

Zur Idealtheorie in Ordnungen

Von Takasaburo UKEGAWA

(Eingegangen am 13. September 1961)

Es sei S ein Schieferring mit Einselement, und \mathfrak{o} sei eine Ordnung von S . Es sei ferner \mathfrak{o}^* eine \mathfrak{o} umfassende, mit \mathfrak{o} äquivalente Maximalordnung, die die folgenden Asanoschen Bedingungen genügt:

A_1 : \mathfrak{o}^* ist eine reguläre Maximalordnung.

A_2 : Es gilt der Teilerkettensatz für ganze zweiseitige \mathfrak{o}^* -Ideale.

A_3 : Jedes Primideal von \mathfrak{o}^* ist stark teilerlos, d. i. der Restklassenring nach jedem Primideal ist ein einfacher Ring.

\mathfrak{f} sei der Führer von \mathfrak{o} hinsichtlich \mathfrak{o}^* . Im allgemeinen gibt es noch andere solche Maximalordnungen. Zunächst betrachten wir die Beziehungen zwischen den Führern hinsichtlich der verschiedenen solchen Maximalordnungen. Weiter untersuchen wir die Bedingungen dafür, dass jedes in \mathfrak{o} enthaltene zweiseitige \mathfrak{o} -Ideal als ein Durchschnitt von endlich vielen Primärideal dargestellt wird. Bei der Zerlegung der in \mathfrak{o} enthaltenen \mathfrak{o} -Ideale müssen wir die Barnessesche Primalideale¹⁾ berücksichtigen: tatsächlich in der Zerlegung des Führers \mathfrak{f} treten nicht nur die Primärideal sondern auch Primalideale auf. Wir betrachten die \mathfrak{f} -Komponente in \mathfrak{o} wie bei § 10 [2]. Schliesslich untersuchen wir die Blockideale und deren Primteiler, und wir zeigen, dass jedes Blockideal höchstens nur einen regulären Primteiler besitzt, wenn S eine Algebra über dem \mathfrak{p} -adischen Zahlkörper $K_{\mathfrak{p}}$ ist: also sind fast alle Primteiler des Blockideals Primteiler von \mathfrak{f} .

§ 1. Beziehungen zwischen den Führern von \mathfrak{o} bezüglich verschiedener Maximalordnungen.

Es sei S ein Schieferring mit Einselement 1, \mathfrak{o} eine Ordnung von S , und \mathfrak{o}_i^* , \mathfrak{o}_k^* , ... die Asanoschen Bedingungen (A_1), A_2 , A_3 genügende, \mathfrak{o} umfassende, mit \mathfrak{o} äquivalente Maximalordnungen. Es sei \mathfrak{f}_i bzw. \mathfrak{f}_k der Führer von \mathfrak{o} bezüglich \mathfrak{o}_i^* bzw. \mathfrak{o}_k^* . Wir setzen $\mathfrak{o}_i^* = \mathfrak{o}^*$ auf einen Augenblick.

HILFSSATZ 1.²⁾ *Es sei \mathfrak{p} ein Primideal von \mathfrak{o} und setzen wir $\mathfrak{o}^* \mathfrak{p} \mathfrak{o}^* \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}_0$. \mathfrak{p} ist dann und nur dann nicht ein Verengungsideal von \mathfrak{o} , wenn $(\mathfrak{p} : \mathfrak{p}_0)_r = (\mathfrak{p} : \mathfrak{p}_0)_l = \mathfrak{p}$ ist, wobei $(\mathfrak{p} : \mathfrak{p}_0)_r = \{x \in \mathfrak{o} \mid \mathfrak{p}_0 x \subseteq \mathfrak{p}\}$, $(\mathfrak{p} : \mathfrak{p}_0)_l = \{x \in \mathfrak{o} \mid x \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}\}$ ist.*

Beweis. Aus der Definition $\mathfrak{p}_0(\mathfrak{p} : \mathfrak{p}_0)_r \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}$ oder $(\mathfrak{p} : \mathfrak{p}_0)_r \subseteq \mathfrak{p}$. Ist

1) Wir nennen Barnessesche "primal ideal" [5] Primalideale.

2) Hilfssatz 1 und Satz 1 bedürfen an Stelle von A_3 nur, dass jedes Primideal teilerlos ist,

$p_0 \subseteq p$, so gilt $p_0 = p$, da offenbar $p_0 \supseteq p$ ist, d.h. p ist in diesem Falle ein Verengungsideal. Ist dagegen $(p : p_0)_r \subseteq p$, so ist $(p : p_0)_r = p$. Ist zweitens p ein Verengungsideal und zugleich $(p : p_0)_r = p$, so folgt $(p : p)_r = p$, was ein Widerspruch ist.

SATZ 1. *Ein Primideal, das zugleich ein Eigenideal³⁾ ist, ist regulär.*

Beweis. Ist p ein Verengungsideal, so ist nach Satz 1 [11] p regulär. Sonst gilt $(p : p_0)_r = (p : p_0)_l = p$ wegen Hilfssatzes 1. Wir bezeichnen die Rechts- bzw. Linksordnung von p_0 mit v_r bzw. v_l , so gilt $v_r p \subseteq v$, denn $p v_r \subseteq p_0 v_r = p_0 \subseteq v$, also $v_r \subseteq p^{-1}$, daher $v_r p \subseteq p^{-1} p \subseteq v$. Andererseits $p \supseteq p_0 p = p_0 v_r \cdot p = p_0 \cdot v_r p$, und $v_r p \subseteq p$ wegen der Voraussetzungen, also $v_r p = p$, und $v_r = v$, ebenso $v_l = v$, also ist p_0 ein Verengungs- und zugleich Eigenideal, und folglich ein reguläres Ideal. Wir setzen $v^* p v^* = v^* p_0 v^* = \mathfrak{P}$, dann ist \mathfrak{P} ein reguläres Ideal von v^* . Dann nach Satz 19 [4] gilt $p = p_1 \cdots p_r a_0$, d.i. $p_1 \cdots p_r a_0 \equiv o(p)$, wo p_1, \dots, p_r reguläre Primideale sind und a_0 ein zweiseitiges Ideal mit $a_0 \supseteq \mathfrak{f}^p$ ist. Ist $p_i \equiv o(p)$, so ist p regulär. Ist andererseits $a_0 \equiv o(p)$, so folgt $p = a_0$, da ersichtlich $a_0 \supseteq p$ ist, daraus folgt, dass $\mathfrak{P} = v^* p v^* = v^* a_0 v^* \supseteq \mathfrak{f}^p$, was unmöglich ist, da \mathfrak{P} regulär ist.

SATZ 2. *Ist a ein zweiseitiges v -Ideal mit $(a, \mathfrak{f}_i) = v$, so ist $(a, \mathfrak{f}_k) = v$, d.h. die Regularität des Ideals von v ist unabhängig von den v umfassenden Maximalordnungen.*

Beweis. Es sei p ein Primideal von v . Nach Satz 1 ist p dann und nur dann $(p, \mathfrak{f}_i) = v$, wenn p ein Eigenideal ist, und die letzte Eigenschaft ist unabhängig von den Maximalordnungen, also $(p, \mathfrak{f}_k) = v$, d.h. der Satz ist richtig für Primideale. Ist a ein zweiseitiges v -Ideal mit $(a, \mathfrak{f}_i) = v$, so ist $a = p \mathfrak{f}_1 \cdots p \mathfrak{f}_r$, $(p_j, \mathfrak{f}_i) = v$, also $(p_j, \mathfrak{f}_k) = v$, daher $(a, \mathfrak{f}_k) = v$.

DEFINITION. Die Menge $\mathfrak{f}^{ik} = \{x \in S \mid v_i^* x v_k^* \subseteq v\}$ ist ein $v_i^* \cdot v_k^*$ -Ideal, und heisst der Führer von v hinsichtlich v_i^* und v_k^* .

HILFSSATZ 2. *Ist \mathfrak{A} ein in v enthaltenes maximales normales Ideal, dessen Links- bzw. Rechtsordnung v_i^* bzw. v_k^* ist, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{f}_i^{(v)} = \mathfrak{f}^{v\mu} = \mathfrak{f}_r^{(\mu)}$, wo $\mathfrak{f}_i^{(v)}$ bzw. $\mathfrak{f}_r^{(\mu)}$ der Links- bzw. Rechtsführer⁴⁾ von v_i^* bzw. v_k^* bedeutet.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{f}_i^{(v)} = \{x \in S \mid v_i^* x \subseteq v\}$, und $\mathfrak{f}_i^{(v)}$ ist ein normales Ideal, also $\mathfrak{A} = \mathfrak{f}_i^{(v)}$, ebenso $\mathfrak{A} = \mathfrak{f}_r^{(\mu)}$. Offenbar ist $\mathfrak{A} \subseteq \{x \in S \mid v_i^* x v_k^* \subseteq v\} = \mathfrak{f}^{v\mu}$, und \mathfrak{A} ist maximal, also $\mathfrak{A} = \mathfrak{f}^{v\mu}$.

SATZ 3. *Ist der Führer \mathfrak{f}^{ik} von v hinsichtlich v_i^* und v_k^* ein in v enthaltene maximales normales Ideal, so sind \mathfrak{f}_i und \mathfrak{f}_k zusammengehörig.*

Beweis. Nach Hilfssatz 2 ist $\mathfrak{f}^{ik} = \mathfrak{f}_i^{(i)} = \mathfrak{f}_r^{(k)}$, und \mathfrak{f}_i ist die Linkshülle von $\mathfrak{f}_i^{(i)} = \mathfrak{f}^{ik}$ wegen Hilfssatzes 1 [12], ebenso ist \mathfrak{f}_k die Rechtshülle von \mathfrak{f}^{ik} .

3) Vgl. § 1 [12].

4) Vgl. § 1 [12].

Wir betrachten die von den zweiseitigen Idealen aus \mathfrak{o}_i^* bzw. \mathfrak{o}_k^* erzeugte Gruppe \mathfrak{G} bzw. \mathfrak{G}' . Sie sind isomorph nach der zusammengehörigen⁵⁾ Transformation: $\mathfrak{G} \simeq \mathfrak{G}'$. Wir bezeichnen diese zusammengehörige Transformation mit $\varphi: \mathfrak{G}^\varphi = \mathfrak{G}'$. Es sei \mathfrak{g}_i bzw. \mathfrak{g}_k die Links- bzw. Rechtshülle von \mathfrak{f}^{ik} , so sind \mathfrak{g}_i und \mathfrak{g}_k zusammengehörig, d.h. $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{G}^{ik-1} \mathfrak{g}_i \mathfrak{G}^{ik}$, wo \mathfrak{G}^{ik} ein beliebiges ganzes $\mathfrak{o}_i^* \cdot \mathfrak{o}_k^*$ -Ideal bedeutet, und $\mathfrak{f}_i \supseteq \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{f}_k \supseteq \mathfrak{g}_k$.

HILFSSATZ 3. *Ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{g}_i) = \mathfrak{o}_i^*$ für ein zweiseitiges \mathfrak{o}_i^* -Ideal \mathfrak{A} , so ist $(\mathfrak{A}^\varphi, \mathfrak{g}_k) = \mathfrak{o}_k^*$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{A}^\varphi = \mathfrak{G}^{ik-1} \mathfrak{A} \mathfrak{G}^{ik}$. Es ist $(\mathfrak{A}^\varphi, \mathfrak{g}_k) = (\mathfrak{G}^{ik-1} \mathfrak{A} \mathfrak{G}^{ik}, \mathfrak{G}^{ik-1} \mathfrak{g}_i \mathfrak{G}^{ik}) = \mathfrak{G}^{ik-1} (\mathfrak{A}, \mathfrak{g}_i) \mathfrak{G}^{ik} = \mathfrak{o}_k^*$.

Es sei \mathfrak{A}_i ein zweiseitiges \mathfrak{o}_i^* -Ideal mit $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{f}_i) = \mathfrak{o}_i^*$, so ist $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ regulär. Wir setzen $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{o}_k^* \mathfrak{a} \mathfrak{o}_k^*$, so folgt nach Satz 2 $(\mathfrak{A}_k, \mathfrak{f}_k) = \mathfrak{o}_k^*$, und wir haben die eindeutige Zuordnung $\mathfrak{A}_i \xrightarrow{\psi} \mathfrak{A}_k: \mathfrak{A}_i^\psi = \mathfrak{A}_k$.

