Polombo, A.
Osaka J. Math.
34 (1997), 579–588

SUR LES HYPERSURFACES A COURBURE MOYENNE CONSTANTE DE L'ESPACE HYPERBOLIQUE

ALBERT POLOMBO

(Received July 25, 1996)

0. Introduction

Une importante littérature a été consacrée, ces 25 dernières années, à l'étude des immersions isométriques, en particulier en codimension 1, à courbure moyenne constante (CMC). (Cf. [1], [2], [6], [8], [9], [10], [14], [15] et [16]).

Lorsque l'espace d'arrivée est à courbure constante c, le formalisme développé par J. Simons (cf. [13]) a permis à K. Nomizu et B. Smith (cf. [9]) de montrer que si f est une immersion isométrique à CMC d'une variété M de dimension n à courbure sectionnelle non-négative dans une variété $\bar{M}$ alors

1) Si $N = \mathbf{R}^{(n+1)}$, si M est complète et si la seconde forme fondamentale de l'immersion est de longueur constante, $f(M)$ est de la forme $\mathbf{S}^p \times \mathbf{R}^{n-p}$
2) Si $N = \mathbf{R}^{(n+1)}$ et si M est compacte, $f(M)$ est une sphère de dimension n.
3) Si $N = S^{n+1}$, si M est complète et si la seconde forme fondamentale de l'immersion est de longueur constante, ou bien si M est compacte, $f(M)$ est de la forme $\mathbf{S}^p \times \mathbf{S}^{n-p}$ ou bien $f(M)$ est une hypersphère.

Ces résultats ont été généralisés par S.T. Yau (cf. [15] et [16]) en supposant que la courbure de Ricci de M est non-négative.

Reprenant les formules de [9], Okumura (cf. [10]) a obtenu des résultats analogues en remplacant la condition de positivité portant sur la courbure sectionnelle par une condition de pincement de la seconde forme fondamentale B :

Si $\bar{M}$ est à courbure constante $c \geq 0$ et si

$$\|B\|^2 < \frac{1}{n-1}(\mathrm{trace} B)^2 + 2c,$$

alors $f(M)$ est une sphère.

Les études précédentes supposent que que la courbure c de $\bar{M}$ est non-négative. Deux résultats plus récents traitent aussi du cas c négatif :

Pour les hypersufaces compactes d'un espace à coubure constante c, R. Walter (cf. [14]) montre que si $f(M)$ est à courbure moyenne constante et à courbure sectionnelle non-négative alors $f(M)$ est isoparamétrique avec au plus deux courbures principales distinctes.

Le cas complet non-compact est traité dans [8] où il est établi que si $f(M)$ est une hypersurface complète à courbure de Ricci non-négative et à courbure moyenne constante de l'espace hyperbolique et dont ou bien l'âme n'est pas réduite à un point ou bien elle est réduite à un point et la norme de la courbure de Ricci est bornée alors $f(M)$ est un hypercylindre géodésique ou une horosphère.

Nous nous proposons, en reprenant les résultats figurant dans [12], d'établir un nouveau type de théorème sur les hypersurfaces à CMC de l'espace hyperbolique, où les conditions de signe portant sur la courbure sont remplacées par des conditions de pincement portant sur les courbures principales.

On obtient en particulier ainsi une obstruction à l'existence d'hypersurfaces minimales compactes pincées non totalement géodésiques dans les quotients compacts de $\mathbf{H}^4$.

Si M est une sous-variété de dimension n d'une variété riemannienne $\bar{M}$, la courbure R de M est reliée à la courbure $\bar{R}$ de $\bar{M}$ par l'équation de Gauss

$$\langle R_{U,V}W, Z\rangle - \langle \bar{R}_{U,V}W, Z\rangle = \langle B_{U,W}, B_{V,Z}\rangle - \langle B_{U,Z}, B_{V,W}\rangle.$$

où B est la seconde forme fondamentale.

La convention pour la courbure est ici

$$R_{U,V}W = \nabla_{[U,V]}W - [\nabla_U, \nabla_V]W.$$

L'équation de Codazzi s'écrit

$$\nabla_U B(V, W) - \nabla_V B(U, W) = -(\bar{R}_{U,V}W)^N.$$

Le membre de gauche est la différentielle extérieure de B vue comme $1-$forme à valeurs dans les $1-$formes tordues par le fibré normal.

