Pongérard, P.
Osaka J. Math.
47 (2010), 157–176

SOLUTIONS RAMIFIÉES À CROISSANCE LENTE DE CERTAINES ÉQUATIONS DE FUCHS QUASI-LINÉAIRES

PATRICE PONGÉRARD

(Received June 10, 2008, revised September 29, 2008)

Abstract

We consider a class of quasilinear fuchsian operators Q of order $m \geq 1$, holomorphic in a neighborhood of the origin in $\mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$, and having a simple characteristic hypersurface transverse to S: $t = 0$. Under an assumption on the linear part of Q, we construct solutions of the problem $Qu = v$ in spaces of ramified functions of slow growth. The result is an extension of [15] to the quasilinear case.

1. Notations et résultat

Les coordonnées d'un point de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ étant notées $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$, les dérivations en t et en x sont désignées par D_t^l, $l \in \mathbf{N}$ et $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$. On pose, pour tout $\beta = (l, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n$,

$$\mathcal{D}^\beta = t^{(|\beta|+2-m)_+} D_t^l D^\alpha \quad \text{où} \quad (\bullet)_+ = \max(\bullet, 0),\ |\beta| = l + |\alpha| \text{ et } |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j.$$

On considère un opérateur quasi-linéaire Q de la forme

$$\begin{aligned} Q(t, x; D_t, D)u &= tA(t, x; D_t, D)u + B(t, x; D_t, D)u \\ &\quad + \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta(t, x, \mathcal{D}^\Gamma u)\mathcal{D}^\beta u \end{aligned} \tag{1.1}$$

où A (resp. B) est un opérateur différentiel linéaire, à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$, d'ordre $m \geq 1$ (resp. $m - 1$) de symbole principal g_A (resp. g_B) avec $g_A(\bullet; 1, 0) \equiv 1$,

$$\mathcal{D}^\Gamma u = (\mathcal{D}^\gamma u)_{\gamma \in \Gamma}, \quad \Gamma = \{(l, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n ; l + |\alpha| < m\},$$
$$n' = \operatorname{Card} \Gamma, \quad y = (y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \mathbf{C}^{n'},$$

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 35A07; Secondary 35A20.

chaque a_β étant une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n'}$ vérifiant

$$a_\beta(t, x, 0) = 0 \quad \text{pour tout} \quad (t, x). \tag{1.2}$$

On observe que $u \equiv 0$ est solution de l'équation $Qu = 0$. On note $\mathcal{O}_0 = \mathcal{D}_0 \times \Omega_0$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ sur lequel les coefficients des opérateurs A et B sont définis et holomorphes.

Vérifions que Q est un opérateur de Fuchs. En posant $L \equiv tA + B$ et

$$a(t, x, D_t) \equiv g_A(0, x; 1, 0)tD_t^m + g_B(0, x; 1, 0)D_t^{m-1}, \tag{1.3}$$

on obtient

$$L(t, x; D_t, D) = a(t, x; D_t) + \sum_{l=p}^{m} b_l(t, x)t^{(l+1-p)_+} D_t^l$$
$$+ \sum_{\substack{\beta=(l,\alpha)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}^n;\, |\beta|\leq m \\ \beta\neq(m,0),\, \beta\neq(m-1,0)}} c_\beta(t, x)t^{(|\beta|+1-m)_+} D_t^l D^\alpha$$

où $p = m - 1$, les coefficients b_l et c_β étant holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$. De plus, on a $(|\beta| + 1 - m)_+ \geq (l + 1 - p)_+$. En effet, si $|\beta| = m$, alors $l < |\beta|$ car $\beta \neq (m, 0)$, d'où $l + 1 - p \leq |\beta| + 1 - m$; si $|\beta| \leq m - 1$, alors $l < m - 1$ car $\beta \neq (m - 1, 0)$, d'où $(|\beta| + 1 - m)_+ = 0 = (l + 1 - p)_+$. En outre, vu que $(|\beta| + 2 - m)_+ \geq (l + 1 - p)_+$ pour tout $\beta = (l, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n$, il en résulte que l'opérateur Q est de la forme

$$Q(t, x; D_t, D)u = a(t, x; D_t)u - f(t, x, \{t^{(l+1-p)_+} D_t^l D^\alpha u\}_{l+|\alpha|\leq m})$$

où f est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n''}$, $n'' = \mathrm{Card}\{\beta \in \mathbf{N}^{n+1} ; |\beta| \leq m\}$. Autrement dit, Q est un opérateur différentiel non linéaire du type de Fuchs, d'ordre m et de poids p, au sens de Baouendi-Goulaouic ([1] et [2]). Indiquons par ailleurs qu'un opérateur de poids p se ramène simplement à un opérateur de poids 0 (de la forme [2, (3.2)] ou [14, (1.1)] par exemple). Soit $\mathcal{C}(x, \lambda)$ le polynôme caractéristique de la partie fuchsienne $a(t, x; D_t, D)$, on pose $V = \bigcup_{\substack{\lambda\in\mathbf{N} \\ \lambda\geq p}} \{x \in \Omega_0 ; \mathcal{C}(x, \lambda) = 0\}$. Rappelons ([2]) que pour toutes fonctions $(w_h)_{0\leq h<p}$ et v holomorphes au voisinage de $x = \alpha \notin V$ et $(t, x) = (0, \alpha) \in S$ respectivement, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Q(t, x; D_t, D)u(t, x) = v(t, x), \\ D_t^h u(0, x) = w_h(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leq h < p, \end{cases}$$

admet une unique solution holomorphe au voisinage de $(t, x) = (0, \alpha)$. L'existence et l'unicité d'une solution pour ce type de problème est encore vraie ([14]) dans des classses de fonctions suffisamment différentiables par rapport à la variable fuchsienne et de classe de Gevrey par rapport aux autres variables.

Nous supposons que le polynôme $\tau \mapsto g_A(0;\tau,1,0,\dots,0)$ admet une racine simple $\bar{\tau}$. On a donc

$$D_\tau g_A(0;\bar{\tau},1,0,\dots,0) \neq 0 \tag{1.4}$$

et le problème

$$\begin{cases} g_A(t,x;\nabla k(t,x)) = 0, \\ \nabla k(0) = (\bar{\tau},1,0,\dots,0), \\ k(0,x) = x_1, \end{cases} \tag{1.5}$$

admet une unique solution holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n$; on peut donc supposer que la fonction k est définie et holomorphe sur $\mathcal{O}_0$ et que $D_1 k(t,x) \neq 0$ pour tout $(t,x) \in \mathcal{O}_0$. Ceci permet de définir une hypersurface $K = \{(t,x) \in \mathcal{O}_0\,;\, k(t,x) = 0\}$ transverse à S. En notant T l'hyperplan de S d'équation $t = x_1 = 0$, on a $K \cap S = \Omega_0 \cap T$: l'ensemble K est une hypersurface caractéristique simple issue de T et transverse à S.

Pour tout $\delta > 0$, on pose $D_\delta = \{z \in \mathbf{C}\,;\, |z| < \delta\}$ et on note $\mathcal{R}_\delta$ le revêtement universel du disque pointé $\dot{D}_\delta = \{z \in \mathbf{C}\,;\, 0 < |z| < \delta\}$. Si v est une fonction holomorphe ramifiée autour de K, on peut trouver un réel $\delta > 0$ et un voisinage ouvert connexe $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_0$ de l'origine de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n$ tels que v soit de la forme

$$v(t,x) = \tilde{v}(z,t,x)_{|z=k(t,x)} \tag{1.6}$$

où $\tilde{v}$ est une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}$; quitte à réduire $\mathcal{O}$, on peut supposer que $|k(t,x)| < \delta$ pour tout $(t,x) \in \mathcal{O}$. La fonction (1.6) est alors définie et holomorphe sur le revêtement universel de $\mathcal{O} - K$.

