Robert, D.
Osaka J. Math.
15 (1978), 233-243

DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOYAU RESOLVANT D'OPERATEURS ELLIPTIQUES

DIDIER ROBERT

(Received February 16, 1977)

1. Introduction

Soit $\mathcal{A}(x, D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha$ un opérateur elliptique positif sur un ouvert Ω borné de $\boldsymbol{R}^n$, assez régulier. Soit A une réalisation autoadjointe, positive de $\mathcal{A}(x, D)$ dans $L^2(\Omega)$ ($C_0^\infty(\Omega)\subseteq D(A)\subseteq Hm(\Omega)$ et A est un opérateur fermé). Supposons de plus que $a_\alpha\in C^\infty(\bar{\Omega})$ et que $m>n$. Alors, d'après S. Agmon [1], pour $\lambda\notin\boldsymbol{C}\backslash([0, +\infty[)$ l'opérateur $(A-\lambda)^{-1}$ a un noyau continu sur $\Omega\times\Omega$ que l'on note $K_\lambda(x, y)$. Dans leur article [2] Agmon et Kannai ont montré l'existence d'un développement asymptotique en λ de $K_\lambda(x, x)$ dans le complémentaire d'une région parabolique entourant $[0, +\infty[$. D'une manière précise on a :

$$K_\lambda(x, x)\sim(-\lambda)^{(n/m)-1}\cdot\sum_{j=0}^{+\infty} C_j(x)\,(-\lambda)^{-j/m}$$

uniformément sur tout compact de Ω pour $|\lambda|\geqslant 1$ et $d(\lambda)\geqslant|\lambda|^{1-(\theta/m)}$ où $d(\lambda)=\text{dist}\,(\lambda, [0, +\infty[)$ et $\theta<1/2$.

De plus si pour $|\alpha|=m$, a_α est constant sur Ω, alors le développement a lieu pour tout $\theta<1$. Nous nous proposons de montrer ici que ce dernier résultat est encore vrai même si pour $|\alpha|=m$, a_α est variable. La méthode utilisée pour obtenir ce résultat consiste à construire une bonne paramétrix pour l'opérateur $\mathcal{A}(x, D)-\lambda$ sous la forme d'un opérateur de Fourier associé à une phase adaptée à l'opérateur $\mathcal{A}(x, D)$. La notion de phase adaptée a été utilisée par Hörmander [5] pour l'étude de la fonction spectrale d'un opérateur elliptique auto-adjoint.

2. Notations, hypothèses, resultats

Désignons par $C_*^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ l'espace des fonctions C^∞ sur $\boldsymbol{R}^n$ constantes en dehors d'un compact. On se donne un opérateur différentiel $\mathcal{A}(x, D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\cdot D^\alpha$ d'ordre $m>n$ à coefficients $a_\alpha\in C_*^\infty(\boldsymbol{R}^n)$.

On fait les hypothèses suivantes:

(H_1) $\mathcal{A}_m(x, \xi)=\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\cdot\xi^\alpha$ est réel et $|\mathcal{A}_m(x, \xi)|\geqslant E\cdot|\xi|^m$ pour tout (x, ξ)

$\in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$

(H$_2$) $\mathcal{A}(x, D) = \mathcal{A}'(x, D) + \mathcal{B}(x, D)$ où $\mathcal{A}'$ est un opérateur différentiel d'ordre m formellement auto-adjoint, $\mathcal{B}$ d'ordre $\leqslant m-1$.

Soit A_0 (resp. A_0') la réalisation de $\mathcal{A}(x, D)$ (resp. $\mathcal{A}'(x, D)$) dans $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ de domaines: $D(A_0) = D(A_0') = H_m(\boldsymbol{R}^n)$. On a alors le:

Théorème 2.1. (1) *Il existe une région $\mathcal{R}_0$ du plan complexe de la forme: $\mathcal{R}_0 = \{\lambda \in \boldsymbol{C},\ |\mathrm{Im}\,\lambda| \geqslant C(1+|\lambda|)^{1-(1/m)}\}$ dans laquelle la résolvante $(A_0-\lambda)^{-1}$ existe.*

(2) *Pour tout $\lambda \in \mathcal{R}_0$, $(A_0-\lambda)^{-1}$ est un opérateur intégral de noyau $K_\lambda^{(0)}(x,y)$ continu et borné sur $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$.*

(3) *On a le développement asymptotique:*

$$K_\lambda^{(0)}(x, x) \sim (-\lambda)^{(n/m)-1} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} C_j(x) (-\lambda)^{-j/m} \text{ où } C_j \in C_*^\infty(\boldsymbol{R}^n) \tag{2.1}$$

au sens suivant: pour tout réel $\theta < 1$, pour tout entier $N \geqslant 1$, il existe $C(N, \theta)$ telle que:

$$|K_\lambda^{(0)}(x, x) - (-\lambda)^{(n/m)-1} \sum_{j<N} C_j(x) (-\lambda)^{-j/m}| \leqslant C(N, \theta) \cdot |\lambda|^{((n-N)/m)-1}$$

pour tout $x \in \boldsymbol{R}^n$, $\lambda \in \mathcal{R}_0$, $|Im\,\lambda| \geqslant |\lambda|^{1-(\theta/m)}$, $|\lambda| \geqslant 1$ où λ^α désigne la détermination définie sur $\boldsymbol{C} - (]-\lambda, 0])$, positive sur $]0, +\infty[$.