HILFSSATZ 4. *Ist \mathfrak{A}_i ein zweiseitiges \mathfrak{o}_i^* -Ideal mit $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{g}_i) = \mathfrak{o}_i^*$, so ist $\mathfrak{A}_i^\varphi = \mathfrak{A}_i^\psi$.*

Beweis. Es sei \mathfrak{P}_i ein Primideal von \mathfrak{o}_i^* mit $(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{g}_i) = \mathfrak{o}_i^*$, also $(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{f}_i) = \mathfrak{o}_i^*$, d.h. \mathfrak{P}_i ist regulär, also auch $\mathfrak{G}^{ik-1} \mathfrak{P}_i \mathfrak{G}^{ik}$ regulär, und $(\mathfrak{G}^{ik-1} \mathfrak{P}_i \mathfrak{G}^{ik}, \mathfrak{g}_k) = \mathfrak{o}_k^*$ wegen Hilfssatzes 3, daher $\mathfrak{G}^{ik-1} \mathfrak{P}_i \mathfrak{G}^{ik} \cap \mathfrak{o}$ ist ein reguläres Primideal von \mathfrak{o} und teilerfremd mit \mathfrak{g}_k . Setzt man $\mathfrak{P}_i \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}$, so gilt $\mathfrak{G}^{ik-1} \mathfrak{P}_i \mathfrak{G}^{ik} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{f}_i^{ik-1} \mathfrak{P}_i \mathfrak{f}_i^{ik} \cap \mathfrak{o} \supseteq \mathfrak{p} \mathfrak{f}_i^{ik} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p} \mathfrak{f}_i^{ik} \supseteq \mathfrak{p} \mathfrak{g}_k$, und $\mathfrak{g}_k \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{f}_i^{ik-1} \mathfrak{P}_i \mathfrak{f}_i^{ik} \cap \mathfrak{o}}$, also $\mathfrak{p} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{f}_i^{ik-1} \mathfrak{P}_i \mathfrak{f}_i^{ik} \cap \mathfrak{o}}$, also folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{f}_i^{ik-1} \mathfrak{P}_i \mathfrak{f}_i^{ik} \cap \mathfrak{o}$, da \mathfrak{p} teilerlos ist. Weil \mathfrak{p} , $\mathfrak{f}_i^{ik-1} \mathfrak{P}_i \mathfrak{f}_i^{ik}$ regulär sind, $\mathfrak{p} \mathfrak{o}_k^* = \mathfrak{o}_k^* \mathfrak{p} = \mathfrak{G}^{ik-1} \mathfrak{P}_i \mathfrak{G}^{ik}$, also $\mathfrak{P}_i^\varphi = \mathfrak{P}_i^\psi$.

HILFSSATZ 5. *Die Anzahl der verschiedenen Primteiler von \mathfrak{f}_i bzw. \mathfrak{f}_k sind einander gleich.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_\rho$ die verschiedenen Primteiler von \mathfrak{g}_i . Wir bezeichnen die von den zweiseitigen Idealen aus \mathfrak{o}_i^* erzeugte Gruppe mit \mathfrak{G} und die Gruppe von zu \mathfrak{g}_i teilerfremden Idealen erzeugte Untergruppe mit G . Dann ist $\mathfrak{G} = (\mathfrak{P}_1) \times (\mathfrak{P}_2) \times \dots \times (\mathfrak{P}_\rho) \times G$, wobei (\mathfrak{P}_i) die von \mathfrak{P}_i erzeugte zyklische Gruppe bedeutet. Also haben wir $\mathfrak{G}^\varphi = (\mathfrak{P}_1^\varphi) \times \dots \times (\mathfrak{P}_\rho^\varphi) \times G^\varphi$. Andererseits φ und ψ stimmen in G überein wegen Hilfssatzes 4, daraus folgt die Behauptung.

HILFSSATZ 6. *Es sei $\mathfrak{f}^{ik} = \mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_\rho \mathfrak{a}_0$, wobei $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_\rho$ reguläre Primideale von \mathfrak{o} sind und \mathfrak{a}_0 einen Teiler einer Potenz von \mathfrak{f}_i bedeutet: $\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{f}_i^\nu$, $\nu \geq 1$. Dann ist die Linkshülle \mathfrak{g}_i von \mathfrak{f}^{ik} gleich $\mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_\rho \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{D}_1 \dots \mathfrak{D}_\rho \mathfrak{G}_0$, wobei \mathfrak{G}_0 die Linkshülle von $\mathfrak{o}_i^* \mathfrak{a}_0$ bedeutet, und $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{o}_i^* \mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_i \mathfrak{o}_i^*$.*

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, dass $\mathfrak{f}^{ik} = \mathfrak{o}_i^* \mathfrak{f}^{ik} = \mathfrak{o}_i^* \mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_\rho \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{D}_1 \dots \mathfrak{D}_\rho \mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{o}_i^* \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{f}_i^\nu$. Es sei \mathfrak{G}_0 die Linkshülle von \mathfrak{A}_0 , so ist $\mathfrak{G}_0 \supseteq \mathfrak{f}_i^\nu$, also $(\mathfrak{D}_1 \dots \mathfrak{D}_\rho, \mathfrak{G}_0)$

5) Vgl. s. 17 [2].

$=v_i^*$. Es ist $\mathfrak{Q}_1 \cdots \mathfrak{Q}_\rho \cap \mathfrak{A}_0 \supseteq \mathfrak{Q}_1 \cdots \mathfrak{Q}_\rho \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{f}^{ik} \supseteq \mathfrak{Q}_1 \cdots \mathfrak{Q}_\rho \mathfrak{C}_0$. Andererseits ist $\mathfrak{Q}_1 \cdots \mathfrak{Q}_\rho \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{Q}_1 \cdots \mathfrak{Q}_\rho \cap \mathfrak{C}_0$ die Linkshülle von $\mathfrak{Q}_1 \cdots \mathfrak{Q}_\rho \cap \mathfrak{A}_0$, also $\mathfrak{Q}_1 \cdots \mathfrak{Q}_\rho \mathfrak{C}_0$ ist die Linkshülle von \mathfrak{f}^{ik} , d.h. $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{Q}_1 \cdots \mathfrak{Q}_\rho \mathfrak{C}_0$.

SATZ 4. *Alle verschiedene Primteiler des Führers \mathfrak{f}_i bzw. \mathfrak{f}_k sind paarweise zusammengehörig.*

Beweis. Nach Satz 19 [4] folgt, dass $\mathfrak{f}_k = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r \mathfrak{f}_0$, $\mathfrak{f}_0 \supseteq \mathfrak{f}_i^2$, wobei \mathfrak{f}_0 ein zweiseitiges v -Ideal ist und $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ reguläre Primideale sind. Wäre $r \neq 0$, so würde z.B. $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{f}_k) = v$, andererseits $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{f}_k) = \mathfrak{p}_1 \subset v$, es ergäbe sich also ein Widerspruch. Daher haben wir $\mathfrak{f}_k = \mathfrak{f}_0 \supseteq \mathfrak{f}_i^2$. Also gibt es zwei ganzes normales Ideal \mathfrak{C}^{ik} , \mathfrak{D}^{ki} , so dass $\mathfrak{f}_i^2 = \mathfrak{C}^{ik} \mathfrak{f}_k \mathfrak{D}^{ki}$. Es sei nun $\mathfrak{f}_k = \mathfrak{P}'_1 \cdots \mathfrak{P}'_s$, wo $\mathfrak{P}'_1, \dots, \mathfrak{P}'_s$ die Primideale von v_k^* sind, so folgt $\mathfrak{f}_i^2 = \mathfrak{C}^{ik} \mathfrak{P}'_1 \cdots \mathfrak{P}'_s \mathfrak{D}^{ki} = \mathfrak{C}^{ik} \mathfrak{P}'_1 \mathfrak{C}^{ik-1} \cdot \mathfrak{C}^{ik} \mathfrak{P}'_2 \mathfrak{C}^{ik-1} \cdots \mathfrak{C}^{ik} \mathfrak{P}'_s \mathfrak{C}^{ik-1} \cdot \mathfrak{C}^{ik} \mathfrak{D}^{ki}$, also $\mathfrak{C}^{ik} \mathfrak{D}^{ki} = v_i^*$ oder gibt es kein Primteiler von $\mathfrak{C}^{ik} \mathfrak{D}^{ki}$ ausser $\mathfrak{C}^{ik} \mathfrak{P}'_1 \mathfrak{C}^{ik-1}, \dots, \mathfrak{C}^{ik} \mathfrak{P}'_s \mathfrak{C}^{ik-1}$ wegen Hilfssatzes 5.

Nach Satz 4 gehen die regulären Ideale bzw. Primteiler des Führers \mathfrak{f}_i durch die zusammengehörige Transformation in die regulären Ideale bzw. Primteiler des Führers \mathfrak{f}_k über.

SATZ 5. *Die Menge der verschiedenen Primteiler des Führers \mathfrak{f}_i stimmt mit der Menge der verschiedenen Primteiler von \mathfrak{g}_i überein. Also für beliebige reguläre Ideale gilt $\varphi = \psi$.*

Beweis. Nach Satz 19 [4] ergibt sich, dass $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_\rho \supseteq \mathfrak{f}^{ik} = \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_\rho \mathfrak{a}_0 = v_i^* \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_\rho \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{Q}_1 \cdots \mathfrak{Q}_\rho \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_\rho \mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{f}_i^2$, $\mathfrak{A}_0 = v_i^* \mathfrak{a}_0$, wobei $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_\rho$ die regulären Primideale bedeuten, also $v \supseteq \mathfrak{A}_0$, weil $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_\rho$ ein Eigenideal von v ist. \mathfrak{A}_0 ist ein normales Ideal. Es sei v_k^* die Rechtsordnung von \mathfrak{A}_0 , und wir bezeichnen \mathfrak{A}_0 mit \mathfrak{A}_{ik} , d.h. $v \supseteq \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_{ik}$, also $\mathfrak{f}^{ik} \supseteq \mathfrak{A}_{ik}$, da \mathfrak{f}^{ik} das maximale in v enthaltene $v_i^* \cdot v_k^*$ -Ideal ist. Offenbar ist $\mathfrak{f}^{ik} \subseteq \mathfrak{A}_{ik} = \mathfrak{A}_0$, also $\mathfrak{A}_{ik} = \mathfrak{f}^{ik}$, d.h. \mathfrak{f}^{ik} besitzt kein reguläres Primteiler. Es ist also $\mathfrak{f}^{ik} = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{f}_i^2$. Andererseits nach Hilfssatz 6 ist $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{C}_0 \supseteq \mathfrak{f}_i^2$, also sind alle Primteiler von \mathfrak{g}_i Primteiler von \mathfrak{f}_i . Die Umkehrung ist klar.

BEMERKUNGEN. 1) Es sei \mathfrak{A}_{ik} ein ganzes $v_i^* \cdot v_k^*$ -Ideal, und \mathfrak{G}_i bzw. \mathfrak{G}_k die Links- bzw. Rechtshülle von \mathfrak{A}_{ik} . Wir nehmen $(\mathfrak{A}_{ik}, \mathfrak{f}_i) = v_i^*$ an, d.h. $(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{f}_i) = v_i^*$, so folgt $v = (\mathfrak{A}_{ik}, \mathfrak{f}_i) \cap v = (\mathfrak{A}_{ik} \cap v, \mathfrak{f}_i) = (a, \mathfrak{f}_i)$ wobei $a = \mathfrak{A}_{ik} \cap v$ ist, d.h. a ist regulär. Daraus folgt nach Satz 3 [4] und Satz 2, dass $\mathfrak{A}_{ik} = v_i^* a = a v_k^*$, weil a regulär ist, also $v_i^* = v_k^*$. Daher ergibt sich, dass ganzes $v_i^* \cdot v_k^*$ -Ideal nicht regulär ist.