On se propose de construire une solution de l'équation

$$Q(t,x;D_t,D)u(t,x) = v(z,t,x)|_{z=k(t,x)} \tag{1.7}$$

sans hypothèse particulière sur l'opérateur $a(t,x;D_t,D)$. On utilise ([15]) la partie fuchsienne d'ordre 1 et de poids 0

$$b(t,x,D_t) \equiv D_\tau g_A(0,x;\nabla k(0,x))tD_t + g_B(0,x;\nabla k(0,x)) \tag{1.8}$$

à coefficients définis et holomorphes sur Ω_0. On associe à b son polynôme caractéristique

$$P(x,\lambda) = D_\tau g_A(0,x;\nabla k(0,x))\lambda + g_B(0,x;\nabla k(0,x)),$$

qui vérifie $P(x,tD_t) = b(t,x,D_t)$, et on suppose que

$$P(0,\lambda) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \mathbf{N}. \tag{1.9}$$

NOTE. Il n'y a en général aucune relation entre (1.3) et (1.8) sauf lorsque $m = 1$, auquel cas, on a $a(t, x, D_t) = b(t, x, D_t)$ et la condition (1.9) n'est autre que la condition usuelle $\mathcal{C}(0, \lambda) \neq 0$ pour tout entier $\lambda \geq p$.

En outre, cette construction nécessite comme dans [7] et [8] des hypothèses de croissance que nous allons préciser.

Soient $a \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ et $\mathcal{O}$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$. On note $\mathcal{H}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ l'espace vectoriel des fonctions à croissance lente d'exposant a c'est-à-dire des fonctions $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ pour lesquelles il existe $c \geq 0$ tel que

$$|u(z, t, x)| \leq c|z|^a \quad \text{pour tout} \quad (z, t, x) \in \mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}.$$

D'autre part, on note $\mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ l'espace vectoriel des fonctions $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ pour lesquelles il existe $c \geq 0$ tel que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad |D_z^p u(z, t, x)| \leq c^{p+1} p!\, |z|^{a-p} \quad \text{pour tout} \quad (z, t, x) \in \mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}.$$

REMARQUE 1.1. On a $\mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{H}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ et, [8, Proposition 1.1], $\mathcal{H}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_{\delta'} \times \mathcal{O})$ si $\delta' \in]0, \delta[$.

On définit un inverse à droite de l'opérateur D_z en posant, pour tout $u \in \mathcal{H}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ (resp. $\mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$),

$$D_z^{-1} u(z, t, x) = \int_0^z u(\sigma, t, x)\, d\sigma = \int_0^1 u(sz, t, x) z\, ds$$

et on vérifie aisément que $D_z^{-1} u \in \mathcal{H}^{a+1}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$ (resp. $\mathcal{G}^{a+1}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$). On considère alors l'équation

$$Q(t, x; D_t, D)[D_z^{1-m} u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}] = v(z, t, x)_{|z=k(t,x)}. \tag{1.10}$$

Théorème 1.1. *Soient $a \geq 1$, $\delta > 0$, $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_0$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ et $v \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$, alors il existe $\delta' > 0$, $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ et une solution $u \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_{\delta'} \times \mathcal{O}')$ de l'équation* (1.10).

REMARQUE 1.2. Dans ce théorème, on peut remplacer les espaces $\mathcal{G}^a$ par les espaces $\mathcal{H}^a$ d'après le remarque 1.1.

REMARQUE 1.3. Lorsque les fonctions a_β sont identiquement nulles, alors $Q = L$ est l'opérateur linéaire étudié dans [15] (qui peut être rapproché de [4], [9] ou [16] et qui construit pour l'équation $Lu = v$ une solution ramifiée autour de K); comme expliqué dans [15], le problème [15, (1.6)-(1.8)] contient le problème [7, (2.6)-(2.7)]. En ce qui concerne [8], nous reprenons ici des outils qui s'y trouvent mais le problème

[8, (1.7)-(1.8)] et notre équation (1.10) sont en général différents. Il est toutefois possible de les relier ; expliquons brièvement de quelle manière. Rappelons que l'opérateur [8, (1.1)] s'écrit

$$P(t,x;D_t,D)u = \sum_{\beta=(l,\alpha)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}^n;\,|\beta|\le m} A_\beta(t,x,D^\Gamma u)D_t^l D^\alpha u$$

où $D^\Gamma u = (D_t^l D^\alpha u)_{(l,\alpha)\in\Gamma}$, les fonctions A_β sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^{n'}$, la partie linéarisée $A(t,x;D_t,D)\equiv\sum_{\beta=(l,\alpha)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}^n;|\beta|\le m} A_\beta(t,x,0)D_t^l D^\alpha$ vérifie (1.4) (en notant encore g_A le symbole principal de A) et le problème (1.5) admet une unique solution k holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n$. Considérons le problème [8, (1.7)-(1.8)] :

$$\begin{cases} P(t,x;D_t,D)[D_z^{m-1}u(z,t,x)|_{z=k(t,x)}] = w_1(k(t,x),t,x), \\ u(z,t,x)-w_0(z,t,x)=0 \qquad\qquad \text{pour} \quad t=0, \end{cases} \tag{1.11}$$

dans lequel on peut supposer, pour simplifier, que $w_0=0$. En posant $C_\beta(t,x,y) = A_\beta(t,x,y)-A_\beta(t,x,0)$, on a

$$\begin{aligned} P(tu) &= tAu + D_\tau Au \\ &\quad + \sum_{\beta=(l,\alpha)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}^n;\,|\beta|\le m} C_\beta(t,x,D^\Gamma tu)(tD_t^l D^\alpha u + lD_t^{l-1}D^\alpha u). \end{aligned}$$

On note alors que, si $|\beta|<m$, on a $1\ge(|\beta|+2-m)+$ et $0=((l-1)+|\alpha|+2-m)_+$; on en déduit que les termes figurant dans $\mathcal{D}^\Gamma tu$ sont de la forme $\mathcal{D}^\gamma u$ ou $t\mathcal{D}^\gamma u$, $\gamma\in\Gamma$.

Supposons que

$$C_\beta(0,x,y)=0 \quad \text{pour} \quad |\beta|=m \quad \text{et pour tout} \quad x,y, \tag{1.12}$$

alors on peut écrire $C_\beta = ta_\beta$, a_β étant holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^{n'}$; donc, en multipliant par t, on obtient pour $|\beta|=m$, les termes $t^2D_t^lD^\alpha$ et $ltD_t^{l-1}D^\alpha$ qui sont clairement de la forme $t^{(h+|\alpha|+2-m)_+}D_t^hD^\alpha$. Ces considérations montrent que tu est solution de (1.11) si u vérifie l'équation (1.10) où Q est de la forme (1.1) avec $L=tA+D_\tau A$. Pour cette équation, la condition (1.9) s'écrit simplement $D_\tau g_A(0;\triangledown k(0))(\lambda+1)\ne 0$ pour tout $\lambda\in\mathbf{N}$, soit $D_\tau g_A(0;\triangledown k(0))\ne 0$; autrement dit, la condition (1.9) est vide dans ce cas. Finalement, sous l'hypothèse (1.12), le problème (1.11) est un cas particulier du problème (1.9)-(1.10). Par exemple, lorsque Q est simplement semi-linéaire, auquel cas on a $C_\beta\equiv 0$ pour $|\beta|=m$, alors le problème (1.11), c'est-à-dire le problème [7, (2.8)-(2.9)], est un cas particulier du problème (1.9)-(1.10) ; indiquons que dans ce cas, il est possible (quitte à adapter les calculs qui vont suivre) d'établir le théorème 1.1 dans les espaces $\mathcal{H}^a$ pour $a>0$.

2. Réduction

Posons

$$Fu = \sum_{|\beta|\le m} a_\beta(t, x, \mathcal{D}^\Gamma u)\mathcal{D}^\beta u.$$

Pour expliciter l'équation (1.10), c'est-à-dire $(L + F)[D_z^{1-m} u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}] = v(z, t, x)_{|z=k(t,x)}$, on utilise le lemme suivant [10, Lemme 6.1].

