\}$ de mesures positives portées par un compact F converge (vaguement) vers une mesure positive μ, on a*

$$U^{\mu}(x)\leqq\varliminf_{n\to\infty}U^{\mu_n}(x)$$

dans tout l'espace, l'égalité ayant lieu sauf sur un ensemble de K-diamètre transfini nul.

Soulignons que ce résultat est valid pourvu qu'un noyau K satisfasse au principe de continuité, bien qu'il soit symétrique ou non ([1]).

THÉORÈME 2. *Si un noyau K satisfait an principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N (c'est-à-dire, étant donnés un compact F et un point t n'appartenant pas à F, on peut balayer sur F la mesure ponctuelle placée en t), à chaque* *point p de F on peut associer une mesure positive λ portée par F telle que*

(1) $U^{\lambda}(x)=N(x, p)$ *sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,*

(2) $U^{\lambda}(x)\leqq N(x, p)$ *dans tout l'espace.*

Démonstration[3]. Prenons une suite de voisinages $\{G_n\}$ décroissant vers le point p et une mesure balayée λ_n de la mesure ponctuelle placée en p sur $F_n=F-G_n$. Alors, on a

(1) $U^{\lambda_n}(x)=N(x, p)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\lambda_n}(x)\leqq N(x, p)$ dans tout l'espace.

$\{\lambda_n\}$ étant de la masse totale bornée, on peut supposer qu'elle converge vers une mesure positive λ portée par F (en prenant une suite partielle convenable). On a

$$U^{\lambda}(x)\leqq \varliminf_{n,\infty} U^{\lambda_n}(x)$$

dans tout l'espace, l'égalité ayant lieu d'après le lemme 5 sauf sur un ensemble de K-diamètre transfini nul. Par suite, on a

(1) $U^{\lambda}(x)=N(x, p)$ sur $F-\{p\}$ sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\lambda}(x)\leqq N(x, p)$ dans tout l'espace.

On va remplacer $F-\{p\}$ par F dans l'énoncé ci-dessus (1). D'abord, si $K(p, p)=+\infty$, l'ensemble $\{p\}$ est de K-diamètre transfini nul. Ensuite, si $K(p, p)<+\infty$, il suffit de considérer seulement le cas où $K(p, p)<+\infty$ et $N(p, p)<+\infty$. En effet, si $K(p, p)<+\infty$ et $N(p, p)=+\infty$, $U^{\lambda}(x)$ est borné et continu dans un voisinage[4] de $x=p$, mais $N(x, p)$ n'y est pas borné. Naturellement, on n'a pas l'énoncé ci-dessus. Par suite, soient $K(p, p)<+\infty$ et $N(p, p)<+\infty$. Alors, l'ensemble $\{p\}$ est de K-diamètre transfini positif et la partie de $F-\{p\}$ contenu dans un voisinage de p est aussi de K-diamètre transfini positif. $K(x, y)$ étant fini et uniformément continu pour des points x contenus dans un voisinage de p et pour des points y contenus dans un compact F, pour tout nombre positif ε on peut trouver un voisinage de G de p, un nombre assez grand n et des points x de G tels que

$$\begin{aligned}|U^{\lambda}(p)-N(p, p)|\leqq&|U^{\lambda}(p)-U^{\lambda_n}(p)|+|U^{\lambda_n}(p)-U^{\lambda_n}(x)|\\&+|U^{\lambda_n}(x)-N(x, p)|+|N(x, p)-N(p, p)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

En faisant $\varepsilon\to 0$, on a

$$U^{\lambda}(p) = N(p, p)\ ,$$

d'où le résultat.

On a vu d'après le théorème 2 que, si un noyau K satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N, on peut balayer toute mesure ponc-

3) Pour faire compléter la démonstration, j'ai reçu un conseil de Monsieur Ohtsuka, qui m'a communiqué qu'il y avait un point obscur à ma démonstration originale.

4) On suppose que tous les ensembles ouverts dans l'espace sont de K-diamètre transfini positif.

tuelle sur un compact arbitraire. On a deux remarques suivantes sur le balayage des mesures positives non-ponctuelles.

REMARQUE. Soit $N(x, y)$ un noyau positif, fini et continu en x et y. Supposons que le noyau K satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N. Etant donnés un compact F et une mesure positive μ à support compact, on peut balayer μ sur F. En effect, en prenant une suite $\{\mu_n\}$ de mesures ponctuelles convergant vers μ, on a

$$V^{\mu}(x) = \lim_{n \to \infty} V^{\mu_n}(x)$$

uniformément sur tout compact. La suite $\{\mu_n'\}$ de mesures balayées de μ_n sur F étant de la masse totale borné, on peut supposer qu'elle converge (vaguement) vers une mesure positive μ' portée par F (en prenant une suite partielle convenanble). Comme on a d'après le théorème 2

(1) $U^{\mu_n'}(x) = V^{\mu_n}(x)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\mu_n'}(x) \leqq V^{\mu_n}(x)$ dans tout l'espace,

et comme on a d'après le lemme 5

$$U^{\mu'}(x) \leqq \varliminf_{n \to \infty} U^{\mu_n'}(x)$$

dans tout l'espace et l'égalité sauf sur un ensemble de K-diamètre transfini nul, on a

(1) $U^{\mu'}(x) = V^{\mu}(x)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\mu'}(x) \leqq V^{\mu}(x)$ dans tout l'espace.

REMARQUE. Soit $N(x, y)$ un noyau positif et continu qui peut être $+\infty$ en $x=y$, mais satisfait au principe de continuité. Supposons que le noyau K satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N. Alors, à un compact F et à une mesure positive quelconque μ à support compact, on peut associer une mesure positive μ' portée par F telle que

(1) $U^{\mu'}(x) = V^{\mu}(x)$ sur F sauf un ensemble de $(K+N)$-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\mu'}(x) \leqq V^{\mu}(x)$ dans tout l'espace sauf un ensemble de $(K+N)$-diamètre transfini nul.