2) Es ist möglich, dass \mathfrak{f}_i und \mathfrak{f}_k verschiedene Exponenten der Primteiler haben. Es sei K der rationale Zahlkörper, I der Ring der ganzen rationalen Zahlen. Wir betrachten den Matrizesring des Grades 2 über K : $(K)_2 = \begin{pmatrix} K & K \\ K & K \end{pmatrix} = S$. Dann ist $\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} = (I)_2 = v_i^*$ eine die Asanoschen Bedingungen befriedigende Maximalordnung von $(K)_2$. Es sei $\lambda \neq 0$ ein Element von I , so ist $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ein reguläres

Element von $(K)_2$ und $\mathfrak{G}_{ik} = \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ein ganzes normales Ideal, dessen Rechtsordnung wir mit \mathfrak{o}_k^* bezeichnen. Das inverse Ideal des Ideals \mathfrak{G}_{ik} ist $\mathfrak{G}_{ik}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{G}_{ik}^{-1} \mathfrak{o}_k^* \mathfrak{G}_{ik} = \mathfrak{o}_k^* = \begin{pmatrix} I & \lambda^{-1} I \\ \lambda I & I \end{pmatrix}$. Ein beliebiges Ideal von \mathfrak{o}_k^* hat die Form $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, wobei a ein von der rationalen ganzen Zahl a erzeugtes Hauptideal bedeutet, also hat ein beliebiges Ideal von \mathfrak{o}_k^* die Gestalt $\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \lambda^{-1} a \\ \lambda a & a \end{pmatrix}$. Ist λ eine Primzahl p , so ist $\begin{pmatrix} p & p \\ p & p \end{pmatrix}$ ein Primideal von \mathfrak{o}_k^* , und $\left(\begin{pmatrix} p & p \\ p & p \end{pmatrix}, I \right) = \mathfrak{o}$ ist eine Ordnung von $(K)_2$, deren Führer hinsichtlich \mathfrak{o}_k^* $\begin{pmatrix} p & p \\ p & p \end{pmatrix}$ ist: $\mathfrak{f}_i = \begin{pmatrix} p & p \\ p & p \end{pmatrix}$. Offenbar ist $\mathfrak{o}_k^* = \begin{pmatrix} I & p^{-1} \\ p & I \end{pmatrix} \supseteq \mathfrak{o}$. Nach Satz 4 ist der Führer von \mathfrak{o} hinsichtlich \mathfrak{o}_k^* eine Potenz des Primideals von \mathfrak{o}_k^* : $\mathfrak{f}_k = \mathfrak{P}^v$, $\mathfrak{P}^v = \mathfrak{f}_i^v$. Aber $\mathfrak{P}^v = \mathfrak{f}_i^v = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & p \\ p & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1 \\ p^2 & p \end{pmatrix} \not\subseteq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{P}^{v^2} = \begin{pmatrix} p^2 & p \\ p^3 & p \end{pmatrix} \subset \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{f}_k = \mathfrak{P}^{v^2}$. Ferner in diesem Beispiel $\mathfrak{o}_i^* \mathfrak{f}_i^{\rho} \mathfrak{o}_k^* = \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{\rho} & p^{\rho} \\ p^{\rho} & p^{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & p^{-1} \\ p & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{\rho} & p^{\rho-1} \\ p^{\rho} & p^{\rho-1} \end{pmatrix} \subset \mathfrak{o}$ für $\rho \geq 2$, d.h. $\mathfrak{f}_i^2 \subseteq \mathfrak{f}_i^k$ nach Definition von \mathfrak{f}_i^k , also $\mathfrak{f}_i^2 \subseteq \mathfrak{g}_i \subseteq \mathfrak{f}_i$. Andererseits $\mathfrak{f}_i \not\subseteq \mathfrak{f}_i^k$, also $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{f}_i^2$. Das gibt ein Beispiel, in denen die Exponenten von \mathfrak{f}_i und \mathfrak{g}_i verschieden sind.

§ 2. Zerlegung des Ideals durch Primär Ideale.

Es sei R ein Schieferring mit Einselement 1. Nach der Tominagaschen Definition ist ein zweiseitiges Ideal \mathfrak{q} von R dann und nur dann rechtsseitiges Primärideal (kurz r -Primärideal), wenn $\mathfrak{q}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{q}$ für ein beliebiges zweiseitiges Ideal \mathfrak{a} von R mit $\mathfrak{a} \not\subseteq r(\mathfrak{q})$, wobei $\mathfrak{q}\mathfrak{a}^{-1} = \{y \in R \mid y\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}\}$ und $r(\mathfrak{q})$ den Durchschnitt der allen (minimalen) Primteiler des Ideals \mathfrak{q} bedeutet. Ein r - und zugleich l -Primärideal heisst ein Primärideal. In unseren Fall stimmt diese Definition mit der Murdochschen Definition [9] überein.

Im folgenden setzen wir voraus, dass S ein Schieferring mit Einselement 1 ist, \mathfrak{o} eine Ordnung von S , und \mathfrak{o}^* eine \mathfrak{o} umfassende A_1, A_2, A_3 ⁶⁾ befriedigende mit \mathfrak{o} äquivalente Maximalordnung von S . Ferner nehmen wir an, dass für \mathfrak{o} die folgenden Bedingungen gelten:

B_2 : Es gilt die Minimalbedingungen für in \mathfrak{o} enthaltene und ein festes zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal umfassende linksseitige (rechtsseitige) \mathfrak{o} -Ideale.

B_3' : Jedes Primideal von \mathfrak{o} ist teilerlos.

HILFSSATZ 7. Die Anzahl der verschiedenen Primteiler eines in \mathfrak{o} enthaltenen zweiseitigen \mathfrak{o} -Ideal \mathfrak{a} ist endlich.

Beweis. Wäre es $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots$ die Primteiler von \mathfrak{a} , so würde $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \supset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{p}_3 \supset \dots \supseteq \mathfrak{a}$.

6) A_3' bedeutet, dass jedes Primideal von \mathfrak{o} teilerlos ist.

H. Tominaga definierte ein s - r -Primärideal q als ein r -Primärideal, dessen Radikal $r(q)$ nilpotent modulo q ist, und ein s - l -Primärideal in gleicher Weise. Ein s - l - und zugleich s - r -Primärideal heisst ein s -Primärideal.

HILFSSATZ 8. *Es sei q ein zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal. Der Restklassenring \mathfrak{o}/q ist dann und nur dann ein primärer Ring, wenn q ein s - r - (s - l -) Primärideal ist, also auch ist q ein Primärideal.*

Beweis. Es sei \mathfrak{o}/q ein primärer Ring, dessen Radikal \mathfrak{p}/q ist. Nach der Definition ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ein einfacher Ring und $\mathfrak{p}=r(q)$ nilpotent modulo q : $\mathfrak{p}^p \subseteq q$. Wir setzen $\{y \in \mathfrak{o} \mid y\mathfrak{a} \subseteq q\} = \mathfrak{b}$ für $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{b}\mathfrak{a} \subseteq q$, $\mathfrak{b}q \subseteq q$, also $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}(\mathfrak{a}, q) \subseteq q$, denn $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}) = \mathfrak{o}$, also $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^p) = \mathfrak{o}$ und $(\mathfrak{a}, q) = \mathfrak{o}$. Andererseits $q \subseteq \mathfrak{b}$, daher $\mathfrak{b} = q$. Ist umgekehrt q ein s - r -Primärideal, so gilt für das Radikal \mathfrak{p} von q $\mathfrak{p}^p \subseteq q$, wobei nach Satz 1 [11] ist \mathfrak{p} ein Primideal. Bezeichnen wir $\mathfrak{o}/q = \bar{\mathfrak{o}}$, so ist $\bar{\mathfrak{o}}/\bar{\mathfrak{p}} \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ein einfacher Ring und $\bar{\mathfrak{p}}$ nilpotent, d.h. \mathfrak{o}/q ist ein primärer Ring.

HILFSSATZ 9. *In unseren Fall ist r -Primärideal ein s - r -Primärideal, also auch ein Primärideal.*

Beweis. Es sei q ein r -Primärideal, so ist das Radikal \mathfrak{p} von q ein Primideal (Theorem 11 [9]), also teilerlos. Wir schliessen, dass \mathfrak{o}/q ein primärer Ring ist, also q ein s - r -Primärideal.

SATZ 6. *Ein in \mathfrak{o} enthaltenes zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal α lässt sich dann und nur dann als ein Durchschnitt von endlich vielen Primärideal darstellen, wenn alle Primteiler von α modulo α miteinander kommutativ sind.*

Beweis. Es sei alle Primteiler von α modulo α miteinander kommutativ, dann ist der halbprimärer Ring \mathfrak{o}/α eine direkte Summe von primären Ringen $\bar{\mathfrak{o}}_i: \mathfrak{o}/\alpha = \bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}_1 + \dots + \bar{\mathfrak{o}}_s$. Setzen wir $\bar{n}_i = \bar{\mathfrak{o}}_1 + \dots + \bar{\mathfrak{o}}_{i-1} + \bar{\mathfrak{o}}_{i+1} + \dots + \bar{\mathfrak{o}}_s$ ($i=1, \dots, s$), und bezeichnen das Urbild von \bar{n}_i mit n_i , so ist $\mathfrak{o}/n_i \cong \bar{\mathfrak{o}}/\bar{n}_i \cong \bar{\mathfrak{o}}_i$ ein primärer Ring, d.h. n_i ein Primärideal von \mathfrak{o} ist, und $\bar{\mathfrak{o}} = \bigcap_{i=1}^s \bar{n}_i$, also $\alpha = \bigcap_{i=1}^s n_i$. Ist umgekehrt $\alpha = q_1 \cap \dots \cap q_m$, wobei q_i ($i=1, \dots, m$) Primärideale sind, so ist $r(q_i) = \mathfrak{p}_i$ und \mathfrak{p}_i ist nilpotent modulo q_i , also $(q_i, q_j) = \mathfrak{o}$ für $i \neq j$. Dann erhalten wir $\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}_1 + \dots + \bar{\mathfrak{o}}_m$, $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\alpha$, $\bar{\mathfrak{o}}_i \cong \mathfrak{o}/q_i$, und alle Primideale des Ringes $\bar{\mathfrak{o}}$ sind gegeben durch $\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{o}}_1 + \dots + \bar{\mathfrak{o}}_{i-1} + \bar{\mathfrak{o}}_{i+1} + \dots + \bar{\mathfrak{o}}_m$ ($i=1, \dots, m$), also miteinander kommutativ sind.

HILFSSATZ 10. *Alle in \mathfrak{o} enthaltene zweiseitige \mathfrak{o} -Ideale lässt sich dann und nur dann als ein Durchschnitt von endlich vielen Primärideal darstellen, wenn alle Primteiler von \mathfrak{f} für beliebige positive ganze rationale Zahl ρ modulo \mathfrak{f}^ρ miteinander kommutativ sind.*

Beweis. Nach Satz 19 [4] ist ein Primteiler von \mathfrak{f} mit regulärem Primideal kommutativ, und reguläre Primideale sind miteinander kommutativ. Für ein in

\mathfrak{o} enthaltenes zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal \mathfrak{a} gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{f}^p$, wobei \mathfrak{a}_0 ein in \mathfrak{o} enthaltenes zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal ist und \mathfrak{p}_i ($i=1, \dots, \nu$) reguläre Primideale sind. Also haben wir $\mathfrak{o}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{p}_1 + \cdots + \mathfrak{o}/\mathfrak{p}_\nu + \mathfrak{o}/\mathfrak{a}_0$. Um die Kommutativität des Primteilers von \mathfrak{a} zu zeigen, genügt es nur die Primteiler von \mathfrak{a}_0 zu betrachten. Es seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ Primteiler des Ideals \mathfrak{a} , so dass $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{a}_0$ ist. Ist $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{p}_1 + \cdots + \mathfrak{o}/\mathfrak{p}_\nu + \mathfrak{p}/\mathfrak{a}_0$, $\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{p}_1 + \cdots + \mathfrak{o}/\mathfrak{p}_\nu + \mathfrak{q}/\mathfrak{a}_0$, also $\bar{\mathfrak{p}}\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{q}}\bar{\mathfrak{p}}$ dann und nur dann, wenn $(\mathfrak{p}\mathfrak{q}, \mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{q}\mathfrak{p}, \mathfrak{a}_0)$ ist. Es sei nun $(\mathfrak{p}\mathfrak{q}, \mathfrak{f}^\nu) = (\mathfrak{q}\mathfrak{p}, \mathfrak{f}^\nu)$ für beliebige positive ganze rationale Zahl ν , so ist $(\mathfrak{p}\mathfrak{q}, \mathfrak{f}^\nu, \mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{q}\mathfrak{p}, \mathfrak{f}^\nu, \mathfrak{a}_0)$. Wählen wir $\nu = \rho$, so ist $(\mathfrak{p}\mathfrak{q}, \mathfrak{a}_0) = (\mathfrak{q}\mathfrak{p}, \mathfrak{a}_0)$ denn $\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{f}^\rho$ ist, und nach Satz 6 ist \mathfrak{a} als ein Durchschnitt von Primärideal darstellbar. Die Umkehrung ist klar.

SATZ 7. Die folgenden Bedingungen sind einander äquivalent:

- 1) Jedes in \mathfrak{o} enthaltene zweiseitige \mathfrak{o} -Ideal lässt sich als ein Durchschnitt von endlich vielen Primärideal darstellen.
- 2) Alle Primideale des Ringes \mathfrak{o} sind kommutativ.
- 3) Jedes Primteiler von \mathfrak{f} sind miteinander kommutativ.
- 4) Das Ideal \mathfrak{f}^2 ist als ein Durchschnitt von endlich vielen Primärideal darstellbar.

Beweis. 2) \Leftrightarrow 3) ist klar. Nach Hilfssatz 10 gilt 2) \rightarrow 1). Wir zeigen 1) \rightarrow 2). Wir betrachten \mathfrak{f}^2 . Es seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ Primteiler von \mathfrak{f} , so ist nach Satz 6 $(\mathfrak{p}\mathfrak{q}, \mathfrak{f}^2) = (\mathfrak{q}\mathfrak{p}, \mathfrak{f}^2)$, also $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\mathfrak{p}$, denn $\mathfrak{p}\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{f}^2$, $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{f}^2$, da $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{f}$, $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{f}$ ist. 3) \Leftrightarrow 4) folgt sofort nach Satz 6.