En particulier, si $\mathcal{A}_m(x, \xi) \geqslant 0$ pour tout $\xi \in \boldsymbol{R}^n$, on a:

$$C_0(x) = (2\pi)^{-n} \cdot \int \frac{1}{\mathcal{A}_m(x, \xi)+1}\, d\xi\ .$$

Dans le théorème suivant nous donnons un résultat analogue pour des réalisations dans $L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$.

Soit alors Ω un ouvert ayant la propriété du cône. Soit A' une réalisation auto-adjointe de $\mathcal{A}'(x, D)$ dans $L^2(\Omega)$ de domaine $D(A') \subseteq H_m(\Omega)$. On considère une réalisation A de $\mathcal{A}(x, D)$ de domaine $D(A) = D(A')$ et on fait sur cette réalisation l'hypothèse:

(H$_3$) L'adjoint A^* de A est une réalisation dans $L^2(\Omega)$ de l'adjoint formel $\mathcal{A}^*(x, D)$ de $\mathcal{A}(x, D)$ vérifiant $D(A^*) \subseteq H_m(\Omega)$.

Théorème 2.2. (1) *et* (2) *comme dans le théorème* 2.1

(3) *Pour $\lambda \in \mathcal{R}_0$ soit $K_\lambda(x, y)$ le noyau de $(A-\lambda)^{-1}$. Alors pour tout $\theta < 1$, N entier $\geqslant 1$, p réel $\geqslant 0$ il existe $C(\theta, N, p) > 0$ telle que:*

$$\begin{aligned} &|K_\lambda(x, x) - (-\lambda)^{(n/m)-1} \cdot \sum_{j<N} C_j(x) (-\lambda)^{-j/m}| \\ &\leqslant C(\theta, N, p) \left[|\lambda|^{((n-N)/m)-1} + \frac{|\lambda|^{n/m}}{|\mathrm{Im}\lambda|} \cdot \left(\frac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{\delta(x)\,|\mathrm{Im}\lambda|} \right)^p \right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

pour tout $x\in\Omega$, $\lambda\in\mathcal{R}_0$, $|\lambda|\geqslant 1$, $|Im\,\lambda|\geqslant|\lambda|^{1-(\theta/m)}$, *où l'on a posé*: $\delta(x)=\text{Min}\{1, \text{dist}(x, \delta\Omega)\}$.

REMARQUE 2.3. Si l'on suppose que $\mathcal{A}_m(x, \xi)\geqslant 0$ pour tout $(x, \xi)\in \boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$ on peut remplacer, dans les estimations précédentes, $|Im\,\lambda|$ par $d(\lambda)=\text{dist}(\lambda, [0, +\infty[)$.

Les points (1) et (2) des théorèmes 2.1 et 2.2 sont classiques (Agmon [1]).

Le point (3) de (2.1) résultera de la construction d'une paramétrix et le point (3) de (2.2) résultera de la comparaison des noyaux résolvants de deux opérateurs elliptiques.

3. Construction d'une parametrix pour $\mathcal{A}(x, D)-\lambda$

Nous précisons d'abord la classe des fonctions de phase qui vont intervenir dans la suite. Soit ω un ouvert convexe de $\boldsymbol{R}^n$.

DEFINITION 3.1. On appelle phase classique sur $\omega\times\omega\times\boldsymbol{R}^n$ toute fonction φ: $\omega\times\omega\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ vérifiant:

(ϕ_1) $\varphi\in C^\infty(\omega\times\omega\times(\boldsymbol{R}^n-\{0\}))$

(ϕ_2) φ est homogène de degré 1 en ξ

(ϕ_3) $\langle x-y, \xi\rangle=0$ entraîne $\varphi(x, y, \xi)=0$

(ϕ_4) $\text{grad}_x\,\varphi(x, y, \xi)|_{x=y}=\xi$.

Le prototype étant la phase $(x, y, \xi)\to\langle x-y, \xi\rangle$ la terminologie est justifiée par la:

Proposition 3.2. (1) *Toute phase classique* φ *sur* $\omega\times\omega\times\boldsymbol{R}^n$ *admet la représentation*: $\varphi(x, y, \xi)=\langle x-y, \phi(x, y, \xi)\cdot\xi\rangle$ *où* ϕ *est une application* C^∞: $\omega\times\omega\times(\boldsymbol{R}^n-\{0\})\to M_n(\boldsymbol{R})$ *où* $M_n(\boldsymbol{R})$ *est l'espace des matrices carrées* (n, n) *à coefficients réels*, ϕ *étant homogène de degré* 0 *en* ξ *et* $\phi(x, x, \xi)=1_n$ *où* 1_n *désigne la matrice identité de* $M_n(\boldsymbol{R})$.

(2) *De plus pour tout* $x_0\in\omega$ *il existe un voisinage ouvert* ω_1 *de* x_0, $\omega_1\subset\subset\omega$ *tel que* $\xi\mapsto\phi(x, y, \xi)\cdot\xi$ *soit une bijection de* $\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ *sur* $\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ *pour tout* $(x, y)\in\omega_1\times\omega_1$ *et que l'application inverse* ψ *vérifie*: $\psi\in C^\infty(\omega_1\times\omega_1\times(\boldsymbol{R}^n-\{0\}))$, ψ *est homogène de degré* 1 *en* η.