Lemme 2.1. *Soient $M(t, x; D_t, D)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre m à coefficients holomorphes dans un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ et $k : \mathcal{O} \mapsto \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Il existe des opérateurs différentiels linéaires $M_q(t, x; D_t, D)$, $0 \le q \le m$, d'ordre $\le q$ à coefficients holomorphes dans $\mathcal{O}$ tels que, pour tout $a \in \mathcal{O}$ et tout germe u au point $(k(a), a) \in \mathbf{C} \times \mathcal{O}$, on ait*

$$M(t, x; D_t, D)u(k(t, x), t, x) = \sum_{q=0}^{m} M_q(t, x; D_t, D) D_z^{m-q} u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}$$

pour (t, x) voisin de a.

En outre, les coefficients de M_q sont des combinaisons linéaires de ceux de M dont les coefficients sont des polynômes en les dérivées de k. Si g est le symbole principal de M, le symbole principal de M_q, en tant qu'opérateur d'orde q, est donné par la formule

$$\sigma(M_q)(t, x; \tau, \xi) = \sum_{h+|\alpha|=q} D_\tau^h D_\xi^\alpha g(t, x; \nabla k(t, x)) \frac{\tau^h \xi^\alpha}{h!\,\alpha!}. \tag{2.1}$$

D'après ce lemme, on a

$$\begin{cases} A(t, x; D_t, D)u(k(t, x), t, x) = \sum_{q=0}^{m} A_q(t, x; D_t, D) D_z^{m-q} u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}, \\ B(t, x; D_t, D)u(k(t, x), t, x) = \sum_{q=0}^{m-1} B_q(t, x; D_t, D) D_z^{m-1-q} u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}, \end{cases} \tag{2.2}$$

où les opérateurs A_q et B_q sont d'ordre $\le q$; vu (1.4) et (2.1), on constate que $A_0 = \sigma(A_0) = 0$ et on en déduit que

$$L[D_z^{1-m} u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}] = \sum_{q=0}^{m-1} (tA_{q+1} + B_q) D_z^{-q} u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}.$$

En outre, d'après (2.1), on a

$$B_0(t, x) = g_B(t, x; \triangledown k(t, x))$$

et

$$\sigma(A_1)(t, x; \tau, \xi) = D_\tau g_A(t, x; \triangledown k(t, x))\tau + \sum_{j=1}^{n} D_{\xi_j} g_A(t, x; \triangledown k(t, x))\xi_j.$$

En utilisant la notation (1.8), il en résulte que

$$(tA_1 + B_0)(t, x, D_t, D) = b(t, x; D_t) + \sum_{l+|\alpha|\leq 1} a_{l,\alpha}(t, x)t^{l+1} D_t^l D^\alpha$$

où les $a_{l,\alpha}$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathcal{O}_0$. En notant, pour $1 \leq q \leq m-1$,

$$A_q^{l+q} = \begin{cases} B_q & \text{si} \quad l = 0, \\ A_{q+1} & \text{si} \quad l = 1, \end{cases}$$

on obtient

$$L[D_z^{1-m} u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}] = \Bigg(b(t, x; D_t) + \sum_{l+|\alpha|\leq 1} a_{l,\alpha}(t, x)t^{1+l} D_t^l D^\alpha \\ + \sum_{\substack{0\leq l\leq 1\\ 1\leq q\leq m-1}} t^l A_q^{l+q}(t, x; D_t, D) D_z^{-q} \Bigg) u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}$$

où l'ordre des opérateurs A_q^{l+q} est $\leq l + q$.

Posons $\mathcal{Q} = \{q \in \mathbf{N};\ 0 \leq q \leq m-1\}$ et pour tout $q \in \mathcal{Q}$, notons R_q l'opérateur défini par

$$R_q = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l+|\alpha|\leq 1} a_{l,\alpha}(t, x)t^{1+l} D_t^l D^\alpha & \text{si} \quad q = 0, \\ \displaystyle\sum_{0\leq l\leq 1} t^l A_q^{l+q}(t, x; D_t, D) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.3}$$

On peut alors écrire

$$L[D_z^{1-m} u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}] = \Bigg(b(t, x; D_t) + \sum_{q\in\mathcal{Q}} R_q D_z^{-q} \Bigg) u(z, t, x)|_{z=k(t,x)}.$$

Considérons ensuite les opérateurs $\mathcal{D}^\beta$, $\beta \in \mathbf{N}^n$. D'après le lemme 2.1, on a

$$D^\beta D_z^{1-m} u(k(t,x),t,x) = t^{(|\beta|+2-m)_+} \sum_{q=0}^{|\beta|} M_q^\beta D_z^{|\beta|+1-m-q} u(z,t,x)|_{z=k(t,x)}$$

où les M_q^β sont des opérateurs différentiels linéaires holomorphes sur $\mathcal{O}_0$ d'ordre q. En posant

$$Y_\beta = t^{(|\beta|+2-m)_+} \sum_{q=0}^{|\beta|} M_q^\beta D_z^{|\beta|+1-m-q} \quad \text{et} \quad Y_\Gamma u = (Y_\gamma u)_{\gamma\in\Gamma}, \tag{2.4}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned}(L+F)&[D_z^{1-m} u(z,t,x)|_{z=k(t,x)}] \\ &= \Bigg(b(t,x;D_t) + \sum_{q\in\mathcal{Q}} R_q D_z^{-q} + \sum_{|\beta|\le m} a_\beta(t,x,Y_\Gamma u(z,t,x))Y_\beta\Bigg) u(z,t,x)|_{z=k(t,x)}.\end{aligned}$$

Étant donné que $k(0,a) = a_1$ d'après (1.5), l'équation (1.10) sera a fortiori vérifiée si pour (z,t,x) voisin de $(a_1,0,a)$, on a

$$\Bigg(b(t,x;D_t) + \sum_{q\in\mathcal{Q}} R_q D_z^{-q} + \sum_{|\beta|\le m} a_\beta(t,x,Y_\Gamma u)Y_\beta\Bigg) u = v.$$

Autrement dit, quitte à changer de notation, il suffit d'étudier une équation de la forme

$$P(x,tD_t)u = \Bigg(\sum_{q\in\mathcal{Q}} R_q D_z^{-q} + \sum_{|\beta|\le m} a_\beta(t,x,Y_\Gamma u)Y_\beta\Bigg) u + v. \tag{2.5}$$

D'après l'hypothèse (1.9), il existe [15, Lemme 2.3-*a*] un voisinage ouvert $\Omega_1 \subset \Omega_0$ de l'origine de $\mathbf{C}^n$ et une constante $c_0 > 0$ tels que :

$$|P(x,k)| \ge c_0(k+1) \quad \text{pour tout} \quad x\in\Omega_1 \quad \text{et tout} \quad k\in\mathbf{N}. \tag{2.6}$$

En outre, le polynôme $\lambda \mapsto P(x,\lambda)$ étant d'ordre 1, on peut supposer qu'il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$|P(x,k)| \le c_1 k \quad \text{pour tout} \quad x\in\Omega_1 \quad \text{et tout} \quad k\in\mathbf{N}. \tag{2.7}$$

Pour tout $R > 0$, on pose

$$D_R = \{t\in\mathbf{C}\,;\ |t| < R\}.$$

Soient $a \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, $R > 0$ et Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$, on désigne par $\mathcal{E}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ qui appartiennent à l'espace $\mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_r \times \Omega)$ pour tout $r \in \,]0, R[$.

Lemme 2.2. *Soit $\Omega \subset \Omega_1$ un ouvert de $\mathbf{C}^n$. L'opérateur $P \equiv P(x, tD_t)$ est une bijection linéaire de l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ (resp. $\mathcal{E}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$) sur lui même et*

$$(P^{-1}u)(z, t, x) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{t^k}{k!} \frac{D_t^k u(z, 0, x)}{P(x, k)}\,; \tag{2.8}$$

de plus, les opérateurs P^{-1} et D_z^q commutent quel que soit $q \in \mathbf{Z}$.

