Robert, D.
Osaka J. Math.
14 (1977), 593–607

SUR LA REPARTITION DU SPECTRE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES NON AUTOADJOINTS A COEFFICIENTS IRREGULIERS

Didier ROBERT

(Received October 28, 1976)

1. Introduction. Considérons un ouvert borné Ω de $\boldsymbol{R}^n$ assez régulier et un opérateur différentiel d'ordre m dans Ω: $\mathcal{A}(x, D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha$. Supposons $\mathcal{A}$ uniformément elliptique positif sur Ω et soit A une réalisation dans $L^2(\Omega)$ de $\mathcal{A}$ de domaine $D(A)\subseteq H_m(\Omega)$. Si de plus les coefficients a_α sont C^∞ et bornés sur Ω, A étant autoadjoint semi-borné, S. Agmon [3] a établi sur la répartition du spectre $(\lambda_j)_{j\geqslant 0}$ de A le résultat:

$$N(t)=\sum_{\lambda_j\leqslant t} 1=\gamma\cdot t^{n/m}+O(t^{(n-\theta)/m}) \qquad t\to+\infty$$

pour tout $\theta<1/2$ où $\gamma=(2\pi)^{-n}\int_\Omega dx\int_{\mathcal{A}'(x,\xi)\leqq 1} d\xi$.

Si l'on suppose seulement que A est la perturbation d'un opérateur autoadjoint, Pham The Lai [8] a obtenu les formules asymptotiques:

$$N_+(t)=\sum_{0\leqslant Re\lambda_j\leqslant t} 1=\gamma\cdot t^{n/m}+O(t^{(n-\theta)/m}) \qquad t\to+\infty$$

$$N_-(t)=\sum_{-t\leqslant Re\lambda_j<0} 1=O(t^{(n-\theta)/m}) \qquad t\to+\infty$$

pour tout $\theta<1/2$.

Lorsque les coefficients a_α ne sont pas C^∞, Maruo-Tanabe [6] puis Maruo [5] ont généralisé les formules ci-dessus en supposant A variationnel et a_α, pour $|\alpha|=m$, satisfait à une condition de Hölder.

Nous nous proposons dans ce travail d'établir des résultats analogues dans le cas non variationnel, pour des opérateurs elliptiques obtenus pratiquement comme perturbation d'opérateurs autoadjoints.

2. Hypothèses, notations, resultats. On se donne $\mathcal{A}(x, D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha$ un opérateur différentiel d'ordre $m>n$ dans l'ouvert borné Ω de $\boldsymbol{R}^n$

On fait les hypothèses générales, notées (H_0), qui suivent:

(H_0) (i) Ω a la propriété du cône

(ii) Si $\delta(x)=\text{Min}\ \{1, \text{dist}\ (x, \partial\Omega)\}$ alors il existe $C>0$ telle que:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{\delta(x)} dx \leqslant C\,|\mathrm{Log}\,\varepsilon| \quad \text{et} \quad \int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} dx \leqslant C\cdot\varepsilon$$

où $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \delta(x) \geqslant \varepsilon\}$

(iii) $a_\alpha \in L^\infty(\Omega)$ pour $|\alpha| \leqslant m$ et a_α continu sur $\bar{\Omega}$ pour $|\alpha| = m$

(iv) $\mathcal{A}$ est uniformément elliptique réel sur Ω, c'est-à-dire que $\mathcal{A}'(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ est réel pour tout $(x, \xi) \in \Omega \times \boldsymbol{R}^n$ et qu'il existe $E > 0$ telle que: $|\mathcal{A}'(x, \xi)| \geqslant E \cdot |\xi|^m$ pour tout $(x, \xi) \in \Omega \times \boldsymbol{R}^n$.

Nous introduisons maintenant les classes de fonctions auxquelles appartiendront les coefficients a_α pour $|\alpha| = m$.

Pour h réel, $0 < h \leqslant 1$, on désigne par $M_h(\Omega)$ la classe des fonctions f bornées et mesurables sur Ω telles qu'il existe g mesurable sur Ω vérifiant:

$$\begin{cases} |f(x) - f(x')| \leqslant g(x)\,|x - x'|^h \text{ pour tout } (x, x') \in \Omega \times \Omega \text{ et} \\ \int_{\delta(x) > \varepsilon} g(x)dx \leqslant C\,|\mathrm{Log}\,\varepsilon|\,. \end{cases}$$

On désigne par $M_{h+1}(\Omega)$ la classe des fonctions f bornées telles que pour tout multiindice γ, $|\gamma| = 1$, $D^\gamma f$ existe et $D^\gamma f \in M_h(\Omega)$. Remarquons que la classe M_h est strictement plus grande que la classe des fonctions höldériennes d'ordre h. Par exemple $f(x) = \sqrt{x}$ sur $]0, 1[$ est höldérienne d'ordre $\leqslant \frac{1}{2}$ par contre $f \in M_1(]0, 1[)$. Plus généralement toute fonction $f \in C(\bar{\Omega})$ vérifiant: $|\mathrm{grad}\, f(x)| \leqslant \frac{C}{\delta(x)}$ est un élément de $M_1(\Omega)$ si Ω est assez régulier.