Si M est minimale, la trace de l'équation précédente donne

$$\sum_{j=1}^{n} \nabla_{e_j}(B)_{e_j,V} = -\sum_{j=1}^{n}(\bar{R}_{e_j,V}e_j)^N.$$

Ce résultat persiste si M est à courbure moyenne constante :

$$\sum_j \nabla_V B(e_j, e_j) = \nabla_V \sum_j (B(e_j, e_j)) - 2\sum_j B(\nabla_V e_j, e_j).$$

d'où le résultat en utilisant des coordonnées normales. On voit ainsi que dans les deux situations précedentes, B est une $1-$forme, à valeurs dans les $1-$formes tordues par le fibré normal, harmonique dès que $\bar{M}$ est à courbure constante. *Remarquons que c'est encore le cas si $\bar{M}$ est symétrique car alors $\bar{R}_{U,V}W = [[U, V], W]$ et pour des vecteurs tangents à M, la contribution normale est nulle.*

1. Fibré de Dirac

Rappelons les résultats relatifs aux fibrés de Dirac (cf. [7]) établis dans [12].

On désigne par $Cl(M)$ le fibré en algèbres de Clifford réelles de (M, g)). Considérons un fibré vectoriel A en $Cl(M)$-modules à gauche sur M. Si s est une section de A, et si ϕ est une section de $Cl(M)$, on note $\phi.s$ l'action de ϕ sur s.

DÉFINITION. On dit que A est un *fibré de Dirac* sur (M, g) si A est muni d'une connexion ∇ et d'une métrique euclidienne $\langle\ ,\ \rangle$ dans la fibre telles que, si x est un vecteur tangent unitaire à (M, g), ϕ une section de $Cl(M)$ et s, t des sections de A, on ait

$$\langle x.s, x.t\rangle = \langle s, t\rangle, \qquad \text{et} \quad \nabla(\phi.s) = (\nabla\phi).s \ + \ \phi.\nabla s \ .$$

Dans cette dernière équation, on a aussi désigné par ∇ la connexion canonique de $Cl(M)$.

Si A est un fibré de Dirac sur M et si F est un fibré riemannien sur M, $A \otimes F$ est encore un fibré en modules de Clifford à gauche, l'action de l'algèbre de Clifford étant définie pour des sections ϕ, s, f respectivement de $Cl(M)$, A, F, par

$$\phi.(s \otimes f) = (\phi.s) \otimes f \ .$$

En munissant $A \otimes F$ de la métrique et de la connexion produit tensoriel, on obtient un nouveau fibré de Dirac sur M. Dans ce qui suit, les indices latins prennent des valeurs comprises entre 1 et rang du fibré de Dirac considéré, et les indices grecs des valeurs comprises entre 1 et dim M. Soit (e_α) une base locale orthonormée de champs de vecteurs de M.

DÉFINITION. L'opérateur différentiel d'ordre 1 défini sur les sections de A par

$$\mathcal{D} = \sum_\alpha e_\alpha . \nabla_{e_\alpha}$$

est appelé *l'opérateur de Dirac* associé à la connexion ∇.

Par exemple, pour le fibré de Dirac $Cl(M)$ lui-même, on a

$$\mathcal{D} = d + \delta \ ,$$

d et δ désignant respectivement la différentielle extérieure et la codifférentielle sur les formes extérieures.

Le concept de fibré de Dirac fournit un cadre simple et commode pour écrire des formules de Weitzenböck. On a en effet le résultat suivant (cf. [7]) :

Proposition. *Si (E,∇) est un fibré de Dirac sur M et $\mathcal{D}$ l'opérateur de Dirac associé, on a*

$$\mathcal{D}^2 = \nabla^*\nabla + \mathcal{R} ,$$

où $\mathcal{R}$ désigne l'endomorphisme sur les sections de A défini par $\mathcal{R}(s) = \sum_{\alpha\beta} e_\alpha.e_\beta.R^{\nabla}_{e_\alpha,e_\beta}(s)$.