SATZ 8. Ein Primideal \mathfrak{q} ist dann und nur dann ein Primärideal, wenn es kein Primteiler von \mathfrak{q} ausser dem adjungierten Ideal⁷⁾ gibt.

Beweis. Es sei \mathfrak{q} ein Primideal, das nur ein Primteiler \mathfrak{p} besitzt, so ist $r(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, und $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ist ein einfacher Ring, ferner das Radikal $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{o}/\mathfrak{q}$ nilpotent, also $\mathfrak{o}/\mathfrak{q}$ ein primärer Ring, d.h. \mathfrak{q} ist ein Primärideal. Die Umkehrung ist klar.

§ 3. Bemerkung über die Zerlegung des Ideals durch Primideal.

Es sei \mathfrak{o} ein Schieferring mit Einselement 1, der den Teilerkettensatz für zweiseitige Ideale erfüllt.

HILFSSATZ 11. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zweiseitige Ideale mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$, und $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{o}$ sei ein Primideal. Ist $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, so ist entweder $(\mathfrak{q}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$ oder $(\mathfrak{q}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$, und es kann nicht entstehen, dass $(\mathfrak{q}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$ und zugleich $(\mathfrak{q}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$ ist.

Beweis. Es ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{a} + \mathfrak{o}/\mathfrak{b}$. Wir setzen $\mathfrak{o}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{o}}$, $\mathfrak{o}/\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{o}}_1$ and $\mathfrak{o}/\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{o}}_2$, so

7) Im allgemeinen für ein beliebiges zweiseitiges Ideal \mathfrak{a} aus \mathfrak{o} gilt, $\mathfrak{a} \subseteq \{y \in \mathfrak{o} \mid y\mathfrak{o}x \subseteq \mathfrak{a}\} = \mathfrak{a}x^{-1}$. Ein Element x aus \mathfrak{o} wird genannt n.r.p. zu \mathfrak{a} bzw. r.p. zu \mathfrak{a} , je nachdem $\mathfrak{a}x^{-1} \supseteq \mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a}x^{-1} = \mathfrak{a}$ ist. \mathfrak{a} heisst ein Primideal wie oben erwähnt, wenn $\{x \in \mathfrak{o} \mid x \text{ ist n.r.p. zu } \mathfrak{a}\}$ ein Ideal bildet, welches ein adjungiertes Ideal von \mathfrak{a} heisst.

gilt $q/a \cap b = \bar{q} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$, $\bar{q}_1 \subseteq \bar{v}_1$, $\bar{q}_2 \subseteq \bar{v}_2$. Nach der Definition von Primalideal bildet die Gesamtheit der Elemente x , für die es ein Element y mit $yx \subseteq q$, $y \notin q$ gibt, ein Ideal, das wir adjungiertes Ideal von q nennen. Wir nehmen jetzt an, dass $(q, a) \neq v$ und zugleich $(q, b) \neq v$, so folgt $\bar{v}_1 \supset \bar{q}_1$ und $\bar{v}_2 \supset \bar{q}_2$. Für beliebige Elemente \bar{x}_1 aus \bar{v}_1 und \bar{y} aus \bar{v}_2 mit $\bar{y} \notin \bar{q}_2$ gilt $\bar{y}\bar{x}_1 \subseteq \bar{y}\bar{v}_1 = \bar{v} \subseteq \bar{q}$ und $\bar{y} \notin \bar{q}$, also wird \bar{x}_1 in das adjungierte Ideal von \bar{q} enthalten, d.h. das adjungierte Ideal von \bar{q} umfasst \bar{v}_1 , und ebenso \bar{v}_2 , also enthält $\bar{1}$. Ist andererseits $\bar{y}\bar{v}_1 \subseteq \bar{q}$, so folgt $\bar{y} \in \bar{q}$, d.h. $\bar{1}$ ist nicht in das adjungierte Ideal von \bar{q} enthalten. Das ist ein Widerspruch. Nun nehmen wir an, dass $(q, a) = v$ und zugleich $(q, b) = v$, so folgt $\bar{q}_1 = \bar{v}_1$, $\bar{q}_2 = \bar{v}_2$, also $\bar{q} = \bar{v}$ entgegen der Voraussetzung.

Nach Satz 7 [6] lässt sich jedes zweiseitige Ideal a als eine kurze reduzierte Darstellung⁸⁾ von endlich vielen Primalidealen darstellen: $a = q_1 \cap \dots \cap q_m$, wo q_i ein Primalideal ist.

SATZ 9. *Es sei a ein zweiseitiges Ideal von v und*

$$a = q_1 \cap \dots \cap q_m \quad q_i \subset v \quad (1)$$

sei eine beliebige Darstellung von a durch Primalideale. Wir bezeichnen $q_i \sim q_j$, wenn es eine Kette von den in (1) auftretenden Primalidealen gibt, so dass die aneinander stehenden Primalideale mindestens ein Primteiler gemein haben. Durch diese Äquivalenzrelation entstehen die Klasseneinteilung der in (1) auftretenden Primalideale, und der Durchschnitt aller Primalideale, die zur einzelnen Klasse gehört, ist direkt unzerlegbar.

Beweis. Wir setzen voraus, dass q_1, \dots, q_a eine Klasse bilden. Es sei $q_1 \cap \dots \cap q_a = a \cap b$, $(a, b) = v$, $a \neq v$, $b \neq v$, d.h. direkt zerlegbar, so ist $q_i \supseteq a \cap b$, $i = 1, \dots, a$, also nach Hilfssatz 11 $(q_i, a) = v$ oder $(q_i, b) = v$. Mithin können wir annehmen, dass $(q_1, a) = (q_2, a) = \dots = (q_n, a) = v$ und $(q_{n+1}, b) = (q_{n+2}, b) = \dots = (q_a, b) = v$, wo $1 \leq n < a$ ist. Ersichtlich haben $q_1 \cap \dots \cap q_n$ und $q_{n+1} \cap \dots \cap q_a$ mindestens einen gemeinsamen Primteiler nach der Definition von Klasseneinteilung. Nun setzen wir $q_1 \cap \dots \cap q_n = c$, so ist $(c, a) = v$, also $a \notin p$ für beliebigen Primteiler p von c . Andererseits gilt $a \cap b \subseteq a \cap b \subseteq c \subseteq p$, also $b \subseteq p$, d.h. ein beliebiger Primteiler von c ist ein Primteiler von b . Ebenso ergibt sich, dass aller Primteiler von c' Primteiler von a sind, falls wir $c' = q_{n+1} \cap \dots \cap q_a$ setzen; aber $(a, b) = v$, also haben c und c' keinen Primteiler gemein, was ein Widerspruch ist.

ZUSATZ 1. *Jedes Primalideal ist direkt unzerlegbar.*

ZUSATZ 2. *Wenn die Darstellung (1) eine kurze reduzierte Darstellung ist, so sind die Anzahl der Klassen und die Mengen der zur einzelnen Klasse gehörenden adjungierten Idealen eindeutig bestimmt.*

8) Eine Darstellung $q_1 \cap \dots \cap q_r$ durch Primalideale "kurz" heisst, wenn für $i \neq j$ $q_i \cap q_j$ nicht Primalideale sind; sie heisst "reduziert", falls jedes q_i nicht durch echte Teiler ersetzt werden kann.

§ 4. \mathfrak{f} -Komponente.

In diesem Paragraphen machen wir die analoge Überlegungen wie § 10 [2]. Es sei S ein Schieferring mit Einselement 1 , \mathfrak{o} eine Ordnung von S , und \mathfrak{o}^* eine \mathfrak{o} umfassende, mit \mathfrak{o} äquivalente, A_3, A_2, A_3 befriedigende Maximalordnung von S . Es sei $\mathfrak{f} = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r$ in \mathfrak{o}^* , wo \mathfrak{P}_i ein Primideal von \mathfrak{o}^* bedeutet. Es sei \mathfrak{a} ein links- (rechts-) seitiges \mathfrak{o} -Ideal. Wir bezeichnen die Gesamtheit der Elemente c von S , so dass $nc \subseteq \mathfrak{a}$ ($cn \subseteq \mathfrak{a}$) gilt für irgendein zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal n mit $(n, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, durch $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}$, und wir nennen $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}$ \mathfrak{f} -Komponente von \mathfrak{a} . Ist \mathfrak{a} ein zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal, so bleibt $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}$ unverändert, wenn wir \mathfrak{a} auch als links- oder als rechtsseitiges \mathfrak{o} -Ideal ansehen.

HILFSSATZ 12. $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ ist eine \mathfrak{o} umfassende Ordnung von S . Ist \mathfrak{a} ein links- (rechts-) seitiges \mathfrak{o} -Ideal, so ist $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}$ ein links- (rechts-) seitiges $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ -Ideal und gilt $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} \mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{a} \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$). Insbesondere ist \mathfrak{a} ein zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal, so gilt $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{a} \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} \mathfrak{a}$.

Beweis. Es seien $nc \subseteq \mathfrak{o}$, $n'c' \subseteq \mathfrak{o}$, wo $(n, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ und $(n', \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, so folgt $nn'c'c \subseteq nnc = nc \subseteq \mathfrak{o}$ und $(nn', \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$. Es sei \mathfrak{a} ein linksseitiges \mathfrak{o} -Ideal und $nc \subseteq \mathfrak{a}$, $n'c' \subseteq \mathfrak{a}$, wo $(n, \mathfrak{f}) = (n', \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ ist, so ist $nn'(c+c') \subseteq nn'c' + nn'c \subseteq nc + n'c' \subseteq \mathfrak{a}$, also ist $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}$ ein Modul und $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ ein Ring. Für beliebiges Element c aus $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}$ gilt $nc \subseteq \mathfrak{a}$ für irgendein zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal n mit $(n, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, also $c \in \mathfrak{o}c = n^{-1}nc \subseteq n^{-1}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}\mathfrak{a}$, da $n^{-1}n = \mathfrak{o}$ also $n^{-1} \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ ist. Folglich haben wir $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}} \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}\mathfrak{a}$. Umgekehrt für beliebiges Element ca aus $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}\mathfrak{a}$, wo $c \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ $a \in \mathfrak{a}$, gilt $nc \subseteq \mathfrak{o}$ für irgendein zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal n mit $(n, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, also $nca \subseteq n\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$, also $ca \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}$, d.h. $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}\mathfrak{a}$. Ebenso gilt für das rechtsseitige \mathfrak{o} -Ideal. Nun zeigen wir, dass $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ eine Ordnung ist. Es sei x ein beliebiges Element von S , so gibt es ein reguläres Element $\alpha \in \mathfrak{o}$, so dass $\alpha\alpha x \subseteq \mathfrak{o}$ ist, also $\mathfrak{o}\alpha\alpha x \subseteq \mathfrak{o}$. Da $\mathfrak{o}\alpha\alpha$ ein zweiseitiges Ideal ist, so folgt $\alpha\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}x \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}\alpha\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} \cdot x = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} \cdot \mathfrak{o}\alpha\alpha \cdot x \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$, denn es ist $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} \cdot \mathfrak{o}\alpha\alpha = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} \cdot \mathfrak{o}\alpha\alpha \cdot \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}\alpha\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$, also ist $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ eine Ordnung von S .

HILFSSATZ 13. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ links- (rechts-) seitige \mathfrak{o} -Ideale, so gilt $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})_{\mathfrak{f}} = (\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}, \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}})$, $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zweiseitige \mathfrak{o} -Ideale, so ist $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$.

Beweis. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ linksseitige Ideale, so ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}\mathfrak{a}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}, \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}})$. c sei ein beliebiges Element aus $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$, so gibt es in \mathfrak{o} enthaltene reguläre Ideale n, n' , so dass $nc \subseteq \mathfrak{a}$, $n'c \subseteq \mathfrak{b}$, also $nn'c \subseteq n\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}$, $nn'c \subseteq nc \subseteq \mathfrak{a}$, d.h. $nn'c \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $(nn', \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, demnach $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}} \subseteq (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})_{\mathfrak{f}}$. $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}} \supseteq (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})_{\mathfrak{f}}$ ist klar, also $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})_{\mathfrak{f}}$. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zweiseitige Ideale, so ist $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$.