Preuve. Il est clair que l'application $P : \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega) \to \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ est linéaire. Étant donné que $(tD_t)^l t^k = k^l t^k$ pour tout $k, l \in \mathbf{N}$, on a $P(x, tD_t)u(z, t, x) = \sum_{k \in \mathbf{N}} (t^k/k!) P(x, k) D_t^k u(z, 0, x)$. L'opérateur P est donc injectif d'après (2.6) ; son inverse est formellement donné par la série (2.8). Soit $u \in \mathcal{E}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$, montrons que Pu, $P^{-1}u \in \mathcal{E}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ et que $P \circ P^{-1}u = u$. Soient $0 < r < s < R$ et $\mathcal{K}$ un compact de $\mathcal{R}_\delta \times \Omega$. Si $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$, il existe $c = c(s, \mathcal{K}) \geq 0$ tel que $|(t^k/k!) D_t^k u(z, 0, x)| \leq c(r/s)^k$ pour tout $(z, t, x) \in \mathcal{R}_\delta \times D_r \times \Omega$. Ceci prouve que la série (2.8) converge dans $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$ puisque $|1/P(x, k)| \leq 1/c_0$ d'après (2.6) ; (2.8) étant aussi une série entière de t, son image par P est bien égale à u. Les opérateurs D_z^q et P commutant dans $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$, il en est de même des opérateurs P^{-1} et D_z^q. Soit $u \in \mathcal{E}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$, il reste à montrer que $Pu, P^{-1}u \in \mathcal{E}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$. D'après les inégalités de Cauchy et d'après (2.7), on a

$$\left| \frac{t^k}{k!} P(x, k) D_t^k D_z^p u(z, 0, x) \right| \leq c^{p+1} p! |z|^{a-p} c_1 k \left(\frac{|t|}{R} \right)^k$$
$$\text{pour tout} \quad (z, t, x) \in \mathcal{R}_\delta \times D_r \times \Omega.$$

Soit $r \in \,]0, R[$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} k(r/R)^k$ étant convergente, ceci prouve que $Pu \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_r \times \Omega)$. De même, en utilisant (2.6), on vérifie que $P^{-1}u \in \mathcal{E}^a(\mathcal{R}_\delta \times D_R \times \Omega)$, d'où le lemme. □

En remplaçant u par $P^{-1}u$, on en déduit que l'équation (2.5) est équivalente à

$$u = \mathcal{A}u + \mathcal{F}u + v \quad \text{où} \quad \mathcal{A} = \sum_{q \in \mathcal{Q}} R_q P^{-1} D_z^{-q} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}u = \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta(t, x, Y_\Gamma P^{-1}u) Y_\beta P^{-1}u. \tag{2.9}$$

NOTE. Notre solution de l'équation initiale (1.7) est donc de la forme $(D_z^{1-m} P^{-1}u)(k(t, x), t, x)$.

Le théorème 1.1 résulte finalement de la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Soient $a \geq 1$, $\delta > 0$, $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_0$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ et $v \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$, alors il existe $\delta' > 0$, $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ et une unique solution $u \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_{\delta'} \times \mathcal{O}')$ de l'équation* (2.9).

La démonstration de cette proposition repose sur le théorème du point fixe dans des espaces de Banach que nous allons maintenant définir ; indiquons qu'il s'agit d'espaces analogues à ceux introduits dans [8].

3. Cadre fonctionnel et estimation des opérateurs linéaires $\mathcal{A}$ et $Y_\beta P^{-1}$

Nous utiliserons les variables $\xi = \sum_{j=1}^n x_j$ et $\tau = \rho t$ où ρ est un paramètre ≥ 1.

DÉFINITION 3.1. Soient $a \in \mathbf{R}$, $L, \rho, \omega \geq 1$, $\delta > 0$ et $\phi \in \mathbf{R}_+\{\xi\}$ une fonction majorante de rayon de convergence $\geq R > 0$ tel que $\omega\delta < R$, on note $\mathcal{G}^a_\phi$ l'espace vectoriel des fonctions u holomorphes au voisinage de $\mathcal{R}_\delta \times \{0\}$ pour lesquelles il existe $c \geq 0$ tel que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \forall z \in \mathcal{R}_\delta, \quad D_z^p u(z, t, x) \ll cL^p |z|^{a-p} D^p \phi(\tau + \xi + \omega|z|). \tag{3.1}$$

Il est clair que $\mathcal{G}^a_\phi$ est un espace vectoriel et que la plus petite constante $c \geq 0$ pour laquelle (3.1) a lieu est une norme sur cet espace vectoriel, notée $\| \bullet \|_{\mathcal{G}^a_\phi}$. Posons

$$\mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta) = \left\{ (t, x) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \, ; \, \rho|t| + \sum_{j=1}^n |x_j| < R - \omega\delta \right\}.$$

Lemme 3.2. *Soit $u \in \mathcal{G}^a_\phi$, alors $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta))$ et $u \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(s, \rho, \omega, \delta))$ pour tout $s \in]\omega\delta, R[$.*

Preuve [7, Lemme 4.2]. On a

$$u(z, t, x) \ll \|u\|_{\mathcal{G}^a_\phi} |z|^a \phi(\tau + \xi + \omega|z|) \ll c\phi(\tau + \xi + \omega\delta) \quad \text{où} \quad c = \|u\|_{\mathcal{G}^a_\phi} \delta^a.$$

Autrement dit, pour tout $(h, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n$, on a

$$|D_t^h D^\alpha u(z, 0, 0)| \leq \|u\|_{\mathcal{G}^a_\phi} \rho^h D^{h+|\alpha|} \phi(\omega\delta).$$

L'ouvert $\mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta)$ étant contenu dans le domaine de convergence de la fonction majorante $\phi(\tau + \xi + \omega\delta)$, on en déduit que la série $u(z, t, x) = \sum_{(h,\alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n} (t^h x^\alpha / (h!\alpha!)) \times D_t^h D^\alpha u(z, 0, 0)$ converge normalement sur tout compact de $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \delta, \omega)$ et que u est holomorphe dans $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \delta, \omega)$. Soit $s \in]\omega\delta, R[$, on a

$$|D_z^p u(z, t, x)| \leq cL^p |z|^{a-p} D^p \phi(s) \quad \text{pour tout} \quad (z, t, x) \in \mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(s, \rho, \omega, \delta)$$

et il existe $c \geq 0$ tel que $|D^p\phi(s)| \leq c^{p+1}p!$, d'où $u \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(s, \rho, \omega, \delta))$, ce qui prouve le lemme. □

Lemme 3.3. *L'espace $\mathcal{G}^a_\phi$ est un espace de Banach.*

Preuve. Soit (u_n) une suite de Cauchy de l'espace $\mathcal{G}^a_\phi$. Il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n, n' \geq N$ et tout $z \in \mathcal{R}_\delta$,

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad D^p_z(u_n - u_{n'})(z, t, x) \ll \varepsilon L^p |z|^{a-p} D^p\phi(\tau + \xi + \omega|z|). \tag{3.2}$$

Si K est une partie compacte de $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta)$, on a donc

$$\max_K |u_n - u_{n'}| \leq \varepsilon C_K$$

$$\text{où} \quad C_K = \max_{(z,t,x)\in K} |z|^a \phi\left(\rho|t| + \sum_{j=1}^n |x_j| + \omega|z|\right) \quad \text{est} < +\infty$$

car l'application $(z, t, x) \mapsto |z|^a\phi\big(\rho|t| + \sum_{j=1}^n |x_j| + \omega|z|\big)$ est continue sur $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta)$. Ceci prouve que la suite (u_n) est de Cauchy dans l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta))$, elle converge donc uniformément vers une fonction $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta))$ sur tout compact de $\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta)$; a fortiori, pour tout $z \in \mathcal{R}_\delta$ et tout $(p, h, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n$, la suite $(D^p_z D^h_t D^\alpha u_n(z, 0, 0))_n$ converge vers $D^p_z D^h_t D^\alpha u(z, 0, 0)$. On peut alors passer à la limite sur n' dans la relation (3.2) et on en déduit que (u_n) converge vers u dans $\mathcal{G}^a_\phi$. □

Lemme 3.4. *L'application $D_z : \mathcal{G}^a_\phi \to \mathcal{G}^{a-1}_{D\phi}$ est linéaire continue de norme $\leq L$.*

Preuve. Soient $u \in \mathcal{G}^a_\phi$ et $p \in \mathbf{N}$. On a $D^{p+1}_z u \ll \|u\|_{\mathcal{G}^a_\phi} L^{p+1} |z|^{a-(p+1)} D^{p+1}\phi$ c'est-à-dire le résultat voulu,

$$D^p_z D_z u \ll L \|u\|_{\mathcal{G}^a_\phi} L^p |z|^{a-1-p} D^p D\phi.$$ □

Lemme 3.5. *L'application $D^{-1}_z : \mathcal{G}^a_{D\phi} \to \mathcal{G}^a_\phi$ est linéaire continue de norme $\leq$* $\max(\delta L^{-1}, \omega^{-1})$.

