Journal of the Institute of Polytechnics,
Osaka City University,
Vol. 4, No. 2, Series A

Über einen Satz von K. Iwasawa

Von Shin-ichi MATSUSHITA

(Received September 3, 1953)

Es sei G eine im Kleinen kompacte Gruppe mit einem links-invarianten Haarschen Masse $dx = m(dx)$ und es sei ferner $L^{1,p}(G)$ der Durchschnitt zweier Banachschen Räume auf $G, L^1(G)$ und $L^p(G)$ für $p \geq 1$; offenbar bildet $L^{1,p}(G)$ einen normietrten Ring mit der Norm

$$\| x \| = \text{Max.} (\| x \|_1, \| x \|_p)$$

wobei

$$\| x \|_p = \left\{\int_G |x(g)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

Wenn insbesondere $p = 1$, so ist $L(G) \equiv L^{1,1}(G)$ nichts anderes als die auf G definierte Gruppenalgebra von *I. E. Segal.*

Prof. K. Iwasawa hat den folgenden Satz bewiesen[1]:

Satz von K. Iwasawa—*Die Gesamtheit aller stetigen Darstellungen $T(x)$ von $L^{1,p}(G)$ kann auf eine isomorphe Weise in die Gesamtheit aller stetigen beschränkten Darstellungen $D(g)$ von G eingebettet werden. Dabei gibt es für jede $T(x)$ eine einzige $D(g)$ mit der Relation*

$$T(x) = \int_G x(g) D(g) dg . \tag{1}$$

In dieser Arbeit möchten wir denselben Satz, den wir gerade jetzt gesehen haben, kurz und bündig beweisen.

Offenbar ist die Gesamtheit $\mathfrak{M}_D$ der Elemente, die die Bedingung $D(x) = 0$ für eine bestimmte $D(\cdot)$ erfüllt, ein zweiseitiges geschlossenes Ideal von $L^{1,p}(G)$; die Restklassenalgebra $\mathfrak{H}_D \equiv L^{1,p}(G)/\mathfrak{M}_D$ ist dann ein endlicher viel-dimensionaler Banachscher Raum.

Nach dem Resultat von *A. Weil*[2] gibt es eine Folge $\{e^\lambda\}$ in $L^p(G)$ für jedes $p \geq 1$, also in $L^{1,p}(G)$, welche die folgenden Eigenschaften besitzt;

1°) $\| e^\lambda \|_p = 1$ (so ist $\| e^\lambda \| = 1$),

2°) $xe^\lambda \longrightarrow x$ und $e^\lambda x \longrightarrow x$ (nach der starken Konvergenz in $L^p(G)$, somit in $L^{1,p}(G)$).

1) *K. Iwasawa,* On Group Rings of Topological Groups, Proc. Imp. Acad. (1944), pp. 67-70. Sein Beweis, der auf japanisch geschrieben ist, hat seinen Grund in der Kalkül der Matrizen; Zenkoku Shijô Sûgaku Danwakai, 246, Ser. 1, Osaka (1942).

2) *A. Weil,* L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Actual. Scient. et Ind., Paris (1940) *pp.* 51-52.

Wir nennen die obige Folge die approximative Einheit von $L^{1,p}(G)$.

Da $\mathfrak{M}_D$ abgeschlossen ist, so ist $e^\lambda \in \mathfrak{M}_D$ für $\lambda > \lambda_0$ (λ_0 ein geeigneter Index). Somit sind X_{e^λ} für $\lambda > \lambda_0$, X_x sei $x + \mathfrak{M}_D$ für $x \in L^{1,p}(G)$, die von Null verschiedenen Elemente der Restklassenalgebra $\mathfrak{H}_D$.