En effet, soient $\{\mu_n\}$ une suite de mesures ponctuelles convergant vers μ et μ_n' une mesure balayée de μ_n sur F. Alors, on a d'après le théorème 2

(1) $U^{\mu'_n}(x) = V^{\mu_n}(x)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\mu'_n}(x) \leqq V^{\mu_n}(x)$ dans tout l'espace.

En désignant par μ' la mesure limite de la suite $\{\mu_n'\}$, on a d'après le lemme 5

$$U^{\mu'}(x) \leqq \varliminf_{n \to \infty} U^{\mu_n'}(x)$$

dans tout l'espace, l'égalité ayant lieu sauf sur un ensemble de K-diamètre transfini nul. Et, on a

$$V^{\mu}(x) \leqq \underline{\lim}_{n \to \infty} V^{\mu_n}(x)$$

dans tout l'espace, l'égalité ayant lieu sauf sur un ensemble de N-diamètre transfini nul, d'où le résultat.

EXEMPLE. Dans l'espace ordinaire R^3, considérons

$$K(x, y) = |x-y|^{-\alpha}, \qquad 1 \leqq \alpha < 3$$

et

$$N(x, y) = |x-y|^{-\beta}, \qquad 0 < \beta \leqq 1.$$

Le noyau K satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N. En effect, soient λ une mesure positive à support compact F et p un point n'appartenant pas à F, tels que

$$U^{\lambda}(x) \leqq N(x, p)$$

sur F. La fonction

$$f(x) = U^{\lambda}(x) - N(x, p)$$

est sous-harmonique dans l'extérieur de F et s'annule à l'infini, et on a en chaque point t de F

$$\overline{\lim_{x \to t}} f(x) \leqq \overline{\lim_{x' \to t}} [U^{\lambda}(x') - N(x', p)] \leqq 0,$$

x restant à l'extérieur de F et x' restant à F. Par suite, on a

$$f(x) \leqq 0$$

dans l'extérieur de F. Donc, le noyau K satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N. Encore, tout ensemble borélien borné de N-diamètre transfini nul est aussi de K-diamètre transfini nul et le noyau N satisfait au principe de continuité. Par suite, étant donnés un compact F et une mesure positive μ à support compact, il existe une mesure positive μ' portée par F telle que

(1) $U^{\mu'}(x) = V^{\mu}(x)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\mu'}(x) \leqq V^{\mu}(x)$ dans tout l'espace sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul.

D'autre part, tout potential d'ordre α $(0 < \alpha < 3)$ est assez régulier, c'est-àdire, en désignant par $M(f : x, r)$ la moyen d'une fonction f dans la sphère centrée en x de rayon r, on a

$$\lim_{r \to 0} M(U^{\lambda} : x, r) = U^{\lambda}(x).$$

Donc, on a l'énoncé plus précis que (2)

(2') $U^{\mu'}(x) \leqq V^{\mu}(x)$ dans tout l'espace.

THÉORÈME 3. *Soient $K(x, y)$ et $N(x, y)$ des noyaux positifs et continus en x et y qui pourront être $+\infty$ en $x=y$, et soit K symétrique. Si le noyau K satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N, il est de type positif.*

Démonstration. Pour une mesure σ de signe variable à support compact, on peut trouver deux ensembles boréliens disjoints E_1 et E_2 tels que $E_1+E_2=F$ et $\sigma=\sigma_1-\sigma_2$, σ_1 et σ_2 étant des mesures positives par E_1 et par E_2 respectivement. Pour démontrer

$$\iint K(x, y)\,d\sigma(y)\,d\sigma(x) \geqq 0.$$

il suffit de démontrer

$$\frac{\int U^{\sigma_1}d\sigma_1 \times \int U^{\sigma_2}d\sigma_2}{(\int U^{\sigma_1}d\sigma_2)^2} \geqq 1.$$

Pour cela, il suffit de démontrer

$$\frac{\int U^{\sigma_1'}d\sigma_1' \times \int U^{\sigma_2'}d\sigma_2'}{(\int U^{\sigma_1'}d\sigma_2')^2} \geqq 1.$$

pour un compact F_1 contenu dans E_1, un compact F_2 contenu dans E_2 et les restrictions σ_1' et σ_2' de σ_1 et σ_2 à F_1 et F_2 respectivement. Soit (μ_0, ν_0) un couple qui rend minimum

$$G(\mu, \nu) = \frac{\int U^{\mu}d\mu \times \int U^{\nu}d\nu}{(\int U^{\mu}d\nu)^2}$$

parmi tout couple (μ, ν), μ portée par F_1 et ν portée par F_2. Alors, on a

(1) $\frac{c}{a}\, U^{\mu_0}(x) = U^{\nu_0}(x)$ sur le support de μ_0,

(2) $U^{\nu_0}(x) \leqq \frac{b}{c}\, U^{\mu_0}(x)$ sur le support de ν_0,

où

$$a = \int U^{\mu_0}d\mu_0, \quad b = \int U^{\nu_0}d\nu_0 \quad \text{et} \quad c = \int U^{\mu_0}d\nu_0.$$

Soient p un point n'appartenant ni à F_1 et ni à F_2 et α un nombre positif tel que

$$\sup\,[U^{\nu_0}(x) - \alpha N(x, p)] = 0, \quad x \text{ appartenant au support de } \nu_0.$$

Alors, comme le noyau K satisfait au principe du maximum par rapport au noyau N, on a

$$U^{\nu_0}(x) \leqq \alpha N(x, p)$$

dans tout l'espace. Par suite, on a

$$\frac{c}{a}\, U^{\mu_0}(x) \leqq \alpha N(x, p)$$

sur le support de μ_0. Donc, on a la même inégalité dans tout l'espace. Etant donné un nombre positif quelconque ε, prenons un point x' du support de ν_0 tel que

$$\alpha N(x', p) - \varepsilon < U^{\nu_0}(x').$$

Alors, on a

$$\frac{c}{a}\, U^{\mu_0}(x') - \varepsilon < U^{\nu_0}(x') \leqq \frac{b}{c}\, U^{\mu_0}(x').$$

Par conséquent, on a

$$1-\frac{a}{c}\frac{1}{U^{\mu_0}(x')}\cdot\varepsilon<\frac{ab}{c^2}.$$

$U^{\mu_0}(x)$ étant borné sur le support de ν_0, on a

$$\frac{ab}{c^2}\geqq 1$$

en faisant $\varepsilon\to 0$, d'où le résultat.