Preuve. Soient $u \in \mathcal{G}^a_{D\phi}$ et $p \in \mathbf{N}$. Si $p \geq 1$, on a

$$D^p_z D^{-1}_z u = D^{p-1}_z u \ll \|u\|_{\mathcal{G}^a_{D\phi}} L^{p-1} |z|^{a+1-p} D^p\phi \ll \delta L^{-1} \|u\|_{\mathcal{G}^a_{D\phi}} L^p |z|^{a-p} D^p\phi.$$

Supposons ensuite $p = 0$. Pour tout $z \in \mathcal{R}_\delta$ et tout $(h, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^n$, on a

$$|D_t^h D^\alpha u(z, 0, 0)| \leq \|u\|_{\mathcal{G}^a_{D\phi}} |z|^a \rho^h D^{h+|\alpha|+1} \phi(\omega|z|)$$

d'où

$$\begin{aligned} |D_t^h D^\alpha D_z^{-1} u(z, 0, 0)| &\leq \|u\|_{\mathcal{G}^a_{D\phi}} |z|^a \rho^h \int_0^1 D^{h+|\alpha|+1} \phi(\omega s|z|)|z|\, ds \\ &\leq \omega^{-1} \|u\|_{\mathcal{G}^a_{D\phi}} |z|^a \rho^h D^{h+|\alpha|} \phi(\omega|z|) \end{aligned}$$

soit $D_z^{-1} u \ll \omega^{-1} \|u\|_{\mathcal{G}^a_{D\phi}} \phi(\tau + \xi + \omega|z|)$, ce qui prouve le lemme. □

Indiquons maintenant le choix de ϕ. Rappelons ([17]) que si θ désigne la fonction majorante $\theta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n/(n+1)^2$, il existe $K > 0$ tel que $\theta^2 \ll K\theta$; la fonction majorante $\phi(\xi) = K^{-1}\theta(\xi/R)$, $R > 0$, vérifie alors

$$\phi(0) = K^{-1} \quad \text{et} \quad \phi^2 \ll \phi.$$

Rappelons [17, Lemme 2.4] que, pour tout $\eta > 1$, il existe $c = c(\eta) > 0$ tel que $\eta R/(\eta R - \bullet) \ll c\phi$, d'où $(\eta R/(\eta R - \bullet))\phi \ll c\phi$ et, par dérivation,

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \frac{\eta R}{\eta R - \bullet} D^p \phi \ll c D^p \phi. \tag{3.3}$$

Pour tout $R > 0$, on pose

$$\Delta_R = \Big\{x \in \mathbf{C}^n \,;\, \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| < R\Big\}.$$

On fixe une fois pour toutes $\eta > 1$ et $R_0 > 0$ tels que $\mathcal{D}_0 \times \Omega_1$ $(\subset \mathcal{D}_0 \times \Omega_0 = \mathcal{O}_0)$ contienne le polydisque $\overline{D}_{\eta R_0} \times \overline{\Delta}_{\eta R_0}$. D'après (2.6) et les inégalités de Cauchy, on a

$$\frac{1}{P(x, k)} \ll \frac{c_0^{-1}}{k+1} \frac{\eta R}{\eta R - \xi} \quad \text{pour tout} \quad R \in\,]0, R_0] \quad \text{et tout} \quad k \in \mathbf{N}. \tag{3.4}$$

Il est clair que $\mathcal{O}(R, \rho, \Lambda, \omega) \subset D_R \times \Delta_R \subset \mathcal{D}_0 \times \Omega_1$. Voici alors une estimation de P^{-1}.

Lemme 3.6. *Il existe une constante c $(= c_0^{-1} c(\varepsilon)) > 0$ telle que : soient $b \in \mathbf{R}$, $R \in\,]0, R_0]$ et $l \in \mathbf{N}$, si $u \in \mathcal{G}^b_{D^l\phi}$, alors $P^{-1}u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \delta, \omega))$ vérifie*

$$\begin{aligned} &\forall p \in \mathbf{N}, \quad \forall z \in \mathcal{R}_\delta, \\ &D_z^p P^{-1} u(z, t, x) \ll c\|u\|_{\mathcal{G}^b_{D^l\phi}} L^p |z|^{b-p} \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \frac{D^{k+p+l} \phi(\xi + \omega|z|)}{(k+1)!}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Preuve. Soit $u \in \mathcal{G}^b_{D^l\phi}$, alors d'après le lemme 3.2, $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R,\rho,\omega,\delta))$. En posant pour tout $R > 0$, $\Omega_R = \{x \in \mathbf{C}^n\,;\ \sum_{j=1}^n |x_j| < R\}$, on observe que

$$\mathcal{O}(R,\rho,\omega,\delta) = \bigcup_{r \in]0,R-\omega\delta[} D_{r/\rho} \times \Omega_{R-\omega\delta-r}.$$

D'après le lemme 2.2, on en déduit que $P^{-1}u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R,\rho,\omega,\delta))$. En outre, on a

$$D_z^p P^{-1} u = P^{-1} D_z^p u = \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{t^k}{k!} \frac{D_t^k D_z^p u(z,0,x)}{P(x,k)},$$

soit $D_t^k(D_z^p P^{-1}u)(z,0,x) = D_t^k D_z^p u(z,0,x)/P(x,k)$. Par ailleurs, d'après (3.1), on a

$$D_t^k D_z^p u(z,0,x) \ll \|u\|_{\mathcal{G}^a_{D^l\phi}} L^p |z|^{b-p} \rho^k D^{k+p+l}\phi(\xi + \omega|z|) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbf{N}.$$

D'après (3.3) et (3.4), on en déduit

$$D_t^k(D_z^p P^{-1}u)(z,0,x) \ll c\|u\|_{\mathcal{G}^a_{D^l\phi}} L^p |z|^{b-p} \rho^k \frac{D^{k+p+l}\phi(\xi+\omega|z|)}{k+1} \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbf{N},$$

c'est-à-dire le résultat voulu. □

Afin de contrôler les opérateurs $R_q P^{-1}$, rappelons [14, Lemme 2.8] que

$$\frac{D^k\phi}{k!} \ll R^l (l+1)^2 \frac{D^{k+l}\phi}{(k+l)!} \quad \text{pour tout} \quad k, l \in \mathbf{N}. \tag{3.6}$$

Dans les majorations qui vont suivre, toute constante qui dépend des paramètres c_0, η, R_0 déjà fixés, sera notée c, sauf mention expresse. Étant donné que $\overline{D}_{\eta R_0} \times \overline{\Delta}_{\eta R_0} \subset \mathcal{O}_0$, tous les coefficients des opérateurs R_q sont holomorphes et bornés sur $D_{\eta R_0} \times \Delta_{\eta R_0}$. Soit $R \in]0, R_0]$, si b désigne l'un de ces coefficients, on a d'après les inégalités de Cauchy

$$b(t,x) \ll c \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)}. \tag{3.7}$$

Le lemme 3.6 de [15] prend ici la forme suivante.

