Yoshioka, T.
Osaka J. Math.
19 (1982), 787-813

COHOMOLOGIE A ESTIMATION L^2 AVEC POIDS PLURISOUSHARMONIQUES ET EXTENSION DES FONCTIONS HOLOMORPHES AVEC CONTRÔLE DE LA CROISSANCE

Tsuneo YOSHIOKA

(Received January 28, 1981)

1. Introduction

Le présent mémoire concerne un système fini $F=(F_1, \cdots, F_m)$ de fonctions holomorphes dans un ouvert pseudoconvexe Ω de C^n.

Premièrement, nous nous proposons d'étendre aux formes différentielles de bidegré (p, q) fermées par rapport à $\bar\partial$ le théorème de Skoda (Théorème 1 de [9]):

Soient φ une fonction plurisousharmonique dans Ω, $s>1$ et $t=\min\{n, m-1\}$. Pour toute fonction f, holomorphe dans Ω et telle que $\|f\|^2=\int_\Omega |f|^2|F|^{-2(st+1)}e^{-\varphi}\cdot dV<+\infty$, il existe un système $(h_1, \cdots, h_m)$ de m fonctions holomorphes dans Ω tel que l'on ait

$$\sum_i h_iF_i=f,\ \sum_i \int_\Omega |h_i|^2|F|^{-2st}e^{-\varphi}dV \leqq \frac{s}{s-1}\|f\|^2.$$

Pour ceci, en poursuivant les raisonnements de Skoda, on verra qu'il ne s'agit que de l'énoncé suivant:

Soit X un ensemble analytique fermé de dimension $\leqq n-1$ dans un ouvert Ω de C^n et soit $u\in L^2_{(p,q)}(\Omega, \text{loc})$. Si l'on a dans $\Omega\backslash X$ la relation $\bar\partial u=0$ au sens des distributions, alors on l'a dans Ω tout entier.

Nous démontrerons un énoncé plus général au n°4. Pour $q=0$, Skoda a démontré cet énoncé à l'aide du développement de Laurent. Pour le problème d'extension traité dans la troisième partie de ce mémoire, on aura besoin du théorème étendu non seulement pour $p=q=0$ mais aussi pour $p=0$, $q=1$. Remarquons que, dans le théorème original de Skoda, les F_i pouvent être en nombre dénombrable infini mais, en revanche, nous les supposons en nombre fini.

Deuxièmement, nous nous proposons d'établir un théorème de cohomologie, à estimation L^2 avec poids plurisousharmoniques et à valeurs dans le faisceau des germes de m formes, fermées par rapport à $\bar{\partial}$ et donnant des relations linéaires homogènes entre les F_i. Celui qui joue là un rôle fondamental est un système de solutions $(u_1, \cdots, u_m)$ pour l'opérateur $\bar{\partial}$ qui vérifie la relation $\sum_i F_i u_i = 0$ et une certaine estimation L^2. Un tel système de solutions est obtenu d'après le théorème d'Hörmander (Theorem 2.2.1′ de [1]) et le théorème de Skoda étendu dans la première partie.

Troisièmement, nous nous proposons de montrer un théorème d'extension à croissance qui généralise le théorème de Leontev pour $m=n=1$ dans [6] et celui de Nishimura pour $m=1$, n: quelconque dans [7]. Pour cela, on introduit au n°8 une famille Φ de fonctions plurisousharmoniques dans Ω, qui domine la croissance des fonctions. Ceci posé, on se donne une fonction g holomorphe sur la sous-variété analytique X dans Ω définie par $F_1 = \cdots = F_m = 0$ $(1 \leqq m \leqq n)$ et on suppose les hypothèses suivantes:

(i) il existe une $\alpha \in \Phi$ telle que $|F_i| \leqq e^{\alpha}$ $(i=1, \cdots, m)$;

(ii) il existe une $\beta \in \Phi$ telle que $|dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_m| \geqq e^{-\beta}$ sur X;

(iii) il existe une $\gamma \in \Phi$ telle que $|g| \leqq e^{\gamma}$ sur X.

Sous ces hypothèses, nous montrerons qu'*il existe une fonction G, holomorphe dans Ω et telle que l'on ait $G=g$ sur X et $|G| \leqq e^{\varphi}$ dans Ω, φ appartenant à Φ et ne dépendant pas de g.*

Afin d'y appliquer le théorème de cohomologie établi dans la deuxième partie, nous construisons au n°9 un recouvrement ouvert de Stein de Ω dont les ouverts rectangulaires deviennent de plus en plus petits suivant que s'augmente une certaine fonction de Φ mais ne deviennent pas trop petits, puisqu'il faut une grandeur qui assure l'existence d'une partition de l'unité, subordonnée au recouvrement et majorée en gradient convenablement. Au n°12, en étendant la fonction g à chaque ouvert du recouvrement d'une façon triviale dans la direction transversale à X, on évalue la norme de cette extension locale et la norme de son cobord avec certains poids, ce qui nous permettra de résoudre le problème.

Signalons que l'exemple donné par Nishimura dans [7] montre que, pour le problème d'extension à croissance, on doit supposer la condition (ii) ou une telle sorte de condition.

Finalement, au n°13, nous donnerons diverses familles de fonctions plurisousharmoniques. Pour les fonctions entières d'ordre inférieur à r dans $\boldsymbol{C}^n$, r étant un réel positif, on utilise la famille des fonctions de la forme $a(|z|^r+1)$, a étant une constante $\geqq 1$. Pour un ouvert pseudoconvexe général, borné ou non, on peut former quelques familles significatives au moyen de la distance à la frontière de l'ouvert.

2. Notations

Reprenons les notations d'Hörmander dans [1]. Nous nous plaçons dans un ouvert Ω de l'espace C^n de n variables complexes $z_1, \cdots, z_n$. Une forme différentielle u de bidegré (p, q) dans Ω peut s'écrire

$$u = \sum' u_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J ,$$

où $\sum'$ signifie que la sommation est étendue à l'ensemble des couples de deux suites $I=(i_1, \cdots, i_p)$ et $J=(j_1, \cdots, j_q)$ d'entiers telles que $1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq n$ et $1 \leqq j_1 < \cdots < j_q \leqq n$; chaque coefficient $u_{I,J}$ de u en $dz^I \wedge d\bar{z}^J$ est une distribution dans Ω; et on note $dz^I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}$ et $d\bar{z}^J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$. L'opérateur $\bar{\partial}$ est défini de la façon usuelle: $\bar{\partial}u$ est une forme différentielle de bidegré $(p, q+1)$ dont le coefficient en $dz^I \wedge d\bar{z}^K$ est par définition donné par la formule

$$(\bar{\partial}u)_{I,K} = \sum_{\nu=1}^{q+1} (-1)^{p+\nu-1} (\partial/\partial\bar{z}_{k_\nu}) u_{I,K_\nu} ,$$

calculée au sens des distributions, où $K=(k_1, \cdots, k_{q+1})$ et $K_\nu=(k_1, \cdots, k_{\nu-1}, k_{\nu+1}, \cdots, k_{q+1})$.

Soit φ une fonction réelle mesurable dans Ω, localement bornée supérieurement et admettant la valeur $-\infty$. Toute fonction semi-continue supérieurement est une telle fonction. Désignons par $L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$ l'espace des formes différentielles $u = \sum' u_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J$ de bidegré (p, q) telles que tout $u_{I,J}$ soit une fonction mesurable dans Ω et que sa norme $\|u\|_\varphi$ définie par

$$|u|^2 = \sum' |u_{I,J}|^2 , \quad \|u\|^2_\varphi = \int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} dV$$

soit finie, dV étant la mesure de Lebesgue dans C^n.

Désignons par $L^2_{(p,q)}(\Omega, \text{loc})$ l'espace des formes différentielles de bidegré (p, q) dans Ω dont les coefficients sont des fonctions de carré intégrable sur tout compact dans Ω; et par $\mathcal{L}^2_{(p,q)}$ le faisceau des germes d'éléments de $L^2_{(p,q)}(\Omega, \text{loc})$.

Soit $\mathcal{U}=(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recouvrement ouvert de Ω, Λ étant l'ensemble des indices supposé dénombrable et totalement ordonné. Pour un entier $r \geqq 0$, désignons par $C^r(\mathcal{U}, \mathcal{L}^2_{(p,q)})$ l'espace des cochaînes alternées $c=(c_\alpha)$ de $\mathcal{U}$, de dimension r et à valeurs dans $\mathcal{L}^2_{(p,q)}$, α parcourant l'ensemble des suites $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ de $r+1$ éléments de Λ et c_α étant un élément de $L^2_{(p,q)}(U_\alpha, \text{loc})$, où $U_\alpha = U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_r}$, tel que, si σ est une substitution des indices, on ait $c_{\sigma\alpha} = \operatorname{sgn} \sigma \cdot c_\alpha$. δ désigne l'opérateur du cobord et $\bar{\partial}c$ désigne la cochaîne $(\bar{\partial}c_\alpha) \in C^r(\mathcal{U}, \mathcal{L}^2_{(p,q+1)})$, pourvu que toute $\bar{\partial}c_\alpha$, calculée au sens des distributions, appartienne à $L^2_{(p,q+1)}(U_\alpha, \text{loc})$. La norme $\|c\|_\varphi$ de c est définie par

$$\|c\|^2_\varphi = \sum' \int_{U_\alpha} |c_\alpha|^2 e^{-\varphi} dV ,$$

la sommation étant étendue à l'ensemble des suites de $r+1$ indices strictement croissantes.

3. Extension du théorème de Skoda

Théorème 1. *Dans un ouvert pseudoconvexe Ω de $\boldsymbol{C}^n$, soient donnés un système fini $(F_1, \cdots, F_m)$ de m fonctions holomorphes et une fonction plurisousharmonique φ. Posons $\chi=\log \sum_i |F_i|^2$ et $t=\min\{n, m-1\}$. Soit s un réel>1. Soient p et q des entiers $\geqq 0$.*

Alors, pour toute $f \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi+(st+1)\chi)$ telle que $\bar\partial f=0$, il existe un système $(h_1, \cdots, h_m)$ tel que

$$h_i \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi+st\chi)\,, \quad \bar\partial h_i = 0 \qquad (i=1, \cdots, m)\,,$$

$$\textstyle\sum_i F_i h_i = f\,, \quad et \quad \sum_i \|h_i\|^2_{\varphi+st\chi} \leqq \dfrac{s}{s-1}\|f\|^2_{\varphi+(st+1)\chi}\,.$$

Dans le cas où $|F|^2=\sum_i |F_i|^2>0$ dans Ω, suivant la méthode de Skoda dans [9] à partir de la dernière moitié de la page 547 jusqu'à la première partie de la page 557 et remplaçant les raisonnements de Skoda à la page 559 par ceux d'Hörmander dans la démonstration du Theorem 2.2.1′ de [1], on peut démontrer le théorème sans difficulté. Nous laissons les détails au soin du lecteur.

Avec Skoda, éliminons l'hypothèse $|F|>0$ dans Ω. On peut supposer sans restreindre la généralité Ω connexe et F_1 non identiquement nulle dans Ω. Soit X l'ensemble des zéros de F_1. Posons $\Omega_1=\Omega\backslash X$. Comme Ω_1 est pseudoconvexe et que $|F|>0$ dans Ω_1, on a une solution $(h_1, \cdots, h_m)$ pour f dans Ω_1. Comme X est de mesure nulle, on peut considérer les h_i comme éléments de $L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi+st\chi)$. La relation $\sum_i F_i h_i=f$ (presque partout) et l'inégalité demandée entre les normes sont trivialement vérifiées dans Ω. Il ne reste qu'à montrer $\bar\partial h_i=0$ dans Ω au sens des distributions. Manifestement, pour ceci, il suffit d'établir le théorème suivant:

Théorème 2. *Soit X un ensemble analytique de dimension complexe $\leqq n-1$ dans un ouvert Ω de $\boldsymbol{C}^n$. Soient $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \text{loc})$ et $v \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \text{loc})$. Si l'on a $\bar\partial u=v$ dans $\Omega\backslash X$ au sens des distributions, alors on l'a dans Ω tout entier.*

4. Démonstration du théorème 2

En vertu des partitions de l'unité, l'étude est tout locale. Si l'on montre le théorème au voisinage de tout point régulier de X, on aura $\bar\partial u=v$ sauf sur l'ensemble des points singuliers de X. Or, cet ensemble est un ensemble analytique dans Ω, de dimension plus petite que X. Par récurrence sur la dimension de X, on achèvera la démonstration.

Au voisinage d'un point régulier de X, il existe une hypersurface analytique régulière qui contient X. D'autre part, tout changement analytique des coordonnées locales conserve la situation du problème. Donc, il suffit de démontrer le théorème sous les hypothèses suivantes:

(i) Ω est de la forme $\Omega=\Delta\times\Omega'$, Δ étant un cercle défini par $|z_1|<R$ dans le plan de la variable z_1 ($R>0$) et Ω' étant un domaine borné de l'espace C^{n-1} des variables $z'=(z_2, \cdots, z_n)$;

(ii) X est défini par $z_1=0$ dans Ω;

(iii) tous les coefficients des u et v sont de carré intégrable dans Ω;

(iv) $0\leqq p\leqq n$ et $0\leqq q\leqq n-1$.