DEFINITION. Es sei m ein zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal mit $m \subseteq \mathfrak{o}$, und \mathfrak{a} sei ein links- (rechts-) seitiges \mathfrak{o} -Ideal. Wir bezeichnen die Gesamtheit derjenigen Elemente c von S mit $\mathfrak{a}_m^{(l)}$ ($\mathfrak{a}_m^{(r)}$), die $nc \subseteq \mathfrak{a}$ ($cn \subseteq \mathfrak{a}$) genügt für irgendein zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal n mit $(n, m) = \mathfrak{o}$. Ebenso werden $\mathfrak{o}_m^{(l)}$, $\mathfrak{o}_m^{(r)}$ definiert.

HILFSSATZ 14. $\mathfrak{o}_m^{(l)}$ ist ein Schiefordnung von S . Ist \mathfrak{a} ein linksseitiges \mathfrak{o} -Ideal,

so ist $\alpha_m^{(L)}$ linksseitiges $\mathfrak{o}_m^{(L)}$ -Ideal. Ist \mathfrak{b} auch ein linksseitiges \mathfrak{o} -Ideal, so gilt $(\alpha \cap \mathfrak{b})_m^{(L)} = \alpha_m^{(L)} \cap \mathfrak{b}_m^{(L)}$. Wenn α ein in \mathfrak{o} enthaltenes zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal und $m \supseteq \mathfrak{f}$, so ist $\alpha_m^{(L)}$ ein zweiseitiges \mathfrak{o}_f -Ideal. Analog ist es für ein Rechtsideal.

Beweis. $\mathfrak{o}_m^{(L)}$ ist ein Ring und $\mathfrak{o}_m^{(L)} \supseteq \mathfrak{o}$, also eine Schiefordnung. α sei ein linksseitiges \mathfrak{o} -Ideal. Es sei c bzw. d irgendein Element aus $\mathfrak{o}_m^{(L)}$ bzw. $\alpha_m^{(L)}$, so gibt es zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal n, n' mit $(n, m) = (n', m) = \mathfrak{o}$, so dass $nc \subseteq \mathfrak{o}, n'd \subseteq \alpha$, also $n'ncd \subseteq n'nd = n'd \subseteq \alpha$, $(nn', m) = \mathfrak{o}$, d.h. $cd \in \alpha_m^{(L)}$, also $\mathfrak{o}_m^{(L)} \alpha_m^{(L)} \subseteq \alpha_m^{(L)}$. Andererseits gibt es ein reguläres Element λ aus \mathfrak{o} , so dass $\alpha\lambda \subseteq \mathfrak{o}$, also $n'd\lambda \subseteq \alpha\lambda \subseteq \mathfrak{o}$, also $d\lambda \in \mathfrak{o}_m^{(L)}$, d.h. $\alpha_m^{(L)}\lambda \subseteq \mathfrak{o}_m^{(L)}$, daher ist $\alpha_m^{(L)}$ ein linksseitiges $\mathfrak{o}_m^{(L)}$ -Ideal. Es sei α ein zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal und es sei $m \supseteq \mathfrak{f}$. Ersichtlich ist $\alpha_m^{(L)}$ ein linksseitiges \mathfrak{o}_f -Ideal, da $\mathfrak{o}_m^{(L)} \supseteq \mathfrak{o}_f$ ist. Für irgendein c aus $\alpha_m^{(L)}$ und d aus \mathfrak{o}_f , gibt es zweiseitige \mathfrak{o} -Ideale n, n' mit $(n, m) = (n', \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, so dass $nc \subseteq \alpha, n'd \subseteq \mathfrak{o}$, also $n'ncd \subseteq n'nd = n'd \subseteq \mathfrak{o} = \alpha$, $(n'n, m) = \mathfrak{o}$, demnach $cd \in \alpha_m^{(L)}$, also ist $\alpha_m^{(L)}$ ein zweiseitiges \mathfrak{o}_f -Ideal.

HILFSSATZ 15. *Es sei α^* ein in \mathfrak{o}_f enthaltenes links- (rechts-) seitiges \mathfrak{o}_f -Ideal, so ist $\alpha = \alpha^* \cap \mathfrak{o}$ ein links- (rechts-) seitiges \mathfrak{o} -Ideal, und $\alpha^* = \alpha_f$.*

SATZ 10. *Ist α ein in \mathfrak{o} enthaltenes zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal, so ist α dann und nur dann regulär, wenn $\alpha_f = \mathfrak{o}_f$ ist.*

Beweis. Es sei α ein reguläres zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal, so ist $\alpha^{-1} \subseteq \mathfrak{o}_f$, und $1 \in \mathfrak{o} = \alpha^{-1}\alpha \subseteq \mathfrak{o}_f\alpha = \alpha_f$, d.h. $\alpha_f = \mathfrak{o}_f$. Es sei $\alpha_f = \mathfrak{o}_f$, so folgt $1 \in \alpha_f$, d.h. $n \cdot 1 \subseteq \alpha$, $(n, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, also $(\alpha, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$.

SATZ 11. *Ist \mathfrak{l} ein in \mathfrak{o} enthaltenes und eine Potenz von \mathfrak{f} umfassendes linksseitiges \mathfrak{o} -Ideal, so ist $\mathfrak{l}_f \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{l}$. Analog ist es für ein rechtsseitiges \mathfrak{o} -Ideal.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{l} \supseteq \mathfrak{f}^p$ und c sei ein beliebiges Element von $\mathfrak{l}_f \cap \mathfrak{o}$, so gibt es ein reguläres in \mathfrak{o} enthaltenes zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal n , so dass $nc \subseteq \mathfrak{l}$, also gilt $c \in \mathfrak{o} = (n, \mathfrak{f}^p)c = (nc, \mathfrak{f}^p)c \subseteq (\mathfrak{l}, \mathfrak{f}^p) = \mathfrak{l}$, demnach $\mathfrak{l}_f \cap \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{l}$, und schliesslich $\mathfrak{l}_f \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{l}$.

Nach Hilfssatz 13 und Satz 10 folgt sofort:

SATZ 12. *Ist α ein in \mathfrak{o} enthaltenes zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal, so dass $\alpha = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r \alpha_0$, wobei \mathfrak{p}_i reguläre Primideale sind und α_0 ein zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal mit $\alpha_0 \supseteq \mathfrak{f}^p$ bedeutet, so ist $\alpha_f = \alpha_{0f}$.*

Wie Satz 60 [2] wird der folgende Satz bewiesen:

SATZ 13. *Es sei α ein in \mathfrak{o} enthaltenes und eine Potenz von \mathfrak{f} umfassendes zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal, so sind die Ringe \mathfrak{o}_f/α_f und \mathfrak{o}/α isomorph.*

HILFSSATZ 16. *Es seien α, \mathfrak{b} in \mathfrak{o} enthaltene zweiseitige \mathfrak{o} -Ideale und Teiler einer Potenz von \mathfrak{f} , so ist $\alpha \cong \mathfrak{b}$ gleichbedeutend mit $\alpha_f \cong \mathfrak{b}_f$.*

Beweis. Aus $\alpha \supseteq \mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{b} \supseteq \alpha$ folgt $\alpha_f \supseteq \mathfrak{b}_f$ bzw. $\mathfrak{b}_f \supseteq \alpha_f$. Ist umgekehrt $\alpha_f = \mathfrak{b}_f$, so ist nach Satz 11 $\alpha = \alpha_f \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{b}_f \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{b}$.

SATZ 14. *Es sei \mathfrak{p} ein Primteiler von \mathfrak{f} , so ist $\mathfrak{p}_{\mathfrak{f}}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ und $\mathfrak{p}_{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}$. Ist umgekehrt \mathfrak{p}^* ein Primideal von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$, so ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap \mathfrak{o}$ ein Primteiler von \mathfrak{f} und $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}_{\mathfrak{f}}$.*

Beweis. Es sei \mathfrak{p} ein Primteiler von \mathfrak{f} und $\mathfrak{p}_{\mathfrak{f}} \supseteq \alpha_{\mathfrak{f}} \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}} = \alpha_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}} \mathfrak{b}_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}} = (\alpha_{\mathfrak{o}} \mathfrak{b}_{\mathfrak{o}})_{\mathfrak{f}}$, wo $\alpha = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r \alpha_0$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}'_1 \cdots \mathfrak{p}'_s \mathfrak{b}_0$, dabei α_0, \mathfrak{b}_0 Teiler einer Potenz von \mathfrak{f} und $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}'_s$ reguläre Primideale bedeuten. Also nach Hilfssatz 16 $\alpha_0 \mathfrak{b}_0 \subseteq \mathfrak{p}$, demnach $\alpha_0 \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b}_0 \subseteq \mathfrak{p}$. Daraus folgt $\alpha \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, also $\alpha_{\mathfrak{f}} \subseteq \mathfrak{p}_{\mathfrak{f}}$ oder $\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}} \subseteq \mathfrak{p}_{\mathfrak{f}}$, d.i. $\mathfrak{p}_{\mathfrak{f}}$ ist ein Primideal. Ist umgekehrt \mathfrak{p}^* ein Primideal von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$, so ist nach Hilfssatz 15 $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}_{\mathfrak{f}}$, wo $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* \cap \mathfrak{o}$ ist. Wir beweisen, dass \mathfrak{p} ein Primteiler von \mathfrak{f} ist. Es sei $\alpha \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, wo α, \mathfrak{b} in \mathfrak{o} enthaltene zweiseitige \mathfrak{o} -Ideale sind, so folgt $(\alpha \mathfrak{b})_{\mathfrak{f}} = \alpha_{\mathfrak{f}} \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}} \subseteq \mathfrak{p}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{p}^*$, also $\alpha_{\mathfrak{f}} \subseteq \mathfrak{p}^*$ oder $\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}} \subseteq \mathfrak{p}^*$. Daraus folgt, dass $\alpha \subseteq \alpha_{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{p}^* \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, d.h. \mathfrak{p} ist ein Primideal. Ist $\mathfrak{p} \nsubseteq \mathfrak{f}$, so ist \mathfrak{p} regulär, also $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ nach Satz 10.

Von jetzt an setzen wir über \mathfrak{o} die Bedingungen B_2, B'_3 voraus; ferner setzen wir über \mathfrak{o}^* die Bedingung A_3 an Stelle von A'_3 .

HILFSSATZ 17. *\mathfrak{M} sei ein linksseitiger S -Modul, der einen linksseitigen \mathfrak{o} -Modul M als ein Teilmodul enthält, und es sei $1 \cdot u = u$, für jedes Element u aus \mathfrak{M} . Wir setzen die Gesamtheit der Elemente u aus \mathfrak{M} , so dass $nu \subseteq M$ für irgendein zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal n mit $(n, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, so ist $M_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} M$, $M_{\mathfrak{f}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{f}} M_{\mathfrak{p}}$, wobei $M_{\mathfrak{p}}$ ebenso wie $M_{\mathfrak{f}}$ definiert wird.*

Beweis. Ersichtlich ist $M_{\mathfrak{f}} \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} M$. Es sei cu ein beliebiges Element aus $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} M$, wo $c \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}, u \in M$ ist, so gibt es ein zweiseitiges in \mathfrak{o} enthaltenes reguläres \mathfrak{o} -Ideal n mit $nc \subseteq \mathfrak{o}$, demnach $ncu \subseteq \mathfrak{o}u \subseteq M$, also $cu \in M_{\mathfrak{f}}$, d.h. $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} M \subseteq M_{\mathfrak{f}}$, daraus folgt $M_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} M$. Aus den Bedingungen B_2, B'_3 folgt, dass die Anzahl der Primteiler von \mathfrak{f} endlich ist, und wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$. Es ist $\bigcap_{i=1}^m M_{\mathfrak{p}_i} \supseteq M_{\mathfrak{f}}$, da $M_{\mathfrak{p}_i} \supseteq M_{\mathfrak{f}}$ ist. Es sei u ein beliebiges Element aus $\bigcap_{i=1}^m M_{\mathfrak{p}_i}$, so gibt es zu jedes \mathfrak{p}_i teilerfremdes reguläres \mathfrak{o} -Ideal n_i mit $n_i u \subseteq M$. Wir setzen $n_0 = \bigcup_{i=1}^m n_i$, so ist $(n_0, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, denn es gibt Elemente $n_i \in n_i, \mathfrak{p}_i \in \mathfrak{p}_i$, so dass $n_i + \mathfrak{p}_i = 1$ ist, also $\prod_{i=1}^m (n_i + \mathfrak{p}_i) = 1$, demnach $(n_0, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ da nach B_2 das Radikal von \mathfrak{f} modulo \mathfrak{f} nilpotent ist. Ferner gilt $n_0 u \subseteq M$, also $u \in M_{\mathfrak{f}}$, d.h. $\bigcap_{i=1}^m M_{\mathfrak{p}_i} \subseteq M_{\mathfrak{f}}$, also folgt die Behauptung.