Nous ferons successivement sur $\mathcal{A}$ les hypothèses suivantes:

(R_h) $\quad a_\alpha \in M_h(\Omega)$ pour $|\alpha| = m$

(R_{h+1}) $\quad a_\alpha \in M_{h+1}(\Omega)$ pour $|\alpha| = m$.

Dans tout ce travail nous considérons une réalisation A de $\mathcal{A}(x, D)$ dans $L^2(\Omega)$ de domaine $D(A)$ et nous ferons sur cette réalisation les hypothèses suivantes:

(H_1) (i) $D(A) \subseteq H_m(\Omega)$

(ii) L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est non vide

(iii) $(\mathcal{A}'(x, D)u, u)$ est réel pour tout $u \in D(A)$

(iv) L'adjoint A^* de A vérifie les mêmes propriétés que A; c'est-à-dire que A^* est la réalisation dans $L^2(\Omega)$ d'un opérateur différentiel $\mathcal{A}_1(x, D)$ d'ordre m vérifiant (H_0) et (H_1) (i), (ii) et (iii). Sous les hypothèses précédentes on sait [1] que le spectre de A est constitué d'une suite $(\lambda_j)_{j \geqslant 0}$ de valeurs propres que l'on range par ordre de module croissant, chaque valeur propre étant répétée suivant sa multiplicité. On a:

$$\lim_{j\to+\infty} |\lambda_j| = +\infty .$$

L'étude de la répartition du spectre de A se fait classiquement en introduisant les quantités suivantes:

$$N_+(t) = \sum_{0\leq Re\lambda_j<t} 1;\ N_-(t) = \sum_{-t\leq Re\lambda_j<0} 1;\ N(t) = N_+(t)+N_-(t)$$

pour $t\neq 0$.

On pose: $N(0)=N_+(0)=N_-(0)=0$

$$\gamma_+ = (2\pi)^{-n}\int_\Omega dx\int_{0\leq\mathcal{A}'(x,\xi)\leq 1} d\xi;\ \gamma_- = (2\pi)^{-n}\int_\Omega dx\int_{-1\leq\mathcal{A}'(x,\xi)\leq 0} d\xi;$$

$$\gamma = \gamma_+ + \gamma_-$$

Nous nous proposons ici d'établir le résultant suivant:

Théorème 1. *Sous les hypotheses précédentes, on a les formules asymptotiques*:

$$N_+(t) = \gamma_+ t^{n/m} + O(t^{(n-\theta)/m}) \qquad t\to+\infty$$
$$N_-(t) = \gamma_- t^{n/m} + O(t^{(n-\theta)/m}) \qquad t\to+\infty$$

pour tout $\theta<\dfrac{h}{h+2}$ *si* $\mathcal{A}$ *vérifie* (R_h); *pour tout* $\theta<\dfrac{h+1}{h+3}$ *si vérifie* (R_{h+1}).

REMARQUES. 1) Si $\mathcal{A}$ vérifie (R_2) les formules sont valables pour tout $\theta<\frac{1}{2}$. Le théorème étend donc les formules de Pham The Lai [8] aux opérateurs pour lesquels les coefficients de la partie principale sont deux fois continument dérivables sur $\bar{\Omega}$.

2) Dans le cas où A est autoadjoint positif et a_α est continûment dérivable sur $\bar{\Omega}$ pour $|\alpha|=m$ notre résultat est moins bon que celui de G. Métivier [7] qui obtient la formule pour N_+ avec $\theta=\frac{1}{2}$. Cependant notre méthode a l'avantage de fournir des formules asymptotiques pour la résolvante de A et de préciser le comportement de $N(t)$ de chaque côté de l'axe réel. Ce qui permet d'englober le cas des équations différentielles ($n=1$) d'ordre impair. Pour les opérateurs associés à ces équations le symbole principal $\mathcal{A}'(x, \xi)$ change de signe et le spectre peut s'étaler également de chaque côté de l'axe réel.

La démonstration du théorème se fera par la méthode dite indirecte de Carleman-Agmon qui consiste à étudier le comportement en λ du noyau de la résolvante $(A-\lambda)^{-1}$ sur la diagonale de $\Omega\times\Omega$. La formule de Pleijel [9] et la formule "abélienne" associée [8] permettent d'en déduire le comportement des fonctions N_+ et N_-.