Lemme 3.7. *Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $R \in]0, R_0]$, l'opérateur $R_q P^{-1}$ induise une application linéaire continue de $\mathcal{G}^a_\phi$ dans $\mathcal{G}^a_{D^q\phi}$ de norme*

$$\|R_q P^{-1}\| \le \begin{cases} c\rho^{-1} & \textit{si} \quad q = 0, \\ c\rho^q & \textit{si} \quad q > 0. \end{cases}$$

Preuve. Soit $u \in \mathcal{G}^a_\phi$; d'après le lemme précédent et vu (2.3), $R_q P^{-1}u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}(R, \rho, \omega, \delta))$. Si $q = 0$, R_q est une somme finie de termes de la forme

$$b(t, x)t^{l+1}D^l_t D^\alpha P^{-1} \quad \text{où} \quad l + |\alpha| \le 1.$$

Grâce à (3.4) et (3.7), nous pouvons faire abstraction du coefficient $b(t, x)$. Vu (3.5), on a pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $z \in \mathcal{R}_\delta$,

$$D^p_z(t^{l+1}D^l_t D^\alpha P^{-1}u) \ll c\|u\|^a_\phi \rho^{-1} \sum_{k\ge l} \tau^{k+1} \frac{k!}{(k-l)!} \frac{D^{k+p+|\alpha|}\phi(\xi + \omega|z|)}{(k+1)!}.$$

Étant donné que $|\alpha| \le 1$, on a d'après (3.6),

$$\frac{D^{k+p+|\alpha|}\phi}{(k+p+|\alpha|)!} \ll (4R)^{1-|\alpha|} \frac{D^{k+p+1}\phi}{(k+p+1)!}.$$

On note que $(4R)^{1-|\alpha|} \le (4R_0)^{1-|\alpha|} \le c$; on remarque ensuite que

$$\frac{k!}{(k-l)!} \frac{(k+p+|\alpha|)!}{(k+p+1)!} \le 1 \quad \text{pour tout} \quad k \ge l$$

car $l + |\alpha| \le 1$. Il en résulte que

$$D^p_z(t^{l+1}D^l_t D^\alpha P^{-1}u) \ll c\|u\|^a_\phi \rho^{-1} \sum_{k\ge l} \tau^{k+1} \frac{D^{k+1+p}\phi(\xi + \omega|z|)}{(k+1)!}$$

d'où le résultat voulu dans ce cas.

Lorsque q est > 0, rappelons que l'ordre des opérateurs A^{l+q}_q est $\le l + q$; à nouveau, on en déduit qu'il s'agit de majorer les opérateurs

$$t^l D^h_t D^\alpha P^{-1} \quad \text{où} \quad h + |\alpha| \le l + q, \quad 0 \le l \le 1.$$

Vu (3.5), on a

$$D^p_z(t^l D^h_t D^\alpha P^{-1}u) \ll c\|u\|^a_\phi \rho^{h-l} \sum_{k\ge h} \tau^{k-h+l} \frac{k!}{(k-h)!} \frac{D^{k+p+|\alpha|}\phi(\xi + \omega|z|)}{(k+1)!}.$$

Étant donné que $h + |\alpha| \le l + q$, on a $\rho^{h-l} \le \rho^q$ et, d'après (3.6),

$$D^{k+p+|\alpha|}\phi \ll cD^{k+p-h+l+q}\phi \quad \text{où} \quad c = R_0^{l+q-(h+|\alpha|)}(l + q - (h + |\alpha|) + 1)^2.$$

On observe alors que

$$\frac{k!}{(k-h)!} \frac{(k-h+l)!}{(k+1)!} \le 1 \quad \text{pour tout} \quad k \ge h$$

car $0 \leq l \leq 1$. On obtient donc

$$t^l D_t^h D^\alpha P^{-1} u \ll c\|u\|_\phi^a \rho^q \sum_{k\geq h} \tau^{k-h+l} \frac{D^{k-h+l+p+q}\phi(\xi+\omega|z|)}{(k-h+l)!},$$

d'où le lemme. □

Les lemmes 2.2 et 3.5 permettent d'en déduire immédiatement le corollaire suivant.

Lemme 3.8. *Il existe $c>0$ tel que, pour tout $R \in]0, R_0]$, l'opérateur $\mathcal{A}$ induise un endomorphisme continu de l'espace $\mathcal{G}_\phi^a$ de norme $\leq c\big[\rho^{-1}+\sum_{q\in\mathcal{Q}^\star}(\max(\delta L^{-1},\omega^{-1})\rho)^q\big] \equiv \varepsilon_1(L,\rho,\omega,\delta)$.*

On peut ensuite établir le

Lemme 3.9. *Il existe $c>0$ tel que, pour tout $R \in]0, R_0]$, chaque opérateur $Y_\gamma P^{-1}$, $\gamma \in \Gamma$ (resp. $Y_\beta P^{-1}$, $|\beta| \leq m$) induise une application linéaire continue de $\mathcal{G}_\phi^a$ dans $\mathcal{G}_\phi^a$ (resp. $\mathcal{G}_\phi^{a-1}$) de norme $\leq \varepsilon_1(L,\rho,\omega,\delta)$ (resp. $\leq c\big[\rho^{-1}L+\sum_{q\in\mathcal{Q}^\star}(\max(\delta L^{-1},\omega^{-1})\rho)^q\big] \equiv \varepsilon_2(L,\rho,\omega,\delta)$).*

Preuve. Vu (2.4), si $|\beta| = m$, alors

$$Y_\beta = M_0 t D_z + t^2 M_1^\beta + \sum_{q=1}^{m-1} t M_{q+1} D_z^{-q} \quad \text{où} \quad M_q = t M_q^\beta \quad \text{pour} \quad q = 0, 2, \ldots, m.$$

Pour $|\beta| = m-1$, on a

$$Y_\beta = t M_0 + \sum_{q=1}^{m-1} M_q D_z^{-q} \quad \text{où} \quad M_q = t M_q^\beta,\ 1 \leq q \leq m-1.$$

Enfin, lorsque $|\beta| \leq m-2$, on obtient (en remplaçant q par $|\beta|+1-m+q$)

$$Y_\beta = \sum_{q=m-1-|\beta|}^{m-1} M_{|\beta|+1-m+q}^\beta D_z^{-q} \quad \text{où} \quad m-1-|\beta| \geq 1 \quad \text{et} \quad |\beta|+1-m+q \leq q-1$$

soit

$$Y_\beta = \sum_{q=1}^{m-1} A_q D_z^{-q}$$

où A_q désigne un opérateur différentiel linéaire holomorphe sur $\mathcal{O}_0$ d'ordre $\leq q$.

Autrement dit,

(3.8) $\quad Y_\beta \quad$ est une somme finie d'opérateurs de la forme $\quad M_0 t D_z,\ S_q D_z^{-q},\ q \geq 0$

et, vu que $|\gamma| \leq m-1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$,

(3.9) $\quad Y_\gamma \quad$ est une somme finie d'opérateurs de la forme $\quad S_q D_z^{-q},\ q \geq 0.$

On en déduit que l'opérateur $Y_\gamma P^{-1}$ agit et se majore comme l'opérateur $\mathcal{A}$; le résultat voulu est donc une conséquence du lemme 3.8.

Il est clair que l'injection $\mathcal{G}_\phi^a \hookrightarrow \mathcal{G}_\phi^{a-1}$ est linéaire continue de norme $\leq \delta$. Vu (3.8), on en déduit qu'il suffit d'étudier l'opérateur $tP^{-1}D_z$. Soit donc $u \in \mathcal{G}_\phi^a$. D'après les lemmes 3.4 et 3.6, on a

$$D_z^p P^{-1}(D_z u) \ll cL\|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} L^p |z|^{a-1-p} \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \frac{D^{k+p+1}\phi}{(k+1)!}$$

d'où

$$D_z^p(tP^{-1}D_z u) \ll c\rho^{-1} L\|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} L^p |z|^{a-1-p} \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{k+1} \frac{D^{k+1+p}\phi}{(k+1)!}$$

ce qui permet de conclure. $\square$

Pour contrôler l'opérateur $\mathcal{F}$, nous aurons besoin des lemmes qui suivent [8, Proposition 3.3 et 3.4].