Démonstration. La formule de Taylor donne immédiatement:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}(x, y, \xi)=\sum_{k=1}^n(x_k-y_k)\int_0^1\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial\xi_j}\varphi(y+t(x-y), y, \xi)dt\,.$$

Posons $a_{jk}(x, y, \xi)=\displaystyle\int_0^1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial\xi_j}(y+t(x-y), y, \xi)dt.$

D'après l'identité d'Euler pour les fonctions homogènes on a:

$$\varphi(x, y, \xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}(x, y, \xi) = \sum_{k,j} (x_k - y_k) a_{jk}(x, y, \xi) \xi_j .$$

On obtient donc (1) avec $\phi = (a_{jk})_{j,k}$. Il est clair que (ϕ_4) entraîne: $\phi(x, x, \xi) = 1_n$. Par conséquent pour ω_1' assez petit, $x_0 \in \omega_1' \subset\subset \omega$, $\phi(x, y, \xi)$ est inversible pour $(x, y) \in \omega_1' \times \omega_1'$ et $\xi \in \boldsymbol{R}^n - \{0\}$. Pour établir (2) on est amené à résoudre le problème de point fixe: étant donné $\eta \in \boldsymbol{R}^n$, $|\eta| = 1$, montrer qu'il existe $\xi \in \boldsymbol{R}^n - \{0\}$ unique tel que

$$\xi = \phi^{-1}(x, y, \xi) \cdot \eta . \tag{3.1}$$

ψ sera indéfiniment différentiable par le théorème des fonctions inverses. On remarque d'abord qu'il existe $C \geqslant 1$, indépendante de (x, y, η), telle que toute solution de (3.1) vérifie: $\frac{1}{C} \leqslant |\xi| \leqslant C$.

Désignons par Q la couronne de $\boldsymbol{R}^n$: $Q = \{\xi \in \boldsymbol{R}^n, \frac{1}{C} \leqslant |\xi| \leqslant C\}$. On montre alors que $\xi \mapsto \phi^{-1}(x, y, \xi) \cdot \eta$ est contractante dans Q pour $|\eta| = 1$. On a:

$$\phi^{-1}(x, y, \xi) = 1_n + \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \phi^{-1}(x + \tau(y - x), y, \xi) d\tau$$

et

$$\begin{aligned} & \phi^{-1}(x, y, \xi) - \phi^{-1}(x, y, \xi') \\ & = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 [\phi^{-1}(x + \tau(y - x), y, \xi) - \phi^{-1}(x + \tau(y - x), y, \xi')] d\tau . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Or $Q \subset Q' = \{\xi\ \boldsymbol{R}^n, \frac{1}{n \cdot C} \leqslant \mathrm{Max}\ |\xi_i| \leqslant C\}$ et pour tout $\xi, \xi' \in Q'$ on peut joindre ξ à ξ' par une ligne polygonale composée au plus de $(n+1)$ segments, chacun étant de longueur $\leqslant |\xi - \xi'|$. Par application de la formule de Taylor en ξ au second membre de (3.2) on trouve alors qu'il existe $\delta > 0$ tel que: $|\phi^{-1}(x, y, \xi) - \phi^{-1}(x, y, \xi')| \leqslant \frac{1}{2} |\xi - \xi'|$ pour $(x, y) \in \omega_1' \times \omega_1'$, $|x - y| \leqslant \delta$ et $\xi, \xi' \in Q$. On peut donc résoudre le problème de point fixe (3.1) pour $x, y \in \omega_1$, boule centrée en x_0 de rayon assez petit.

Dans la suite nous utiliserons les symboles classiques de Hörmander:

Definition 3.3. Soient ω un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$, k réel, on désigne par $S^k(\omega \times \omega, \boldsymbol{R}^n)$ la classe des symboles $p(x, y, \xi)$ de classe C^∞ sur $\omega \times \omega \times (\boldsymbol{R}^n - \{0\})$ tels que pour tout compact $K \subset \omega$, pour tous multi-indices α, β, γ il existe $C_{K,\alpha,\beta,\gamma}$ vérifiant:

$$|D_x^\alpha D_y^\beta \partial_\xi^\gamma \cdot p(x, y, \xi)| \leqslant C_{K,\alpha,\beta,\gamma} (1 + |\xi|)^{k - |\gamma|} \text{ pour } x, y \in K,\ |\xi| \geqslant C .$$

Nous utiliserons également le formalisme des intégrales oscillantes

(Hörmander [6]). On a alors le corollaire suivant de (3. 2):

Corollaire 3.4. *Avec les notations de la proposition* 3.2 *on a: Il existe une fonction $I(x,y,\xi)$ définie sur $\omega_1\times\omega_1\times(\boldsymbol{R}^n-\{0\})$. $I\in S^0(\omega_1\times\omega_1, \boldsymbol{R}^n)$, homogène de degré* 0 *en ξ telle que*:

$$u(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\varphi(x,y,\xi)}I(x,y,\xi)u(y)dyd\xi \text{ pour tout } u\in C_0^\infty(\omega_1)\,.$$

De plus $I(x,x,\xi)=1_n$ pour $(x,\xi)\in\omega_1\times(\boldsymbol{R}^n-\{0\})$.

Démonstration On part de:

$$u(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}u(y)dyd\xi=\lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi)^{-n}\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\chi(\varepsilon\cdot\xi)u(y)dyd\xi$$

où $\chi\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ et $\chi(\xi)=\begin{cases}0 & \text{si } |\xi|\geqslant 1\\ 1 & \text{si } |\xi|\leqslant 1/2\end{cases}$.

D'après la proposition 3.2 on peut faire le changement de variables: $\xi=\phi(x,y,\eta)\cdot\eta$. Il suffit donc de poser $I(x,y,\xi)=\left|\dfrac{D\phi(x,y,\eta)\cdot\eta}{D\eta}\right|$.

Le corollaire résulte d'un calcul classique sur les intégrales oscillantes.