Corollaire. *Soit $N(x, y)$ un noyau positif, fini et continu en x et y. Si un noyau K satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N, des potentiels de mesures balayées d'une mesure positive μ à un compact F sont bien déterminés dans tout l'espace.*

En effect, soient μ' et μ'' des mesures balayées de μ sur F. Alors, on a

$$U^{\mu'}(x) = U^{\mu''}(x) = V^{\mu}(x)$$

sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul. $V^{\mu}(x)$ étant borné sur F, μ' et μ'' sont tous deux d'énergie finie par rapport au noyau K. Le noyau K étant de type positif et $\sigma=\mu'-\mu'$ étant d'énergie nulle, on a

$$\left(\int U^{\sigma}d\lambda\right)^2\leqq\int U^{\sigma}d\sigma\cdot\int U^{\lambda}d\lambda = 0$$

pour toute mesure positive λ d'énergie finie par rapport au noyau K. Donc, on a

$$U^{\mu'}(x) = U^{\mu''}(x)$$

dans tout l'espace sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul.

§2. Le balayage inverse.

Définition. Un noyau K est dit satisfaire au principe du balayage inverse par rapport au noyau N, lorsque, étant donnés un compact F et un point p n'appartenant pas à F, il existe au moins une mesure positive λ portée par F telle que

(1) $U^{\lambda}(x)=N(x, p)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\lambda}(x)\geqq N(x, p)$ dans tout l'espace sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul.

Cette mesure λ est dite une mesure inversement balayée de la mesure ponctuelle placée en p sur F. Si un noyau K satisfait au principe du balayage inverse par rapport au noyau N, on a

$$N(p, p)<+\infty$$

en tout point p. Donc, le noyau $N(x, y)$ est fini et continu en x et y.

Définition. Un noyau K est dit satisfaire au principe du minimum par rapport au noyau N, lorsque, pour une mesure positive λ à support compact F et un point p n'appartenant pas à F, l'inégalité

$$U^{\lambda}(x) \geqq N(x, p)$$

sur F entraîne la même inégalité dans tout l'espace.

Soient E_1 et E_2 des ensembles boréliens disjoints tels que $\bar{E}_1$ et $\bar{E}_2$ soient compacts. Pour une mesure positive μ portée par E_1 et une mesure positive ν portée par E_2, posons

$$G(\mu, \nu) = \frac{\int U^{\mu} d\mu \times \int U^{\nu} d\nu}{(\int U^{\mu} d\nu)^2} .$$

Si le noyau $K(x, y)$ est fini et continu en x et y, $G(\mu, \nu)$ a sens pour tout couple (μ, ν), $\mu \neq 0$ et $\nu \neq 0$, et on peut considérer le maximum de $G(\mu, \nu)$. On appelle un couple maximal (μ_0, ν_0) qui rend maximum $G(\mu, \nu)$ parmi tout couple (μ, ν), μ portée par E_1 et ν portée par E_2.

LEMME 6. *Soit $K(x, y)$ un noyau positif fini, continu et symétrique en x et y. Si (μ_0, ν_0) est un couple maximal de $G(\mu, \nu)$, la fonction*

$$g_1(x) = cU^{\mu_0}(x) - aU^{\nu_0}(x) ,$$

où

$$a = \int U^{\mu_0} d\mu_0, \quad b = \int U^{\nu_0} d\nu_0 \quad \text{et} \quad c = \int U^{\nu_0} d\mu_0 ,$$

jouit de la propriété:

(1) $g_1(x) \leqq 0$ *sur* E_1,

(2) $g_1(x) \geqq 0$ *sur* E_1 *sauf un ensemble de mesure nulle pour* μ_0.

Analoguement quant à la fonction

$$g_2(x) = cU^{\nu_0}(x) - bU^{\mu_0}(x) .$$

En effect, comme (μ_0, ν_0) est un couple maximal, on a l'inégalité

$$0 \geqq G(\mu_0 + \varepsilon\sigma, \nu_0) - G(\mu_0, \nu_0)$$

pour tout nombre positif ε et pour toute mesure positive σ portée par E_1. Le noyau K étant symétrique, cela entraîne l'inégalité

$$0 \geqq 2c\varepsilon \int g_1(x)\, d\sigma(x) + \varepsilon^2 [c^2 \int U^{\sigma} d\sigma - a(\int U^{\nu_0} d\sigma)^2] .$$

On en déduit facilement le résultat.

LEMME 7. *Soit $K(x, y)$ un noyau positif, fini, continu et symétrique en x et y. Si E_1 et E_2 sont des compacts disjoints, il existe au moins un couple maximal.*

En effet, posons

$$G_0 = \sup G(\mu, \nu) .$$

Ici, sup est pris par rapport à tout couple (μ, ν), μ portée par E_1 et ν portée par

E_2. Alors, il existe des suites $\{\mu_n\}$ et $\{\nu_n\}$ de mesures positives par E_1 et par E_2 respectivement telles que

$$G_0 = \lim_{n\to\infty} G(\mu_n, \nu_n) .$$

Soient

$$\mu_{1n} = \frac{\mu_n}{\int d\mu_n} \quad \text{et} \quad \nu_{1n} = \frac{\nu_n}{\int d\nu_n} ,$$

et soient μ_0 et ν_0 des mesures limites de $\{\mu_{1n}\}$ et de $\{\nu_{1n}\}$ respectivement (en prenant leurs suites partielles convenables). Alors, le noyau K étant fini et continu en x et y, on a

$$\begin{aligned} G_0 \geqq G(\mu_0, \nu_0) &= \lim_{n\to\infty} G(\mu_{1n}, \nu_{1n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} G(\mu_n, \nu_n) = G_0 . \end{aligned}$$

Donc, (μ_0, ν_0) est un couple maximal.