Sous ces hypothèses, étant données deux suites d'entiers $I=(i_1, \cdots, i_p)$ et $J=(j_1, \cdots, j_{q+1})$, telles que $1\leqq i_1<\cdots<i_p\leqq n$ et $1\leqq j_1<\cdots<j_{q+1}\leqq n$, et une fonction g de classe C^∞ à support compact dans Ω, nous avons à montrer $\int_\Omega A\,dV=0$, où

$$A=v_{I,J}g-\textstyle\sum_{\nu=1}^{q+1}(-1)^{p+\nu}u_{I,J_\nu}(\partial/\partial\bar{z}_{j_\nu})g; \tag{1}$$

$J_\nu=(j_1, \cdots, j_{\nu-1}, j_{\nu+1}, \cdots, j_{q+1})$; $v_{I,J}$ est le coefficient de v en $dz^I\wedge d\bar{z}^J$ et il en est de même de u_{I,J_ν}. Comme A est intégrable sur Ω, il suffit de montrer qu'il existe une suite de réels (ρ_k) telle que $0<\rho_k<R$, $\lim \rho_k=0$ et

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Delta(\rho_k)\times\Omega'}A\,dV=0,$$

où $\Delta(\rho)=\{z_1\colon \rho<|z_1|<R\}$ pour $0\leqq\rho<R$.

Posons maintenant

$$w(z_1)=\frac{(-1)^{p+1}}{2}\int_{\Omega'}u_{I,J_1}(z_1, z')\cdot g(z_1, z')\,dV'(z'), \tag{2}$$

dV' étant la mesure de Lebesgue dans Ω'. D'après le théorème de Fubini et l'inégalité de Schwarz, on voit aisément que $w(z_1)$ est presque partout définie et de carré intégrable sur Δ.

Cela posé, nous allons montrer l'énoncé suivant:

(a) *Pour presque tout réel* ρ *de l'intervalle ouvert* $(0, R)$, *on a*

$$\int_{\Delta(\rho)\times\Omega'}A\,dV=\begin{cases}\rho\displaystyle\int_0^{2\pi}w(\rho e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta & (si\ j_1=1),\\ 0 & (si\ j_1\neq 1).\end{cases} \tag{3}$$

Dans le cas régulier où u est de classe C^1 et v est continue au voisinage de $(\Delta(\rho_0)\times\Omega')\cap(\operatorname{supp} g)$ pour un certain ρ_0 ($0\leqq\rho_0<R$), la relation $\bar\partial u=v$ entraîne

$$\int_{\Delta(\rho)\times\Omega'}A\,dV=\textstyle\sum_{\nu=1}^{q+1}(-1)^{p+\nu-1}\displaystyle\int_{\Delta(\rho)\times\Omega'}(\partial/\partial\bar{z}_{j_\nu})(u_{I,J_\nu}g)\,dV$$

quel que soit ρ ($\rho_0<\rho<R$). En tenant compte du support de g, on voit que les termes avec $j_\nu\neq1$ du second membre se réduisent à 0 et que le terme avec $j_\nu=1$ (alors $\nu=1$) s'écrit

$$(-1)^p \int_{\Delta(\rho)} dS \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \int_{\Omega'} u_{I,J_\nu} g\, dV' = -2 \int_{\Delta(\rho)} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_1} dS\,,$$

dS étant la mesure de Lebesgue dans Δ. En vertu de la formule de Green-Stokes, il en résulte que (3) subsiste pour tout ρ ($\rho_0<\rho<R$).

Le cas général se ramène au cas régulier au moyen de la régularisation de Friedrichs. Prenons un nombre positif $\rho_0<R$ assez petit pour que l'on ait $z+\operatorname{supp} g\subset\Omega$ si $z\in \boldsymbol{C}^n$ satisfait à $|z|\leqq\rho_0$. Choisissons ensuite une fonction réelle $\omega\geqq 0$ de classe C^∞ dans $\boldsymbol{C}^n$, telle que $\operatorname{supp}\omega\subset\{z\in\boldsymbol{C}^n\colon |z|\leqq 1\}$ et $\int_{\boldsymbol{C}^n}\omega\, dV=1$. En posant $u=0$ et $v=0$ en dehors de Ω, on considère $v_{I,J}$ et u_{I,J_ν} comme éléments de $L^2(\boldsymbol{C}^n)$. Pour chaque ε ($0<\varepsilon<\rho_0$), posons $\omega^{(\varepsilon)}(z)=\varepsilon^{-2n}\omega(z/\varepsilon)$, $v^{(\varepsilon)}_{I,J}=v_{I,J}*\omega^{(\varepsilon)}$ et $u^{(\varepsilon)}_{I,J_\nu}=u_{I,J_\nu}*\omega^{(\varepsilon)}$. En remplaçant $v_{I,J}$ par $v^{(\varepsilon)}_{I,J}$ et u_{I,J_ν} par $u^{(\varepsilon)}_{I,J_\nu}$ respectivement, on définit $A^{(\varepsilon)}$ par (1) et $w^{(\varepsilon)}$ par (2).

Les $v^{(\varepsilon)}_{I,J}$ et $u^{(\varepsilon)}_{I,J_\nu}$ sont de classe C^∞ dans $\boldsymbol{C}^n$. On a $\|v^{(\varepsilon)}_{I,J}-v_{I,J}\|_{L^2(\boldsymbol{C}^n)}\to 0$ et $\|u^{(\varepsilon)}_{I,J_\nu}-u_{I,J_\nu}\|_{L^2(\boldsymbol{C}^n)}\to 0$ pour $\varepsilon\to+0$. Il en résulte aussitôt que

$$(4)\qquad \int_{\Delta(\rho)\times\Omega'} A^{(\varepsilon)} dV \to \int_{\Delta(\rho)\times\Omega'} A\, dV \qquad \text{pour } \varepsilon\to+0\,,$$

quel que soit ρ ($\rho_0<\rho<R$). En outre, on observe sans peine que l'on a

$$v^{(\varepsilon)}_{I,J} = \textstyle\sum_{\nu=1}^{q+1} (-1)^{p+\nu-1}(\partial/\partial\bar{z}_{j_\nu})u^{(\varepsilon)}_{I,J_\nu}$$

au voisinage de $(\Delta(\rho_0)\times\Omega')\cap(\operatorname{supp} g)$. D'après ce que nous avons vu au cas régulier, la formule (3), où A et w sont remplacées par $A^{(\varepsilon)}$ et $w^{(\varepsilon)}$ respectivement, subsiste quel que soit ρ ($\rho_0<\rho<R$).

D'autre part, d'après l'inégalité de Schwarz, on a pour presque tout ρ de l'intervalle (ρ_0, R)

$$\begin{aligned}
&\left|\rho\int_0^{2\pi} w^{(\varepsilon)} e^{i\theta} d\theta - \rho\int_0^{2\pi} w\, e^{i\theta} d\theta\right| \\
&\leqq \frac{\rho}{2}\int_{(0,2\pi)\times\Omega'} |u^{(\varepsilon)}_{I,J_1}-u_{I,J_1}|\,|g|\, d\theta\, dV' \\
&\leqq M\Big(\int_{(0,2\pi)\times\Omega'} |u^{(\varepsilon)}_{I,J_1}-u_{I,J_1}|^2 \rho\, d\theta\, dV'\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

où $z_1=\rho e^{i\theta}$ et M est une constante positive finie qui ne dépend ni de ε ni de ρ. Désignons par $B^{(\varepsilon)}(\rho)$ l'intégrale entre parenthèses du dernier membre. Pour chaque ε ($0<\varepsilon<\rho_0$), la fonction $B^{(\varepsilon)}$ de ρ est presque partout définie et mesurable dans (ρ_0, R). Je dis que $B^{(\varepsilon)}$ converge vers 0 en mesure dans (ρ_0, R). En effet, sinon, on pourrait trouver $a>0$, $b>0$ et une suite de nombres positifs (ε_k) de telle manière que $\varepsilon_k\to 0$ et que la mesure de l'ensemble des ρ dans (ρ_0, R) satisfaisant à $B^{(\varepsilon_k)}(\rho)\geqq a$ soit au moins égale à b. Alors, on aurait

$$0 < ab \leqq \int_{\rho_0}^{R} B^{(\varepsilon_k)}(\rho) d\rho \leqq \int_{\Delta(\rho_0)\times\Omega'} |u_{I,J_1}^{(\varepsilon_k)} - u_{I,J_1}|^2 dV ,$$

ce qui contredit $\|u_{I,J_1}^{(\varepsilon)} - u_{I,J_1}\|_{L^2(C^n)} \to 0$ pour $\varepsilon \to +0$.

Donc, on peut extraire une suite de nombres positifs (ε_k) convergeant vers 0, de telle manière qu'on ait, pour $k \to \infty$, $B^{(\varepsilon_k)} \to 0$ presque partout dans (ρ_0, R). De là et de (4), il résulte que (3) subsiste pour presque tout ρ dans (ρ_0, R). ρ_0 étant arbitraire pourvu qu'il soit assez petit, nous avons ainsi démontré l'énoncé (a).

En vertu de (a) et en vue de ce que nous avons signalé après la formule (1), le théorème est une conséquence immédiate de la proposition suivante:

(b) *Si w est une fonction de carré intégrable dans Δ, alors on a*

$$\liminf_{\rho \to +0} \operatorname{ess} \rho \int_0^{2\pi} |w(\rho e^{i\theta})| d\theta = 0 .$$

Cela revient à dire que, pour tout ensemble E de mesure nulle dans $(0, R)$, il existe une suite de nombres (ρ_k) telle que l'on ait $0 < \rho_k < R$ et $\rho_k \notin E$ $(k=1, 2, \cdots)$, que $w(\rho_k e^{i\theta})$ soit intégrable sur $(0, 2\pi)$ et que l'on ait $\lim \rho_k = 0$ et

$$\lim_{k\to\infty} \rho_k \int_0^{2\pi} |w(\rho_k e^{i\theta})| d\theta = 0 .$$

En effet, sinon, on pourrait trouver $a > 0$ $(a < R)$ et $b > 0$ de manière qu'on ait $\rho \int_0^{2\pi} |w(\rho e^{i\theta})| d\theta \geqq b$ pour presque tout ρ dans $(0, a)$. Alors, on aurait pour tout $r \in (0, a)$

$$rb \leqq \int_0^r d\rho \cdot \rho \int_0^{2\pi} |w(\rho e^{i\theta})| d\theta \leqq r(\pi W(r))^{1/2} ,$$

où $W(r) = \int_{0<|z_1|<r} |w(z_1)|^2 dS \to 0$ pour $r \to +0$, ce qui est impossible.

Nous avons ainsi achevé la démonstration du théorème 2 et par suite celle du théorème 1.

5. Système de solutions satisfaisant à une équation linéaire

Soit φ une fonction plurisousharmonique dans un ouvert de $\boldsymbol{C}^n$. Avec Hörmander, nous disons qu'une fonction réelle continue $c > 0$ dans Ω est une borne inférieure pour la plurisousharmonicité de φ si

$$\sum_{k,l=1}^{n} t_k \bar{t}_l (\partial^2/\partial z_k \partial \bar{z}_l)\varphi - c \sum_{k=1}^{n} |t_k|^2$$

est une distribution positive quel que soit $(t_1, \cdots, t_n) \in \boldsymbol{C}^n$.

Cela posé, d'après le théorème d'Hörmander et le théorème de Skoda étendu précédemment, nous allons montrer le

Théorème 3. *Dans un ouvert pseudoconvexe* Ω *de* $\boldsymbol{C}^n$, *soient donnés un système fini* $(F_1, \cdots, F_m)$ *de* m *fonctions holomorphes et une fonction plurisousharmonique* φ *admettant* e^{κ} *pour une borne inférieure pour sa plurisousharmonicité, où* κ *est une fonction réelle continue dans* Ω. *Posons* $\chi=\log\sum_i|F_i|^2$ *et* $t=\min\{n, m-1\}$. *Soit* s *un réel*>1. *Soient* p *et* q *des entiers tels que* $0\leqq p\leqq n$, $1\leqq q\leqq n$.

Alors, pour tout système $(f_1, \cdots, f_m)$ *tel que*

$$\begin{aligned}&f_i\in L^2_{(p,q)}(\Omega, \kappa+\varphi+st\chi)\,,\\&\bar\partial f_i=0 \quad (i=1, \cdots, m)\,, \quad \textit{et} \quad \textstyle\sum_i F_i f_i=0\,,\end{aligned}$$

il existe un système $(u_1, \cdots, u_m)$ *tel que*

$$\begin{aligned}&u_i\in L^2_{(p,q-1)}(\Omega, \varphi+st\chi)\,,\\&\bar\partial u_i=f_i \quad (i=1, \cdots, m)\,, \quad \textstyle\sum_i F_i u_i=0\,, \text{ et}\\&\textstyle\sum_i\|u_i\|^2_{\varphi+st\chi}\leqq \dfrac{2}{q}\,\dfrac{2s-1}{s-1}\textstyle\sum_i\|f_i\|^2_{\kappa+\varphi+st\chi}\,.\end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, posons $\theta=\varphi+st\chi$. Pour chaque i, il existe d'après Hörmander (Theorem 2.2.1′ de [1]) une $g_i\in L^2_{(p,q-1)}(\Omega, \theta)$ telle que $\bar\partial g_i=f_i$ et $q\|g_i\|^2_\theta\leqq\|f_i\|^2_{\kappa+\theta}$. La forme $v=\sum_i F_i g_i$ est mesurable, de bidegré $(p, q-1)$. Elle vérifie $\bar\partial v=\sum_i F_i\bar\partial g_i=\sum_i F_i f_i=0$ et, en vertu de l'inégalité de Schwarz,

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{\varphi+(st+1)\chi}&=\int_\Omega\textstyle\sum'_{I,K}|\sum_i F_i g_{i,I,K}|^2 e^{-\theta}|F|^{-2}dV\\&\leqq\textstyle\sum_i\|g_i\|^2_\theta\leqq q^{-1}\sum_i\|f_i\|^2_{\kappa+\theta}<+\infty\,.\end{aligned}$$

D'après le théorème 1, il existe un système $(h_1, \cdots, h_m)$ tel que

$$\begin{aligned}&h_i\in L^2_{(p,q-1)}(\Omega, \theta)\,, \qquad \bar\partial h_i=0\,,\\&\textstyle\sum_i F_i h_i=v \quad \text{et} \quad \sum_i\|h_i\|^2_\theta\leqq\dfrac{s}{s-1}\|v\|^2_{\theta+\chi}\,.\end{aligned}$$

En posant $u_i=g_i-h_i$, on voit aussitôt que $(u_1, \cdots, u_m)$ possède les propriétés voulues. c.q.f.d.