3. Inegalites de base. Dans tout le paragraphe on fixe un point $x_0\in\Omega$. On désignera par C, C_j, j entier≥ 1, C', C'', C''' des constantes réelles>0 ne dépendant pas de x_0. Pour tout $\rho>0$, $Q_\rho(x_0)$ désigne le cube de $\boldsymbol{R}^n$ centré en x_0 de côté ρ.

Pour k entier$\geqslant 0$, $|\cdot|_{k,\Omega}$ (resp. $|\cdot|_{k,\rho}$) désigne la semi-norme $u\to(\int\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha u|^2dx)^{1/2}$ sur l'espace de Sobolev $H_k(\Omega)$ (resp. $H_k(Q_\rho(x_0))$) et $||\cdot||_{k,\Omega}$ (resp. $||\cdot||_{k,\rho}$) la norme $u\to(\int\sum_{|\alpha|\leqslant k}|D^\alpha u|^2dx)^{1/2}$.

Si T est un opérateur linéaire continu de $L^2(\Omega)$ dans lui-même (resp. de $L^2(Q_\rho)$ dans lui-même) on désigne par $||T||_k$ la norme de T considéré comme opérateur de L^2 dans H_k si Im $T\subseteq H_k$. Nous énonçons d'abord trois lemmes indépendants de la donnée de A.

Lemme 3.1. *Il existe $C>0$ ne dépendant que des entiers m et n telle que*:

$$|D^\gamma u|_{0,\rho}\leqslant C\{(\varepsilon\rho)^{-|\gamma|}|u|_{0,\rho}+(\varepsilon\rho)^{m-|\gamma|}|u|_{m,\rho}\}$$

pour tout $u\in H_m(Q_\rho(x_0))$; $\rho<0$; $\varepsilon\in]0,1[$; $1\leqslant|\gamma|\leqslant m-1$.

Démonstration. On part de l'inégalité d'interpolation classique dans $Q_1(x_0)$ ([1]):

$$|D^\gamma v|_{0,1}\leqslant C\{\varepsilon^{-|\gamma|}|v|_{0,1}+\varepsilon^{m-|\gamma|}|v|_{m,1}\}\ .$$

On applique cette inégalité avec $v(x)=u(\rho\cdot x)$.

Lemme 3.2. *Il existe une constante $C>0$ ne dépendant que des entiers m et n telle que: pour tout opérateur linéaire continu de $L^2(Q_\rho(x_0))$ dans lui même vérifiant:* Im $T\subseteq H_m(Q_\rho(x_0))$, Im $T^*\subseteq H_m(Q_\rho(x_0))$ *avec $m>n$, on a: T est un opérateur intégral, de noyau $K(x, y)$ continu et borné sur $\Omega\times\Omega$ vérifiant de plus*:

$$|K(x,y)|\leqslant C\{(||T||^{n/m}+||T^*||^{n/m})||T||_0^{1-(n/m)}+\rho^{-n}||T||_0\}$$

pour tout $(x, y)\in Q_\rho(x_0)\times Q_\rho(x_0)$.

Démonstration. D'après Agmon [2] le lemme est vérifié pour $\rho=1$. On procède ensuite par homogénéité en posant

$$(\varphi_\rho v)(x)=v\left(\frac{x}{\rho}\right);\ (\varphi^\rho u)(x)=u(\rho x);\ S=\varphi^\rho\cdot T\cdot\varphi_\rho\,.$$

Lemme 3.3 (Maruo-Tanabe [6]). *Soit $\tilde{\varphi}\in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$, paire,* Supp $\tilde{\varphi}\subset[-n^{-1/2}, n^{-1/2}]$ *et* $\int_{\boldsymbol{R}}\tilde{\varphi}(x)dx=1$.

Pour $x=(x^1,\cdots,x^n)$, $\varepsilon>0$, posons $\varphi(x)=\tilde{\varphi}(x^1)\cdots\tilde{\varphi}(x^n)$, $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Soit $f\in C(\Omega)$ admettant des dérivées partielles $D^\gamma f$ pour $|\gamma|=1$ bornées sur Ω.

Posons:

$$f_0(x)=\begin{cases} f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}(x^i-x_0^i)\dfrac{\partial}{\partial x^i}f(x_0) & si\ |x-x_0|\leqslant\delta \\ f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}(x_1^i-x_0^i)\dfrac{\partial}{\partial x^i}f(x_0) & si\ |x-x_0|>\delta \end{cases}$$

où $x_1=(x_1^1,\cdots,x_1^n)$ *est le point d'intersection de la sphère*: $\{x\colon |x-x_0|=\delta\}$ *et du segment joignant* x_0 *à* x. *On a alors les propriétés*:

(i) $\varphi_\varepsilon * f_0\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$

(ii) *Si* $\varepsilon<\delta$, $\varphi_\varepsilon * f_0(x)=f_0(x)$ *pour* $|x-x_0|<\delta-\varepsilon$

(iii) $|\varphi_\varepsilon * f_0(x)-f(x_0)|\leqslant\delta\sum_{i=1}^{n}\left|\dfrac{\partial}{\partial x^i}f(x_0)\right|$ *pour* $x\in\boldsymbol{R}^n$.