SATZ 15. *Es sei α ein in \mathfrak{o} enthaltenes linksseitiges \mathfrak{o} -Ideal, so ist nach Satz 20 [4] α als ein direkter Durchschnitt von zwei linksseitigen \mathfrak{o} -Idealen $\mathfrak{l}, \mathfrak{b}$ derart eindeutig darstellbar, dass $\alpha = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{b}$, $(\mathfrak{l}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{f}^{\rho}$, wo ρ irgendeine positive ganze rationale Zahl ist. Dann ist $\alpha_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$. Es ist dann und nur dann $\alpha_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$, wenn $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ ist. Ebenso gilt für die \mathfrak{o} -Rechtsideale.*

Beweis. Aus $\alpha = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{b}$ folgt, dass $\alpha_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{l}_{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$. Wir setzen $\mathfrak{o}^* \mathfrak{l} = \mathfrak{L}$, so ist nach Satz 2 [4] $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{l}$. Wir bezeichnen die Hülle von \mathfrak{L} mit \mathfrak{A} , so ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{o}^* \supseteq \mathfrak{L}_{\mathfrak{f}} \supseteq \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$, d.h. $\mathfrak{L}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}^*_{\mathfrak{f}}$, daraus folgt, dass $\mathfrak{l}_{\mathfrak{f}} = (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{o})_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{L}_{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}^*_{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$, d.h. $\mathfrak{l}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$, daher $\alpha_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$. Es sei $\alpha_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$, so ist $\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}} \ni 1$, also $n \cdot 1 \subseteq \mathfrak{b}$ für irgendein reguläres

\mathfrak{o} -Ideal \mathfrak{n} , also $(\mathfrak{h}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$. Wir setzen $\mathfrak{B} = \mathfrak{o}^* \mathfrak{h}$, so ist $(\mathfrak{B}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$. Ist \mathfrak{H} die Hülle von \mathfrak{B} , so ist $(\mathfrak{H}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{H} \supseteq \mathfrak{f}^{\rho}$, da $\mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{f}^{\rho}$ ist. Daraus folgt, dass $\mathfrak{o}^* = (\mathfrak{H}, \mathfrak{f}^{\rho}) = \mathfrak{H}$, also $\mathfrak{B} = \mathfrak{o}^*$, und $\mathfrak{h} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{o}^* \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{o}$.

Nach Hilfssatz 17 erhalten wir:

SATZ 16. Ist \mathfrak{a} ein einseitiges \mathfrak{o} -Ideal, so ist $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{f}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$.

Analogerweise wie [4] erhalten wir die folgenden Hilfssätze:

HILFSSATZ 18. Es seien \mathfrak{g} bzw. \mathfrak{a} in \mathfrak{o} enthaltene zweiseitige \mathfrak{o}^* - bzw. \mathfrak{o} -Ideale. Ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{o}^* \mathfrak{a} \mathfrak{o}^* = \mathfrak{a} \mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}^* \mathfrak{a}$ und $(\mathfrak{A}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}^*$, ferner gilt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$.

HILFSSATZ 19. Es sei \mathfrak{g} ein in \mathfrak{o} enthaltenes zweiseitiges \mathfrak{o}^* -Ideal. Ist für ein zweiseitiges \mathfrak{o}^* -Ideal \mathfrak{N} $(\mathfrak{N}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}^*$, so ist $(\mathfrak{n}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$, wo $\mathfrak{n} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{o}$ ist, ferner gilt $\mathfrak{n} \mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}^* \mathfrak{n} = \mathfrak{N}$.

SATZ 17. Es sei \mathfrak{g} ein in \mathfrak{o} enthaltenes zweiseitiges \mathfrak{o}^* -Ideal, und \mathfrak{L} sei ein linksseitiges \mathfrak{o}^* -Ideal. Dann stimmen das in \mathfrak{o}^* definierte $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}$ ⁹⁾ und das in \mathfrak{o} definierte Ideal $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}$ in unserem Sinn überein.

Beweis. Wir bezeichnen das in \mathfrak{o}^* definierte $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}$ mit $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}^*$. Es sei x ein beliebiges Element aus $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}^*$, so gibt es ein zweiseitiges \mathfrak{o}^* -Ideal \mathfrak{N} mit $(\mathfrak{N}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}^*$, so dass $\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{N}x \supseteq \mathfrak{n}x$, wo $\mathfrak{n} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{o}$ ist, also $(\mathfrak{n}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$, demnach $x \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}$, d.h. $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}^* \subseteq \mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}$. Ist umgekehrt x ein beliebiges Element aus $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}$, so gibt es ein zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal \mathfrak{n} mit $(\mathfrak{n}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$, so dass $\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{n}x$, also $\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{o}^* \mathfrak{n}x = \mathfrak{N}x$, wo $\mathfrak{N} = \mathfrak{o}^* \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \mathfrak{o}^*$ ist, und $(\mathfrak{N}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}^*$, also $x \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}^*$, d.h. $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}^*$.

HILFSSATZ 20. Es ist $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}$.

SATZ 18. Ist \mathfrak{f} der Führer von \mathfrak{o} hinsichtlich \mathfrak{o}^* , so ist $\mathfrak{f}_{\mathfrak{f}}$ der Führer von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}^*$.

Beweis. Es sei \mathfrak{A}^* ein in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ enthaltenes zweiseitiges $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}^*$ -Ideal, so ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{o}^* \supseteq \mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{o}^* = \mathfrak{A}$, wo \mathfrak{A} ein zweiseitiges \mathfrak{o}^* -Ideal und $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}}$ ist wegen Satzes 55 [2], also $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{f}$, demnach $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}_{\mathfrak{f}} \subseteq \mathfrak{f}_{\mathfrak{f}} \subseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$, d.h. $\mathfrak{f}_{\mathfrak{f}}$ ist das maximale in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ enthaltene zweiseitige $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}^*$ -Ideal, also der Führer von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}^*$.

SATZ 19. Es sei \mathfrak{a} ein in \mathfrak{o} enthaltenes und eine Potenz von \mathfrak{f} umfassendes zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal, so ist $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$, wobei \mathfrak{p} ein Primteiler von \mathfrak{f} ist und $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(1)} (\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{(r)})$ bedeutet.

Beweis. Nach B_2 $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}^{(1)} \cap \dots \cap \mathfrak{q}^{(r)}$, wo $\mathfrak{q}^{(i)}$ ein unzerlegbares¹⁰⁾ Ideal bedeutet, also ist $\mathfrak{q}^{(i)}$ ein Primalideal; daraus folgt, dass $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{q}_{\mathfrak{f}}^{(1)} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_{\mathfrak{f}}^{(r)}$, wobei $\mathfrak{q}_{\mathfrak{f}}^{(i)}$ auch wegen Satzes 13 unzerlegbar ist. Nun nach Satz 16 $\mathfrak{q}_{\mathfrak{f}}^{(i)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{f}} \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}^{(i)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{f}} (\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}^{(i)} \cap \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})$, also

9) Vgl. § 10 [2].

10) Ein Ideal heisst *unzerlegbar*, wenn es nicht als Durchschnitt von zweien echten Teiler darstellbar ist.

$q_p^{(r)} \cap \mathfrak{o}_f = q_f^{(r)}$ für jeden Primteiler von \mathfrak{f} da $q_f^{(r)}$ unzerlegbar ist. Daraus folgt, dass $q_f = (q_p^{(1)} \cap \mathfrak{o}_f) \cdots \cap (q_p^{(r)} \cap \mathfrak{o}_f) = (q_p^{(1)} \cap \cdots \cap q_p^{(r)}) \cap \mathfrak{o}_f = (q^{(1)} \cap \cdots \cap q^{(r)})_p \cap \mathfrak{o}_f = a_p \cap \mathfrak{o}_f$.

§ 5. Zerlegung von \mathfrak{f} und Blockideal.

S sei ein Schieferring mit Einselement 1 , \mathfrak{o} sei eine Ordnung von S , und \mathfrak{o}^* eine \mathfrak{o} umfassende, mit \mathfrak{o} äquivalente, A_1, A_2, A_3 genügende Maximalordnung. Ferner setzen wir über \mathfrak{o} die Bedingungen B_2, B_3 voraus.

HILFSSATZ 21. *Es sei \mathfrak{p} ein Primideal von \mathfrak{o} , so dass für irgendeine positive ganze rationale Zahl ρ $\mathfrak{o}^* \mathfrak{p}^\rho \mathfrak{o}^* \subset \mathfrak{o}^*$ ist, und \mathfrak{A} sei ein zweiseitiges \mathfrak{o} -Ideal mit $\mathfrak{o}^* \mathfrak{p} \mathfrak{o}^* \subseteq \mathfrak{A}$, so ist für beliebige positive ganze rationale Zahl e $\mathfrak{A}^e \cap \mathfrak{o}$ ein Primärideal, dessen adjungiertes Ideal \mathfrak{p} ist.*

Beweis. \mathfrak{p}' sei ein beliebiger Primteiler von $\mathfrak{A}^e \cap \mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{p}^{e'} \subseteq \mathfrak{A}^e \cap \mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{p}'$, also $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$, d.h. $\mathfrak{A}^e \cap \mathfrak{o}$ besitzt nur einen Primteiler. Nach Satz 7 [6] ist $\mathfrak{A}^e \cap \mathfrak{o}$ als kurzer reduzierter Durchschnitt durch Primalideale darstellbar: $\mathfrak{A}^e \cap \mathfrak{o} = q_1 \cap \cdots \cap q_m$, wo q_i Primalideale sind, also $m=1$, und nach Satz 8 ist $\mathfrak{A}^e \cap \mathfrak{o}$ ein Primärideal, dessen adjungiertes Ideal \mathfrak{p} ist.

HILFSSATZ 22. *Es seien q_1, \dots, q_s Primärideale, die dasselbe adjungierte Ideal \mathfrak{p} haben, so ist $q_1 \cap \cdots \cap q_s$ wieder ein Primärideal, dessen adjungierte Ideal wieder \mathfrak{p} ist.*

Beweis. Es sei \mathfrak{p}' ein beliebiger Primteiler von $q_1 \cap \cdots \cap q_s$, so ist $\mathfrak{p}' \supseteq q_1 \cap \cdots \cap q_s \supseteq q_1 \cdots q_s \supseteq \mathfrak{p}^{\rho_1 + \cdots + \rho_s}$, wobei $\mathfrak{p}^{\rho_i} \subseteq q_i$ ist, also $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$, d.h. $q_1 \cap \cdots \cap q_s$ hat nur ein Primteiler. Nunmehr folgt die Behauptung genau wie der Beweis des Hilfssatzes 21.

HILFSSATZ 23. *Eine kurze Darstellung durch Primärideale ist reduziert, und zugleich ist auch eine Darstellung durch minimale Primalideale¹¹⁾.*

Beweis. Es sei $a = q_1 \cap \cdots \cap q_r$ eine kurze Darstellung durch Primärideale, d.h. die adjungierte Ideale sind durchweg verschieden, also ist diese Darstellung auch der direkte Durchschnitt durch direkt unzerlegbare Ideale, also reduziert. Es sei $a = q'_1 \cap \cdots \cap q'_r$, $q'_i \subseteq q_i$, eine kurze Darstellung durch minimale Primalideale nach Satz 8 [6]. Wenn es gäbe mindestens ein Primalideal, das nicht Primärideal ist, unter q'_1, \dots, q'_r , so würde die Anzahl der direkt unzerlegbaren Komponenten kleiner als r nach Satz 9, was unmöglich ist, also sind q'_1, \dots, q'_r Primärideale, daher $q'_i = q_i$ $i=1, \dots, r$.

HILFSSATZ 24. *Es sei \mathfrak{p} ein Primideal, so dass $\mathfrak{p}\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}^*$, so ist \mathfrak{p} r.p.¹²⁾ zu $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{o}$ für ein beliebiges zweiseitiges \mathfrak{o}^* -Ideal \mathfrak{A} .*

Beweis. Es wäre \mathfrak{p} n.r.p. zu $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{o}$, so gäbe es nach Definition ein Element x

11) Vgl. Satz 8 [6].

12) Vgl. [6]. Vgl. auch die Fussnote des Satzes 8.

aus \mathfrak{o} , so dass $x\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{o}$, $x \notin \mathfrak{A} \cap \mathfrak{o}$, also $x \in x\mathfrak{o}^* = x\mathfrak{p}\mathfrak{o}^* \subseteq \mathfrak{A}$, d.h. $x \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{o}$ entgegen der Voraussetzung.