6. Théorème de cohomologie

D'après le théorème 3, nous nous proposons d'établir le

Théorème 4. *Dans un ouvert pseudoconvexe* Ω *de* $\boldsymbol{C}^n$, *soient donnés* (a) *un système fini* $(F_1, \cdots, F_m)$ *de* m *fonctions holomorphes*; (b) *une fonction plurisousharmonique* φ *admettant* e^{κ} *pour une borne inférieure pour sa plurisousharmonicité, où* κ *est une fonction réelle continue dans* Ω *et minorée par* $-\sigma$: $\kappa\geqq-\sigma$ *dans* Ω, σ *étant une fonction plurisousharmonique dans* Ω; (c) *un recouvrement dénombrable*

$\mathcal{U}=(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *de* Ω *satisfaisant aux conditions suivantes*:

(i) *chaque* U_λ *est un ouvert pseudoconvexe dans* Ω;

(ii) *il existe un entier positif* N *tel que tout point de* Ω *se trouve dans au plus* N *ouverts de* $\mathcal{U}$;

(iii) *on peut choisir une partition de l'unité* $\sum_{\lambda\in\Lambda}\omega_\lambda=1$ *subordonnée à* $\mathcal{U}$ ($\omega_\lambda\in C^\infty(\Omega)$, $0\leqq\omega_\lambda\leqq 1$, supp $\omega_\lambda\subset U_\lambda$) *et majorée en gradient*: $\sum_{\lambda\in\Lambda}|\bar\partial\omega_\lambda|^2\leqq e^\tau$ *dans* Ω, τ *étant une fonction plurisousharmonique dans* Ω. *Supposons* $\sigma+\tau\geqq 0$ *et posons* $\chi=\log\sum_{i=1}^m|F_i|^2$, $t=\min\{n, m-1\}$. *Soit* s *un réel*>1. *Soient* $p\geqq 0$, $q\geqq 0$ *et* $r\geqq 1$ *des entièrs.*

Alors, pour tout système $(f_1, \cdots, f_m)$ *tel que*

$$f_i\in C^r(\mathcal{U}, \mathcal{L}^{(2)}_{p,q}), \quad \delta f_i=0, \quad \bar\partial f_i=0,$$
$$\|f_i\|_{\varphi+st\chi}<+\infty \quad (i=1, \cdots, m), \quad et \quad \textstyle\sum_i F_i f_i=0,$$

il existe un système $(u_1, \cdots, u_m)$ *tel que*

$$u_i\in C^{r-1}(\mathcal{U}, \mathcal{L}^2_{(p,q)}), \quad \delta u_i=f_i,$$
$$\bar\partial u_i=0 \quad (i=1, \cdots, m), \quad \textstyle\sum_i F_i u_i=0, \quad \text{et}$$
$$\textstyle\sum_i \|u_i\|^2_{r(\sigma+\tau)+\varphi+st\chi}\leqq M\sum_i\|f_i\|^2_{\varphi+st\chi},$$

où M *est une constante positive dépendant seulement de* n, N, r *et* s.

Démonstration. En prenant soin de l'opérateur de multiplication $(f_i)\mapsto\sum_i F_i f_i$ ainsi que de l'estimation qui est ici plus compliquée à cause de la majoration $\sum_\lambda|\bar\partial\omega_\lambda|^2\leqq e^\tau$, on démontrera le théorème tout parallèlement à la démonstration d'Hörmander (p. 114–116 de [1]). Posons encore $\theta=\varphi+st\chi$ et, $\alpha=(\alpha_0, \cdots, \alpha_r)$ étant une suite de $r+1$ éléments de Λ, écrivons $f=(f_1, \cdots, f_m)$, $f_i=(f_{i,\alpha})$, $f_{i,\alpha}=\sum'_{I,J}f_{i,\alpha,I,J}dz^I\wedge d\bar z^J$, et $\|f\|^2_\theta=\sum_i\|f_i\|^2_\theta$. β étant une suite de r éléments de Λ, posons

$$u'_{i,\beta}=\textstyle\sum_\lambda\omega_\lambda f_{i,\lambda\beta}, \quad u'_i=(u'_{i,\beta}), \quad u'=(u'_1, \cdots, u'_m).$$

Alors, on a $u'_i\in C^{r-1}(\mathcal{U}, \mathcal{L}^2_{(p,q)})$, $\delta u'_i=f_i$, $\sum_i F_i u'_{i,\beta}=0$ et par suite $\sum_i F_i u'_i=0$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\|u'\|^2_\theta&=\textstyle\sum_i\sum'_\beta\sum'_{I,J}\displaystyle\int_{U_\beta}|u'_{i,\beta,I,J}|^2e^{-\theta}dV\\ &\leqq\textstyle\sum_i\sum'_\beta\displaystyle\int_{U_\beta}(\textstyle\sum_\lambda\omega_\lambda)(\sum_\lambda\omega_\lambda|f_{i,\lambda\beta}|^2)e^{-\theta}dV\\ &=\textstyle\sum_i\sum'_\alpha\displaystyle\int_{U_\alpha}\textstyle\sum_{k=0}^r\omega_{\alpha_k}|f_{i,\alpha}|^2e^{-\theta}dV\leqq\|f\|^2_\theta.\end{aligned}$$

Considérons ensuite $\bar\partial u'_i=(\bar\partial u'_{i,\beta})$, $\bar\partial u'=(\bar\partial u'_1, \cdots, \bar\partial u'_m)$. On observe

$$\bar\partial u'_{i,\beta} = \sum_\lambda (\bar\partial\omega_\lambda)\wedge f_{i,\lambda\beta} \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \mathrm{loc}),$$
$$\bar\partial u'_i \in C^{r-1}(\mathcal{U}, \mathcal{L}^2_{(p,q+1)}), \quad \delta\bar\partial u'_i = \bar\partial\delta u'_i = \bar\partial f_i = 0,$$
$$\bar\partial\bar\partial u'_i = 0, \quad \sum_i F_i\bar\partial u'_i = \bar\partial\sum_i F_i u'_i = 0, \quad \text{et} \quad \|\bar\partial u'\|^2_{\tau+\theta}$$
$$= \sum_i \sum_\beta{}' \int_{U_\beta} \sum_{I,K}{}' \left| \sum_\lambda \sum_{\nu=1}^{q+1} (-1)^{p+\nu-1} \frac{\partial\omega_\lambda}{\partial\bar z_{k_\nu}} f_{i,\lambda\beta,I,K_\nu} \right|^2 e^{-(\tau+\theta)} dV$$
$$\leqq \sum_i \sum_\beta{}' \int_{U_\beta} \sum_{I,K}{}' \left(\sum_\lambda \sum_{\nu=1}^{q+1} \left| \frac{\partial\omega_\lambda}{\partial\bar z_{k_\nu}} \right|^2 \right) \left(\sum_\lambda \sum_{\nu=1}^{q+1} |f_{i,\lambda\beta,I,K_\nu}|^2 \right) e^{-(\tau+\theta)} dV$$
$$\leqq \sum_i \sum_\beta{}' \sum_\lambda \int_{U_\lambda\cap U_\beta} (n-q) \sum_{I,J}{}' |f_{i,\lambda\beta,I,J}|^2 e^{-\theta} dV = (r+1)(n-q)\|f\|^2_\theta.$$

Dans le cas où $r=1$, $\bar\partial u'_{i,\lambda}$ donne une forme globale u''_i, de bidegré $(p, q+1)$ et localement de carré intégrable, qui vérifie $\bar\partial u''_i=0$, $\sum_i F_i u''_i=0$ et $\|u''\|^2_{\kappa+\sigma+\tau+\theta} \leqq \|u''\|^2_{\tau+\theta} \leqq 2n\|f\|^2_\theta < \infty+$. σ et τ étant toutes deux plurisousharmoniques, e^κ reste encore une borne inférieure pour la plurisousharmonicité de $\sigma+\tau+\varphi$. D'après le théorème 3, il existe un système $v=(v_1, \cdots, v_m)$ tel que

$$v_i \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \sigma+\tau+\theta), \quad \bar\partial v_i = u''_i, \quad \sum_i F_i v_i = 0,$$
$$\|v\|^2_{\sigma+\tau+\theta} \leqq \frac{2}{q+1}\frac{2s-1}{s-1}\|u''\|^2_{\kappa+\sigma+\tau+\theta}.$$

Posons $u_{i,\lambda}=u'_{i,\lambda}-v_i$, $u_i=(u_{i,\lambda})$ et $u=(u_1, \cdots, u_m)$. On obtient alors

$$\delta u_i = \delta u'_i = f_i, \quad \bar\partial u_{i,\lambda} = \bar\partial u'_{i,\lambda} - \bar\partial v_i = 0,$$
$$\sum_i F_i u_{i,\lambda} = \sum_i F_i u'_{i,\lambda} - \sum_i F_i v_i = 0, \quad \text{et}$$
$$\|u\|^2_{\sigma+\tau+\theta} = \sum_i \sum_\lambda \int_{U_\lambda} |u_{i,\lambda}|^2 e^{-(\sigma+\tau+\theta)} dV$$
$$\leqq 2\|u'\|^2_{\sigma+\tau+\theta} + 2N\|v\|^2_{\sigma+\tau+\theta} \leqq M_1\|f\|^2_\theta,$$

en vertu de $\sigma+\tau\geqq 0$, où M_1 est une constante positive dépendant seulement de n, N et s. Ceci démontre le théorème pour $r=1$.

Pour $r>1$, on procédera par récurrence. D'après l'hypothèse de récurrence pour $\bar\partial u'$, il existe un système $v=(v_1, \cdots, v_m)$ tel que

$$v_i = (v_{i,\gamma}) \in C^{r-2}(\mathcal{U}, \mathcal{L}^2_{(p,q+1)}), \quad \delta v_i = \bar\partial u'_i,$$
$$\bar\partial v_i = 0, \quad \sum_i F_i v_i = 0, \quad \text{et}$$
$$\|v\|^2_{(r-1)(\sigma+\tau)+\tau+\theta} \leqq M_{r-1}\|\bar\partial u'\|^2_{\tau+\theta},$$

avec une constante positive M_{r-1}.

Pour chaque suite γ de $r-1$ indices strictement croissante, on applique le théorème 3 au système $(v_{1,\gamma}, \cdots, v_{m,\gamma})$, dans l'ouvert pseudoconvexe U_γ et pour la fonction plurisousharmonique $r(\sigma+\tau)+\varphi$. Comme on a, en vertu de $\kappa+\sigma \geqq 0$, $\|v_{i,\gamma}\|^2_{\kappa+r(\sigma+\tau)+\varphi+st\chi} \leqq \|v\|^2_{(r-1)(\sigma+\tau)+\tau+\theta} \leqq M_{r-1}\cdot n(r+1)\cdot\|f\|^2_\theta < +\infty$, il existe un système $(v'_{1,\gamma}, \cdots, v'_{m,\gamma})$ tel que

$$v'_{i,\gamma} \in L^2_{(p,q)}(U_\gamma, r(\sigma+\tau)+\theta),$$
$$\bar{\partial} v'_{i,\gamma} = v_{i,\gamma}, \quad \sum_i F_i v'_{i,\gamma} = 0, \quad \text{et}$$
$$\sum_i \|v'_{i,\gamma}\|^2_{r(\sigma+\tau)+\theta} \leqq \frac{2}{q+1} \frac{2s-1}{s-1} \sum_i \|v_{i,\gamma}\|^2_{\kappa+r(\sigma+\tau)+\theta}.$$

On obtient alors une cochaîne alternée $v'_i = (v'_{i,\gamma})$ $(i=1, \cdots, m)$ et, en posant $u_i = u'_i - \delta v'_i$, on voit que le système $u = (u_1, \cdots, u_m)$ possède les propriétés voulues:

$$u_i \in C^{r-1}(\mathcal{U}, \mathcal{L}^2_{(p,q)}), \quad \delta u_i = \delta u'_i = f_i,$$
$$\bar{\partial} u_i = \bar{\partial} u'_i - \bar{\partial}\delta v'_i = \delta v_i - \delta\bar{\partial} v'_i = 0,$$
$$\sum_i F_i u_i = \sum_i F_i u'_i - \delta \sum_i F_i v'_i = 0, \quad \text{et}$$
$$\|u\|^2_{r(\sigma+\tau)+\theta} \leqq 2\|u'\|^2_\theta + 2rN\|v'\|^2_{r(\sigma+\tau)+\theta} \leqq M_r \|f\|^2_\theta,$$

avec une constante positive M_r qui dépend seulement de n, N, r et s, ce qui complète la démonstration du théorème 4.