On obtient dans ce cadre le résultat suivant:

Théorème 1. *Soit A un fibré de Dirac sur une variété riemannienne M. Soit* $\mathrm{End}\,A$ *le fibré de Dirac des endomorphismes de A et $\mathcal{E} = \sum_i \lambda_i\,\omega_i \otimes \omega_i$ une section symétrique de* $\mathrm{End}\,A$ *annihilée par l'opérateur de Dirac de* $\mathrm{End}\,A$. *Le laplacien d'une valeur propre λ_i, là où il existe, est donné par la formule*

$$\Delta\lambda_i = \sum_k (\lambda_k - \lambda_i)\{\sum_{\alpha\beta} \frac{1}{2}\langle R^A_{e_\alpha,e_\beta}(\omega_i),\omega_k\rangle\langle e_\alpha.e_\beta.\omega_i,\omega_k\rangle + 2\,\|\langle\nabla\omega_i,\omega_k\rangle\|^2\} .$$

En particulier, une 1-forme à valeurs 1-forme symétrique peut s'interpréter comme un endomorphisme symétrique du fibré de Clifford de M agissant trivialement sur les formes de degré différent de 1.

Soient A un fibré de Dirac, E son fibré des endomorphismes symétriques et N un fibré riemannien de rang 1.

Si $\mathcal{D}$ est l'opérateur de Dirac de $E\otimes N$ et $\mathcal{E}$ une section de ce fibré, on a, localement,

$$\mathcal{E} = \sum_i \lambda_i\omega_i \otimes \omega_i \otimes \theta$$

où (ω_i) et θ sont des bases locales orthonormées de sections respectivement de A et N.

Si pour une base locale orthonormée e_α de sections du fibré tangent, on écrit $\nabla_{e_\alpha}\omega_i = \sum_k a^k_{i\alpha}\omega_k$ et $\nabla_{e_\alpha}\theta = b_\alpha\theta$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\mathcal{E} &= \sum_{i\alpha} e_\alpha.\nabla_{e_\alpha}(\lambda_i\omega_i\otimes\omega_i\otimes\theta)\\ &= \sum_i (d\lambda_i.\omega_i + \sum_k(\lambda_i-\lambda_k)a^k_i.\omega_k)\otimes\omega_i\otimes\theta.\end{aligned}$$

En effet le fait que N soit un fibré de rang un et que θ soit une section unitaire entraîne que $\nabla\theta = 0$.

On obtient donc pour le laplacien d'une valeur propre λ_i d'une section harmonique la même formule que si $\mathcal{E}$ est une section de E, ce qui dans le cas des

1-formes à valeurs 1-formes s'écrit :

$$\Delta\lambda_i = \sum_k (\lambda_k - \lambda_i)\{\langle R_{\omega_i,\omega_k}(\omega_i), \omega_k\rangle + 2\,\|\langle \nabla\omega_i, \omega_k\rangle\|^2\}.$$

2. Hypersurfaces à courbure moyenne constante

On suppose donc maintenant que M est une hypersurface de dimension n à courbure moyenne constante dans un espace $\bar{M}$ à courbure constante c.

Utilisant le fait que $\bar{M}$ est de courbure constante et l'équation de Gauss, on obtient :

$$\Delta\lambda_i = \sum_k (\lambda_k - \lambda_i)\{(c + \lambda_i\lambda_k) + 2\,\| < \nabla\omega_i, \omega_k > \|^2\}.$$

Et, si τ est la trace de B,

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_i &= -nc\lambda_i + \lambda_i \sum_k \lambda_k^2 + c\tau - \tau\lambda_i^2 + 2\sum_k (\lambda_k - \lambda_i)\,\|\langle \nabla\omega_i, \omega_k\rangle\|^2,\\ &= -nc\lambda_i + \lambda_i\|B\|^2 + c\tau - \tau\lambda_i^2 + 2\sum_k (\lambda_k - \lambda_i)\,\|\langle \nabla\omega_i, \omega_k\rangle\|^2.\end{aligned}$$

Et comme

$$\Delta\lambda_i^2 = 2\lambda_i\Delta\lambda_i - 2\|d\lambda_i\|^2,$$

on en déduit

$$\Delta\|B\|^2 = 2\|B\|^2(\|B\|^2 - nc) + 2c\tau^2 - \tau \mathrm{Trace}\, B^3 - 2\|\nabla B\|^2,$$

formule qui apparait déjà dans [9]. Si M est minimale, la formule devient

$$\Delta\|B\|^2 = 2\|B\|^2(\|B\|^2 - nc) - 2\|\nabla B\|^2.$$

On obtient ainsi l'inégalité pour les hypersurfaces compactes minimales de [13] et [2] :

$$\int_M \|B\|^2(\|B\|^2 - nc)v_g \geq 0.$$

Examinons le cas où M est une hypersurface compacte minimale d'un quotient compact de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^{n+1}$. L'inégalité précédente ne donne plus rien puisque $c = -1$.