Lemme 8. *Soit $K(x, y)$ un noyau positif, fini, continu et symétriqne en x et y. Etant donnés un compact F et un point p n'appartenant pas à F, il existe une mesure μ_0 qui rend maximum*

$$G(\mu) = \frac{\int U^{\mu} d\mu}{[\int N(x, p)\, d\mu(x)]^2}$$

parmi toute mesure positive μ portée par F. Et, la fonction

$$g(x) = cU^{\mu_0}(x) - aN(x, p) ,$$

où

$$a = \int U^{\mu_0} d\mu_0 \quad \text{et} \quad c = \int N(x, p)\, d\mu_0(x) ,$$

jouit de la propriété:

(1) *$g(x) \leqq 0$ sur F,*

(2) *$g(x) \geqq 0$ sur le support de μ_0.*

En effet, posons

$$G_0 = \sup G(\mu) .$$

Ici, sup est pris par rapport à toute mesure positive μ portée par F. Le noyau K étant fini et continu en x et y, G_0 est un nombre positif fini. Alors, il existe une suite $\{\mu_n\}$ de mesures positives portées par F telle que

$$G_0 = \lim_{n\to\infty} G(\mu_n) .$$

On peut supposer que la suite de mesures positives

$$\mu_{1n} = \frac{\mu_n}{\int d\mu_n}$$

converge vers une mesure positive μ_0 de la masse totale un portée par F (en prenant une suite partielle convenable). Le noyau K étant fini et continu en x et y et $N(x, p)$ étant fini et continu sur F, on a

$$G_0 \geqq G(\mu_0) = \lim_{n\to\infty} G(\mu_{1n}) = \lim_{n\to\infty} G(\mu_n) = G_0 .$$

Par suite, μ_0 rend maximum $G(\mu)$ parmi toute mesure positive μ portée par F. Alors, on a

$$G(\mu_0) \geqq G(\mu_0 + \varepsilon\sigma)$$

pour tout nombre positif ε et pour toute mesure positive σ portée par F. Le noyau K étant symétrique, cela entraîne l'inégalité

$$0 \geqq 2c\varepsilon \int g(x)\, d\sigma(x) + \varepsilon^2 [c^2 \int U^\sigma d\sigma - a(\int N(x, p)\, d\sigma(x))^2] .$$

On en déduit facilement le résultat.

THÉORÈME 4. *Soit $K(x, y)$ un noyau positif, continu et symétrique en x et y, qui pourra être $+\infty$ en $x=y$ mais satisfait au principe de continuité. Alors, pour qu'un noyau K satifasse au principe du balayage inverse par rapport au noyau N, il faut et il suffit qu'il satisfasse au principe du minimum par rapport au noyau N.*

Démonstration. Supposons qu'un noyau K satisfait au principe du minimum par rapport au noyau N. Soit $\{K_n(x, y)\}$ une suite de noyaux positifs, finis, continus et symétriques en x et y telle que

$$K_n(x, y) < K_m(x, y) \text{ si } n<m \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} K_n(x, y) = K(x, y) .$$

Considérons des potentiels pris par rapport au noyau K_n

$$U_n^\mu(x) = \int K_n(x, y)\, d\mu(y) .$$

Etant donnés un compact F de K-diamètre transfini positif et un point p n'appartenant pas à F, soit μ_{0n} une mesure positive qui rend maximum

$$G(\mu) = \frac{\int U_n^\mu d\mu}{[\int N(x, p)\, d\mu(x)]^2}$$

parmi toute mesure positive μ portée par F. Alors, on a d'après le lemme 8, en posant

$$a_n = \int U_n^{\mu_{0n}} d\mu_{0n}, \quad c_n = \int N(x, p)\, d\mu_{0n}(x) \quad \text{et } \lambda_n = \frac{c_n}{a_n} \mu_{0n} ,$$

(1) $U_n^{\lambda_n}(x) \leqq N(x, p)$ sur F,

(2) $U_n^{\lambda_n}(x) \geqq N(x, p)$ sur le support de λ_n.

$\{\lambda_n\}$ étant de la masse totale bornée en vertu de (1), on peut supposer qu'elle converge vers une mesure positive λ portée par F (en prenant une suite partielle convenable). Alors, on a

$$U_i^\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} U_i^{\lambda_n}(x) \leqq \lim_{n\to\infty} U_n^{\lambda_n}(x) \leqq \lim_{n\to\infty} U^{\lambda_n}(x)$$

pour un nombre fixé $i>0$. En faisant $i\to+\infty$, on a

$$U^{\lambda}(x)\leq\varliminf_{n\to\infty}U_n^{\lambda_n}(x)$$

dans tout l'espace. Encore, comme on a

$$U^{\lambda_n}(x)\geqq U_n^{\lambda_n}(x)\geqq N(x,p)$$

sur le support de λ_n, on a en vertu du principe du minimum

$$U^{\lambda_n}(x)\geqq N(x,p)$$

dans tout l'espace. Comme on a d'après le lemma 5

$$U^{\lambda}(x)=\varliminf_{n\to\infty}U^{\lambda_n}(x)$$

sauf sur un ensemble de K-diamètre transfini nul, on a

(1) $U^{\lambda}(x)\leqq N(x,p)$ sur F,

(2) $U^{\lambda}(x)\geqq N(x,p)$ dans tout l'espace sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul.

Donc, on a

(1) $U^{\lambda}(x)=N(x,p)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\lambda}(x)\geqq N(x,p)$ dans tout l'espace sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul.