Nous introduisons maintenant des approximations de l'opérateur $\mathcal{A}$ par des opérateurs à coefficients C^∞.

Posons:

$$\mathcal{A}_{x_0}(D)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x_0)D^\alpha$$

et

$$\omega_0(x_0,\delta)=\sum_{|\alpha|=m}\ \operatorname*{Sup}_{\substack{|x-x_0|<\delta\\ x\in\Omega}}|a_\alpha(x)-a_\alpha(x_0)|\ .$$

Si de plus $\mathcal{A}$ vérifie (R_{1+h}) on l'approche de la manière suivante: Soient $0<\varepsilon<\delta$, $\psi\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, $0\leqslant\psi\leqslant 1$ et $\psi(x)=1$ si $x\in\Omega$. Pour $|\alpha|=m$ posons: $a_{\alpha,1}(x)=\varphi_\varepsilon * a_{\alpha,0}(x)$ ($a_{\alpha,0}$ associé à a_α par le lemme 3.3) et $b_\alpha(x)=\psi(x)a_{\alpha,1}(x)+(1-\psi(x))a_\alpha(x_0)$ pour $x\in\boldsymbol{R}^n$.

On obtient un opérateur differentiel: $\mathcal{B}(x,D)=\sum_{|\alpha|=m}b_\alpha(x)D^\alpha$. Soit $\mathcal{B}_2(x,D)$ l'adjoint formel de $\mathcal{B}(x,D)$. Posons enfin:

$$\mathcal{B}_\delta(x,D)=\frac{1}{2}[\mathcal{B}(x,D)+\mathcal{B}_2(x,D)]\ .$$

$\mathcal{A}_{x_0}(D)$ et $\mathcal{B}(x,D)$ sont formellement autoadjoints, ils admettent donc des réalisations autoadjointes uniques dans $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ que l'on note respectivement A_0 et B_δ de domaine $D(A_0)$ et $D(B_\delta)$, vérifiant: $D(A_0)=D(B_\delta)=H_m(\boldsymbol{R}^n)$.

Posons

$$\omega_1(x_0,\delta)=\sum_{|\alpha|=m}\ \operatorname*{Sup}_{\substack{|x-x_0|<\delta\\ x\in\Omega}}|a_\alpha(x)-b_\alpha(x)|$$

(remarquons que la partie principale de $\mathcal{B}_\delta$ est $\mathcal{B}$).

Dans les deux lemmes qui suivent nous établissons un certain nombre d'inégalités a priori en suivant le paramètre λ pour $A-\lambda$, $A_0-\lambda$ et $B_\delta-\lambda$ ainsi que pour les adjoints.

Lemme 3.4. *Il existe une constante $C>0$ ne dépendant que de l'opérateur A telle que*:

(i) $|u|_{0,\Omega}<\dfrac{C}{|\operatorname{Im}\lambda|}|(A-\lambda)u|_{0,\Omega}$ *pour tout* $u\in D(A)$, $|\lambda|\geqslant 1$ *et* $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant C(1+|\lambda|)^{1-(1/m)}$

(i*) $|u|_{0,\Omega}\leqslant\dfrac{C}{|\operatorname{Im}\lambda|}|(A^*-\lambda)u|_{0,\Omega}$ *pour tout* $u\in D(A^*)$, $|\lambda|\geqslant 1$ *et* $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant C(1+|\lambda|)^{1-(1/m)}$

(ii) $|u|_{k,\boldsymbol{R}^n}\leqslant C\cdot\dfrac{|\lambda|^{k/m}}{|\operatorname{Im}\lambda|}|(A_0-\lambda)u|_{0,\boldsymbol{R}^n}$ *pour tout* $u\in H_m(\boldsymbol{R}^n)$, *$k$ entier*, $0\leqslant k\leqslant m$; $\lambda\notin\boldsymbol{R}$

(iii) *Il existe δ_0 tel que*: $|u|_{k,\boldsymbol{R}^n}\leqslant C\dfrac{|\lambda|^{k/m}}{|\operatorname{Im}\lambda|}|(B_\delta-\lambda)u|_{0,\boldsymbol{R}^n}$ *pour tout* $u\in H_m(\boldsymbol{R}^n)$; $\lambda\notin\boldsymbol{R}$; $\delta\leqslant\delta_0$ *et* $|\lambda|\geqslant 1$.

Démonstration. (i) et (i*) voir |8|, lemme 4.1.

(ii) Provient de l'inégalité:

$$\left|\frac{\xi^\alpha}{\mathcal{A}_0(\xi)-\lambda}\right|\leqslant\frac{1}{E^{k/m}}\frac{|\lambda|^{k/m}}{|\operatorname{Im}\lambda|}$$

pour $|\alpha|=k$, par transformation de Fourier.