\mathfrak{f} ist als Produkt von Potenzen verschiedener Primideale von \mathfrak{o}^* darstellbar: $\mathfrak{f} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_\sigma^{e_\sigma}$. Es sei \mathfrak{p}_a ein Primteiler von \mathfrak{f} , so dass für irgendeine positive ganze rationale Zahl ρ_a $\mathfrak{o}^* \mathfrak{p}_a^{\rho_a} \mathfrak{o}^* \subset \mathfrak{o}^*$ ist, und $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_a$ seien die Primteiler von $\mathfrak{o}^* \mathfrak{p}_a^{\rho_a} \mathfrak{o}^*$, so sind $\mathfrak{P}_1^{e_1} \cap \mathfrak{o}, \dots, \mathfrak{P}_a^{e_a} \cap \mathfrak{o}$ Primär-ideale, die sämtlich gleiche Radikale \mathfrak{p}_a haben, also nach Hilfssatz 22 ist $\mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_a^{e_a} \cap \mathfrak{o}$ ein Primärideal, dessen Radikal \mathfrak{p}_a ist. Nun $\mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_b, \dots, \mathfrak{p}_\lambda$ seien die sämtliche solche Primteiler von \mathfrak{f} , so gilt

$$\mathfrak{f} = (\mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_a^{e_a} \cap \mathfrak{o}) \cap (\mathfrak{P}_{a+1}^{e_{a+1}} \cdots \mathfrak{P}_b^{e_b} \cap \mathfrak{o}) \cap \cdots \cap (\cdots \mathfrak{P}_\lambda^{e_\lambda} \cap \mathfrak{o}) \cap \mathfrak{P}_{\lambda+1}^{e_{\lambda+1}} \cdots \mathfrak{P}_\sigma^{e_\sigma} \cap \mathfrak{o} \quad (1)$$

wo die runden Klammern Primär-ideale sind, die bzw. $\mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_b, \dots, \mathfrak{p}_\lambda$ als Radikale besitzen. Wenn es ausser $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_\lambda$ noch Primteiler \mathfrak{P} von \mathfrak{f} gibt, so gelten $\mathfrak{o}^* \mathfrak{p}^\rho \mathfrak{o}^* \not\subseteq \mathfrak{P}$ für alle Primideale \mathfrak{p} und alle positive ganze rationale Zahlen ρ . Es sei

$$\mathfrak{P}_{\lambda+1}^{e_{\lambda+1}} \cdots \mathfrak{P}_\sigma^{e_\sigma} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r \quad (2)$$

eine kurze reduzierte Darstellung von $\mathfrak{P}_{\lambda+1}^{e_{\lambda+1}} \cdots \mathfrak{P}_\sigma^{e_\sigma} \cap \mathfrak{o}$ durch Prim-ideale. In der Darstellung (2) wählen wir $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t$ derart aus, dass $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t$ die maximale Menge ist, so dass alle Primteiler von $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$ modulo $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$ miteinander kommutativ sind. Dann sind $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t$ Primär-ideale; denn nach Satz 7 gibt es eine Darstellung von $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$ durch Primär-ideale: $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t = \mathfrak{q}'_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_s$ wobei die adjungierte Ideale $\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_s$ von $\mathfrak{q}'_1, \dots, \mathfrak{q}'_s$ durchweg verschieden angenommen werden können wegen Hilfssatzes 22, also ist $\mathfrak{q}'_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_s$ ein direkter Durchschnitt von direkt unzerlegbaren Idealen. Gäbe es mindestens ein Prim-ideal, das nicht ein Primärideal ist, unter $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t$; dann wenn wir nach Satz 9 $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$ als ein direkter Durchschnitt von direkt unzerlegbaren Idealen darstellen, die Anzahl der unzerlegbaren Komponenten kleiner als s würde, da $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$ nur $\mathfrak{p}'_1, \dots, \mathfrak{p}'_s$ als Primteiler besitzt, was unmöglich ist. Ferner sind die übrigen \mathfrak{q}_i in (2) nicht Primär-ideale; denn gäbe es noch Primärideal \mathfrak{q} in (2), so würde $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t \cap \mathfrak{q}$ eine Darstellung durch Primär-ideale, also nach Satz 6 würde alle Primteiler von $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t \cap \mathfrak{q}$ modulo $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t \cap \mathfrak{q}$ miteinander kommutativ entgegen der Konstruktion von $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t$. Also haben wir

$$\mathfrak{P}_{\lambda+1}^{e_{\lambda+1}} \cdots \mathfrak{P}_\sigma^{e_\sigma} \cap \mathfrak{o} = (\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t) \cap \mathfrak{q}_{t+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r \quad (3)$$

wo $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t$ Primär-ideale und $\mathfrak{q}_{t+1}, \dots, \mathfrak{q}_r$ nicht Primär-ideale sind.

DEFINITION. Ein Prim-ideal, das nicht ein Primärideal ist, heisst ein *echtes Prim-ideal*.

HILFSSATZ 25. Das echte Prim-ideal \mathfrak{q} besitzt kein Primteiler, mit welchem alle Primteiler von \mathfrak{q} miteinander kommutativ sind.

Beweis. Da das Radikal von \mathfrak{q} modulo \mathfrak{q} nilpotent ist, enthält \mathfrak{q} ein Produkt

von Primteiler von q . Es sei $p_1 \cdots p_\alpha$ ein in q enthaltenes Produkt der Primteiler von q , das die minimalen Faktoren besitzt, so ist p_α das adjungierte Ideal von q . Es ist $\alpha \geq 2$, da nach Satz 9 q mindestens zwei Primteiler besitzt. Es sei p_i ($i \neq \alpha$) mit allen übrigen Primteiler von q kommutativ, so ist $p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_\alpha p_i \subseteq q$ und $p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_\alpha \subseteq q$ wegen der Definition von α , also p_i das adjungierte Ideal von q , demnach $p_i = p_\alpha$, d.h. ein solcher Primteiler muss das adjungierte Ideal von q sein. Es sei andererseits das adjungierte Ideal p_α mit $p_1, \dots, p_{\alpha-1}$ kommutativ, so ist $p_\alpha p_1 \cdots p_{\alpha-1} \subseteq q$ und $p_\alpha p_1 \cdots p_{\alpha-2} \subseteq q$ wegen der Definition von α , also $p_{\alpha-1}$ das adjungierte Ideal von q , also $p_{\alpha-1} = p_\alpha$, usw., schliesslich haben wir $p_\alpha^\alpha \subseteq q$, also ist q ein Primärideal, daher ergibt sich ein Widerspruch. Daraus folgt die Behauptung.

SATZ. 20. *Es sei p ein beliebiger Primteiler von $\mathfrak{P}_{\lambda+1}^{\epsilon_{\lambda+1}} \cdots \mathfrak{P}_\sigma^{\epsilon_\sigma} \cap \mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{o}^* p^\rho \mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}^*$ für beliebige positive ganze rationale Zahlen ρ .*

Beweis. p ist ein Primteiler von \mathfrak{f} , und aus der Konstruktion von (1) folgt die Behauptung.

SATZ 21. *Die oben erhaltene Darstellung von \mathfrak{f}*

$$\mathfrak{f} = (\mathfrak{P}_1^{\epsilon_1} \cdots \mathfrak{P}_\alpha^{\epsilon_\alpha} \cap \mathfrak{o}) \cap \cdots \cap (\cdots \mathfrak{P}_\lambda^{\epsilon_\lambda} \cap \mathfrak{o}) \cap \mathfrak{q}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{i_t} \cap \mathfrak{q}_{i_{t+1}} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{i_r} \quad (4)$$

ist eine kurze reduzierte Darstellung von \mathfrak{f} durch Prim ideale, wobei $\mathfrak{P}_1^{\epsilon_1} \cdots \mathfrak{P}_\alpha^{\epsilon_\alpha} \cap \mathfrak{o}, \dots, \mathfrak{q}_{i_1}, \dots, \mathfrak{q}_{i_t}, \dots, \mathfrak{q}_{i_r}$ Primärideale, $\mathfrak{q}_{i_{t+1}}, \dots, \mathfrak{q}_{i_r}$ echter Prim ideale sind.

Beweis. $(\mathfrak{P}_1^{\epsilon_1} \cdots \mathfrak{P}_\alpha^{\epsilon_\alpha} \cap \mathfrak{o}) \cap \cdots \cap (\cdots \mathfrak{P}_\lambda^{\epsilon_\lambda} \cap \mathfrak{o}), \mathfrak{q}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{i_r}$ sind kurze reduzierte Darstellungen, und die beide Primteiler sind gegenseitig teilerfremd, also folgt die Behauptung.¹³⁾

Es sei K der endliche algebraische Zahlkörper, und p_0 sei ein Primteiler der beliebig gewählten rationalen Primzahl p , und I sei die Hauptordnung von K . Wir bezeichnen den p_0 -adischen Zahlkörper mit K_{p_0} , und I_{p_0} sei die Ordnung, die die ganze Elemente von K_{p_0} erzeugen, und S sei eine Algebra vom endlichen Grade über K_{p_0} . Dann besitzt I_{p_0} ein einziges Primideal, das ein Hauptideal $\pi I_{p_0} = I_{p_0} \pi$ mit $\pi \in p_0, \pi \notin p_0^2$, und das wir mit derselben Bezeichnung p_0 bezeichnen. Es sei \mathfrak{o} eine I_{p_0} -Ordnung¹⁴⁾ von S , und Z sei das Zentrum von S , und \mathfrak{o}^* sei eine \mathfrak{o} umfassende I_{p_0} -Maximalordnung, so gelten die Bedingungen A_1, A_2, A_3 für \mathfrak{o}^* . Ferner ist $J = \mathfrak{o} \cap Z$ eine Ordnung von Z , und $J^* = \mathfrak{o}^* \cap Z$ ist die Noethersche Axiome befriedigende Maximalordnung von Z .

HILFSSATZ 26. *Jedes Primideal von J ist teilerlos.*

Beweis. \mathfrak{o} ist I_{p_0} -endlich, d.h. \mathfrak{o} ist ein endlicher I_{p_0} -Modul, also ist J auch I_{p_0} -endlich, also folgt die Behauptung.

13) Ist $a = b \cap c = b' \cap c', b' \subseteq b, c' \subseteq c, (b', c') = \mathfrak{o}$, so ist $b = b', c = c'$, wo a, b, c, b', c' zweiseitige Ideale von \mathfrak{o} bedeuten.

14) Eine Ordnung, die endlicher I_p -Modul ist, wird I_p -Ordnung genannt.

Z.B. nach Satz 9 können wir \mathfrak{p}_0 als ein direkter Durchschnitt von direkt unzerlegbaren Idealen darstellen.

SATZ 22. *Es ist $\mathfrak{p}_0 \cap J = \pi J$. Es sei $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_\tau$ bzw. $\mathfrak{p}_0 \cap J = M_1 \cap \cdots \cap M_\mu$ eine Darstellung durch direkten Durchschnitt von direkt unzerlegbaren Idealen von \mathfrak{o} bzw. J , so ist $\mu = \tau$.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{p}_0 \cap J = \pi I_{\mathfrak{p}_0} \cap J = \pi \mathfrak{o} \cap J \supseteq \pi J$. Ist x ein beliebiges Element von $\pi \mathfrak{o} \cap J$, so gibt es ein Element y aus \mathfrak{o} , mit $x = \pi y$, wo y ersichtlich ein Element aus J , d.h. $\pi \mathfrak{o} \cap J \subseteq \pi J$. Nun ist $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_0 \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{m}_1 + \cdots + \mathfrak{o}/\mathfrak{m}_\tau$ eine direkte Summe von direkt unzerlegbaren Modulen, und das Zentrum vom $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_0$ ist $J/\mathfrak{p}_0 \cap J^{15)} \cong J/M_1 + \cdots + J/M_\mu$, wo die Summe direkt ist und J/M_i direkt unzerlegbar sind, also $\mu = \tau$.