Donc, λ est une mesure inversement balayée de la mesure ponctuelle placée en p sur F. Inversement, supposons qu'un noyau K satisfait au principe du balayage inverse par rapport au noyau N. Soient α une mesure positive à support compact F et p un point n'appartenant pas à F tels que

$$U^{\alpha}(x)\geqq N(x,p)$$

sur F. Supposons qu'il y ait un point t tel que

$$U^{\alpha}(t)<N(t,p)\,.$$

En prenant une suite $\{K_n(x,y)\}$ de noyaux positifs, finis, continus et symétriques telle que

$$K_n(x,y)<K_m(x,y)\qquad\text{si } n<m$$

et

$$\lim_{n\to\infty}K_n(x,y)=K(x,y)\,,$$

soit μ_{0n} une mesure positive qui rend maximum

$$G(\mu)=\frac{\int U_n^{\mu}d\mu}{[\int K(x,t)\,d\mu(x)]^2}$$

parmi toute mesure positive μ portée par F. En faisant

$$a_n=\int U_n^{\mu_{0n}}d\mu_{0n},\quad c_n=U^{\mu_{0n}}(t)\quad\text{et}\quad\lambda_n=\frac{c_n}{a_n}\mu_{0n}\,,$$

on a d'après le lemme 8

(1) $U_n^{\lambda_n}(x) \leqq K(x, t)$ sur F,

(2) $U_n^{\lambda_n}(x) \geqq K(x, t)$ sur le support de λ_n.

$\{\lambda_n\}$ étant de la masse totale bornée en vertu de (1), on peut supposer que $\{\lambda_n\}$ converge vers une mesure positive λ portée par F (en prenant une suite partielle convenable). Alors, on a

$$N(t, p) > U^{\alpha}(t) = \int K(x, t)\, d\alpha(x)$$
$$\geqq \int U_n^{\lambda_n}(x)\, d\alpha(x) > \int U_i^{\lambda_n}(x)\, d\alpha(x)$$

pour un nombre assez grand n et un nombre fixé i. Par suite, on a en faisant $n \to +\infty$

$$N(t, p) > U^{\alpha}(t) \geqq \int U_i^{\lambda}(x)\, d\alpha(x) .$$

Donc, on a en faisant $i \to +\infty$

$$N(t, p) > \int U^{\lambda} d\alpha = \int U^{\alpha} d\lambda \geqq \int N(x, p)\, d\lambda(x) .$$

D'autre part, soient F_n le support de λ_n et ε_n' une mesure inversement balayée de la mesure ponctuelle placée en p sur F_n. Alors, comme on a

$$U^{\varepsilon_n'}(x) = N(x, p)$$

sur le support de λ_n sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul, on a

$$U^{\varepsilon_n'}(x) \leqq N(x, p)$$

sur le support de λ_n en vertu du semi-continuité inférieur. Par suite, on a

$$N(t, p) \leqq U^{\varepsilon_n'}(t) = \int K(x, t)\, d\varepsilon_n'(x)$$
$$\leqq \int U_n^{\lambda_n}(x)\, d\varepsilon_n'(x) < \int U^{\lambda_n}(x)\, d\varepsilon_n'(x)$$
$$= \int U^{\varepsilon_n'}(x)\, d\lambda_n(x) \leqq \int N(x, p)\, d\lambda_n(x) .$$

Donc, on a en faisant $n \to +\infty$

$$N(t, p) \leqq \int N(x, p)\, d\lambda(x) ,$$

ce qui est contradictoire. Ainsi, on a

$$U^{\alpha}(x) \geqq N(x, p)$$

dans tout l'espace.

THÉORÈME 5. *Soit $K(x, y)$ un noyau satisfaisant au principe du balayage inverse par rapport au noyau N sous la même hypothèse que le théorème 4. Alors, à tout compact F et une mesure positive quelconque μ à support compact, on peut associer une mesure positive μ' portée par F telle que*

(1) *$U^{\mu'}(x) = V^{\mu}(x)$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,*

(2) *$U^{\mu'}(x) \geqq V^{\mu}(x)$ dans tout l'espace sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul.*

Démonstration. On peut balayer sur F la mesure ponctuelle placée en tout point du complémentaire de F dû au théorème 4. Pour balayer sur F la mesure ponctuelle placée en un point p de F, soient $\{G_n\}$ une suite de voisinage de p décroissant vers p et λ_n une mesure inversement balayée de la mesure ponctuelle placée en p sur $F_n = F - G_n$. Alors, on a

(1) $U^{\lambda_n}(x) = N(x, p)$ sur F_n sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\lambda_n}(x) \geqq N(x, p)$ dans tout l'espace sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul.

$\{\lambda_n\}$ étant de la masse totale bornée, soit λ une mesure limite de λ_n. Alors, comme on a

$$U^{\lambda}(x) \leqq \varliminf_{n\to\infty} U^{\lambda_n}(x)$$

dans tout l'espace, l'égalité ayant lieu sauf sur un ensemble de K-diamètre transfini nul, on a

(1) $U^{\lambda}(x) = N(x, p)$ sur $F - \{p\}$ sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $U^{\lambda}(x) \geqq U(x, p)$ dans tout l'espace sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul.

Pour remplacer $F - \{p\}$ par F dans l'énoncé ci-dessus (1), il suffit de démontrer

$$U^{\lambda}(p) = N(p, p)$$

lorsque $K(p, p) < +\infty$. En effect, si $K(p, p) = +\infty$, l'ensemble $\{p\}$ est de K-diamètre transfini nul. Par suite, soit $K(p, p) < +\infty$. Alors, l'ensemble $\{p\}$ est de K-diamètre transfini positif et la partie de $F - \{p\}$ contenu dans un voisinage de p est aussi de K-diamètre transfini positif. $K(x, y)$ étant fini et uniformément continu pour des points x contenus dans un voisinage de p et pour des points y contenus dans un compact F et $N(x, y)$ étant fini et continu pour tout x et y comme on a déjà remarqué, pour tout nombre positif ε on peut trouver un voisinage G de p, un nombre assez grand n et des points x de G tels que

$$|U^{\lambda}(p) - N(p, p)| \leqq |U^{\lambda}(p) - U^{\lambda_n}(p)| + |U^{\lambda_n}(p) - U^{\lambda_n}(x)| + \\ |U^{\lambda_n}(x) - N(x, p)| + |N(x, p) - N(p, p)| < \varepsilon .$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on a

$$U^{\lambda}(p) = N(p, p) .$$

Donc, λ est une mesure inversement balayée de la mesure ponctuelle placée en p sur F. Enfin, étant donnés un compact F de K-diamètre transfini positif et une mesure positive quelconque μ à support compact, soit $\{\mu_n\}$ une suite de mesures ponctuelles convergant vers μ. Le noyau $N(x, y)$ étant fini et continu en x et y, on a

$$V^{\mu}(x) = \lim_{n\to\infty} V^{\mu_n}(x)$$

uniformément sur tout compact. Alors, la mesure limite μ' de la suite de mesures inversement balayées μ_n' de μ_n sur F_n est une mesure inversement balayée de μ sur F.