Nous allons construire une paramétrix à droite pour $\mathcal{A}(x,D)-\lambda$ sous la forme: $\mathcal{P}_\lambda(x,D)u(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\varphi(x,y,\xi)}p_\lambda(x,y,\xi)u(y)dyd\xi$ où φ est une phase classique à déterminer, $\varphi\in S^1(\omega_1\times\omega_1,\boldsymbol{R}^n)$ et $u\in C_0^\infty(\omega_1)$.

Posons: $\rho(x,z,y,\xi)=\varphi(z,y,\xi)-\varphi(x,y,\xi)-\langle z-x, \mathrm{grad}_x\,\varphi(x,y,\xi)\rangle$ $x,y,z\in\omega_1$ et $\xi\in\boldsymbol{R}^n-\{0\}$. On a d'après la formule de Taylor:

$$\rho(x,z,y,\xi)=\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n}(z_j-x_j)(z_k-x_k)\alpha_{jk}(x,z,y,\xi) \text{ où}$$

$$\alpha_{jk}(x,z,y,\xi)=\int_0^1(1-t)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\varphi(z+t(x-z),y,\xi)dt\in S^1\,.$$

Posons pour tout entier $h\geqslant 1$:

$\dfrac{(i\rho)^h}{h!}=\sum_{|\theta|=2h}g_\theta(x,z,y,\xi)(z-x)^\theta$ où $g_\theta\in S^h$, homogène de degré h en ξ. On a le résultat suivant, qui permet de calculer le symbole du composé d'un opérateur Fourier-intégral et d'un opérateur différentiel:

Lemme 3.5. *Pour tout $f\in C_0^\infty(\omega_1)$ on a*:

$$e^{-i\varphi(x,y,\xi)}\cdot\mathcal{A}(x,D)[f(\cdot)e^{i\varphi(\cdot,y,\xi)}](x)=\sum_{|\alpha+\theta|\leqslant m}\frac{1}{\alpha!}a^{(\alpha+\theta)}(x,\xi_x)[D_z(g_\theta\cdot f)]_{z=x}$$

où $\mathcal{A}^{(\beta)}(x,\eta)=\dfrac{\partial^\beta}{\partial\eta^\beta}\mathcal{A}(x,\eta)$ *et* $\xi_x=grad_x\,\varphi(x,y,\xi)$.

Démonstration. Posons $G_f(x,y,\xi)=e^{-i\varphi(x,y,\xi)}a(x,D)[f(\cdot)e^{-j\varphi(\cdot,y,\xi)}](x)$.

On a: $G_f(x,y,\xi)=e^{-i\varphi}(2\pi)^{-n}\iint e^{i\langle x-z,\eta\rangle}a(x,\eta)f(z)e^{i\varphi(z,y,\xi)}dzd\eta.$

Pour tout entier $H\geqslant 1$:

$$f(z)e^{i\varphi(z,y,\xi)}$$
$$=f(z)e^{i(\varphi(x,y,\xi)+\langle z-x,\xi_x\rangle)}\cdot\sum_{h=0}^{H-1}\frac{(i\rho)^h}{h!}+e^{i\varphi(x,y,\xi)}\cdot R_f(x,z,y,\xi).$$

Posons $F(z)=\left\{e^{i\rho}-\sum_{h=0}^{H-1}\frac{(i\rho)^h}{h!}\right\}(i\rho)^{-H}$. On a alors:

$R_f(x,z,y,\xi)=e^{i\langle z-x,\xi_x\rangle}F(z)\cdot f(z)\cdot(i\rho)^H$. D'où:

$$G_f(x,y,\xi)=\sum_{\substack{|\theta|=2k\\0\leqslant k\leqslant H-1}}(2\pi)^{-n}\iint e^{i\langle z-x,\xi_x-\eta\rangle}\cdot g_\theta(z-x)^\theta\cdot a(x,\eta)f(z)dzd\eta$$
$$+H!\sum_{|\theta|=2H}(2\pi)^{-n}\iint e^{i\langle z-x,\xi_x-\eta\rangle}g_\theta(z-x)^\theta a(x,\eta)f(z)F(z)dzd\eta.$$

En faisant les intégrations par parties habituelles sur les intégrales oscillantes et tenant compte de: $\mathcal{A}^{(\theta)}(x,\zeta+\xi_x)=\sum_{|\alpha+\theta|\leqslant m}\frac{1}{\alpha!}\mathcal{A}^{(\alpha+\theta)}(x,\xi_x)\zeta^\alpha$ on obtient le lemme 3.5 On déduit alors la formule de base pour la construction de la paramétrix $\mathcal{P}_\lambda$: soit $p\in S^k(\omega_1\times\omega_1,\boldsymbol{R}^n)$, à support compact en (x,y) indépendant de ξ. Pour $0\leqslant j\leqslant m$ posons $a_j(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=j}a_\alpha(x)D^\alpha$. On a alors:

$$(3.3)\qquad e^{-i\varphi}(\mathcal{A}(x,D)-\lambda)(p\cdot e^{i\varphi})$$
$$=(\mathcal{A}_m x,\operatorname{grad}_x\varphi)-\lambda)p+\sum_{\substack{0\leqslant j-|\alpha+\theta|\leqslant m-1\\0\leqslant j\leqslant m}}\frac{1}{\alpha!}a_j^{(\alpha+\theta)}(x,\operatorname{grad}_x\varphi)\,[D_z^\alpha(g_\theta\cdot p)]_{z=x}.$$

La paramétrix se construit alors par approximations successives en divisant certains symbôles par $(\mathcal{A}_m(x,\operatorname{grad}_x\varphi)-\lambda)$ pour $\lambda\notin\boldsymbol{R}$.