En particulier, si $m=2$, $F_1 \equiv 0$ et $F_2 \equiv 1$ identiquement dans Ω, alors le théorème 4 se réduit au théorème ordinaire de cohomologie à estimation L^2. Comme l'énoncé est, en quelques points, différent de celui d'Hörmander (Theorem 2.4.1 de [1]) et que nous en aurons besoin dans la suite, nous l'indiquons ici:

Théorème 5. *Pour un ouvert pseudoconvexe Ω de $\boldsymbol{C}^n$, soient donnés* (b) *et* (c) *du théorème* 4. *Supposons encore $\sigma+\tau \geqq 0$. Soient $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ et $r \geqq 1$ des entiers.*

Alors, pour toute cochaîne $f \in C^r(\mathcal{U}, \mathcal{L}^2_{(p,q)})$ telle que $\delta f = 0$, $\bar{\partial} f = 0$ et $\|f\|_\varphi < +\infty$, il existe une cochaîne $u \in C^{r-1}(\mathcal{U}, \mathcal{L}^2_{(p,q)})$ telle que $\delta u = f$, $\bar{\partial} u = 0$ et $\|u\|_{r(\sigma+\tau)+\varphi} \leqq M\|f\|_\varphi$, où M est une constante positive dépendant seulement des n, N et r.

7. Théorème intermédiaire pour le problème d'extension

En formulant le théorème suivant, nous mettons en ordre les choses à faire pour le problème d'extension à croissance. Dans sa démonstration, on verra comment le théorème de cohomologie y sert. Désignons par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes.

Théorème 6. *Conservons les notations et les hypothèses du théorème* 4. *En outre, soit ψ une fonction plurisousharmonique dans Ω, telle que $\psi \geqq 3(\sigma+\tau)+\varphi+(st+1)\chi$ dans Ω. Alors, pour toute cochaîne $g=(g_\lambda) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ vérifiant $\|g\|_\psi < +\infty$ et $\|\delta g\|_{\varphi+(st+1)\chi} < +\infty$, il existe une fonction G, holomorphe dans Ω et telle que l'on ait*

$$G=g-\sum_i F_i h_{i,\lambda} \qquad \textit{dans chaque } U_\lambda, \quad \textit{et}$$
$$\|G\|_\psi^2 \leqq 2\|g\|_\psi^2+M\|\delta g\|^2_{\varphi+(st+1)\chi}\,,$$

où $h_{i,\lambda}$ est une fonction holomorphe dans U_λ et M est une constante positive dépendant seulement des n, N et s.

En effet, posons $g'=(g'_{\lambda\mu})=\delta g$ et $\theta=\varphi+st\chi$. Dans chaque ouvert pseudoconvexe $U_\lambda\cap U_\mu$ (λ, $\mu\in\Lambda$ et $\lambda<\mu$), on obtient d'après le théorème de Skoda m fonctions holomorphes $h'_{i,\lambda\mu}$ telles que l'on ait $\sum_i F_i h'_{i,\lambda\mu}=g'_{\lambda\mu}$ et

$$\sum_i \int_{U_\lambda\cap U_\mu} |h'_{i,\lambda\mu}|^2 e^{-\theta} dV \leqq \frac{s}{s-1}\int_{U_\lambda\cap U_\mu} |g'_{\lambda\mu}|^2 e^{-(\theta+\chi)} dV\,.$$

Pour la cochaîne alternée $h'_i=(h'_{i,\lambda\mu})\in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, on a

$$\sum_i F_i h'_i = g' = \delta g \quad \text{et} \quad \sum_i \|h'_i\|_\theta^2 \leqq \frac{s}{s-1}\|g'\|^2_{\theta+\chi}<+\infty\,.$$

Comme les h'_i ne sont pas nécessairement cocycles, on va les ajuster au moyen du théorème de cohomologie.

Les cocycles $f_i=\delta h'_i$ satisfont à $\sum_i F_i f_i=0$ et $\|f_i\|_\theta^2\leqq 3N\|h'_i\|_\theta^2<+\infty$. D'après le théorème 4, il existe un système $(u_1, \cdots, u_m)$ tel que

$$u_i\in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}^2_{(0,0)})\,, \quad \delta u_i = f_i\,, \quad \bar\partial u_i = 0\,,$$
$$\sum_i F_i u_i = 0\,, \quad \text{et} \quad \sum_i \|u_i\|^\theta_{2(\sigma+\tau)+\theta} \leqq M_1 \sum_i \|f_i\|_\theta^2\,.$$

On peut regarder $u_i=(u_{i,\lambda\mu})$ comme élément de $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ en vertu de $\bar\partial u_i=0$. Posons maintenant $h''_{i,\lambda\mu}=h'_{i,\lambda\mu}-u_{i,\lambda\mu}$ et $h''_i=(h''_{i,\lambda\mu})$. Les $h''_{i,\lambda\mu}$ sont holomorphes dans $U_\lambda\cap U_\mu$ et on a

$$\delta h''_i = 0\,, \quad \sum_i F_i h''_i = g' \quad \text{et}$$
$$\sum_i \|h''_i\|^2_{2(\sigma+\tau)+\theta} \leqq 2\sum_i \|h'_i\|_\theta^2 + 2\sum_i \|u_i\|^2_{2(\sigma+\tau)+\theta} \leqq M_2\|g'\|^2_{\theta+\chi}\,.$$

D'après le théorème 5, e^κ étant encore une borne inférieure pour la plurisousharmonicité de $2(\sigma+\tau)+\theta$, il existe pour chaque i une cochaîne $h_i=(h_{i,\lambda})\in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ telle que $\delta h_i=h''_i$ et $\|h_i\|^2_{3(\sigma+\tau)+\theta}\leqq M_3\|h''_i\|^2_{2(\sigma+\tau)+\theta}$, où M_1, M_2 et M_3 sont des constantes positives dépendant seulement des n, N et s.

La fonction G définie par $G=g_\lambda-\sum_i F_i h_{i,\lambda}$ dans chaque U_λ est une fonction holomorphe globale dans Ω. En outre, elle vérifie

$$\begin{aligned}\|G\|^2 &\leqq \sum_\lambda \int_{U_\lambda} |g_\lambda-\sum_i F_i h_{i,\lambda}|^2 e^{-\psi} dV\\ &\leqq 2\|g\|_\psi^2 + 2\sum_i \|h_i\|^2_{3(\sigma+\tau)+\theta}\\ &\leqq 2\|g\|_\psi^2 + 2M_2M_3\|\delta g\|^2_{\theta+\chi}<+\infty\,,\end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème 6.

8. Théorème d'extension à croissance

Afin de contrôler la croissance des fonctions holomorphes dans un ouvert pseudoconvexe Ω de $\boldsymbol{C}^n$ qui interviennent dans nos études, nous nous donnons une famille Φ de fonctions plurisousharmoniques dans Ω, avec un entier $K \geqq 2$, une fonction ρ réelle continue et une fonction σ plurisousharmonique continue non négative dans Ω, de telle manière que les quatre conditions suivantes soient satisfaites:

(i) toute $\varphi \in \Phi$ vérifie $\varphi \geqq 1$ dans Ω et admet $e^{-\sigma}$ pour borne inférieure pour sa plurisousharmonicité dans Ω;

(ii) si $z'=(z'_1, \cdots, z'_n) \in \Omega$, $z''=(z''_1, \cdots, z''_n) \in \boldsymbol{C}^n$ et $|z'_i - z''_i| \leqq e^{-\rho(z')}$ ($i = 1, \cdots, n$), alors on a $z'' \in \Omega$ et $\varphi(z'') \leqq K\varphi(z')$ quelle que soit $\varphi \in \Phi$;

(iii) si $\varphi_j \in \Phi$, $M_j > 0$ ($j=1, \cdots, l < +\infty$) et $M \geqq 0$, alors il existe une $\varphi \in \Phi$ telle que $\varphi \geqq M + \sum_j M_j \varphi_j$;

(iv) il existe une $\varphi_0 \in \Phi$ telle que l'on ait

$$\varphi_0 \geqq \rho\,, \quad \varphi_0 \geqq \sigma \quad \text{et} \quad \int_\Omega e^{-\varphi_0} dV < +\infty\,.$$

Cela posé, nous énonçons le théorème principal:

Théorème 7. *Dans un ouvert pseudoconvexe Ω de $\boldsymbol{C}^n$, soient données une famille Φ de fonctions plurisousharmoniques satisfaisant aux quatre conditions précédentes, un système $(F_1, \cdots, F_m)$ de m fonctions holomorphes, et une fonction g holomorphe sur l'ensemble X des zéros communs aux F_i. Supposons $1 \leqq m \leqq n$ et que les trois conditions suivantes sont satisfaites*:

(v) *il existe une $\alpha \in \Phi$ telle que $|F_i| \leqq e^\alpha$ dans Ω ($i=1, \cdots, m$);*

(vi) *il existe une $\beta \in \Phi$ telle que $|dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_m| \geqq e^{-\beta}$ sur X;*

(vii) *il existe une $\gamma \in \Phi$ telle que $|g| \leqq e^\gamma$ sur X.*

Sous ces hypothèses, il existe une fonction G, holomorphe dans Ω et telle que l'on ait

$$G = g \text{ sur } X \quad \text{et} \quad |G| \leqq e^\zeta \text{ dans } \Omega\,,$$

où ζ est une fonction de Φ indépendante de g.

La démonstration du théorème sera donnée dans les n^{os} 9~12, où il s'agira de réaliser les situations du théorème 6. Faisons ici quelques remarques. En vertu de (vi), X est une sous-variété analytique non singulière de Ω de dimension $n-m$. L'emploi dans (i) de la notion de borne inférieure pour la plurisousharmonicité découle du théorème 2.2.1' d'Hörmander dans [1]. L'emploi de K de la façon de (ii) est dû à Nishimura [7] et tout essentiel dans le présent mémoire. Dans le n° 13, nous donnerons quelques familles significatives de fonctions plurisousharmoniques.

9. Construction d'un recouvrement

La fonction $\xi\in\Phi$, au moyen de laquelle nous allons construire un recouvrement de Stein de Ω et une partition de l'unité, sera précisée au n° 11. Dans les n$^{\text{os}}$ 9 et 10, nous n'utiliserons que ses propriétés suivantes:

$$\xi\geqq K \quad \text{et} \quad \xi\geqq\rho+\log\sqrt{2}\,. \tag{9.1}$$

Pour chaque $\nu=1, 2, \cdots$, désignons par E_ν l'ensemble des suites $(\nu; c_1, \cdots, c_n)$ telles que $c_i\in\boldsymbol{C}$ et que $2^{K^\nu}\cdot\operatorname{Re} c_i$ et $2^{K^\nu}\cdot\operatorname{Im} c_i$ soient des entiers $(i=1, \cdots, n)$. Pour $\lambda=(\nu; c_1, \cdots, c_n)\in E_\nu$, notons $|\lambda|=\nu$ et considérons dans $\boldsymbol{C}^n$ trois sous-ensembles rectangulaires réguliers suivants:

$$I_\lambda:\begin{cases}\operatorname{Re} c_i\leqq\operatorname{Re} z_i\leqq\operatorname{Re} c_i+2^{-K^\nu}\\ \operatorname{Im} c_i\leqq\operatorname{Im} z_i\leqq\operatorname{Im} c_i+2^{-K^\nu}\end{cases}\quad (i=1, \cdots, n);$$

$$U_\lambda:\begin{cases}\operatorname{Re} c_i-2^{-(2+K^{\nu+1})}<\operatorname{Re} z_i<\operatorname{Re} c_i+2^{-K^\nu}+2^{-(2+K^{\nu+1})}\\ \operatorname{Im} c_i-2^{-(2+K^{\nu+1})}<\operatorname{Im} z_i<\operatorname{Im} c_i+2^{-K^\nu}+2^{-(2+K^{\nu+1})}\end{cases}\quad (i=1, \cdots, n);$$

$$V_\lambda:\begin{cases}\operatorname{Re} c_i-2^{-(1+K^{\nu+1})}<\operatorname{Re} z_i<\operatorname{Re} c_i+2^{-K^\nu}+2^{-(1+K^{\nu+1})}\\ \operatorname{Im} c_i-2^{-(1+K^{\nu+1})}<\operatorname{Im} z_i<\operatorname{Im} c_i+2^{-K^\nu}+2^{-(1+K^{\nu+1})}\end{cases}\quad (i=1, \cdots, n)\,.$$

On a $I_\lambda\subset U_\lambda\subset V_\lambda$.

Définissons deux parties Λ_ν^* et Λ_ν de E_ν, par récurrence sur ν, à partir de $\Lambda_1^*=\phi$, d'une façon alternative. Soit Λ_ν l'ensemble des $\lambda\in E_\nu$ tels qu'on ait

$$\lambda\notin\Lambda_\nu^*\,,\quad V_\lambda\subset\Omega \quad \text{et} \quad 2e^\xi<2^{K^\nu} \text{ dans } V_\lambda\,. \tag{9.2}$$

Pour $\nu>1$, soit Λ_ν^* l'ensemble des $\lambda\in E_\nu$ tels qu'il existe un $\lambda'\in\Lambda_{\nu'}$ satisfaisant à $0<\nu'<\nu$ et à $I_{\lambda'}\supset I_\lambda$. Posons

$$\Lambda=\bigcup_{\nu=1}^\infty\Lambda_\nu \quad \text{et} \quad \mathcal{U}=(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\,.$$

Il est évident que, pour tout $\lambda\in\Lambda$, U_λ est un ouvert pseudoconvexe contenu dans Ω. Nous allons montrer que $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et par suite $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sont recouvrements de Ω et que, pour tout point $z\in\Omega$, le nombre des indices $\lambda\in\Lambda$ tels que $V_\lambda\ni z$ ne dépasse pas $N=2^{2n}$, ce qui montrera que les premières deux conditions imposées au recouvrement $\mathcal{U}$ dans les théorèmes 4 et 6 sont remplies.