Posons, pour $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^2$, et calculons Δf.

$$\begin{aligned}\Delta f &= 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\lambda_i \Delta\lambda_i - \|d\lambda_i\|^2) \\ &= 2\sum_{i} \alpha_i(\lambda_i(n\lambda_i + \lambda_i\|B\|^2 + 2\sum_{k}(\lambda_k - \lambda_i)\,\|\langle\nabla\omega_i, \omega_k\rangle\|^2) - \|d\lambda_i\|^2),\end{aligned}$$

et si $a_i^k = \langle\nabla\omega_i, \omega_k\rangle$,

$$\Delta f = 2f(n + \|B\|^2) + 2\sum_{i} \alpha_i(\sum_{k} 2\lambda_i(\lambda_k - \lambda_i)\,\|a_i^k\|^2 - \|d\lambda_i\|^2).$$

Le laplacien de f est donc la somme $\Phi + Q$ d'un terme qui dépend algébriquement des courbures principales et d'une forme quadratique en les a_i^k.

Prenons $\alpha_i = \alpha$ pour $i = 1, ..., n-1$ et $\alpha_n = 1$ et désignons respectivement par f_α, Φ_α, Q_α les fonctions correspondantes. Dès que $n \geq 2$, Q_α est définie positive si $\alpha < 1 - n$ et si les λ_i, $i = 1, ..., n-1$ sont suffisamment proches de $-\lambda_n/(n-1)$ (cf. [12]).

DÉFINITION. On dira que les courbures principales λ_i $i = 1, ..., n-1$, de $\mathcal{E}$ sont *ϵ-pincées* autour de $(-1/(n-1))\lambda_n$ si, pour $i = 1, ..., n-1$,

$$|\lambda_i + \frac{\lambda_n}{n-1}| \leq \epsilon\lambda_n ,$$

et on définira de même un pincement autour de λ_1.

Le résultat suivant, établi dans [12], permet d'éliminer le lieu singulier des points de M où toutes les courbures principales sont égales :

Théorème 1. *Soit E un fibré de Dirac au-dessus d'une variété riemannienne compacte connexe (M, g). Soit $N = \{x \mid x \in M, \mathcal{E}(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros d'une section $\mathcal{E}$ de E. Alors, si $\mathcal{E}$ est annihilée par l'opérateur de Dirac de E, et si $\mathcal{E}$ n'est pas identiquement nulle, N est un ensemble polaire.*

Quitte à renforcer le pincement autour de $(-1/(n-1))\lambda_n$ on peut supposer qu'aucune bifurcation du type $\lambda_n = \lambda_i$, $i = 1, ..., n-1$, ne se produit. Le lieu des bifurcations coïncide alors avec l'ensemble des points de M où toutes les courbures principales sont nulles. On a vu que l'ensemble N des zéros de $\mathcal{E}$ est de codimension ≥ 2. La fonction bornée f_α qui, sous les hypothèses de pincement, est strictement sous-harmonique dans le complémentaire de N s'étend en une fonction strictement sous-harmonique dans M. Comme M est compacte, ceci est impossible. On en déduit que B est identiquement nulle.

Théorème 2. *Soit M une hypersurface compacte minimale d'un quotient compact de l'espace hyperbolique. Il existe un pincement des courbures principales λ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, autour de $(-1/(n-1))\lambda_n$ qui, lorsqu'il est satisfait, implique que M est totalement géodésique.*

Supposons maintenant que M est à courbure moyenne constante τ. Alors si $\tilde{B}$ est l'endomorphisme symétrique associé à B, l'endomorphisme $\tilde{B} - (\tau/n)I$ est à trace nulle et satisfait aux conditions du théorème précédent.

Théorème 3. *Soit M une hypersurface compacte à courbure constante de l'espace hyperbolique. Il existe un pincement des courbures principales λ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, autour de $(1/(n-1))(\tau - \lambda_n)$ qui, lorsqu'il est satisfait, implique que M est totalement ombilicale.*

3. La dimension 3

Dans le cas où $n = 3$, on peut préciser le pincement.