La perte de précision dans le développement asymptotique de $K_\lambda(x,x)$ lorsqu'on passe des coefficients constants aux coefficients variables est due aux dérivations en x des termes: $(\mathcal{A}_m(x\ \operatorname{grad}_x\varphi(x,y,\xi))-\lambda)^{-k}$. Ce phénomène a été nettement mis en évidence par Hörmander [7] et par Pham The Lai [8]. Cette remarque conduit à choisir une phase telle que: $\mathcal{A}_m(x,\operatorname{grad}_x\varphi(x,y,\xi))=\mathcal{A}_m(y,\xi)$. Ce qui est possible par le:

Lemme 3.6. (Hörmander [5]).-*Pour tout $x_0\in\boldsymbol{R}^n$ il existe une boule ouverte ω_0 centrée en x_0 et une phase classique sur $\omega_0\times\omega_0\times\boldsymbol{R}^n$ vérifiant $\mathcal{A}_m(x,grad_x\varphi(x,y,\xi))=\mathcal{A}_m(y,\xi)$ pour $x,y\in\omega_1$, $\xi\in\boldsymbol{R}^n$.*

Démonstration. Pour $|\xi|=1$ on résoud le problème de Cauchy local du premier ordre: $\begin{cases}\mathcal{A}_m(x,\operatorname{grad}_x\varphi)=\mathcal{A}_m(y,\xi)\\\langle x-y,\xi\rangle=0 \text{ alors } \varphi(x,y,\xi)=0\\\operatorname{grad}_x\varphi(x,y,\xi)|_{x=y}=\xi\end{cases}$

dépendant des paramètres (y, ξ) décrivant un compact. On prolonge ensuite φ par homogénéité en ξ. φ est unique dans un voisinage fixé de x_0.

DEFINITION 3.7 L'unique phase classique vérifiant le lemme 3.6 sera appelée phase adaptée à $\mathcal{A}(x, D)$ dans le voisinage ω_0 de x_0.

Soit $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$. On se place dans un voisinage ouvert ω_1 de x_0 dans lequel existe une phase adaptée à $\mathcal{A}(x, D)$, on suppose ω_1 assez petit pour que la proposition 3.2 et le corollaire 3.4 soient vérifiés. Soient ω_0, ouvert, $x_0 \in \omega_0 \subset\subset \omega_1$ et $\chi \in C_0^\infty(\omega_1)$ telle que $\chi = 1$ sur ω_0. On pose $I_0(x, y, \xi) = \chi(x) \cdot \chi(y)$ $I(x, y, \xi)$. On construit alors $\mathcal{P}_\lambda$ sous la forme: $\mathcal{P}_\lambda(x, y, \xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{k,\lambda}(x, y, \xi)$ où $p_{k,\lambda} \in S^{-m-k}(\omega_1 \times \omega_1, \boldsymbol{R}^n)$.

On pose:

$$p_{0,\lambda}(x, y, \xi) = \frac{I_0(x, y, \xi)}{\mathcal{A}_m(x, \operatorname{grad}_x \varphi) - \lambda} = \frac{I_0(x, y, \xi)}{\mathcal{A}_m(y, \xi) - \lambda}$$

D'après (3.3) on a:

$$e^{-i\varphi}(\mathcal{A}(x, D) - \lambda)(p_{0,\lambda} \cdot e^{i\varphi}) = I_0(x, y, \lambda) - R_{0,\lambda}(x, y, \xi)$$

où $R_{0,\lambda}$ est de la forme $R_{0,\lambda}(x, y, \xi) = \dfrac{r_{0,1}(x, y, \xi)}{\mathcal{A}_m(y, \xi) - \lambda}$ avec $r_{0,1} = S^{m-1}(\omega_1 \times \omega_1, \boldsymbol{R}^n)$ et $r_{0,1}$ est une somme finie de termes homogènes de degré positif en ξ. (C'est la propriété de phase adaptée qui permet d'avoir cette forme simple pour le reste $R_{0,\lambda}$). On construit ensuite $p_{1,\lambda}(x, y, \xi) = \dfrac{r'_{0,1}(x, y, \xi)}{(\mathcal{A}_m(y, \xi) - \lambda)^2}$ où $r'_{0,1}$ est la composante homogène de degré $m-1$ de $r_{0,1}$.

On obtient par (3.3):

$$e^{-i\varphi}(\mathcal{A}(x, D) - \lambda)(p_{1,\lambda} \cdot e^{i\varphi}) = R_{0,\lambda}(x, y, \xi) - R_{1,\lambda}(x, y, \xi)$$

où $R_{1,\lambda}(x, y, \xi) = \dfrac{r_{1,1}(x, y, \xi)}{\mathcal{A}_m(y, \xi) - \lambda} + \dfrac{r_{1,2}(x, y, \xi)}{(\mathcal{A}_m(y, \xi) - \lambda)^2}$ avec

$r_{1,1} \in S^{m-2}(\omega_1 \times \omega_1, \boldsymbol{R}_n)$; $r_{1,2} \in S^{2m-2}(\omega_1 \times \omega_1, \boldsymbol{R}_n)$ et $r_{1,1}$ et $r_{1,2}$ sont des sommes finies de termes homogènes de degré$\geqslant 0$ en ξ.

On a: $e^{-i\varphi}(\mathcal{A}(x, D) - \lambda)\,[(p_{0,\lambda} + p_{1,\lambda})e^{i\varphi}] = I_0(x, y, \xi) - R_{1,\lambda}(x, y, \xi)$.