Prenons en effet un point quelconque $z^0=(z_1^0, \cdots, z_n^0)$ de Ω. Soit ν l'entier déterminé par

$$2^{K^{\nu-1}}\leqq 2e^{\xi(z^0)}<2^{K^\nu}\,. \tag{9.3}$$

On a $\nu\geqq 2$ d'après (9.1), ce qui montre $\Lambda_1=\Lambda_1^*=\Lambda_2^*=\emptyset$. Pour z^0, il existe un et un seul point $c^0=(c_1^0, \cdots, c_n^0)\in\boldsymbol{C}^n$ tel que $(\nu; c^0)\in E_\nu$ et que

$$\begin{cases}\operatorname{Re} c_i^0-2^{-(1+K^\nu)}<\operatorname{Re} z_i^0\leqq\operatorname{Re} c_i^0+2^{-(1+K^\nu)}\\ \operatorname{Im} c_i^0-2^{-(1+K^\nu)}<\operatorname{Im} z_i^0\leqq\operatorname{Im} c_i^0+2^{-(1+K^\nu)}\end{cases}\quad (i=1, \cdots, n)\,.$$

Désignons par $E_\nu(c^0)$ l'ensemble des 2^{2n} indices $\lambda \in E_\nu$ tels que $I_\lambda \ni c^0$. Par définition, z^0 appartient à I_λ pour au moins un indice $\lambda \in E_\nu(c^0)$. Cela étant, je dis que *l'on a* $V_\lambda \subset \Omega$ *et* $2e^\xi < 2^{K^{\nu+1}}$ *dans* V_λ, *quel que soit* $\lambda \in E_\nu(c^0)$.

En effet, pour tout $z=(z_1, \cdots, z_n) \in V_\lambda$, on a

$$|z_i - z_i^0| < \sqrt{2}\left(\frac{3}{2}2^{-K^\nu} + \frac{1}{2}2^{-K^{\nu+1}}\right) < \sqrt{2}\cdot 2\cdot 2^{-K^\nu} < \sqrt{2}\, e^{-\xi(z^0)} \leqq e^{-\rho(z^0)}$$
$$(i = 1, \cdots, n)\,.$$

En vertu de la condition (ii) au n° 8, on a $z \in \Omega$ et $2e^{\xi(z)} \leqq 2e^{K\xi(z^0)} < 2^{K^{\nu+1}}$, ce qui montre l'énoncé.

Soit $\lambda \in E_\nu(c^0)$. On discerne trois cas suivants. Dans le cas où $\lambda \in \Lambda_\nu^*$, il existe un $\lambda' \in \Lambda$ tel que $|\lambda'| < \nu$ et $I_{\lambda'} \supset I_\lambda$. Alors, (9.2) et (9.3) entraînent $z^0 \notin V_{\lambda'} \supset V_\lambda \supset I_\lambda$. Dans le cas où $\lambda \notin \Lambda_\nu^*$ mais $\lambda \in \Lambda_\nu$, il n'y a rien à dire. Dans le cas où $\lambda \notin \Lambda_\nu^* \cup \Lambda_\nu$, pour tout $\lambda'' \in E_{\nu+1}$ tel que $I_{\lambda''} \subset I_\lambda$, l'on a, d'après l'énoncé précédent, $\lambda'' \notin \Lambda_{\nu+1}^*$, $V_{\lambda''} \subset V_\lambda \subset \Omega$ et $2e^\xi < 2^{K^{\nu+1}}$ dans $V_{\lambda''}$, d'où et de (9.2) découle $\lambda'' \in \Lambda_{\nu+1}$.

On en conclut qu'on a $z^0 \in I_\lambda \subset U_\lambda$ pour au moins un indice $\lambda \in \Lambda_\nu \cup \Lambda_{\nu+1}$ et que, si $z^0 \in V_\lambda$ et $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda|$ est égal à ν ou bien à $\nu+1$. Ou encore, si $\lambda \in \Delta$, $\mu \in \Delta$ et $V_\lambda \cap V_\mu \neq \emptyset$, alors on a $||\lambda| - |\mu|| \leqq 1$. De plus, pour tout $\lambda \in \Delta$, on a

$$2^{K^{|\lambda|-2}} \leqq 2e^\xi < 2^{K^{|\lambda|}} \qquad \text{dans } V_\lambda\,. \tag{9.4}$$

Maintenant considérons l'ensemble $\Lambda(z^0)$ des indices $\lambda \in \Lambda$ tels que $V_\lambda \ni z^0$. Soient $u_{2i-1} = \operatorname{Re} z_i$ et $u_{2i} = \operatorname{Im} z_i$. Soit p_k la projection $(z_1, \cdots, z_n) \mapsto u_k$ $(k=1, \cdots, 2n)$. Pour chaque k, on fait correspondre à chaque $\lambda \in \Lambda(z^0)$ le nombre $\varepsilon_k(\lambda) = +1$ ou -1 suivant que $p_k(z^0)$ se trouve dans la moitié à gauche de l'intervalle $p_k(V_\lambda)$ (le centre de l'intervalle y compris) ou non. Cela posé, il est aisé de voir que, si λ, $\mu \in \Lambda(z^0)$ et $\varepsilon_k(\lambda) = \varepsilon_k(\mu)$ $(k=1, \cdots, 2n)$, alors on a $\lambda = \mu$, ce qui montre que le nombre des éléments de $\Lambda(z^0)$ ne dépasse pas 2^{2n}.

10. Construction d'une partition de l'unité

Choisissons une fonction réelle $w \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ d'une variable réelle t, telle que l'on ait $0 \leqq w \leqq 1$ sur $\boldsymbol{R}$, $w(t)=0$ quand $t \leqq -1+\varepsilon$, et $w(t)=1$ quand $t \geqq -\varepsilon$, ε étant un réel positif assez petit. Soit $M = \sup|dw/dt|$. Pour $\nu = 1, 2, \cdots$ et pour $t \in \boldsymbol{R}$, posons

$$\tilde{w}_\nu(t) = w(2^{2+K^{\nu+1}}\cdot t)\cdot w(2^{2+K^{\nu+1}}(2^{-K^\nu} - t))$$

et puis, pour chaque $\lambda = (\nu;\, c_1, \cdots, c_n) \in \Lambda$ et pour chaque $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \boldsymbol{C}^n$,

$$w_\lambda(z) = \prod_{i=1}^{n} \tilde{w}_\nu(\operatorname{Re}(z_i - c_i))\cdot \tilde{w}_\nu(\operatorname{Im}(z_i - c_i))\,.$$

Alors, en tenant compte de (9.4), on peut vérifier immédiatement

$$w_\lambda \in C^\infty(\boldsymbol{C}^n)\,,\ 0 \leqq w_\lambda \leqq 1,\ \operatorname{supp} w_\lambda \subset U_\lambda\,,\ w_\lambda = 1 \text{ sur } I_\lambda\,, \quad \text{et}$$
$$|\partial w_\lambda / \partial \bar{z}_i|^2 \leqq 2^{3+2K^{\nu+1}} M^2 \leqq 2^{3+2K^3} M^2 e^{2K^3 \xi}\,.$$

Posons pour chaque λ

$$\omega_\lambda = w_\lambda \cdot \left(\sum_{\mu \in \Lambda} w_\mu\right)^{-1}.$$

On observe aussitôt que $\sum_{\lambda \in \Lambda} \omega_\lambda = 1$ est une partition de l'unité de classe C^∞ subordonnée à $\mathcal{U}$. De plus, on obtient par un calcul direct

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\bar{\partial} \omega_\lambda|^2 \leqq 2^{3+2K^3} n N^3 M^2 e^{2K^3 \xi}\,.$$

D'après la condition (iii) au n° 8, nous pouvons choisir une fonction $\tau \in \Phi$ de telle manière que le second membre de cette inégalité soit majoré par e^τ et que τ ne dépende que des n, K et ξ. Donc, les trois conditions imposées au recouvrement $\mathcal{U}$ dans les théorèmes 4 et 6 sont vérifiées, pourvu que ξ soit déterminée.

11. Études locales au voisinage d'un point de X

Commençons par rappeler une estimation élémentaire.

Lemme 1. *Soit $H(z_1, \cdots, z_n)$ une fonction holomorphe dans un domaine convexe D de $\boldsymbol{C}^n$ et supposons qu'on ait $|\partial H / \partial z_i| \leqq M$ dans D $(i=1, \cdots, n)$, où M est une constante positive. Alors, on a*

$$|H(z_1', \cdots, z_n') - H(z_1'', \cdots, z_n'')| \leqq M \sum_i |z_i' - z_i''|$$

quels que soient $(z_1', \cdots, z_n') \in D$ et $(z_1'', \cdots, z_n'') \in D$.

Ensuite, dans notre but, citons le théorème d'existence des fonctions implicites, bien connu et démontré par la méthode des approximations successives, sous la forme suivante:

Lemme 2. *Soient Δ un ouvert de $\boldsymbol{C}^{n-m}$ (réduit à un seul point quand $m=n$) et $\Delta' = \{(y_1, \cdots, y_m) \in \boldsymbol{C}^m : |y_i - b_i| < r \ (i=1, \cdots, m)\}$, où $1 \leqq m \leqq n$, $r>0$ et $(b_1, \cdots, b_m) \in \boldsymbol{C}^m$. Soit $(H_1, \cdots, H_m)$ un système de m fonctions holomorphes dans $\Delta \times \Delta'$, satisfaisant aux deux conditions suivantes:*

$$|H_i(x, b_1, \cdots, b_m)| < \frac{r}{2} \ \text{ pour } x \in \Delta \qquad (i = 1, \cdots, m);$$

$$\left|\frac{\partial H_i}{\partial y_j}\right| \leqq \frac{1}{2m} \ \text{ dans } \Delta \times \Delta' \qquad (i, j = 1, \cdots, m)\,.$$

Alors, il existe un et un seul système $(f_1, \cdots, f_m)$ de m fonctions holomorphes dans Δ tel que l'on ait $|f_i(x) - b_i| < r$ pour tout $x \in \Delta$ $(i=1, \cdots, m)$ et que, pour $x \in \Delta$ et pour $(y_1, \cdots, y_m) \in \Delta'$, on ait

$$y_i - b_i = H_i(x, y_1, \cdots, y_m) \qquad (i = 1, \cdots, m)$$
$$\textit{si et seulement si } y_i = f_i(x) \qquad (i = 1, \cdots, m) .$$

Revenons au n° 8. D'après la condition (ii) imposée à Φ, le polydisque fermé autour de tout point z^0 de Ω, de rayon $e^{-\rho(z^0)}$, se trouve dans Ω. Donc, en vertu de l'inégalité de Cauchy, on a le

Lemme 3. *Les inégalités suivantes subsistent dans* Ω:

$$\left|\frac{\partial F_i}{\partial z_j}\right| \leqq e^{K\alpha+\rho} \qquad \textit{dans } \Omega \ (i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n) \quad \textit{et}$$
$$\left|\frac{\partial^2 F_i}{\partial z_j \partial z_k}\right| \leqq 2e^{K\alpha+2\rho} \qquad \textit{dans } \Omega \ (i = 1, \cdots, m;\ j, k = 1, \cdots, n) .$$

Cela étant, prenons un point quelconque $a=(a_1, \cdots, a_n)$ de la sous-variété X et, d'après l'hypothèse (vi) imposée à (F_i) au n° 8, une suite $J(a)=(j_1, \cdots, j_m)$ d'entiers telle que $1 \leqq j_1 < \cdots < j_m \leqq n$ et que

$$\left|\frac{\partial(F_1, \cdots, F_m)}{\partial(z_{j_1}, \cdots, z_{j_m})}(a)\right| \geqq \binom{n}{m}^{-1/2} e^{-\beta(a)} .$$

a et $J(a)$ étant prises une fois pour toutes dans le reste de ce n°, on désigne par $J^*(a)=(i_1, \cdots, i_{n-m})$ la suite strictement croissante qui est le complémentaire de $J(a)$ dans $\{1, \cdots, n\}$. Pour simplifier l'écriture, notons

$$\text{(11.1)} \qquad \begin{cases} x_k = z_{i_k} \ (k = 1, \cdots, n-m), \quad a' = (a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n-m}}) , \\ y_k = z_{j_k}, \quad b_k = a_{j_k} \ (k=1, \cdots, m) , \quad b = (b_1, \cdots, b_m) , \quad \text{et} \\ c_{ij} = \dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}(a) \ (i, j = 1, \cdots, m) . \end{cases}$$

Soit (d_{ij}) la matrice inverse de la matrice (c_{ij}). D'après les conditions (iii) et (iv) au n° 8, choisissons $\alpha' \in \Phi$ et $\beta' \in \Phi$ de telle manière qu'on ait $\alpha' \geqq K\alpha + \rho$ et $\beta' \geqq (m-1)(K\alpha+\rho) + \beta + \frac{1}{2}\log\binom{n}{m} + \log(m-1)!$. Alors, d'après le lemme 3 et au moyen des cofacteurs de (c_{ij}), on a

$$\text{(11.2)} \qquad |c_{ij}| \leqq e^{\alpha'(a)} \quad \text{et} \quad |d_{ij}| \leqq e^{\beta'(a)} \qquad (i, j = 1, \cdots, m) .$$

Maintenant, pour $z=(z_1, \cdots, z_n) \in \Omega$, avec la convention (11.1), posons

$$\text{(11.3)} \qquad H_i(x, y) = y_i - b_i - \sum_{j=1}^{m} d_{ij} F_j(z) \qquad (i = 1, \cdots, m) .$$

Évidemment, pour qu'on ait $F_i(z)=0$ $(i=1, \cdots, m)$ il faut et il suffit qu'on ait $y_i - b_i = H_i(x, y)$ $(i=1, \cdots, m)$.