(iii) B_δ étant autoadjoint, on a (1) $\|(B_\delta-\lambda)u\|_0\geqslant|\operatorname{Im}\lambda|\cdot\|u\|_0$, $u\in H_m(\boldsymbol{R}^n)$. D'autre part: (2) $\|u\|_m\leqslant C_1(\|A_0u\|_0+\|u\|_0)$; $u\in H_m(\boldsymbol{R}^n)$.

D'après la définition de B_δ et le lemme (3.3) on a (3) $\|A_0u\|_0\leqslant\|B_1u\|_0+C_2\delta\|u\|_m+C'\cdot\|u\|_{m-1}+\|u\|_0$. L'inégalité d'interpolation: $\|u\|_{m-1}\leqslant C(\varepsilon_1^{1-m}\|u\|_0+\varepsilon_1\|u\|_m)$, $\varepsilon_1\in]0,1]$ et (2) entrainent qu'il existe $\delta_0>0$ tel que: (4) $\|u\|_m\leqslant C_1'(\|B_\delta u\|_0+\|u\|_0)$ pour tout $u\in H_m(\boldsymbol{R}^n)$ et $\delta\leqslant\delta_0$.

1) et (4) entrainent facilement (iii) pour $k=0$ et $k=m$.

Le cas général s'obtient par interpolation.

Lemme 3.5. (i) *Il existe une constante $C_1>0$ ne dépendant que de A telle que*:

$$\|u\|_{k,\rho/2}\leqslant C_1\frac{|\lambda|^{k/m}}{|\operatorname{Im}\lambda|}\left[|(A_0-\lambda)u|_{0,\rho}+\frac{|\lambda|^{-1/m}}{\rho}(|\lambda|\,|u|_{0,\rho}+\|u\|_{m,\rho})\right]$$

pour tout $u\in H_m(Q_\rho(x_0))$; $\lambda\notin\boldsymbol{R}$; $0\leqslant k\leqslant m$; $\rho\geqslant|\lambda|^{-1/m}$.

(ii) *Pour tout entier $j\geqslant 1$ il existe une constante $C_j>0$ ne dépendant que de A et j telle que*:

$$||u||_{k,\rho/2_j}\leqslant C_j|\lambda|^{k/m-1}\left[\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}|(A_0-\lambda)u|_{0,\rho}+\left(\frac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{\rho|\mathrm{Im}\,\lambda|}\right)^j(|\lambda|\,|u|_{0,\rho}|+||u||_{m,\rho})\right] \textit{pour tout } u\in H_m(Q_\rho(x_0));\ \lambda\notin \boldsymbol{R};\ 0\leqslant k\leqslant m \textit{ et } \rho\geqslant\frac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}.$$

Démonstration. Soit $\zeta\in C_0^\infty(Q_1(0))$, $0\leqslant\zeta\leqslant 1$ et $\zeta(x)=1$ si $x\in Q_{1/2}(0)$ Posons $\zeta_\rho(x)=\zeta\left(\frac{x-x_0}{\rho}\right)$. Alors $\zeta_\rho\in C_0^\infty(Q_\rho(x_0))$. De plus il existe $K>0$ telle que:

(5) $|D^\beta\zeta_\rho(x)|\leqslant\frac{K}{\rho|\beta|}$ pour tout $x\in\boldsymbol{R}^n$ et $0\leqslant|\beta|\ll m$. On a:

$$(A_0-\lambda)\zeta_\rho\cdot u=\zeta_\rho(A_0-\lambda)u+\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x_0)\Big(\sum_{\substack{\beta\neq 0\\ \beta+\gamma=\alpha}}C_\alpha^\gamma\cdot D^\beta\zeta_\rho\cdot D^\gamma u\Big);$$

du lemme 3.3 (ii) on déduit:

$$|D^\alpha u|_{0,\rho/2}\leqslant C\cdot\frac{|\lambda|^{k/m}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\Big[|(A_0-\lambda)u|_{0,\rho}+\sum_{\substack{\beta\neq 0\\ |\beta+\gamma|=m}}|D^\beta\zeta_\rho\cdot D^\gamma u|_{0,\rho}\Big].$$

Appliquons le lemme 3.1 avec $\varepsilon=\frac{|\lambda|^{-1/m}}{\rho}$ pour $\rho>|\lambda|^{-1/m}$ il vient

$$(6)\qquad |D^\beta\zeta_\rho\cdot D^\gamma u|_{0,\rho}\leqslant C\frac{|\lambda|^{-1/m}}{\rho}(|\lambda|\,|u|_{0,\rho}+||u||_{m,\rho})$$

pour $u\in H_m(Q_\rho(x_0))$.

(6) entraîne facilement (i) et (ii) s'en déduit par récurrence sur j.