Pour calculer Q, reprenons l'expression (cf. [12, p. 424]) de la différentielle d'une valeur propre dans le cas des 1-formes à valeurs 1-formes

$$d\lambda_i = \sum_{k,\alpha} (\lambda_i - l_k) \langle \omega_i, e_\alpha . a_i^k . \omega_k \rangle e_\alpha .$$

En tenant compte de la formule $x.y = x \wedge y - \langle x, y \rangle$ et de l'orthogonalité des formes de degrés différents, on obtient

$$d\lambda_i = \sum_k (\lambda_k - \lambda_i)(\omega_k(a_i^k)\omega_i - \omega_i(a_i^k)\omega_k .$$

Pour évaluer la forme quadratique, prenons les notations suivantes

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = \lambda, \ \lambda_2 = \nu, \ \lambda_3 = \mu, \ \omega_1 = \omega, \ \omega_2 = \theta, \ \omega_3 = \eta, \\
&a_1^2 = -b, \ a_3^1 = -c, \ a_2^3 = -a.
\end{aligned}$$

On obtient alors si nous désignons par a_i, b_i, c_i les composantes des vecteurs a, b, c dans la base orthonormée ω, θ, η,

$$\begin{aligned}
dl &= (\nu - \lambda)(b_1\theta - b_2\omega) + (\mu - \lambda)(c_3\omega - c_1\eta), \\
d\nu &= (\nu - \lambda)(b_1\theta - b_2\omega) + (\mu - \nu)(a_2\eta - a_3\theta), \\
d\mu &= (\lambda - \mu)(c_3\omega - c_1\eta) + (\nu - \mu)(a_2\eta - a_3\theta).
\end{aligned}$$

que l'on écrit encore

$$dl = (\lambda - \nu)\theta \wedge \omega(b) + (\lambda - \mu)\omega \wedge \eta(c),$$

$$d\nu = (\nu - \lambda)\theta \wedge \omega(b) + (\nu - \mu)\eta \wedge \theta(a),$$
$$d\mu = (\mu - \lambda)\omega \wedge \eta(c) + (\mu - n)\eta \wedge \theta(a).$$

(Comparer avec les formules pour les 2−formes.)
Comme d'autre part (cf. [12, p. 402]) on a

$$\|d\lambda_i\|^2 = \sum_k (\lambda_i - \lambda_k)^2 \|a_i^k\|^2 + 2\sum_{j<k} (\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_i - \lambda_j)\langle a_i^k.\omega_k, a_i^j.\omega_j\rangle$$

on en déduit les identités suivantes :

$$(\lambda - \mu)c_2 = (\nu - \mu)a_1 = (\nu - \lambda)b_3.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\|d\lambda\|^2 &= (\nu - \lambda)^2 \|\theta \wedge \omega(b)\|^2 + (\mu - \lambda)^2 \|\omega \wedge \eta(c)\|^2 \\
&\quad + 2(\lambda - \nu)(\lambda - \mu)\langle \omega \wedge \eta(c), \theta \wedge \omega(b)\rangle, \\
\|d\nu\|^2 &= (\nu - \lambda)^2 \|\theta \wedge \omega(b)\|^2 + (\mu - \nu)^2 \|\eta \wedge \theta(a)\|^2 \\
&\quad + 2(\nu - \lambda)(\nu - \mu)\langle \eta \wedge \theta(a), \theta \wedge \omega(b)\rangle, \\
\|d\mu\|^2 &= (\mu - \lambda)^2 \|\omega \wedge \eta(c)\|^2 + (\mu - \nu)^2 \|\eta \wedge \theta(a)\|^2 \\
&\quad + 2(\mu - \nu)(\mu - \lambda)\langle \omega \wedge \eta(c), \eta \wedge \theta(a)\rangle.
\end{aligned}$$

Pour la fonction $f = \mu^2 + \alpha(\lambda^2 + \nu^2)$, on a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}Q &= -2\alpha(\lambda - \nu)^2 |b_3\|^2 + 2(\mu - \lambda)(\alpha\lambda - \mu)^2 (c_2)^2 + (\mu - \nu)(\alpha\nu - \mu)(a_1)^2 \\
&\quad - \alpha(\lambda - nu)^2 \|\theta \wedge \omega(b)\|^2 + 2(\mu - \lambda)(\alpha\lambda - \mu)^2 \||\omega \wedge \eta(c)\|^2 \\
&\quad + 2(\mu - \nu)(\alpha\nu - \mu)^2 \|(\eta \wedge \theta(\alpha)\|^2 - \alpha\|d\lambda\|^2 - \alpha\|d\nu\|^2 - \|d\mu\|^2.
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
&-2\alpha(\lambda - \nu)^2 |b_3\|^2 + 2(\mu - \lambda)(\alpha\lambda - \mu)^2 (c_2)^2 + 2(\mu - \nu)[\alpha\nu - \mu)(a_1)^2 \\
&= \frac{2(\lambda - \nu)^2}{(\mu - \lambda)(\mu - \nu)}\{-\alpha(\mu - \nu)(\mu - \lambda) + (\mu - \nu)(\alpha\lambda - \mu) + (\mu - \lambda)(\alpha\nu - \mu)\}(b_3)^2
\end{aligned}$$