Ensuite, d'après (iii) au n° 8, choisissons deux fonctions $\eta \in \Phi$ et $\xi \in \Phi$ de manière que l'on ait

(11.4) $\eta \geqq K(\alpha'+\varphi_0)+\beta'+\log 4m^2n$, et

(11.5) $\xi \geqq \begin{cases} \eta+\log\sqrt{2} & (\text{si } m=n), \\ \eta+K\alpha'+\beta'+\log 2\sqrt{2}\,m(n-m) & (\text{si } m<n). \end{cases}$

On voit aisément $\xi \geqq K$ et $\sqrt{2}\,e^{-\xi} \leqq e^{-\eta} \leqq e^{-\rho}$, ce qui montre que l'hypothèse (9.1) posée au début du n° 9 est remplie. Avec ces fonctions ξ et η, définissons les domaines suivants:

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= \{(x_1, \cdots, x_{n-m}) \in \boldsymbol{C}^{n-m} \colon |\mathrm{Re}(x_k - a_{i_k})| < e^{-\xi(a)}, \\ &\qquad\qquad |\mathrm{Im}(x_k - a_{i_k})| < e^{-\xi(a)} \quad (k=1, \cdots, n-m)\}; \\ \Delta'(a) &= \{(y_1, \cdots, y_m) \in \boldsymbol{C}^m \colon |y_k - b_k| < e^{-\eta(a)} \quad (k=1, \cdots, m)\}; \quad \text{et} \\ \Omega(a) &= \{(z_1, \cdots, z_n) \in \boldsymbol{C}^n \colon (z_{i_1}, \cdots, z_{i_{n-m}}) \in \Delta(a), (z_{j_1}, \cdots, z_{j_m}) \in \Delta'(a)\}. \end{aligned}$$

Cela posé, établissons le

Lemme 4. *On a*

$$|H_i(x, b)| < \frac{1}{2} e^{-\eta(a)} \ \textit{pour}\ x \in \Delta(a) \quad (i=1, \cdots, m), \quad \text{et}$$

$$\left|\frac{\partial H_i}{\partial y_j}\right| \leqq \frac{1}{2m} \ \text{dans}\ \Delta(a) \times \Delta'(a) \qquad (i, j = 1, \cdots, m).$$

Démonstration. Quant à la première inégalité, le cas où $m=n$ est trivial. Supposons donc $m<n$. En vertu du lemme 3, de (11.2) et de la relation $(\partial H_i/\partial x_k) = -\sum d_{ij}(\partial F_j/\partial x_k)$, on a $|(\partial H_i/x\partial_k)| \leqq me^{K\alpha'(a)+\beta'(a)}$. De cette inégalité, de $H_i(a', b)=0$, du lemme 1 et de (11.5), il vient pour $x \in \Delta(a)$

$$\begin{aligned} |H_i(x, b)| &\leqq me^{K\alpha'(a)+\beta'(a)} \textstyle\sum_{k=1}^{n-m} |x_k - a_{i_k}| \\ &< \sqrt{2}\,m(n-m)e^{-\xi(a)+K\alpha'(a)+\beta'(a)} \leqq \frac{1}{2} e^{-\eta(a)}. \end{aligned}$$

En différentiant (11.3), on obtient dans $\Omega(a)$

$$\frac{\partial H_i}{\partial y_j} = \delta_{ij} - \sum_k d_{ik} \frac{\partial F_k}{\partial y_j} = \sum_k d_{ik}\left(\frac{\partial F_k}{\partial y_j}(a) - \frac{\partial F_k}{\partial y_j}\right).$$

En vertu des lemmes 1 et 3, de (11.2) et de (11.4), on en tire

$$\left|\frac{\partial H_i}{\partial y_j}\right| < m e^{\beta'(a)} 2e^{K(\alpha'(a)+\varphi_0(a))} ne^{-\eta(a)} \leqq \frac{1}{2m}.$$

c.q.f.d.

Maintenant que les hypothèses du lemme 2 sont vérifiées pour $\Delta = \Delta(a)$, $\Delta' = \Delta'(a)$ et $r = e^{-\eta(a)}$, nous avons m fonctions $f_1, \cdots, f_m$, holomorphes dans $\Delta(a)$ et satisfaisant aux deux conditions du lemme 2.

Nous aurons besoin dans la suite des lemmes suivants.

Lemme 5. *Soit* $z\in\Omega(a)$. *Soient* $x\in\Delta(a)$ *et* $y=(y_1, \cdots, y_m)\in\Delta'(a)$ *donnés par* (11.1) *pour* z. *Alors, on a*

$$\sum_{i=1}^{m} |F_i(z)|^2 \geqq (2me^{\beta'(a)})^{-2} \max_{1\leqq i\leqq m} |y_i-f_i(x)|^2 .$$

En effet, en posant $t_i=y_i-f_i(x)$ et $t_i^*=H_i(x, f(x))-H_i(x, y)$, on a de (11.3) et de la relation $f_j(x)-b_j=H_j(x, f(x))$

$$F_i(z) = \sum_j c_{ij}(y_j-b_j-H_j(x, y)) = \sum_j c_{ij}(t_j+t_j^*) .$$

D'après les lemmes 1 et 4, on a $|t_i^*| \leqq \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m}|t_j| \leqq \frac{1}{2}\max|t_j|$, d'où $\max|t_i+t_i^*| \geqq \frac{1}{2}\max|t_i|$.

D'autre part, considérons l'automorphisme linéaire de $\boldsymbol{C}^m$ défini par la matrice (d_{ij}). En vertu de (11.2), l'image du polydisque unité est contenue dans le polydisque de rayon $me^{\beta'(a)}$ autour de l'origine. Donc, l'image inverse du polydisque unité contient le polydisque de rayon $(me^{\beta'(a)})^{-1}$. Il en résulte que $\sum_i |F_i(z)|^2 \geqq \max|F_i(z)|^2 \geqq (me^{\beta'(a)})^{-2}\max|t_i+t_i^*|^2 \geqq (2me^{\beta'(a)})^{-2}\max|t_i|^2$, ce qui démontre le lemme 5.

Lemme 6. *Si* $z'=(z_1', \cdots, z_n')$ *et* $z''=(z_1'', \cdots, z_n'')$ *appartiennent à* $\Omega(a)$, *on a* $|z_i'-z_i''|\leqq e^{-\rho(z')}$ $(i=1, \cdots, n)$ *et par suite* $\varphi(z'')\leqq K\varphi(z')$ *quelle que soit* $\varphi\in\Phi$.

En effet, comme $|z_i'-a_i|<e^{-\eta(a)}<e^{-\rho(a)}$, on a $\eta(z')\leqq K\eta(a)$. D'où, il vient $|z_i'-z_i''|<2e^{-\eta(a)}<e^{-(1/K)\eta(z')+\log 2}<e^{-\varphi_0(z')}\leqq e^{-\rho(z')}$ en vertu de (11.4). Ceci montre le lemme 6.

Nous terminons ce n° par définir une rétraction holomorphe π_a: $\Omega(a)\to X$ de la façon suivante: pour $z=(z_1, \cdots, z_n)\in\Omega(a)$, $x=(x_1, \cdots, x_{n-m})$ étant donné par (11.1), l'image $\pi_a(z)=(z_1^*, \cdots, z_n^*)$ est définie par

$$z_i^* = \begin{cases} z_i & (\text{si } i \text{ figure dans } J^*(a)); \\ f_k(x) & (\text{si } i=j_k \text{ figure dans } J(a)) . \end{cases}$$

12. Extension locale et estimation des normes.

Rappelons qu'on se donne une fonction g, holomorphe sur la sous-variété X de Ω et telle que $|g|\leqq e^{\gamma}$ sur X $(\gamma\in\Phi)$. Pour une extension locale de g, partageons l'ensemble Λ des indices en deux parties: la partie A des indices $\lambda\in\Lambda$ tels que $V_\lambda\cap X$ ne soit pas vide et le complémentaire B de A dans Λ.

Pour chaque $\lambda\in A$, choisissons un point $a_\lambda\in V_\lambda\cap X$ une fois pour toutes. Par rapport à ce point $a=a_\lambda$, nous utilisons les notations et les résultats donnés au n° précédent, après avoir choisi $J(a_\lambda)=(j_1, \cdots, j_m)$. $g_\lambda=g\circ\pi_{a_\lambda}$ est alors une fonction holomorphe dans $\Omega(a_\lambda)$ et telle que $g_\lambda=g$ sur $X\cap\Omega(a_\lambda)$. Pour chaque

$\lambda\in B$, posons $g_\lambda=0$, considérée comme fonction holomorphe dans Ω. On peut vérifier immédiatement $V_\lambda\subset\Omega(a_\lambda)$ pour $\lambda\in A$, ce qui permet de définir la fonction $g_\lambda^*=g_\lambda|_{U_\lambda}$ pour chaque $\lambda\in\Lambda$ et la cochaîne $g^*=(g_\lambda^*)\in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$.

Maintenant, examinons les hypothèses du théorème 6, où g est remplacée par g^*. D'abord, déterminons un réel $s>1$ qui figure dans les théorèmes 4 et 6. Si $m=1$, on prend $s>1$ d'une façon arbitraire. Si $m>1$, on pose $s=1+\frac{1}{2(m-1)}$. Comme nous avons supposé $1\leqq m\leqq n$, on a $t=\min\{n, m-1\}=m-1$ et par suite $2(st+1)=2m+\varepsilon$, où $\varepsilon=0$ si $m=1$ et $\varepsilon=1$ si $m>1$.

Ensuite, annonçons le lemme suivant qui sera démontré tout à l'heure:

Lemme 7. *On peut choisir une $\varphi\in\Phi$, d'une façon indépendante de g, de telle manière que, si $\lambda\in\Lambda$ et $\mu\in\Lambda$, on ait*

$$\int_{U_\lambda\cap U_\mu}\frac{|g_\mu-g_\lambda|^2}{(\sum_i|F_i|^2)^{st+1}}e^{-\varphi}dV\leqq\int_{V_\lambda\cap V_\mu}e^{-\varphi_0}dV\,.$$

Pour le moment, supposons que ce lemme 7 soit établi. La fonction σ donnée au n° 8 étant continue, la condition (i) au n° 8 permet de se servir de $-\sigma$ pour la fonction κ des théorèmes 4 et 6. Nous avons construit au n° 9 un recouvrement $\mathcal{U}$ de Ω et au n° 10 une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$, qui satisfont aux conditions (i), (ii) et (iii) du théorème 4 avec la fonction $\tau\in\Phi$ choisie au n° 10 dépendamment de la fonction $\xi\in\Phi$. La condition $\sigma+\tau\geqq0$ est trivialement vérifiée. Donc, les hypothèses du théorème 4 sont toutes remplies.

D'après les conditions (iii) et (iv) au n° 8, choisissons une $\psi\in\Phi$ de manière qu'on ait simultanément

$$\begin{cases}\psi\geqq2K\gamma+\varphi_0 \quad \text{et}\\ \psi\geqq3(\varphi_0+\tau)+\varphi+\left(m+\frac{1}{2}\varepsilon\right)(2\alpha+\log m)\,.\end{cases}$$

Alors, la condition $\psi\geqq3(\sigma+\tau)+\varphi+(st+1)\chi$ est remplie, puisqu'on a $\sigma\leqq\varphi_0$ et $\chi=\log\sum_i|F_i|^2\leqq\log me^{2\alpha}$.

D'autre part, d'après le lemme 6, on voit que, si $\lambda\in A$ et $z\in\Omega(a_\lambda)$, on a $\pi_{a_\lambda}(z)\in\Omega(a_\lambda)$ et par suite $|g_\lambda(z)|=|g(\pi_{a_\lambda}(z))|\leqq\exp\gamma(\pi_{a_\lambda}(z))\leqq e^{K\gamma(z)}$. D'où,

$$||g^*||_\psi^2\leqq||g^*||_{2K\gamma+\varphi_0}^2=\sum_\lambda\int_{U_\lambda}|g_\lambda|^2e^{-(2K\gamma+\varphi_0)}dV\leqq N\int_\Omega e^{-\varphi_0}dV<+\infty\,.$$

En outre, le lemme 7 entraîne

$$||\delta g^*||_{\varphi+(st+1)\chi}\leqq\sum_{\lambda<\mu}\int_{V_\lambda\cap V_\mu}e^{-\varphi_0}dV\leqq\binom{N}{2}\int_\Omega e^{-\varphi_0}dV<+\infty\,.$$

Nous avons ainsi vu que toutes les conditions du théorème 6 sont remplies.