On a un lemme analogue pour B_δ:

Lemme 3.6. (i) *Il existe une constante* $C_1>0$ *ne dépendant que de* A *et* ψ *telle que*:

$$||u||_{k,\rho/2}\leqslant C_1\frac{|\lambda|^{k/m}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\Big[|(B_\delta-\lambda)u|_{0,\rho}+\frac{|\lambda|^{-1/m}}{\rho}(|\lambda|\,|u|_{0,\rho}+||u||_{m,\rho})\Big]$$

pour $u\in H_m(Q(x_0))$; $0\leqslant k\leqslant m$, $\lambda\notin\boldsymbol{R}$; $|\lambda|\geqslant 1$, $\delta\leqslant\delta_0$ *et* $\rho\geqslant|\lambda|^{-1/m}$

(ii) *Pour tout entier* $j\geqslant 1$, *il existe une constante* $C_j>0$ *ne dépendant que de* A *et* ψ *telle que*:

$$||u||_{k,\rho/2_j}\leqslant C_j|\lambda|^{k/m-1}\left[\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}|(B_\delta-\lambda)u|_{0,\rho}+\left(\frac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{\rho|\mathrm{Im}\,\lambda|}\right)^j(|\lambda|\,|u|_{0,\rho}+||u||_m)\right]$$

pour tout $u\in H_m(Q_\rho(x_0))$; $0\leqslant k\leqslant m$; $\lambda\notin\boldsymbol{R}$, $|\lambda|\geqslant 1$, $\delta\leqslant\delta_0$ *et* $\rho\geqslant\frac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}$.

4. Comportement asymptotique du noyau de $(A-\lambda)^{-1}$

Lemme 4.1. (i) *Il existe une constante* $C\geqslant 1$ *telle que la région du plan complexe* $\mathcal{R}=\{\lambda: |\mathrm{Im}\,\lambda|\geqslant C(1+|\lambda|)^{1-1/m}\}$ *vérifie* $\mathcal{R}\subseteq\rho(A)$. *On a de plus*:

(ii) $\|(A-\lambda)^{-1}\|_0\leqslant\dfrac{C}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}$ *pour tout* $\lambda\in\mathcal{R}$

(iii) $\|(A-\lambda)^{-1}\|_m\leqslant C\dfrac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}$ *et* $\|(A^*-\lambda)^{-1}\|_m\leqslant C\dfrac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}$

pour $\lambda\in\mathcal{R}$.

Démonstration. [8] lemme 4.1.

La proposition suivante est une étape essentielle pour la démonstration du théorème 1. Posons $\rho_\lambda(x_0)=(2\pi)^{-n}\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{d\xi}{\mathcal{A}'(x_0,\xi)-\lambda}$ pour $x_0\in\Omega$; $\lambda\notin\boldsymbol{R}$.

Proposition 4.2. (i) *Pour tout* $\lambda\in\rho(A)$ *l'opérateur* $T_\lambda=(A-\lambda)^{-1}$ *est un opérateur intégral de noyau* $K_\lambda(x,y)$ *continu et borné sur* $\Omega\times\Omega$. *De plus il existe une constante* $C_0>0$ *ne dépendant que de* Ω, *m et n telle que*

$$(E_1)\qquad |K_\lambda(x,y)|\leqslant C_0\frac{|\lambda|^{n/m}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\quad pour\ \lambda\in\mathcal{R};\ (x,y)\in\Omega\times\Omega$$

(ii) *Il existe une constante* $C_1>0$ *ne dépendant que de A telle que*:

$$(E_2)\qquad |K_\lambda(x_0,x_0)-\rho_\lambda(x_0)|\leqslant C_1|\lambda|^{(n-m)/m}\left(\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\right)^2\left[\omega_0(x_0,\sqrt{n}\cdot\rho)+\frac{|\lambda|^{-1/m}}{\rho}\right]$$

pour tout $x_0\in\Omega$, $\lambda\in\mathcal{R}$ *et* $\dfrac{\delta(x_0)}{\sqrt{n}}\geqslant\rho\geqslant|\lambda|^{-1/m}$

(iii) *Pour tout entier* $j\geqslant 1$, *il existe* $C_j>0$ *ne dépendant que de A et j telle que*:

$$(E_3)\qquad |K_\lambda(x_0,x_0)-\rho_\lambda(x_0)|\leqslant C_j\frac{|\lambda|^{n/m}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\left[\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}(\omega_0(x_0,\sqrt{n}\cdot\rho)+|\lambda|^{-1/m})+\left(\frac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{\rho|\mathrm{Im}\,\lambda|}\right)^j\right]$$

pour tout $x_0\in\Omega$, $\lambda\in\mathcal{R}$ *et* $\dfrac{\delta(x_0)}{\sqrt{n}}\geqslant\rho\geqslant\dfrac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}$.