EXEMPLE. Dans l'espace à dimension un R (c'est-à-dire, l'espace de $-\infty < x < +\infty$), considérons

$$K(x, y) = |x-y|^{\alpha}, \qquad 0<\alpha<1,$$

Le noyau K satisfait au principe de l'équilibre inverse (c'est-à-dire, au principe du balayage inverse par rapport au noyau $N(x, y) \equiv 1$). En effect, soient λ une mesure positive à support compact F (contenant au moins deux points) et p un point n'appartenant pas à F, tels que

$$U^{\lambda}(x) \geqq 1$$

sur F. Alors, comme la fonction $U^{\lambda}(x)$ est finie, continue pour tout point x et concave dans tout intervalle du complémentaire du F et tend vers $+\infty$ lorsque $|x| \to +\infty$, on a toujours

$$U^{\lambda}(x) \geqq 1.$$

Donc, le noyau K satisfait au principe de l'équilibre inverse. Encore, le noyau K satisfait au principe du balayage inverse (c'est-à-dire, au principe du balayage inverse par rapport au noyau $N(x, y) \equiv K(x, y)$). En effect, soient λ une mesure positive à support compact F (contenant au moins deux points) et p un point n'appartenant pas à F, tels que

$$U^{\lambda}(x) \geqq |p-x|^{\alpha}$$

sur F. Pour tout ensemble e, soit

$$e' = \{x';\ x \in e,\ x' \in \overrightarrow{px},\ |p-x| \cdot |p-x'| = 1\}.$$

Et soit λ' la mesure portée par F' définie par la relation

$$d\lambda'(y') = |p-y'|^{-\alpha} d\lambda(y), \qquad y \in F.$$

Alors, comme on a l'égalité

$$\frac{|x-y|}{|p-x|} = \frac{|x'-y'|}{|p-y'|}$$

pour tout point x et y, on a

$$|p-x|^{-\alpha} \cdot U^{\lambda}(x) = U^{\lambda'}(x').$$

Comme on a

$$U^{\lambda'}(x') \geqq 1$$

sur F', on a la même inégalité dans R. Donc, on a partout

$$U^{\lambda}(x) \geqq |p-x|^{\alpha}.$$

DÉFINITION. Un noyau $K(x, y)$ positif, fini, continu et symétrique en x et y

est dit de type négatif si on a

$$\int U^{\mu}d\mu \times \int U^{\nu}d\nu \leqq \left(\int U^{\mu}d\nu\right)^2$$

pour tout couple (μ, ν) de mesures positives à supports compacts disjoints.

THÉORÈME 6. *Soient $K(x, y)$ et $N(x, y)$ des noyaux positifs, finis et continus en x et y, et soit K symétrique. Si le noyau K satisfait au principe du balayage inverse par rapport au noyau N, il est de type négatif.*

Démonstration. Soient F_1 et F_2 deux compacts disjoints. Soit (μ_0, ν_0) un couple qui rend maximum

$$G(\mu, \nu) = \frac{\int U^{\mu}d\mu \times \int U^{\nu}d\nu}{(\int U^{\mu}d\nu)^2}$$

parmi tout couple (μ, ν) de mesures positives, μ portée par F_1 et ν portée par F_2. Alors, on a d'après le lemme 6

(1) $\frac{c}{a} U^{\mu_0}(x) \geqq U^{\nu_0}(x)$ sur le support de μ_0,

(2) $U^{\nu_0}(x) \geqq \frac{b}{c} U^{\mu_0}(x)$ sur le support de ν_0,

où

$$a = \int U^{\mu_0}d\mu_0, \quad b = \int U^{\nu_0}d\nu_0 \quad \text{et} \quad c = \int U^{\mu_0}d\nu_0 .$$

Soient p un point n'appartenant ni à F_1 et ni à F_2 et α un nombre positif tel que

$$\inf\,[U^{\nu_0}(x) - \alpha N(x, p)] = 0\,, \quad x \text{ appartenant au support de } \nu_0.$$

Alors, comme le noyau K satisfait au principe du minimum par rapport au noyau N, on a

$$U^{\nu_0}(x) \geqq \alpha N(x, p)$$

dans tout l'espace. Par suite, on a

$$\frac{c}{a} U^{\mu_0}(x) \geqq \alpha N(x, p)$$

sur le support de μ_0. Donc, on a la même inégalité dans tout l'espace. Etant donné un nombre positif quelconque ε, prenons un point x' du support de ν_0 tel que

$$\alpha N(x', p) + \varepsilon > U^{\nu_0}(x') .$$

Alors, on a

$$\frac{c}{a} U^{\mu_0}(x') + \varepsilon > U^{\nu_0}(x') \geqq \frac{b}{c} U^{\mu_0}(x') .$$

Par conséquent, on a

$$1 + \frac{a}{c} \frac{1}{U^{\mu_0}(x')} \cdot \varepsilon > \frac{ab}{c^2}.$$

$U^{\mu_0}(x)$ étant borné sur le support de ν_0, on a

$$\frac{ab}{c^2} \leqq 1$$

en faisant $\varepsilon \to 0$, d'où le résultat.

En passant, rappellons l'unicité de potentiels de mesures inversement balayées au cas où un noyau $K(x, y)$ est fini et continu en x et y.