et que le coefficient de $(b_3)^2$ est positif pour $\alpha = -8/7$ et pour $\mu \geq -\lambda$, (il vaut pour $\lambda = -1$ et $\nu = -\lambda - \mu$, $3/7(\mu^2 + 8\mu - 8)$, on obtient ainsi au terme positif précédent près la même forme quadratique que dans le cas des 2−formes à valeurs 2−formes (cf. [12, p. 418]) et on en déduit le résultat suivant :

Théorème 1. *Il n'y a pas dans les quotients compacts de l'espace hyperbolique de dimension* 4 *d'hypersurface non-totalement géodésique compacte minimale dont* *la seconde forme fondamentale B vérifie, si $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ sont ses valeurs propres, les conditions suivantes*

$$-8(1-\sqrt{3}/2)\lambda_1 \leq \lambda_3 \leq -2\lambda_1.$$

Corollaire. *Si M est une hypersurface compacte à courbure moyenne constante τ de $\mathbf{H}^4$ dont les courbures principales vérifient*

$$8(1-\sqrt{3}/2)(\frac{\tau}{2}-\lambda_1) \leq \lambda_3 \leq \tau - 2\lambda_1,$$

alors M est totalement ombilicale.

REMARQUE. Comme le font remarquer Okumura et Goldberg cf. [3], [4], [5], on peut faire un parallèle entre la situation précédente et les variétés à courbure de Ricci harmoniques (comme 1-forme à valeurs 1-formes). Cette condition d'harmonicité est par exemple réalisée par les variétés conformément plates à courbure scalaire constante.

References

[1] S.C. de Ameida et F.G.B. Brito: *closed 3-dimensional hypersurface with constant mean curvature and constant scalar curvature*, Duke Math. J. **61** (1990), 195–206.

[2] S.S. Chern: M. do Carmo et S. Kobayashi, *Minimal Submanifold of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant length*, in Functional Analysis and Related Topics, edited by F. Browder, Springer-Verlag, 1970.

[3] S.I. Goldberg: *An application of Yau maximun principe to conformally flat spaces*, Proc. Am. Math. Soc. **79** (1980), 268–270.

[4] S.I. Goldberg: *On conformally flat spaces with definite Ricci curvature II*, Kodai Math. Sem. Rep. **27** (1976), 445–446.

[5] S.I. Goldberg et M. Okumura: *Conformally flat manifolds and a pinching problem on the Ricci tensor.*

[6] H.B. Lawson: *Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces*, Ann. of Math. **89** (1969), 187–197.

[7] H.B. Lawson et M.L. Michelshon: *Spin Geometry*, Princeton Mathematical Series.

[8] J.M. Morvan et Bao-Qiang Wu: *Hypersurfaces with constant mean curvature in hyperbolic space form*, preprint.

[9] K. Nomizu et B. Smyth: *A formula of Simons' type and hypersurfaces with constant mean curvature*, J. of Differential Geom. **3** (1969), 367–377.

[10] M. Okumura: *Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor*, Amer. J. Math. **86** (1974), 207–213.

[11] M. Okumura: *Submanifolds and a pinching problem on the second fundamental tensor*, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 285–291.

[12] A. Polombo: *De nouvelles formules de Weitzenböck pour des endomorphismes harmoniques. Applications géométriques*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, **25** (1992), 393–428.
[13] J. Simons: *Minimal varietes in riemannian manifolds*, Ann. of Math. **88** (1968), 62–105.
[14] R. Walter: *Compact Hypersurfaces with a constant Higher Mean Curvature Function*, Math. Ann. **270** (1985), 125–145.
[15] S.T. Yau: *Submanifolds with constant mean curvature I*, Amer. J. Math. **96** (1974), 346–366.
[16] S.T. Yau: *Submanifolds with constant mean curvature II*, Amer. J. Math. **97** (1975), 76–100.

Faculté des Sciences
Parc Grandmont
37200 Tours, FRANCE
e-mail : polombo@univ-tours.fr