Démonstration. (i) résulte de lemme 4.1 et du théorème 3.1 de [2]. (ii) et (iii): Posons

$$F_\lambda^0(x)=(2\pi)^{-n}\int\frac{e^{ix\cdot\xi}}{\mathcal{A}_0(\xi)-\lambda}d\xi\,.$$

Pour j entier $\geqslant 1$ soient $f\in L^2(Q_{\rho/2j}(x_0))$, $f_1\in L^2(\Omega)$ (resp. $f_2\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$) les prolongements de f par 0. Posons:

$$S_\lambda^{(j)}f=(T_\lambda f_1-(F_\lambda^0 * f_2)|_\Omega)|_{Q_{\rho/2j}(x_0)}\,.$$

$S_\lambda^{(j)}$ est un opérateur borné de $L^2(Q_{\rho/2j}(x_0))$, intégral, de noyau $G_\lambda^{(j)}(x, y)$ continu et borné. On a de plus: $G_\lambda^{(j)}(x, y)=K_\lambda(x, y)-F_\lambda^0(x-y)$.

Posons $u=T_\lambda f_1-(F_\lambda^0 * f_2)|_\Omega$. Le lemme 3.5 donne:

$$(7)\qquad \|S_\lambda^{(j)}f\|_{k,\rho/2j}\leqslant C_j|\lambda|^{(k/m)-1}\Big[\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}|(A_0-\lambda)u|_{0,\rho}+ + \Big(\frac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{\rho|\mathrm{Im}\,\lambda|}\Big)^j(|\lambda|\,|u|_{0,\rho}+\|u\|_{m,\rho})\Big]$$

où $\qquad \rho\geqslant|\lambda|^{-1/m}\quad$ si $j=1$

$$\rho\geqslant\frac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\quad \text{si } j\geqslant 2\,.$$

Or $(\mathcal{A}_0(D)-\lambda)u=(\mathcal{A}_0(D)-\lambda)T_\lambda f_1-f_1$ d'ou $(\mathcal{A}_0(D)-\lambda)u=(\mathcal{A}_0(D)-\mathcal{A}(x, D))T_\lambda f_1$, il en résulte:

$$(8)\qquad |(A_0-\lambda)u|_{0,\rho}\leqslant\omega_0(x_0, \sqrt{n}\cdot\rho)\|T_\lambda f_1\|_m+M\|T_\lambda f_1\|_{m-1}$$

où M est une constante ne dépendant que de A.

D'après le lemme 3.4, (i), on a:

$$(9)\qquad \|T_\lambda\|_k\leqslant C\frac{|\lambda|^{k/m}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}$$

pour $0\leqslant k\leqslant m$. De (7), (8) et (9) on déduit:

$$\|S_\lambda^{(j)}\|_k\leqslant C_j\frac{|\lambda|^{k/m}}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\Big[\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}(\omega_0(x_0, \sqrt{n}\cdot\rho)+|\lambda|^{-1/m}+\Big(\frac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{\rho|\mathrm{Im}\,\lambda|}\Big)^j\Big]\,.$$

On a une estimation analogue pour l'adjoint de $S_\lambda^{(j)}$ et le lemme 3.2 appliqué à $S_\lambda^{(j)}$ donne les estimations (E_2) et (E_3).

Etudions le noyau $K_\lambda^1(x, x)$ de $(B_\delta-\lambda)^{-1}$ qui existe pour tout $\lambda\notin\boldsymbol{R}$ et est borné sur $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$. Le lemme suivant est une conséquence immédiate du lemme (3.4).

Lemme 4.3. *Il existe $C>0$ ne dépendant que de A et ψ telle que*

$$(\mathrm{i})\qquad \|R_\lambda\|_0\leqslant\frac{C}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}$$

$$(\mathrm{ii})\qquad \|R_\lambda\|_m\leqslant C\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\quad \textit{pour tout } \lambda\notin\boldsymbol{R}\,.$$

La démonstration de la proposition suivante est analogue à celle de la proposition 4.2.

Proposition 4.4. *Supposons que $\mathcal{A}$ vérifie (R_{h+1}). Alors*
(i) *Il existe une constante $C_1>0$ ne dépendant que de A et ψ telle que:*

$$(E_4)\qquad |K_\lambda(x_0, x_0)-K_\lambda^1(x_0, x_0)| \leqslant C_1\left(\frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|}\right)^2 |\lambda|^{(n-m)/m} \left[\omega_1(x_0, \sqrt{n}\cdot\rho)+\frac{|\lambda|^{-1/m}}{\rho}\right]$$

pour tout $x_0\in\Omega$, $\lambda\in\mathcal{R}$; $\dfrac{\delta(x_0)}{\sqrt{n}}\geqslant\rho\geqslant|\lambda|^{-1/m}$.