LEMME 9. *Soit K un noyau de type négatif. Si on a*

$$\int U^{\mu_0} d\mu_0 \times \int U^{\nu_0} d\nu_0 = \left(\int U^{\mu_0} d\nu_0\right)^2$$

pour un couple de mesures positives μ_0 et ν_0 portées par des ensembles boréliens disjoints E_1 et E_2 respectivenent, on a

$$g_1(x) = g_2(x) = 0$$

dans tout l'espace, où

$$a = \int U^{\mu_0} d\mu_0, \quad b = \int U^{\nu_0} d\nu_0, \quad c = \int U^{\mu_0} d\nu_0,$$

$$g_1(x) = cU^{\mu_0}(x) - aU^{\nu_0}(x) \quad et \quad g_2(x) = cU^{\nu_0}(x) - bU^{\mu_0}(x) .$$

En effet, remarquons que, si le noyau K est de type négatif, on a toujours

$$G(\mu, \nu) = \frac{\int U^{\mu} d\mu \times \int U^{\nu} d\nu}{(\int U^{\mu} d\nu)^2} \leqq 1$$

pour tout couple de deux mesures positives μ et ν positives μ et ν portées par des ensembles boréliens disjoints. Par suite, on a

$$G(\mu_0 + \varepsilon\sigma, \nu_0) \leqq 1 = G(\mu_0, \nu_0)$$

pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et pour toute mesure positive σ portée par le complémentaire du support de ν_0. Cela entraîne l'inégalité

$$0 \geqq 2c\varepsilon \int g_1(x)\, d\sigma(x) + \varepsilon^2 \left[c^2 \int U^{\sigma} d\sigma - a\left(\int U^{\sigma} d\nu_0\right)^2\right].$$

On en déduit facilement

$$g_1(x) \leqq 0$$

sur le complémentaire du support de ν_0. Comme on a

$$\int g_1(x)\, d\mu_0(x) = 0,$$

on a

(1) $g_1(x) \leqq 0$ sur le complémentaire du support de ν_0,

(2) $g_1(x) = 0$ sur le support de μ_0.

Analoguement, on a

(1) $g_2(x) \leqq 0$ sur le complémentaire du support de μ_0,

(2) $g_2(x) = 0$ sur le support de ν_0.

D'autre part, comme on a

$$cg_1(x)+ag_2(x) = 0$$

dans tout l'espace, on a

$$g_1(x) = g_2(x) = 0$$

dans tout l'espace.

THÉORÈME 7. *Soit $K(x, y)$ un noyau positif, fini, continu et symétrique en x et y. Si le noyau K satisfait au principe du balayage inverse par rapport au noyau N, tout potentiel de mesures inversement balayées d'une mesure positive quelconque μ à tout compact F est bien déterminé dans tout l'espace.*

Démonstration. Soient μ' et μ'' des mesures inversement balayées de μ à F. Alors, on a

$$U^{\mu'}(x) = U^{\mu''}(x) = V^{\mu}(x)$$

sur F. On peut écrire

$$\mu'-\mu'' = \mu_1-\mu_2\,,$$

μ_1 et μ_2 étant des mesures positives portées par des sous-ensembles boréliens disjoints E_1 et E_2 de F respectivement. Comme on a

$$U^{\mu_1}(x) = U^{\mu_2}(x)$$

sur F, on a d'après le lemma 9

$$g_1(x) = cU^{\mu_1}(x)-aU^{\mu_2}(x) = 0$$

dans tout l'espace. Comme on a

$$a = \int U^{\mu_1}d\mu_1 = \int U^{\mu_2}d\mu_1 = c\,,$$

on a d'ailleurs

$$U^{\mu_1}(x) = U^{\mu_2}(x)\,,$$

c'est-à-dire,

$$U^{\mu'}(x) = U^{\mu''}(x)$$

dans tout l'espace.

REMARQUE. On n'a aucun résultat sur l'unicité de potentiels de mesures inversement balayées au cas où $K(x, y)$ est un noyau positif, continu et symétrique qui est $+\infty$ en $x=y$.

§3. Le balayage faible.

DÉFINITION. Un noyau K est dit satisfaire au principe du balayage faible par rapport au noyau N lorsque, étant donnés un compact F et un point p n'appartenant pas à F, il existe au moins une mesure positive λ portée par F telle que

$$U^{\lambda}(x) = N(x, p)$$

sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul. Cette mesure λ est dite une mesure faiblement balayée de la mesure ponctuelle placée en p sur F.

Naturellement, si un noyau K satisfait au principe du balayage ordinaire ou inverse par rapport au noyau N, il satisfait au principe du balayage faible par rapport au noyau N. On n'a pas un principe du maximum ou minimum qui caractérise des noyaux K satisfaisant au principe du balayage faible par rapport au noyau N. On va démontrer que le balayage faible équivaut au balayage ordinaire au cas où le noyau K est de type positif, et que le balayage faible équivaut au balayage inverse au cas où le noyau K est de type négatif.

THÉORÈME 8. *Soient $K(x, y)$ et $N(x, y)$ des noyaux positifs et continus en x et y qui pourront être $+\infty$ en $x=y$, et soit K symétrique. Si le noyau K est de type positif et satisfait au principe du balayage faible par rapport au noyau N, il satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N. Si le noyau K est de type négatif et satisfait au principe du balayage faible par rapport au noyau N, il satisfait au principe du balayage inverse par rapport au noyau N.*

Démonstration. Supposons qu'un noyau K est de type positif et satisfait au principe du balayage faible par rapport au noyau N. Soient α une mesure positive à support compact F et p un point n'appartenant pas à F tels que

$$U^{\alpha}(x) \leqq N(x, p)$$

sur F. Supposons qu'il y ait un point t $(\neq p)$ tel que

$$U^{\alpha}(t) > N(t, p)\,.$$

Soient G un compact de K-diamètre transfini positif contenant le point t dans lequel

$$U^{\alpha}(x) > N(x, p)\,,$$

et (μ_0, ν_0) un couple qui rend minimum

$$G(\mu, \nu) = \frac{\int U^{\mu} d\mu \times \int U^{\nu} d\nu}{(\int U^{\mu} d\nu)^2}$$

parmi tout couple (μ, ν) de mesures positives, μ portée par F et ν portée par G. Alors, on a d'après le lemme 1

(1) $g_1(x) \geqq 0$ sur F sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul,