Donc, il existe une fonction G, holomorphe dans Ω et telle que l'on ait

$$G=g \quad \text{sur } X \quad \text{et} \quad \|G\|_\psi \leqq C\,,$$

où C est une constante positive indépendante de g. En vertu de (ii) au n° 8, pour tout $z\in\Omega$, le polydisque $Q(z)$ de rayon $e^{-\rho(z)}$ autour de z est contenu dans Ω. En considérant la moyenne de $|G|^2$ dans $Q(z)$, on a

$$|G(z)|^2 \leqq \pi^{-n} C^2 e^{2n\rho(z)+K\psi(z)}\,.$$

Si l'on prend, d'après la condition (iii) au n° 8, une $\zeta\in\Phi$ telle que $\zeta\geqq n\varphi_0+\frac{K}{2}\psi+\frac{1}{2}\log\max\{1, \pi^{-n}C^2\}$, on a

$$|G|\leqq e^{\zeta} \qquad \text{dans } \Omega$$

et ζ ne dépend pas de g, ce qui démontrera le théorème 7.

Il ne reste qu'à montrer le lemme 7. Soient $\lambda\in\Lambda$ et $\mu\in\Lambda$. Supposons que $U_\lambda\cap U_\mu\neq\emptyset$. Pour simplifier l'écriture, posons $h=g_\mu-g_\lambda$ et $H(\varphi)=|h|^2(\sum_i|F_i|^2)^{-(st+1)}e^{-\varphi}$. On discerne trois cas. Le cas où $\lambda\in B$ et $\mu\in B$ est trivial.

Dans le cas où l'un des λ et μ appartient à A et l'autre à B, on peut supposer sans diminuer la généralité que $\lambda\in A$, $\mu\in B$ et que, pour $a=a_\lambda\in X\cap V_\lambda$, on a $J^*(a)=(1, \cdots, n-m)$ et $J(a)=(n-m+1, \cdots, n)$. Comme $X\cap V_\mu=\emptyset$, le polydisque de rayon $2^{-(2+K^{\nu+1})}$ autour de tout point de $U_\lambda\cap U_\mu$ n'intersecte pas X, où $\nu=|\mu|$. Donc, avec les notations du n° 11 pour $a=a_\lambda$, si $(x, y)\in U_\lambda\cap U_\mu$, on a $\max|y_i-f_i(x)|>2^{-(2+K^{\nu+1})}$. D'après les lemmes 5, 6 et (9.4), la minoration de $\sum_i|F_i|^2$ et la majoration $|g_\lambda|\leqq e^{K\gamma}$ entraînent

$$H(\varphi)\leqq e^{-\varphi_0} \qquad \text{dans } U_\lambda\cap U_\mu\,,$$

pourvu que φ satisfasse à

$$\text{(12.1)} \quad \varphi\geqq\varphi_0+2K\gamma+(2m+\varepsilon)(K^3\xi+K\beta')+(2m+\varepsilon)((3+K^3)\log 2+\log m)\,.$$

Cela donne l'inégalité du lemme 7 dans le cas où $\lambda\in A$ et $\mu\in B$.

Dans le cas où $\lambda\in A$ et $\mu\in A$, on peut supposer sans restreindre la généralité $\nu=|\lambda|\leqq|\mu|$, $J^*(a_\lambda)=(1, \cdots, n-m)$ et $J(a_\lambda)=(n-m+1, \cdots, n)$. Utilisons les notations et les résultats au n° 11 pour $a=a_\lambda$. On obtient tout de suite $|h|\leqq 2e^{K\gamma}\leqq 2e^{K^2\gamma(a)}$, mais on pourra montrer sans difficulté les inégalités $|a_i-a_{\mu i}|\leqq\min\{e^{-\rho(a)}, e^{-\rho(a_\mu)}\}$ $(i=1, \cdots, n)$ et

$$\text{(12.2)} \qquad |h|\leqq 2e^{K\gamma(a)} \qquad \text{dans } \Omega(a)\cap\Omega(a_\mu)\,.$$

Nous laissons les détails au soin du lecteur.

On peut écrire $U_\lambda \cap U_\mu = \Gamma \times \Gamma'$, où Γ (resp. Γ') est un domaine rectangulaire dans C^{n-m} des $x_1, \cdots, x_{n-m}$ (resp. C^m des $y_1, \cdots, y_m$). Pour $x \in \Gamma$, désignons par Q_x (resp. $\tilde{Q}_x$) le polydisque fermé de rayon $2^{-(3+K^{\nu+1})}$ (resp. $2^{-(2+K^{\nu+1})}$) autour de $f(x)=(f_1(x), \cdots, f_m(x))$ dans C^m. Soit Γ_0 l'ensemble des $x \in \Gamma$ tels que $Q_x \cap \Gamma' \neq \emptyset$. Je dis que, si $x \in \Gamma_0$, on a $\{x\} \times \tilde{Q}_x \subset \Omega(a) \cap \Omega(a_\mu)$. En effet, soient $z=(z_1, \cdots, z_n) \in \{x\} \times \tilde{Q}_x$ et $z'=(z_1', \cdots, z_n') \in (\{x\} \times Q_x) \cap (U_\lambda \cap U_\mu)$. Avec $2^{-K^{\nu+1}} \leqq 2^{-(4+K^\nu)}$, on a

$$
\begin{aligned}
|z_i - a_i| &\leqq \frac{3}{8} 2^{-K^{\nu+1}} + \sqrt{2}\left(2^{-K^\nu} + \frac{3}{4} 2^{-K^{\nu+1}}\right) \\
&< \sqrt{2} \cdot 2 \cdot 2^{-K^\nu} < \sqrt{2}\, e^{-\xi(a)} \leqq e^{-\eta(a)} \qquad (n-m+1 \leqq i \leqq n),
\end{aligned}
$$

ce qui montre $z \in \Omega(a)$. Ensuite, on discerne deux cas: cas où $|\mu| = \nu$ et cas où $|\mu| = \nu + 1$. En appliquant le procédé précédent de majoration aux $|\mathrm{Re}(z_i - a_{\mu i})|$ et $|\mathrm{Im}(z_i - a_{\mu i})|$ si $i \in J(a_\mu)$ et au $|z_i - a_{\mu i}|$ si $i \in J^*(a_\mu)$, on peut montrer $z \in \Omega(a_\mu)$ sans difficulté, ce qui démontre l'énoncé.

Maintenant, un point $x \in \Gamma_0$ étant fixé, nous allons évaluer h en tant que fonction de $y=(y_1, \cdots, y_m)$. D'après l'énoncé précédent, elle est sur $\tilde{Q}_x$ holomorphe et majorée par $2e^{K\gamma(a)}$. Elle s'annule au point $y=f(x)$. En posant $t_i = y_i - f_i(x)$, on réarrange la série de Taylor de h au point $y=f(x)$ de la façon suivante:

$$
\begin{aligned}
h(x, y) &= \sum_{|k| \geqq 1} a_{k_1 \cdots k_m}(x) t_1^{k_1} \cdots t_m^{k_m} \\
&= \sum_{k_1 \geqq 1} + \sum_{k_1 = 0, k_2 \geqq 1} + \cdots + \sum_{k_1 = k_2 = \cdots = k_{m-1} = 0} \\
&= t_1 h_1(x, t) + t_2 h_2(x, t) + \cdots + t_m h_m(x, t).
\end{aligned}
$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy et de (12.2), on a

$$
\begin{aligned}
&|a_k(x)| \leqq 2e^{K\gamma(a)} (2^{2+K^{\nu+1}})^{|k|}; \\
&|h_i(x, t)| \leqq 2^{m-i+4+K^{\nu+1}} \cdot e^{K\gamma(a)} \qquad \text{pour } \max |t_i| \leqq 2^{-(3+K^{\nu+1})}; \\
&|h(x, y)| \leqq (\max |t_i|) 2^{m+4+K^{\nu+1}} \cdot e^{K\gamma(a)} \qquad \text{pour } y \in Q_x.
\end{aligned}
$$

De là et du lemme 5 découlent

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_x} H(\varphi) dV'(y) \leqq \int_{Q_x} (\max |t_i|)^{-(2m-1)} \cdot H_0 dV'(y) \\
&\leqq H_0 (2m\pi^m) 2^{-(3+K^{\nu+1})} \leqq M_1 \cdot e^{K^3 \xi(a) + 2K\gamma(a) + (2m+\varepsilon)\beta'(a) - (1/K)\varphi(a)},
\end{aligned}
$$

où dV' est la mesure de Lebesgue sur C^m et on abrège

$$
\begin{aligned}
H_0 &= 2^{4m+\varepsilon+8+2K^{\nu+1}} \cdot m^{2m+\varepsilon} \cdot e^{2K\gamma(a) + (2m+\varepsilon)\beta'(a) - (1/K)\varphi(a)} \quad \text{et} \\
M_1 &= 2^{4m+\varepsilon+6+K^3} \cdot m^{2m+\varepsilon+1} \cdot \pi^m.
\end{aligned}
$$

D'autre part, en écrivant $V_\lambda \cap V_\mu = \tilde{\Gamma} \times \tilde{\Gamma}'$ de même que $U_\lambda \cap U_\mu$, on peut facilement minoré le volume de $\tilde{\Gamma}' \backslash \Gamma'$ dans C^m par $m2^{-(K^{\nu+2}+(2m-1)(2+K^{\nu+1}))}$. D'où, on a pour $x \in \Gamma_0$

$$\int_{\tilde{\Gamma}'\backslash\Gamma'} e^{-\varphi_0(x,y)} dV'(y) \geqq M_2^{-1} e^{-(K\varphi_0(a)+K^4\xi(a)+(2m-1)K^3\xi(a))},$$

où $M_2 = m^{-1}2^{K^4+(2m-1)(2+K^3)}$, et par suite

$$\int_{Q_x \cap \Gamma'} H(\varphi) dV'(y) \leqq \int_{\tilde{\Gamma}'\backslash\Gamma'} e^{-\varphi_0} dV'(y) \qquad \text{pour } x \in \Gamma_0, \tag{12.3}$$

pourvu que φ satisfasse à

$$\varphi \geqq K(K\varphi_0 + K^4\xi + 2mK^3\xi + 2K\gamma + (2m+\varepsilon)\beta' + \log M_1 M_2). \tag{12.4}$$

Dans $\Gamma_0 \times (\Gamma' \backslash Q_x)$ et dans $(\Gamma \backslash \Gamma_0) \times \Gamma'$, on a $\max |y_i - f_i(x)| > 2^{-(3+K^{\nu+1})}$ et par suite

$$H(\varphi) \leqq M_3 e^{2K\gamma + (2m+\varepsilon)(K^3\xi + K\beta') - \varphi} \leqq e^{-\varphi_0}, \tag{12.5}$$

où $M_3 = 2^{2+(2m+\varepsilon)(4+K^3)} \cdot m^{2m+\varepsilon}$, pourvu que φ satisfasse à

$$\varphi \geqq \varphi_0 + 2K\gamma + (2m+\varepsilon)(K^3\xi + K\beta') + \log M_3. \tag{12.6}$$

Or, en vertu de (11.4) et (11.5), l'inégalité (12.4) entraîne (12.6) ainsi que (12.1). Donc, lorsqu'on choisit d'après la condition (iii) au n° 8 une fonction $\varphi \in \Phi$ satisfaisant à (12.4), on a en vertu de (12.3) et de (12.5)

$$\int_{\Gamma'} H(\varphi) dV'(y) \leqq \int_{\tilde{\Gamma}'} e^{-\varphi_0} dV'(y),$$

ce qui montre l'inégalité du lemme 7 dans le cas où $\lambda \in A$ et $\mu \in A$.

Nous avons ainsi achevé la démonstration du lemme 7 et par suite celle du théorème 7.

13. Familles contrôleuses

Une famille Φ de fonctions plurisousharmoniques dans un ouvert pseudoconvexe Ω de C^n s'appellera *famille contrôleuse sur* Ω *avec* $(\rho, \sigma, K, \varphi_0)$ si les quatre conditions (i)~(iv) au n° 8 pour Φ, ρ, σ, K et φ_0 sont satisfaites. Pour une telle famille Φ, nous désignons avec Hörmander (Voir [2]) par $A_\Phi(\Omega)$ l'algèbre formée des fonctions f, holomorphes dans Ω et satisfaisant à la condition suivante:

(α) il existe une $\varphi \in \Phi$ telle que $|f| \leqq e^\varphi$ dans Ω.

Le raisonnement fait pour G au n° 12 montre que la condition (α) pour f est équivalente à la condition

(β) il existe une $\psi \in \Phi$ telle que $\|f\|_\psi < +\infty$.

On verra aussitôt que toute sous-famille Φ' cofinale au sens de la relation d'ordre d'une famille contrôleuse Φ sur Ω avec $(\rho, \sigma, K, \varphi_0)$ est aussi famille contrôleuse sur Ω avec $(\rho, \sigma, K, \varphi_0')$, $\varphi_0' \in \Phi'$ choisie tellement que $\varphi_0' \geqq \varphi_0$. On a $A_\Phi(\Omega) = A_{\Phi'}(\Omega)$.