Lemme 3.10. *Soient $a, b \in \mathbf{R}$ et $(u, v) \in \mathcal{G}_\phi^a \times \mathcal{G}_\phi^b$, alors $uv \in \mathcal{G}_\phi^{a+b}$ où $\|uv\|_{\mathcal{G}_\phi^{a+b}} \leq \|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} \|v\|_{\mathcal{G}_\phi^b}$.*

Preuve. Soit $p \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned} D_z^p uv &= \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} D_z^j u D_z^{p-j} v \\ &\ll \|u\|_{\mathcal{G}_\phi^a} \|v\|_{\mathcal{G}_\phi^b} L^p |z|^{a+b-p} \left(\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} D^j \phi D^{p-j} \phi \right) (\tau + \xi + \omega|z|) \end{aligned}$$

et on conclut en dérivant $\phi^2 \ll \phi$ à l'ordre p, d'où le lemme. $\square$

Lemme 3.11. *Soient f une fonction holomorphe et bornée par M sur le polydisque ouvert, centré à l'origine de $\mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n \times \mathbf{C}^N$, de rayon ηR, $R > 0$, $\eta \geq 1$ et*

$u_1, \ldots, u_N \in \mathcal{G}^0_\phi$ tels que $K\|u_i\|^0_\phi < R$, alors $v \equiv f(t, x, u_1, \ldots, u_N) \in \mathcal{G}^0_\phi$ et

$$\|v\|^0_\phi \leq cM \prod_{i=1}^{N} \frac{R}{R - \|u_i\|^0_\phi}$$

où la constante c ne dépend que de η.

Preuve. Comme $u_i \in \mathcal{G}^0_\phi$, on a en particulier

$$\forall z \in \mathcal{R}_\delta, \quad u_i(z, 0, 0) \ll \|u_i\|^0_\phi \phi(\omega|z|) \leq \|u_i\|^0_\phi \phi(R) = \|u_i\|^0_\phi \theta(1).$$

On déduit de la relation $\theta^2 \ll K\theta$ que $\theta(1) \leq K$, d'où $|u_i(z, 0, 0)| \leq K\|u_i\|^0_\phi < R$. La fonction v est donc bien définie et holomorphe au voisinage de $\mathcal{R}_\delta \times \{0\}$ et on a

$$v = \sum_{\lambda \in \mathbf{N}^N} f_\lambda(t, x) \prod_{i=1}^{N} u_i^{\lambda_i}$$

où les fonctions f_λ sont holomorphes, bornées par $MR^{-|\lambda|}$ sur le polydisque $D_{\eta R} \times \Delta_{\eta R}$; elles appartiennent donc à l'espace $\mathcal{G}^0_\phi$ et sont de norme $\leq cMR^{-|\lambda|}$ où $c = c(\eta)$ est la constante figurant dans la relation $\eta R/(\eta R - \bullet) \ll c\phi$. D'après le lemme précédent, $u^\lambda \in \mathcal{G}^0_\phi$ et $\|u^\lambda\| \leq \prod_{i=1}^N \|u_i\|^{\lambda_i}$, d'où $f_\lambda u^\lambda \in \mathcal{G}^0_\phi$ et $\|f_\lambda u^\lambda\| \leq cM \prod_{i=1}^N (\|u_i\|/R)^{\lambda_i}$. Il en résulte que la famille $(f_\lambda u^\lambda)$ est absolument sommable dans l'espace $\mathcal{G}^0_\phi$ et que

$$\|v\| \leq cM \prod_{i=1}^{N} \frac{R}{R - \|u_i\|},$$

ce qui prouve le lemme. □

4. Preuve de la proposition 2.3

On pose

$$f(t, x, Z) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} a_\beta(t, x, Z_\Gamma) Z_\beta$$

où

$$Z = (Z_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}, \quad \mathcal{B} = \{\beta \in \mathbf{N}^n \,;\, |\beta| \leq m\} \quad \text{et} \quad Z_\Gamma = (Z_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, \quad \Gamma \subset \mathcal{B}.$$

D'après (1.2), on peut écrire

$$f(t, x, Z) - f(t, x, Z') = \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{B} \\ \gamma \in \Gamma}} g_{\beta,\gamma}(t, x, Z_\Gamma, Z'_\Gamma) Z_\gamma (Z_\beta - Z'_\beta)$$
$$+ h_{\beta,\gamma}(t, x, Z_\Gamma, Z'_\Gamma) Z'_\beta eta (Z_\gamma - Z'_\gamma)$$

où les fonctions $g_{\beta,\gamma}$, $h_{\beta,\gamma}$ sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n'} \times \mathbf{C}^{n'}$. On peut évidemment supposer ces fonctions holomorphes et bornées sur le polydisque ouvert de rayon ηR_0 centré à l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{n'} \times \mathbf{C}^{n'}$.

Soient $a \geq 1$, $\delta > 0$, $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_0$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$. On choisit $R \in]0, R_0]$ tel que $\overline{D}_{\eta R} \times \overline{\Delta}_{\eta R} \subset \mathcal{O}$. Soit $v \in \mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O})$, alors d'après les inégalités de Cauchy, on a

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \forall z \in \mathcal{R}_\delta, \quad D_z^p v \ll c^{p+1} p!\, |z|^{a-p} \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)}.$$

Or, on sait que $\eta R/(\eta R - \bullet) \ll c(\eta)\phi$ et, d'après (3.6),

$$\phi \ll R^p (p+1)^2 \frac{D^p \phi}{p!} \ll (4R)^p \frac{D^p \phi}{p!}.$$

En prenant par exemple $L = 1 + c(4R)$, il en résulte que v appartient à l'espace $\mathcal{G}^a_\phi$ associé aux paramètres $L, \rho, \omega \geq 1$ et $\delta' \in]0, \delta]$ tel que $\omega\delta' < R$; sa norme étant une constante ($\leq cc(\eta)$) indépendante de δ'.

On pose

$$\varepsilon = \varepsilon(L, \rho, \omega, \delta') \equiv \max(\varepsilon_1(L, \rho, \omega, \delta'), \varepsilon_2(L, \rho, \omega, \delta'))$$

où les ε_i sont les expressions figurant dans les lemmes 3.8 et 3.9 ; étant donné que L est ≥ 1, on constate que

$$\varepsilon \leq c\left[\rho^{-1} L + \sum_{q \in \mathcal{Q}^\star} (\max(\delta', \omega^{-1})\rho)^q\right]. \tag{4.1}$$

Soit $r \geq 2\|v\|_{\mathcal{G}^a_\phi}$ et u, u' appartenant à la boule fermée $B'(0,r) = \{u \in \mathcal{G}^a_\phi\, ;\, \|u\|_{\mathcal{G}^a_\phi} \leq r\}$ de l'espace $\mathcal{G}^a_\phi$. Posons, pour tout $\beta \in \mathcal{B}$,

$$Z_\beta = Y_\beta P^{-1} u \quad \text{et} \quad Z'_\beta = Y_\beta P^{-1} u'.$$

Le lemme 3.9 montre que, si $\gamma \in \Gamma$, alors

$$Z_\gamma,\, Z'_\gamma \in \mathcal{G}^a_\phi \quad \text{et} \quad \|Z_\gamma\|_{\mathcal{G}^a_\phi}, \|Z'_\gamma\|_{\mathcal{G}^a_\phi} \leq \varepsilon r\, ;$$

l'injection $\mathcal{G}^a_\phi \hookrightarrow \mathcal{G}^0_\phi$ est linéaire continue de norme $\leq \delta'^a$, il en résulte que

$$Z_\gamma,\, Z'_\gamma \in \mathcal{G}^0_\phi \quad \text{et} \quad \|Z_\gamma\|_{\mathcal{G}^0_\phi}, \|Z'_\gamma\|_{\mathcal{G}^0_\phi} \leq \varepsilon r \delta'^a.$$

Supposons

$$K \varepsilon r \delta'^a \leq \frac{R}{2} \tag{4.2}$$

de sorte que l'hypothèse du lemme 3.11 soit vérifiée, ce qui garantit que les fonctions $g_{\beta,\gamma}(t, x, Z_\Gamma, Z'_\Gamma)$ et $h_{\beta,\gamma}(t, x, Z_\Gamma, Z'_\Gamma)$ appartiennent à l'espace $\mathcal{G}^0_\phi$ et qu'elles sont de norme $\leq c$.