On obtient ainsi par récurrence sur l'entier $N \geqslant 1$ des symboles $p_{N,\lambda}$ et $\mathcal{R}_{N,\lambda}$ vérifiant:

$$e^{-i\varphi}(\mathcal{A}(x, D) - \lambda)\left[\left(\sum_{j=0}^{N} p_{j,\lambda}\right)e^{i\varphi}\right] = I_0 - \mathcal{R}_{N,\lambda} \tag{3.4}$$

$$p_{N,\lambda} = \frac{q_{N,1}}{(\mathcal{A}_m - \lambda)^2} + \cdots + \frac{q_{N,N}}{(\mathcal{A}_m - \lambda)^{N+1}} \tag{3.5}$$

où $q_{N,k}\in S^{km-N}$, est homogène de degré $km-N$ si $km-N\geqslant 0$ et $q_{N,k}\equiv 0$ si $km-N<0$.

$$\mathcal{R}_{N,\lambda}=\frac{r_{N,1}}{\mathcal{A}_m-\lambda}+\cdots+\frac{r_{N,N+1}}{(\mathcal{A}_m-\lambda)^{N+1}} \tag{3.6}$$

où $r_{N,k}\in S^{km-N-1}$, est une somme finie de termes homogènes de degré positif en ξ.

Posons $\mathcal{P}_{N,\lambda}(x,y,\xi)=\sum_{k=1}^{N}p_{k,\lambda}(x,y,\xi)$. On obtient alors: $[(\mathcal{A}(x,D)-\lambda)\circ\mathcal{P}_{N,\lambda}(x,D)]u(x)=u(x)-\mathcal{R}_{N,\lambda}(x,D)u(x)$ pour tout $u\in C_0^\infty(\omega_0)$. I. vient alors:

$$\mathcal{P}_{N,\lambda}(x,D)u(x)=(A_0-\lambda)^{-1}u(x)-(A_0-\lambda)^{-1}\circ\mathcal{R}_{N,\lambda}(x,D)u(x)\,.$$

Notons respectivement par $KG_{N,\lambda}$ et $K\Delta_{N,\lambda}$ les noyaux-distributions des opérateurs $\mathcal{P}_{N,\lambda}(x,D)$ et $\mathcal{R}_{N,\lambda}(x,D)$. On a l'égalité

$$KG_{N,\lambda}(x,y)-K_\lambda^{(0)}(x,y)=\int_{\omega_1}K_\lambda^{(0)}(x,z)K\Delta_{N,\lambda}(z,y)dz \tag{3.7}$$

pour tout $x,y\in\omega_0$.

Démonstration du théorème 2.1. Puisque $m>n$ on a: $KG_{N,\lambda}(x,x)=(2\pi)^{-n}\int_{R_n}\mathcal{P}_{N,\lambda}(x,x,\xi)d\xi$. D'où par calcul classique on obtient $KG_{N,\lambda}(x,x)=(-\lambda)^{(n/m)-1}\sum_{j=1}^{N}C_j(x)(-\lambda)^{-j/m}$ où les C_j possèdent les propriétés annoncées.

D'après Agmon [1], il existe $C>0$ telle que:

$$|K_\lambda^{(0)}(x,y)|\leqslant C\frac{|\lambda|^{n/m}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\text{ pour } x,y\in\boldsymbol{R}^n \text{et } \lambda\notin\boldsymbol{R}^n\,. \tag{3.8}$$

Il reste à majorer $K\mathcal{R}_{N,\lambda}(z,y)$.

On a les estimation élémentaires:

$$|\mathcal{A}_m(y,\xi)-\lambda|^{-1}\leqslant C\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}(1+|\xi|+|\lambda|^{1/m})^{-m}$$
$$\leqslant C\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}|\lambda|^{(q/m)-1}(1+|\xi|)^{-q},\ 0\leqslant q\leqslant m$$
$$\text{d'où }\left|\frac{r_{N,j}(z,y,\xi)}{\mathcal{A}_m(y,\xi)-\lambda)^j}\right|\leqslant C\left(\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\right)^j|\lambda|^{j((q/m)-1)}(1+|\xi|)^{-jq+jm-N-1}\,.$$

Pour $N\geqslant n$ on peut choisir q tel que $-jq+jm-N-1=-n-1$ d'où $|K\Delta_{n,j}(z,y)|\leqslant C\left(\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\right)^{N+1}|\lambda|^{(n-N)/m}$ pour $z,y\in\omega_1$ et $\lambda\notin\boldsymbol{R}$. Par conséquent à l'aide de (3.8) on a: pour tout $N\geqslant n$ il existe $C_{N,\omega_0}>0$ telle que:

(3.9) $$|K_\lambda^{(0)}(x,y)-KG_{N,\lambda}(x,y)|\leqslant C_{N,\omega_0}\left(\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\right)^{N+2}|\lambda|^{((2n-N)/m)-1}$$

pour $x,y\in\omega_0$ et $\lambda\notin \boldsymbol{R}$.

On en déduit que (2.1) est vérifié uniformément sur tout compact de $\boldsymbol{R}^n$. Mais en dehors d'un compact K les coefficients de $\mathcal{A}(x,D)$ sont constants. Par un calcul analogue au précédent avec le phase $\varphi_0(x,y,\xi)=\langle x-y,\xi\rangle$ on montre facilement que (2.1) a lieu uniformément sur $\boldsymbol{R}^n-K$.