On pourra montrer aisément la

Proposition 1. *Étant donnée, pour chaque $i=1$ et 2, une famille contrôleuse Φ_i sur un ouvert pseudoconvexe Ω_i de $\boldsymbol{C}^n$ avec $(\rho_i, \sigma_i, K_i, \varphi_{i0})$, la famille Φ formée des sommes $\varphi_1 + \varphi_2$ dans $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, avec $\varphi_i \in \Phi_i$ $(i=1, 2)$, est une famille contrôleuse sur Ω avec $(\rho, \sigma, K, \varphi_0)$, où $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$, $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$, $K = \max\{K_1, K_2\}$ et $\varphi_0 = \varphi_{10} + \varphi_{20}$. En outre, les fonctions de $A_{\Phi_i}(\Omega_i)$ restreintes à Ω appartiennent à $A_\Phi(\Omega)$.*

Pour le moment, nous nous bornons au cas où $\Omega = \boldsymbol{C}^n$ c'est-à-dire au cas des fonctions entières. La fonction

$$\sigma_0(z) = \log(1+|z|^2)^2,$$

considérée par Hörmander dans [1] ainsi que par Skoda dans [9], jouera un rôle fondamental à double sens en vertu de ses propriétés suivantes:

(1) σ_0 est de classe C^∞ et $\geqq 0$;

(2) elle est plurisousharmonique et admet $2e^{-\sigma_0}$ pour borne inférieure pour sa plurisousharmonicité;

(3) si $z' = (z_1', \cdots, z_n') \in \boldsymbol{C}^n$, $z'' = (z_1'', \cdots, z_n'') \in \boldsymbol{C}^n$ et $|z_i' - z_i''| \leqq (2\sqrt{n})^{-1}$ $(i=1, \cdots, n)$, alors on a

$$1+\sigma_0(z'') \leqq 2(1+\sigma_0(z'));$$

(4) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{C}^n} e^{-a\sigma_0} dV < +\infty$ pourvu que $a > \dfrac{n}{2}$.

En effet, par un calcul direct, on obtient

$$\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \sigma_0(z)}{\partial z_k \cdot \partial \bar{z}_l} t_k \bar{t}_l = \frac{2}{(1+|z|^2)^2} |t|^2 + 2\frac{|z|^2|t|^2 - |(z, t)|^2}{(1+|z|^2)^2}$$

quels que soient $z \in \boldsymbol{C}^n$, $t = (t_1, \cdots, t_n) \in \boldsymbol{C}^n$, d'où découle (2). En posant $r = |z'|$ et $f(r) = 1+\log(1+r^2)^2$, on a $f(r) \geqq 1$, $f'(r) \leqq 2$, $|z''| \leqq r + \dfrac{1}{2}$, et par suite $f(|z''|) \leqq f\left(r+\dfrac{1}{2}\right) - f(r) + f(r) \leqq 2\dfrac{1}{2} + f(r) \leqq 2f(|z'|)$, ce qui montre (3). (4) est élémentaire et (1) est trivial.

A l'aide de cette fonction σ_0, on a le premier exemple le plus fondamental que voici: Soit Φ_0 la famille formée des fonctions φ de la forme

$$\varphi(z) = a(1+\sigma_0(z))$$

a étant une constante $\geqq 1$. Alors, on peut vérifier immédiatement que Φ_0 est une famille contrôleuse sur $\boldsymbol{C}^n$ avec $(\log 2\sqrt{n}, \sigma_0, 2, 2^{-1}(n+1)(1+\sigma_0))$. $A_{\Phi_0}(\boldsymbol{C}^n)$ est l'algèbre des fonctions polynômes dans $\boldsymbol{C}^n$. Cela posé, nous allons donner une méthode générale de construction qui montre l'existence de viverses familles contrôleuses sur $\boldsymbol{C}^n$, les unes se rapportant aux fonctions entières d'ordre fini et les autres aussi aux fonctions entières d'ordre infini. Pour cela, nous donnons d'abord la proposition suivante:

Proposition 2. *Soient f et p deux fonctions réelles continues sur l'intervalle* $[0, +\infty)$ *d'une variable réelle, satisfaisant aux conditions suivantes:*

(i) *f est différentiable et croissante sur* $(0, +\infty)$, *avec* $f(0)\geqq 1$;

(ii) $f(r+e^{-p(r)})\leqq 2f(r)$ *pour* $r\geqq 0$;

(iii) *il existe un réel $a\geqq 0$ tel que $f'\leqq e^{af}$ sur* $(0, +\infty)$. *Soit g une fonction réelle différentiable croissante convexe sur* $[1, +\infty)$, *avec* $g(1)\geqq 1$, *satisfaisant à la condition*

(iv) *il existe un réel $b\geqq 0$ tel que $g'(2t)\leqq e^{bt}g(t)$ pour $t\geqq 1$.*

Sous ces hypothèses, les fonctions $\tilde{f}=g\circ f$ et $\tilde{p}=\max\{p, (2a+b)f\}$ satisfont aux conditions (i), (ii) *et* (iii) *précédentes.*

En effet, il est clair que $\tilde{f}$ et $\tilde{p}$ sont continues sur $[0, +\infty)$ et que $\tilde{f}$ possède les propriétés de (i). A l'aide de la formule de la moyenne, on a avec un réel θ $(0<\theta<1)$

$$\begin{aligned}
&g(f(r+e^{-\tilde{p}(r)}))-g(f(r))\\
&\leqq g'(f(r+\theta e^{-\tilde{p}(r)}))\cdot f'(r+\theta e^{-\tilde{p}(r)})\cdot e^{-\tilde{p}(r)}\\
&\leqq g'(2f(r))\cdot \exp(af(r+\theta e^{-\tilde{p}(r)})-\tilde{p}(r))\\
&\leqq g(f(r))\cdot \exp(bf(r)+2af(r)-\tilde{p}(r))\leqq g(f(r)),
\end{aligned}$$

ce qui montre que la condition (ii) est vérifiée. Si g est constante, il n'y a rien à faire pour (iii). Supposons donc que g n'est pas constante. Alors, on peut trouver un réel $c>0$ tel qu'on ait $cg(t)\geqq t$ pour tout $t\geqq 1$. On a

$$\tilde{f}'(r)\leqq\begin{cases} g'(2)\cdot e^{2a} & \text{si } 1\leqq f(r)<2;\\ g\left(\dfrac{1}{2}f(r)\right)\cdot \exp\left(\dfrac{b}{2}f(r)+af(r)\right) & \text{si } f(r)\geqq 2. \end{cases}$$

Si $f(r)<2$, il suffit de choisir un réel $\tilde{a}\geqq 0$ tellement que $g'(2)e^{2a}\leqq e^{\tilde{a}}$. Si $f(r)\geqq 2$, il vient

$$\tilde{f}'(r)\leqq \exp\left(g(f(r))+\left(\frac{b}{2}+a\right)cg(f(r))\right).$$

En somme, il existe un réel $\tilde{a}\geqq 0$ tel que $\tilde{f}'\leqq e^{\tilde{a}\tilde{f}}$ sur $(0, +\infty)$. c.q.f.d.

Conservons les notations et les hypothèses de la proposition 2 et de plus supposons que les trois conditions suivantes soient satisfaites:

(a) $f(|z|)$ est plurisousharmonique de classe C^2 et elle admet $e^{-\sigma}$ pour borne inférieure pour sa plurisousharmonicité dans $\boldsymbol{C}^n$, σ étant une fonction plurisousharmonique continue $\geqq 0$ dans $\boldsymbol{C}^n$;

(b) il existe un réel $c\geqq 1$ tel que l'on ait, pour tout $z\in\boldsymbol{C}^n$, $\varphi_0(z):=cf(|z|)\geqq\sigma(z)$, $\varphi_0(z)\geqq\rho(z):=p(|z|)+\log\sqrt{n}$ et $\int_{C^n}e^{-\varphi_0}dV<+\infty$;

(c) $g'(1)>0$ et g est de classe C^2 sur $[1, +\infty)$. Alors, on observe aussitôt que la famille Φ formée des fonctions φ de la forme $\varphi(z)=af(|z|)$, a étant une constante $\geqq 1$, est une famille contrôleuse sur $\boldsymbol{C}^n$ avec $(\rho, \sigma, 2, \varphi_0)$. De plus, en posant $\tilde{a}=\max\{1, g'(1)^{-1}\}$, on pourra montrer sans difficulté que les fonctions $\tilde{a}\tilde{f}$ et $\tilde{p}$ satisfont non seulement aux conditions (i), (ii) et (iii) de la proposition 2 mais aux conditions (a) et (b) précédentes avec la même fonction σ. D'où, on aura une nouvelle famille contrôleuse et par suite on pourra continuer ce processus indéfiniment.

Par exemple, les fonctions $f_0(r)=1+\log(1+r^2)^2$ et $p_0(r)=\log 2$ satisfont aux conditions (i), (ii) et (iii) avec $a=1$ et aux conditions (a) et (b) avec $\sigma=\sigma_0$ et $c=(n+1)/2$. La famille contrôleuse induite de (f_0, p_0) est la famille Φ_0 donnée plus haut.

Pour un réel $\alpha>0$, la fonction $g(t)=e^{\alpha t}$ satisfait aux conditions (iv) et (c). A partir de (f_0, p_0) et par l'intermédiaire de cette g, le processus qu'on vient d'indiquer nous donne un nouveau couple (f_1, p_1) de fonctions réelles continues sur $[0, +\infty)$ et une nouvelle famille contrôleuse Φ_1, puis (f_2, p_2) et Φ_2, et ainsi de suite. Φ_1 est, comme on le vérifie facilement, cofinale avec la famille Φ' formée des fonctions φ' de la forme $\varphi'(z)=A(|z|^{4\alpha}+1)$, A étant une constante $\geqq 1$. Donc, on a $A_{\Phi_1}(\boldsymbol{C}^n)=A_{\Phi'}(\boldsymbol{C}^n)$. Les fonctions entières d'ordre $<4\alpha$ appartiennent à cette algèbre, mais aucune fonction entière d'ordre$<4\alpha$ n'y appartient. Remarquons que l'algèbre $A_{\Phi_2}(\boldsymbol{C}^n)$ admet déjà des fonctions entières d'ordre infini. Signalons encore que, pour un réel $\alpha>1$, la fonction $g(t)=t^{\alpha}$ satisfait aux conditions (iv) et (c).

Finalement, passons à un ouvert pseudoconvexe général Ω $(\neq\boldsymbol{C}^n)$ de $\boldsymbol{C}^n$. Pour ceci, donnons-nous une famille contrôleuse Φ^* sur $\boldsymbol{C}^n$ avec $(\rho^*, \rho^*, K^*, \varphi_0^*)$ d'une façon quelconque et considérons pour chaque $z\in\Omega$ la distance poly cylindrique $R(z)$ de z à la frontière de Ω. On sait bien que $-\log R$ ainsi que $R^{-\alpha}$, α étant une constante >0, sont plurisousharmoniques et continues dans Ω. Soit ψ l'une des deux fonctions $\max\{1, -\log R\}$ et $R^{-\alpha}$. Soit Φ la famille formée des fonctions φ de la forme

$$\varphi = a\psi+\varphi^* ,$$

avec $a>0$ et $\varphi^*\in\Phi^*$. Posons $\rho=\max\{\log(2/R), \rho^*\}$ et $\sigma=\sigma^*$. Dans le cas où $\psi=\max\{1, -\log R\}$, posons $K=K^*$ et $\varphi_0=\psi+\varphi_0^*$. Dans le cas où $\psi=R^{-\alpha}$, soit K le plus petit entier $\geqq\max\{K^*, 2^\alpha\}$ et posons $\varphi_0=a_0\psi+\varphi_0^*$, où $a_0=\sup_{x\geqq 1/2} x^{-\alpha}\log 2x<+\infty$. Alors, la famille Φ est, comme on le vérifie sans difficulté, une famille contrôleuse sur Ω avec $(\rho, \sigma, K, \varphi_0)$.

Bibliographie

[1] L. Hörmander: *L^2 estimates and existence theorems for the $\bar\partial$ operator,* Acta Math. **113** (1965), 89–152.

[2] ————: *Generators for some rings of analytic functions,* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 943–949.

[3] ————: An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966. Rev. Ed.: North-Holland Math. Library Vol. 7, North-Holland, 1973.

[4] B. Jennane: *Extension d'une fonction définie sur une sous-variété avec contrôle de la croissance,* Séminaire Pierre Lelong-Henri Skoda (Analyse) Année 1976/77, Lecture Notes in Math. Vol. 694, Springer (1978), 126–133.

[5] P. Lelong: Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables), Les Presses de l'Université de Montréal, 1968.

[6] A.F. Leontev: *On the interpolation of the class of entire functions of finite ordre,* Dokl. Akad. Nauk SSSR **56** (1948), 785–787.

[7] Y. Nishimura: *Problème d'extension dans la théorie des fonctions entières d'ordre fini,* J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), 635–650.

[8] K. Oka: *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.* VII. *Sur quelques notions arithmétiques,* Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 1–27.

[9] H. Skoda: *Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **5** (1972), 545–579.

Bibliographie complémentaire

En signalant les articles suivants, M. H. Skoda a bien voulu m'informer que MM. C.A. Berenstein et B.A. Taylor, ainsi que M.J.-P. Demailly, ont obtenu des résultats similaires à notre théorème 7 au n° 8, par une méthode tout différente:

[10] C.A. Berenstein-B.A. Taylor: *On the geometry of interpolating varieties,* (à paraître).

[11] J.-P. Demailly: *Scindage holomorphe d'un morphisme de fibrés vectoriels semi-positifs avec estimations L^2,* (à paraître).

Le présent article a été résumé aux "Proceedings" suivants:

[12] T. Yoshioka: *Cohomologie à estimation L^2 et extension des fonctions holomorphes avec contrôle de la croissance,* Proc. Japan Acad. **57A** (1981), 181–184.

Department of Mathematics
Faculty of Science
Nara Women's University
Nara 630, Japan