D'autre part, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $\beta \in \mathcal{B}$, on a d'après les lemmes 3.9 et 3.10,

$$\begin{cases} Z_\gamma(Z_\beta - Z'_\beta),\ Z'_\beta(Z_\gamma - Z'_\gamma) \in \mathcal{G}^{2a-1}_\phi, \\ \|Z_\gamma(Z_\beta - Z'_\beta)\|_{\mathcal{G}^{2a-1}_\phi},\ \|Z'_\beta(Z_\gamma - Z'_\gamma)\|_{\mathcal{G}^{2a-1}_\phi} \leq \varepsilon^2 r \|u - u'\|_{\mathcal{G}^a_\phi}. \end{cases}$$

L'hypothèse $a \geq 1$ signifiant $a \leq 2a - 1$, il est clair que l'injection $\mathcal{G}^{2a-1}_\phi \hookrightarrow \mathcal{G}^a_\phi$ est linéaire continue de norme $\leq \delta'^{a-1} \leq \delta^{a-1} = c$. Par conséquent, on a

$$\begin{cases} Z_\gamma(Z_\beta - Z'_\beta),\ Z'_\beta(Z_\gamma - Z'_\gamma) \in \mathcal{G}^a_\phi, \\ \|Z_\gamma(Z_\beta - Z'_\beta)\|_{\mathcal{G}^a_\phi},\ \|Z'_\beta(Z_\gamma - Z'_\gamma)\|_{\mathcal{G}^a_\phi} \leq c\varepsilon^2 r \|u - u'\|_{\mathcal{G}^a_\phi}. \end{cases}$$

En utilisant à nouveau le lemme 3.10, on en déduit que

$$\mathcal{F}u - \mathcal{F}u' \in \mathcal{G}^a_\phi \quad \text{où} \quad \|\mathcal{F}u - \mathcal{F}u'\|_{\mathcal{G}^a_\phi} \leq c\varepsilon^2 r \|u - u'\|_{\mathcal{G}^a_\phi}.$$

Vu que $\mathcal{F}(0) = 0$, on a donc

$$\mathcal{F}u \in \mathcal{G}^a_\phi \quad \text{où} \quad \|\mathcal{F}u\|_{\mathcal{G}^a_\phi} \leq c\varepsilon^2 r \|u\|_{\mathcal{G}^a_\phi}.$$

En notant $\mathcal{T}u = \mathcal{A}u + \mathcal{F}u + v$, on obtient finalement,

$$\begin{cases} \|\mathcal{T}u\|_{\mathcal{G}^a_\phi} \leq \left(\varepsilon + c\varepsilon^2 r + \dfrac{1}{2}\right) r, \\ \|\mathcal{T}u - \mathcal{T}u'\|_{\mathcal{G}^a_\phi} \leq (\varepsilon + c\varepsilon^2 r)\|u - u'\|_{\mathcal{G}^a_\phi}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Vu (4.1), il est alors possible de fixer $\rho \geq 1$, $\omega \geq 1$ et $0 < \delta' < \min(\delta, R/\omega)$ satisfaisant à la condition (4.2), tels que $\varepsilon + c\varepsilon^2 r \leq 1/2$. D'après (4.3), on en déduit que $\mathcal{T} : B'(0, r) \to B'(0, r)$ est une contraction stricte, ce qui prouve l'existence d'une solution $u \in \mathcal{G}^a_\phi$; en choisissant un $s \in]\omega\delta, R]$, cette solution appartient d'après le lemme 3.2 à $\mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}')$ où $\mathcal{O}' = \mathcal{O}(s, \rho, \omega, \delta')$. On a également l'unicité car, si u' appartient à $\mathcal{G}^a(\mathcal{R}_\delta \times \mathcal{O}')$ et vérifie l'équation (2.9), on peut encore choisir $0 < R \leq R_0$ tel que $u, u' \in \mathcal{G}^a_\phi$ pour un certain $L \geq 1$, puis $r \geq 2\|v\|_{\mathcal{G}^a_\phi}$, $\rho \geq 1$, $\omega \geq 1$ et $\delta'' > 0$ tel que $\mathcal{T}$ soit une contraction stricte dans $B'(0, r)$, ce qui prouve que $u' = u$. $\square$

Références

[1] M.S. Baouendi and C. Goulaouic : *Cauchy problems with characteristic initial hypersurface*, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), 455-475.

[2] M.S. Baouendi and C. Goulaouic : *Singular nonlinear Cauchy problems*, J. Differential Equations **22** (1976), 268-291.

[3] S. Fujiié : *Représentation hypergéométrique des singularités de la solution du problème de Cauchy caractéristique à données holomorphes*, Comm. Partial Differential Equations **18** (1993), 1589-1629.

[4] S. Fujiié : Solutions Ramifiées des Problèmes de Cauchy Caractéristiques et Fonctions Hypergéométriques à deux Variables, Tohoku Mathematical Publications **6**, Dissertation, Tohoku University, Sendai, 1994, Tohoku Univ., Sendai, 1997.

[5] Y. Hamada, J. Leray and C. Wagschal : *Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples* : *problème de Cauchy ramifié* ; *hyperbolicité partielle*, J. Math. Pures Appl. (9) **55** (1976), 297-352.

[6] J. Leray : *Problème de Cauchy*, I, *Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 389-429.

[7] A. Nabaji and C. Wagschal : *Singularités à croissance lente*, J. Math. Pures Appl. (9) **72** (1993), 335-375.

[8] A. Nabaji : *Construction de solutions singulières pour des opérateurs quasi-linéaires*, Bull. Sci. Math. **119** (1995), 509-527.

[9] S. Ōuchi : *Singularities of solutions of equations with noninvolutive characteristics*, I, *The case of second order Fuchsian equations*, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), 215-251.

[10] P. Pongérard and C. Wagschal : *Ramification non abélienne*, J. Math. Pures Appl. (9) **77** (1998), 51-88.

[11] P. Pongérard : *Sur une classe d'équations de Fuchs non linéaires*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **7** (2000), 423-448.

[12] P. Pongérand : *Problème de Cauchy caractéristique à solution entière*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **8** (2001), 89-105.

[13] P. Pongérard : *Ramification des solutions du problème de Cauchy fuchsien au voisinage de l'hypersurface initiale*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **12** (2005), 493-512.

[14] P. Pongérard and C. Wagschal : *Opérateurs de Fuchs non linéaires*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **16** (2007), 303-329.

[15] P. Pongérard : *Sur l'existence d'une solution ramifiée pour des équations de Fuchs à caractéristique simple*, Proc. Amer. Math. Soc., à paraître.

[16] J. Urabe : *Meromorphic representations of the solutions of the singular Cauchy problem*, II, J. Math. Kyoto Univ. **28** (1988), 335-342.

[17] C. Wagschal : *Sur le problème de Cauchy ramifié*, J. Math. Pures Appl. (9) **53** (1974), 147-163.

[18] H. Yamane : *Singularities in Fuchsian Cauchy problems with holomorphic data*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **34** (1998), 179-190.

23 allée des rubis
97400 Saint-Denis
La Réunion
France
e-mail: Marc-Patrice.Pongerard@univ-reunion.fr