4. Comparaison des noyaux et application

On se donne deux réalisations d'opérateurs elliptiques d'ordre $m>n$: $(\mathcal{A}_i/(x,D), A_i, \Omega_i)$ $i=1,2$ vérifiant (H_1), (H_2) et (H_3) où Ω_i est un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$ ayant la propriété du cône. Soit $\mathcal{R}_0$ une région du type $\mathcal{R}_0=:\{\lambda\in \boldsymbol{C}\colon |\mathrm{Im}\,\lambda|\geqslant C(1+|\lambda|)^{1-(1/m)}\}$ dans laquelle $(A_i-\lambda)^{-1}$ existe pour $i=1,2$. Notons par $K_\lambda^{(i)}(x,y)$ le noyau de $(A_i-\lambda)^{-1}$. On suppose que $\Omega_1\cap\Omega_2\neq\emptyset$. On se propose de comparer $K_\lambda^{(1)}$ et $K_\lambda^{(2)}$ dans $\Omega_1\cap\Omega_2$. Pour cela on pose $\mathcal{A}_i^*(x,D)\sum_{|\alpha|\leqslant m}{}^*\mathcal{A}_\alpha^i D^\alpha$ (adjoint formel de $\mathcal{A}_i(x,D)$) et $\delta_j(\rho)=\sup_{|x-x_0|\leqslant\rho}\{\sum_{|\alpha|=j}(|\mathcal{A}_\alpha^{(1)}(x)-\mathcal{A}_\alpha^{(2)}(x)|+|{}^*\mathcal{A}_\alpha^{(2)}(x)-{}^*\mathcal{A}_\alpha^{(2)}(x)|)\}$ où ρ est tel que $B(\rho)=\{x\colon |x-x_0|<\rho\}\subset\subset\Omega_1\cap\Omega_2$.

Proposition 4.1. *Pour tout réel $p\geqslant 0$ il existe une constante C_p indépendante de x_0, λ ep telle ρ que:*

(4.1) $$\begin{aligned}&|K_\lambda^{(1)}(x_0,x_0)-K^{(2)}(x_0,x_0)|\\&\leqslant C_p\frac{|\lambda|^{n/m}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\left[\sum_{j=0}^m\delta_j(\rho)\frac{|\lambda|^{j/m}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}+\left(\frac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{\rho|\mathrm{Im}\,\lambda|}\right)^p\right]\end{aligned}$$

pour tout $\lambda\in\mathcal{R}_0$.

Pour démontrer (4.1) nous utiliserons le:

Lemme 4.2. *Il existe une constante $C>0$ ne dépendant que des entiers m et n telle que: pour tout opérateur $T\colon L^2(B(\rho))\to L^2(B(\rho))$ vérifiant $Im\ T\cup Im\ T^*\subseteq Hm(B(\rho))$, T est un opérateur intégral de noyau $K(x,y)$ continu et borné sur $B(\rho)\times B(\rho)$, vérifiant:*

(4.2) $$|K_\lambda(x,y)|\leqslant C(||T||_m^{n/m}+||T^*||_m^{n/m})||T||_0^{1-(n/m)}+\rho^{-n}||T||_0$$

pour tout $x,y\in B(\rho)$ où $||T||_k=\sup_{||u||_0\leqslant 1}||Tu||_k$, $0\leqslant k\leqslant m$.

Démonstration. Le lemme est vérifié pour $\rho=1$, d'après Agmon [1]. Pour ρ quelconque on procède par homogénéité.

Démonstration de 4.1. On a classiquement les inégalités:

(4.3) $$||u||_{k,\Omega_i}\leqslant C\frac{|\lambda|^{k/m}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}||(A_i-\lambda)u||_{0,\Omega_i}\text{ pour }u\in D(A_i)\quad 0\leqslant k\leqslant m\,.$$

Notons pour $||u||_{k,\rho}$ la norme de u dans $H_k(B(\rho))$.

Soit $\chi\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$; $\chi(x)=\begin{cases}1 \text{ si } |x|\leqslant 1/2\\ 0 \text{ si } |x|\geqslant 2/3\end{cases}$ et $0\leqslant\chi\leqslant 1$.

Posons $\chi_\rho(x)=\chi\left(\dfrac{x-x_0}{\rho}\right)$. On a alors $|D^\beta\chi_\rho(x)|\leqslant\dfrac{C}{\rho|\beta|}$.

D'autre part:

$$(\mathcal{A}_i(x,D)-\lambda)(\chi_\rho u)=\chi_\rho(\mathcal{A}_i-\lambda)u+\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\ \beta\neq 0\\ \alpha=\beta+\gamma}}\mathcal{A}_\alpha^i(x)C_\alpha^\gamma D^\beta\chi_\rho D^\gamma u$$

On obtient donc à l'aide de (4.3): $|\alpha|=k$, $u\in D(A_i)$ alors:

$$|D^\alpha u|_{0\ \rho/2}\leqslant C\frac{|\lambda|^{k/m}}{|\operatorname{Im}\lambda|}[|(A_i-\lambda)u|_{0,\rho}+\sum_{\substack{\beta\neq 0\\ |\beta+\gamma|\leqslant m}}|D^\beta\chi_\rho\cdot D^\gamma u|_{0\ \rho}]. \qquad (*)$$

D'autre part: $|D^\gamma u|_{0,\rho}\leqslant C[(\varepsilon\rho)^{-|\gamma|}\cdot||u||_{0,\rho}+(\varepsilon\rho)^{m-|\gamma|}\cdot||u||_{m,\rho}]$ (*)
où C ne dépend ni de ρ ni de ε, $0<\varepsilon<1$.