SATZ 23. *Es sei $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_\tau$ eine Darstellung von \mathfrak{p}_0 als direkter Durchschnitt von direkt unzerlegbaren Idealen, so ist τ weniger als die Anzahl der verschiedenen Primteiler von \mathfrak{p}_0^* , und die Gesamtheit der Primteiler von πJ ist durch $\mathfrak{P}_1 \cap J, \dots, \mathfrak{P}_\alpha \cap J$ gegeben (nicht notwendig miteinander verschieden), wo $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_\alpha$ alle Primteiler von \mathfrak{p}_0^* bedeuten.*

Beweis. Im Beweise des Satzes 22 ersetzen wir \mathfrak{o} durch \mathfrak{o}^* , so folgt, dass $\mathfrak{p}_0^* \cap J^* = \pi J^* = P_1^{*m_1} \cap \cdots \cap P_\alpha^{*m_\alpha}$, $P_i^* = \mathfrak{P}_i \cap J^*$, wo $\mathfrak{p}_0^* = \mathfrak{P}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{P}_\alpha^{n_\alpha}$, $n_i \equiv 0 \pmod{m_i}$.

i) Es sei $\pi J^* \not\subseteq J$ und F sei der Führer von J hinsichtlich J^* , so ist $\pi \notin F$, also $\pi J \not\subseteq F$. Es sei $\pi J = \bigcap_i Q_i$, $Q_i \subseteq P_i$, wo Q_i Primär Ideale sind und P_i adjungierte Ideale von Q_i , so ist $Q_i = M_i$, d.h. M_i sind Primär Ideale. Also haben wir $(P_i, F) = J$, d.i. P_i sind regulär, also sind auch M_i regulär. Daraus folgt, dass $M_i J^* = P_i^{*m_i}$, $i=1, \dots, \alpha$, $P_i^* = P_i J^*$, $P_i^* \cap J = P_i$, also $\alpha = \tau$.

ii) Es sei $\pi J \subseteq J$, so ist $(\pi J^*)^2 = \pi^2 J^* \subseteq \pi J \subseteq \pi J^*$. Aus $\pi J \subseteq \pi J^*$ folgt, dass $\pi J \subseteq \pi J^* \cap J = (P_1^{*m_1} \cap J) \cap \cdots \cap (P_\alpha^{*m_\alpha} \cap J)$. Daraus folgt, dass $P_1^* \cap J, \dots, P_\alpha^* \cap J$ Primteiler von πJ sind. Andererseits aus $(\pi J^*)^2 \subseteq \pi J$ folgt, dass $(\pi J^*)^2 \cap J \subseteq \pi J$, also $(P_1^* \cap J)^{2m_1} \cdots (P_\alpha^* \cap J)^{2m_\alpha} \subseteq \pi J$. Daraus folgt, dass alle Primteiler von πJ durch $P_i^* \cap J = \mathfrak{P}_i \cap J$ ($i=1, \dots, \alpha$) gegeben sind und $\tau \leq \alpha$, also folgt die Behauptung.

DEFINITION. Nach R. Brauer nennen wir \mathfrak{m}_i das *Blockideal* von \mathfrak{p}_0 .

SATZ 24. *Für jedes Primteiler P von $\mathfrak{p}_0 \cap J = \pi J$ gibt es ein Primteiler \mathfrak{p} von $\mathfrak{p}_0 = \pi \mathfrak{o}$, so dass $\mathfrak{p} \cap J = P$, und umgekehrt.*

Beweis. Es sei P ein Primteiler von πJ . Wir bezeichnen die Menge der zweiseitigen \mathfrak{o} -Ideale, deren Durchschnitt mit J in P enthalten ist, mit $W: W = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \cap J \subseteq P\}$. W ist nicht die Nullmenge, da $\pi \mathfrak{o} \cap J = \pi J \subseteq P$ ist. Es sei \mathfrak{p} ein maximales Element von W , so ist \mathfrak{p} ein Primideal von \mathfrak{o} . Denn wäre $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \equiv 0$, $\mathfrak{a} \not\equiv 0$, $\mathfrak{b} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ irgendzwei zweiseitige \mathfrak{o} -Ideale sind, so würde $\mathfrak{p} \subset (\mathfrak{p}, \mathfrak{a})$,

15) Vgl. Lemma 1-H [10].

$\mathfrak{p} \subset (\mathfrak{p}, \mathfrak{h})$, also $(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}) \cap J \not\subseteq P$, $(\mathfrak{p}, \mathfrak{h}) \cap J \not\subseteq P$, nach der Definition von W , also gäbe es Elemente a und b , so dass $a \in (\mathfrak{p}, \mathfrak{a}) \cap J$, $a \notin P$ und $b \in (\mathfrak{p}, \mathfrak{h}) \cap J$, $b \notin P$ ist; es würde also $ab \in (\mathfrak{p}, \mathfrak{a})(\mathfrak{p}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{p}^2, \mathfrak{ap}, \mathfrak{hp}, \mathfrak{ah}) \subseteq \mathfrak{p}$, d.h. $ab \in \mathfrak{p} \cap J = P$, andererseits $a \notin P$, $b \notin P$, demnach ergäbe sich ein Widerspruch. Nun ist $\mathfrak{p} \cap J \subseteq P$ und $\mathfrak{p} \cap J$ ist teilerlos, daher $\mathfrak{p} \cap J = P$. Die Umkehrung ist klar.

SATZ 25. *Es sei $\mathfrak{p}_0 \mathfrak{o} = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_\tau$ bzw. $\mathfrak{p}_0 J = M_1 \cap \dots \cap M_\tau$ eine Darstellung von $\mathfrak{p}_0 \mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{p}_0 J$ als direkter Durchschnitt von direkt unzerlegbaren Idealen, so ist der Durchschnitt von J mit jedem Primteiler des Ideals \mathfrak{m}_i dasselbe Primideal in J ; dagegen ergeben Primteiler von \mathfrak{m}_i bzw. \mathfrak{m}_j ($i \neq j$) verschiedene Primteiler in J . Ferner gilt $\mathfrak{m}_i = M_i \mathfrak{o} = \mathfrak{o} M_i$, $i = 1, \dots, \tau$, also auch $\mathfrak{m}_i \mathfrak{m}_j = \mathfrak{m}_j \mathfrak{m}_i$, d.i. die Blockideale sind miteinander kommutativ.¹⁶⁾*

Beweis. Aus $\pi J = M_1 \dots M_\tau$ folgt $\pi \mathfrak{o} = \pi J \mathfrak{o} = (M_1 \mathfrak{o}) \dots (M_\tau \mathfrak{o}) = M_1 \mathfrak{o} \cap \dots \cap M_\tau \mathfrak{o}$ mit $(M_i \mathfrak{o}, M_j \mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$ für $i \neq j$, und $M_i \mathfrak{o}$ ist ein direkt unzerlegbares Ideal von \mathfrak{o} ; denn $\pi \mathfrak{o}$ ist darstellbar als ein direkter Durchschnitt von τ direkt unzerlegbaren Idealen: $\pi \mathfrak{o} = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_\tau$. Also haben wir $\mathfrak{m}_i = M_i \mathfrak{o}$, $i = 1, \dots, \tau$, unter geeigneter Numerierung des Indizes, daher $\mathfrak{m}_i \mathfrak{m}_j = \mathfrak{m}_j \mathfrak{m}_i$. Es sei \mathfrak{p} ein beliebiger Primteiler von \mathfrak{m}_i , so ist $P_i^{\mathfrak{o}} \subseteq M_i \subseteq \mathfrak{m}_i \subseteq \mathfrak{p}$, also $P_i^{\mathfrak{o}} \subseteq \mathfrak{p} \cap J$, daher $P_i = \mathfrak{p} \cap J$, da P_i teilerlos ist.

Es seien $\mathfrak{p}_{11}, \dots, \mathfrak{p}_{1\alpha}$ die Primteiler von \mathfrak{m}_1 , und $\mathfrak{p}_{21}, \dots, \mathfrak{p}_{1\beta}$ die Primteiler von \mathfrak{m}_2 , usw. \mathfrak{o} besitzt eine $I_{\mathfrak{p}_0}$ -Basis¹⁷⁾: $\mathfrak{o} = I_{\mathfrak{p}_0} u_1 + \dots + I_{\mathfrak{p}_0} u_n$; also $\mathfrak{p}_0 \mathfrak{o} = \mathfrak{p}_0 u_1 + \dots + \mathfrak{p}_0 u_n$, daher $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o} / \mathfrak{p}_0 \mathfrak{o} \cong K^* u_1 + \dots + K^* u_n$, wo $K^* \cong I_{\mathfrak{p}_0} / \mathfrak{p}_0 \cong I / \mathfrak{p}_0$ ist, also ist $\bar{\mathfrak{o}}$ eine Algebra über K^* . \mathfrak{n} sei das Radikal von $\mathfrak{p}_0 \mathfrak{o}$, d.i. der Durchschnitt von allen Primteilern von $\mathfrak{p}_0 \mathfrak{o}$, so ist $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n} / \mathfrak{p}_0 \mathfrak{o}$ das radikal von $\bar{\mathfrak{o}}$. Daraus folgt, dass $\bar{\mathfrak{o}} / \bar{\mathfrak{n}} \cong \mathfrak{o} / \mathfrak{n} \cong \sum_i \mathfrak{o} / \mathfrak{p}_{1i} + \sum_j \mathfrak{o} / \mathfrak{p}_{2j} + \dots + \sum_k \mathfrak{o} / \mathfrak{p}_{\tau k}$. Aus der Theorie der Darstellung wissen wir, dass jede irreduzible Darstellung von $\bar{\mathfrak{o}}$ eineindeutig zur einfachen Algebra $\mathfrak{o} / \mathfrak{p}_{ij}$ entspricht, d.i. sie entspricht eineindeutig zum Primideal von \mathfrak{o} . Das Zentrum von $\bar{\mathfrak{o}}$ ist $J = J / \pi J = J / \mathfrak{p}_0 \mathfrak{o} \cap J$, und es hat nur Primideale $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_\tau$ (Vgl. den Beweis des Satzes 25) nach Satz 24. Andererseits induziert jede irreduzible Darstellung von $\bar{\mathfrak{o}}$ nur eine einzige irreduzible Darstellung von J . Z.B. gilt $\mathfrak{o} / \mathfrak{p}_{1i} \cong (J, \mathfrak{p}_{1i}) / \mathfrak{p}_{1i} \cong J / J \mathfrak{p}_{1i} = J / P_1$, d.h. die so erhaltene einzige irreduzible Darstellung von J entspricht also zu P_1 , daher erzeugt alle Primteiler von \mathfrak{m}_i einen Block im Sinne der Darstellungstheorie. Also besagt der Satz 23, dass die Anzahl des Blockes im modularen Darstellung weniger als die Anzahl der verschiedenen Primteiler von $\mathfrak{p}_0 \mathfrak{o}^*$ ist.

SATZ 26. *Jedes Blockideal hat höchstens nur einen regulären Primteiler: jedes reguläre Primideal allein erzeugt einen Block, und wenn ein Block aus mehr als zwei Primidealen besteht, so sind sie durchweg Primteiler von $\bar{\mathfrak{f}}$.*

16) Herr Professor R. Brauer bemerkte diese Eigenschaft im Gruppenringe.

17) Ist $\mathfrak{o} = I_{\mathfrak{p}} u_1 + \dots + I_{\mathfrak{p}} u_n$, wo u_1, \dots, u_n linear unabhängig über $K_{\mathfrak{p}}$ sind, so heisst u_1, \dots, u_n $I_{\mathfrak{p}}$ -Basis von \mathfrak{o} .

Beweis. Nach Satz 19 [4] ist $m_i = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r} m_0$, wo p_1, \dots, p_r miteinander verschiedene reguläre Primideale sind und m_0 ein zweiseitiges Ideal von \mathfrak{o} , mit $m_0 \supseteq \mathfrak{p}^p$. Es sei \mathfrak{p} ein reguläres Primideal. Ist $m_i \subseteq \mathfrak{p}$, so ist z.B. $p_1 = \mathfrak{p}$, d.h. $m_i = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r} m_0 = p_1^{e_1} \cap p_2^{e_2} \cap \cdots \cap p_r^{e_r} \cap m_0$, aber m_i ist direkt unzerlegbar, also $m_i = p^{e_1}$. Übrige Behauptung ist klar.

Literaturverzeichnis

- [1] K. Asano, Theorie der Ringe und Ideale (Japanisch) 1949.
- [2] K. Asano, Arithmetische Idealtheorie in nichtkommutativem Ringen, Japan, Jour. Math., Vol. XVI, 1939.
- [3] K. Asano, Zur Arithmetik in Schieftringen I, Osaka Math. Jour. Vol. 1, No. 2, July, 1949.
- [4] K. Asano and T. Ukegawa, Ergänzende Bemerkungen über die Arithmetik in Schieftringen, Jour. Instit. Polytech. Osaka City Univ. Vol. 3, No. 1-2, 1952.
- [5] E. Artin, C. J. Nesbitt and R. M. Thrall, Rings with minimum condition, Univ. Michigan Publ. Math. No. 1, 1944.
- [6] W. E. Barnes, Primal ideals and isolated components in noncommutative rings, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 82, 1956.
- [7] R. Brauer, On the arithmetic in a group ring, Proc. Nat. Acad. Sci., Vol. 30, No. 5, 1944.
- [8] I. S. Cohen and A. Seidenberg, Prime ideals and integral dependence, Bull. Amer. Math. Soc. 52, 1946.
- [9] D. C. Murdoch, Contributions to noncommutative idealtheory, canadian Jour. Math. 4, 1952.
- [10] C. J. Nesbitt and B. M. Thrall, Some ring theorems with applications to modular representations, Ann. Math. Vol. 47, No. 3, July, 1946.
- [11] H. Tominaga, On primary ideal decompositions in non-commutative rings, Math. Jour. Okayama Univ. Vol. 3, No. 1, 1953.
- [12] T. Ukegawa, Über zum Führer teilerfremde Ideale einer Ordnung, Jour. Instit. Osaka City Univ. Vol. 5, No. 1, 1954.