(2) $g_1(x) \leqq 0$ sur le support de μ_0,

et analoguement quant à $g_2(x)$, où

$$a = \int U^{\mu_0} d\mu_0, \quad b = \int U^{\nu_0} d\nu_0, \quad c = \int U^{\mu_0} d\nu_0\,,$$
$$g_1(x) = cU^{\mu_0}(x) - aU^{\nu_0}(x) \quad \text{et} \quad g_2(x) = cU^{\nu_0}(x) - bU^{\mu_0}(x)\,.$$

Comme le noyau K est de type positif, on a

$$cg_1(x) + ag_2(x) = (c^2 - ab)\, U^{\mu_0}(x) \leqq 0$$

dans tout l'espace. Encore, comme on a

$$g_2(x) = 0$$

sur le supports de ν_0 sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul, on a

$$g_1(x) \leqq 0$$

sur le support de ν_0 sauf un ensemble de K-diamètre transfini nul. En prenant une mesure faiblement balayée λ de la mesure ponctuelle placée en p sur l'union des support de μ_0 et de ν_0, on a

$$0 \geqq \int g_1(x)\, d\lambda(x) = c\int U^{\mu_0} d\lambda - a\int U^{\nu_0} d\lambda$$
$$= c\int U^{\lambda} d\mu_0 - a\int U^{\lambda} d\nu_0 = c\int N(x, p)\, d\mu_0(x) - a\int N(x, p)\, d\nu_0(x)\,.$$

D'autre part, on a

$$0 \leqq \int g_1(x)\, d\alpha(x) = c\int U^{\mu_0} d\alpha - a\int U^{\nu_0} d\alpha$$
$$= c\int U^{\alpha} d\mu_0 - a\int U^{\alpha} d\nu_0 < c\int N(x, p)\, d\mu_0(x) - a\int N(x, p)\, d\nu_0(x)\,,$$

ce qui est contradictoire. Donc, on a

$$U^{\alpha}(x) \leqq N(x, p)$$

pour tout point $x \neq p$. En faisant $x \to p$, on a

$$U^{\alpha}(p) \leqq N(p, p)\,.$$

Donc, le noyau K satisfait au principe du maximum par rapport au noyau N, c'est-à-dire, au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N. Ensuite, supposons qu'un noyau K est de type négatif et satisfait au principe du balayage faible par rapport au noyau N. Soient α une mesure positive à support compact F et p un point n'appartenant pas à F tels que

$$U^{\alpha}(x) \geqq N(x, p)$$

sur F. Supposons qu'il y ait un point t $(\neq p)$ tel que

$$U^{\alpha}(t) < N(t, p)\,.$$

Soient G un compact contenant le point t dans lequel

$$U^{\alpha}(x) < N(x, p)\,.$$

Le noyau K étant fini et continu en x et y, on peut considérer le maximum de

$$G(\mu, \nu) = \frac{\int U^{\mu} d\mu \times \int U^{\nu} d\nu}{(\int U^{\mu} d\nu)^2}$$

parmi tout couple (μ, ν) de mesures positives, μ portée par F et ν portée par G. Soit (μ_0, ν_0) un couple maximal. Alors, on a d'après le lemme 6

(1) $g_1(x) \leqq 0$ sur F,

(2) $g_1(x) = 0$ sur le support de μ_0,

et analoguement quant à $g_2(x)$ sous les mêmes notations. Comme le noyau K est de type négatif, on a

$$cg_1(x)+ag_2(x) = (c^2-ab)\cdot U^{\mu_0}(x) \geqq 0$$

dans tout l'espace. Encore, comme on a

$$g_2(x) = 0$$

sur le support de ν_0, on a

$$g_1(x) \geqq 0$$

sur le support de ν_0. En prenant une mesure faiblement balayée λ de la mesure ponctuelle placée en p sur l'union des supports de μ_0 et de ν_0, on a

$$0 \leqq \int g_1(x)\, d\lambda(x) = c\int U^{\mu_0} d\lambda - a\int U^{\nu_0} d\lambda$$
$$= c\int U^{\lambda} d\mu_0 - a\int U^{\lambda} d\nu_0 = c\int N(x, p)\, d\mu_0(x) - a\int N(x, p)\, d\nu_0(x)\,.$$

D'autre part, on a

$$0 \geqq \int g_1(x)\, d\alpha(x) = c\int U^{\mu_0} d\alpha - a\int U^{\nu_0} d\alpha$$
$$= c\int U^{\alpha} d\mu_0 - a\int U^{\alpha} d\nu_0 > c\int N(x, p)\, d\mu_0(x) - a\int N(x, p)\, d\nu_0(x)\,,$$

ce qui est contradictoire. Donc, on a

$$U^{\alpha}(x) \geqq N(x, p)$$

pour tout point $x \neq p$. En faisant $x \to p$, on a

$$U^{\alpha}(p) \geqq N(p, p)\,.$$

Donc, le noyau K satisfait au principe du minimum par rapport au noyau N, c'est-à-dire, au principe du balayage inverse par rapport au noyau N.

REMARQUE. La démonstration montre que le balayage faible équivaut au balayage ordinaire pourvu que $K(x, x) = +\infty$ en tout point x, bien que le noyau K ne soit pas de type positif. En effect, la démonstration est valide si on a

$$cg_1(x)+ag_2(x) = (c^2-ab)\cdot U^{\mu_0}(x) \leqq 0\,.$$

Pour cela, on n'a seulement à prendre un compact G contenant le point t de la manière que
(1) $K(x, y) > A > 0$ pour tout x et y de F,
(2) $K(x, y) < B < +\infty$ pour tout x de F et pour tout y de G,
(3) $K(x, y) > B^2/A$ pour tout x et y de G.

Bibliographie

[1] C. Choquet: Sur les fondements de la théorie du potentiel, C. R. Acad. Sci. Paris, **244**, pp. 1606–1609.
[2] G. Choquet & J. Deny: Medèles finis en théorie du potentiel, J. Analyse Math. Jerusalem, **5**, 1956–7, pp. 77–135.
[3] N. Ninomiya: Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., Series A, **8**, 1957, pp. 147–179.
[4] N. Ninomiya: Sur le principe du maximum et le balayage, Japanese J. Math., **29**, 1959, pp. 68–77.