Pour $\rho\geqslant|\lambda|^{-1/m}$ on peut prendre $\varepsilon=\dfrac{|\lambda|^{-1/m}}{\rho}$ d'où:

$$||D^\beta\chi_\rho\cdot D^\gamma u||_{0,\rho}\leqslant C\frac{|\lambda|^{-1/m}}{\rho}\cdot(|\lambda|\,||u||_{0,\rho}+||u||_{m,\rho}) \text{ si } \rho\geqslant|\lambda|^{-1/m}$$

On a donc prouvé l'inégalité:

$$(4.4)\qquad ||u||_{k,\rho/2}\leqslant C_1\frac{|\lambda|^{k/m}}{|\operatorname{Im}\lambda|}\left[||(A_i-\lambda)u||_{0,\rho}+\frac{|\lambda|^{-1/m}}{\rho}(|\lambda|\,||u||_{0,\rho}+||u||_{m,\rho})\right] \qquad (*)$$

valable pour $u\in Hm(B(\rho))$; $\lambda\in\mathcal{R}_0$, $0\leqslant k\leqslant m$ et $\rho\geqslant|\lambda|^{-1/m}$.

A partir de (4.4), par récurrence sur l'entier j on obtient:

$$(4.5)\qquad ||u||_{k,\rho/2j}\leqslant C_j|\lambda|^{(k/m)-1}\left[\frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|}||(A_i-\lambda)u||_{0,\rho}\left(\frac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{|\operatorname{Im}\lambda|}\right)^j(|\lambda|\,||u||_{0,\rho}+||u||_{m,\rho})\right]$$

valable pour tout $u\in H_m(B(\rho))$, $0\leqslant k\leqslant m$, $\lambda\in\mathcal{R}_0$ et $\rho\geqslant\dfrac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{|\operatorname{Im}\lambda|}$. Soit $f\in L^2$ $(B(\rho/2j))$ et $u=(A_1-\lambda)^{-1}\tilde{f}-(A_2-\lambda)^{-1}\tilde{f}$ où $\tilde{f}$ est le prolongement de f par zéro en dehors de $B(\rho/2j)$.

Posons $S_\lambda f=u|_{B(\rho/2j)}\cdot S_\lambda$: $L^2(B(\rho/2j))\to L^2(B(\rho/2j))$ et Im $S_\lambda\subseteq Hm(B(\rho/2j))$. D'autre part on peut prolonger u en dehors de $B(\rho)$ en un $v\in D(A_1)\cap D(A_2)$ et

$$\begin{aligned}(A_1-\lambda)v|_{B(\rho)}&=(\mathcal{A}_1-\lambda)u|_{B(\rho)}=[\tilde{f}-(\mathcal{A}_1-\lambda)(A_2-\lambda)^{-1}\tilde{f}]|_{B(\rho)}\\&=(\mathcal{A}_1(x,D)-\mathcal{A}_2(x,D))(A_2-\lambda)^{-1}\tilde{f}|_{B(\rho)}.\end{aligned}$$

(*) On a posé: $|u|_{m,\rho}^2=\sum_{|\alpha|=m}\int_{B(\rho)}|D^\alpha u|^2dx$ et $||u||_{m,\rho}^2=\sum_{|\alpha|\leqq m}\int_{B(\rho)}|D^\alpha u|^2dx$

On en déduit:

$$||(A_1-\lambda)v||_{0,\rho}\leqslant C\sum_{i=0}^{m}\delta_i(\rho)||(A_2-\lambda)^{-1}\tilde{f}||_i\,.$$

(4.3) et (4.5) entraînent alors:

$$||S_\lambda||_{k,\rho/2j}\leqslant C_j\frac{|\lambda|^{k/m}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\left[\sum_{i=0}^{m}\delta_i(\rho)\frac{|\lambda|^{i/m}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}+\frac{|\lambda|^{1-(1/m)j}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\right]\tag{4.6}$$

pour $\rho\geqslant\dfrac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}$.

On a une estimation analogue pour l'adjoint S_λ^*. Le noyau de S_λ étant $K_\lambda^{(1)}(x,y)-K_\lambda^{(2)}(x,y)$, (4.1) résulte alors facilement de (4.2). Si $\rho<\dfrac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}$ (4.1) est vérifiée à cause de (4.3).

Démonstration du théorème 2.2. Elle résulte facilement du théorème 2.1 et de la proposition 2.1 en prenant: $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2=\mathcal{A}$, $\Omega_1=\boldsymbol{R}^n$, $\Omega_2=\Omega$, $A_1=A_0$ et $A_2=A$.

UNIVERSITÉ DE NANTES

Bibliographie

[1] S. Agmon: *On kernels, and eigenfunctions of operators related to elliptic problems*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 627–663.

[2] S. Agmon and Y. Kannai: *On the asymptotic behaviour of spectral functions*, Israël J. Math. **5** (1967), 1–30.

[3] S. Agmon: *Asymptotic formulas with remainder estimates of eigenvalues of elliptic operators*, Arch. Rational Mech. Anal. **28** (1968), 165–183.

[4] J. Brüning: *Zur abschätzung der Spektralfunktion elliptischer Operatoren*, Math. Z. **137** (1974), 75–85.

[5] L. Hörmander: *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math. **121** (1968), 193–218.

[6] L. Hörmander: *Fourier integral operators*, I, Acta Math. **127** (1971), 79–183.

[7] L. Hörmander: On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators, Yeshiva Univ. (1966).

[8] Pham The Lai: *Comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres d'un opérateur elliptique non nécessairement auto-adjoint*, Israël J. Math. **23** (1976), 221–250.