Dann gibt es eine Teilfolge $\{X_{e^\mu}\}$ von $\{X_{e^\lambda}\}$, welche im starken Sinne in $\mathfrak{H}_D$ konvergent ist; in der Tat, $|||X_{e^\lambda}||| \leqq \|e^\lambda\| = 1$ für jedes λ, also liegt $\{X_{e^\lambda}\}$ in der Einheitskugel der $\mathfrak{H}_D$, die nach dem Satz von *F. Riesz*[1] bikompakt ist, denn die Dimension der $\mathfrak{H}_D$ ist endlich viel. Folglich kann man ein solche Teilfolge $\{X_{e^\mu}\}$ der $\{X_{e^\lambda}\}$ finden, dass die zum Element X_0 von $\mathfrak{H}_D$ konvergiert; man erhält somit

$$X_x = \lim X_{e^\mu} \cdot X_x = X_0 \cdot X_x, \tag{2}$$

für alle Elemente x von $L^{1,p}(G)$, denn $\lim X_{e^\mu} X_x = \lim X_{e_\mu x} = X_x$. Auf ähnliche Weise, kann man $X_x \cdot X_0 = X_x$ erklären.

Wenn u ein beliebiges Element von X_0, so gehört $ux - x$ ($xu - x$) zu $\mathfrak{M}_D$ an, d. h. u ist eine Einheit modulo dem Ideal $\mathfrak{M}_D$. Daraus folgt der

Satz. *Das Ideal $\mathfrak{M}_D$ ist immer regulär im Sinne von I. E. Segal*[2].

Diese Tatsache wurde schon im speziellen Falle, dass G entweder Abelsch und sogar im Kleinen kompakt order kompakt ist, in der Arbeit von *I. E. Segal*[3] betrachtet.

Nun setzen wir, für eine $T(\cdot)$ und oben erwähnten u,

$$\hat{D}(g) = T(u_g), \tag{3}$$

wo $u_g(h) = u(g^{-1}h)$ für jedes h von G.

Wenn $x, y \in L^{1,p}(G)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x_g \cdot y(\cdot) &= \int_G x(g^{-1}h) y(h^{-1}\cdot) dh \\ &= \int_G x(h) y(h^{-1}g^{-1}\cdot) dh = (x \cdot y)_g(\cdot). \end{aligned}$$

d. h. $x_g \cdot y = (x \cdot y)_g$, woraus $u_g \cdot u_h = (u \cdot u_h)_g$.

Es ist andererseitz zu bemerken, dass aus $x \in \mathfrak{M}_D$, für jedes g von G, auch $x_g \in \mathfrak{M}_D$ folgt[4]; also erhält man.

$$(u \cdot u_h)_g = (u_h)_g \,(= u_{gh}) \qquad (modulo\ \mathfrak{M}_D), \tag{4}$$

woraus

$$\hat{D}(g)\hat{D}(h) = T(u_g u_h) = T(u_{gh}) = \hat{D}(gh). \tag{5}$$

---

1) *F. Riesz*, Acta Math., 41 (1918).

2) 3) *I. E. Seigal*, The Group Algebra of a Locall Compact Group, Trans. Amer. Math. Soc., 53 (1947); sieh Satz 1. 9., *p*. 80.

4) Denn, aus $x \in \mathfrak{M}_D$ erhält man $(e^\lambda)_g \cdot x \to x_g \in \mathfrak{M}_D$.

Es ist klar, dass $\hat{D}(g)$ stetig und beschränkt ist, denn $T(\cdot)$ ist beschränkt und sogar ist die abbildung $g \to x_g$ stetig, d. h. $\hat{D}(g)$ ist eine stetige beschränkte Darstellung von G.

Ferner haben wir

$$\begin{aligned} T(x) = T(x \cdot u) &= \left(\int_G x(g) u_g^{(p,q)}(\cdot) dg\right) \\ &= \int_G x(g) T(u_g) dg = \int_G x(g) \hat{D}(g) dg, \end{aligned}$$

wobei das Integral in der ersten Zeile *im Sinne von S. Bochner* genommen werden soll.

Umgekehrt ist es evident, dass für jede $D(\cdot)$ die durch (1) definierte $T(\cdot)$ eine beschränkte Darstellung von $L^{1,p}(G)$ ist. Damit erhalten wir den *Satz von K. Iwasawa.*