(ii) *Pour tout entier $j\geqslant 1$ il existe une constante $C_j>0$ ne dépendant que de A, ψ et j telle que:*

$$(E_5)\qquad |K_\lambda(x_0, x_0)-K_\lambda^1(x_0, x_0)| \leqslant C_j\frac{|\lambda|^{n/m}}{|\operatorname{Im}\lambda|}\left[\frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|}(\omega_1(x_0, \sqrt{n}\cdot\rho)+|\lambda|^{-1/m})+\left(\frac{|\lambda|^{1-1/m)}}{\rho|\operatorname{Im}\lambda|}\right)^j\right]$$

pour tout $x_0\in\Omega$; $\lambda\in\mathcal{R}$; $\dfrac{\delta(x_0)}{\sqrt{n}}\geqslant\rho\geqslant\dfrac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{|\operatorname{Im}\lambda|}$.

Proposition 4.5. *Pour tout θ, $0<\theta<\frac{1}{2}$ et pour tout $0<\varepsilon<\delta<\delta_0$ il existe une constante $C_\varepsilon>0$ ne dépendant que de A, ψ, θ et ε telle que: $|K_\lambda^1(x_0, x_0)-\rho_\lambda(x_0)|\leqslant C_\varepsilon\cdot|\lambda|^{(n-m-1)/m}$ pour tout $x_0\in\Omega$, $\lambda\in\mathcal{R}$ vérifiant $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant|\lambda|^{1-(\theta/m)}$.*

Démonstration. On applique le théorème 3.1 de [4] ou encore le théorème (3.6) de [8] en remarquant que les constantes qui interviennent ne dépendent que d'un majorant des coefficients, ainsi que de leurs dérivées, de l'opérateur différentiel $\mathcal{B}^\delta(x, D)$. Or il est facile de voir qu'il existe un tel majorant indépendant de x_0.

Proposition 4.6. *Supposons que $\mathcal{A}$ vérifie (R_{h+1}). Alors:*
(i) *Pour tout θ, $0<\theta<\frac{1}{2}$, il existe une constante $C_1>0$ ne dépendant que de A, ψ et θ telle que:*

$$(E_6)\qquad |K_\lambda(x_0, x_0)-\rho_\lambda(x_0)| \leqslant C_1\left(\frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|}\right)^2|\lambda|^{(n-m)/m}\left[\omega_1(x_0\sqrt{n}\cdot\rho)+\frac{|\lambda|^{-1/m}}{\rho}\right]$$

pour tout $x_0\in\Omega$, $\lambda\in\mathcal{R}$, $\dfrac{\delta(x_0)}{\sqrt{n}}\geqslant\rho\geqslant|\lambda|^{-1/m}$ *et* $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant|\lambda|^{1-(\theta/m)}$

(ii) *Pour tout θ, $0<\theta<\frac{1}{2}$ et pour tout entier $j\geqslant 1$ il existe $C_j>0$ ne dépendant que de A, ψ, θ, j telle que:*

$$(E_7) \qquad |K_\lambda(x_0, x_0) - \rho_\lambda(x_0)|$$
$$\leqslant C_j \frac{|\lambda|^{n/m}}{|\operatorname{Im}\lambda|}\left[\frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|}(\omega_1(x_0, \sqrt{n}\cdot\rho) + |\lambda|^{-1/m}|) + \left(\frac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{\rho|\operatorname{Im}\lambda|}\right)^j\right]$$

pour tout $x_0 \in \Omega$, $\lambda \in \mathcal{R}$, $\dfrac{\delta(x_0)}{\sqrt{n}} \geqslant \rho \geqslant \dfrac{|\lambda|^{1-(1/m)}}{|\operatorname{Im}\lambda|}$ *et* $|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant |\lambda|^{1-(\theta/m)}$.

Démonstration: Résulte des propositions 4.4 et 4.5.

5. Repartition du spectre de A

Puisque $m > n$, la série

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j - \lambda}$$

est absolument convergente pour tout $\lambda \in \rho(A)$.

On a de plus:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j - \lambda} = \int_\Omega K_\lambda(x, x)dx \quad ([1])\,.$$

Lemme 5.1 (Pham The Lai [8]). *Il existe* $C > 0$ *telle que*:

$$\left|\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_j - \lambda} - \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j - \lambda}\right| \leqslant C|\lambda|^{(n-m-1)/m}\left(\frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|}\right)^2$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{R}$.

Lemme 5.2. *Posons* $\Omega_0 = \{x \in \Omega \colon \dfrac{\delta(x)}{\sqrt{n}} \leqslant |\lambda|^{-1/m}\}$.

(i) *Suposons que* $\mathcal{A}$ *vérifie* (R_h). *Alors*: *pour tout couple de réels* (θ, θ') *vérifiant* $0 < \theta < \theta' < 1$, *il existe* $C > 0$ *telle que*:

$$(E_8) \qquad \left|\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_j - \lambda} - \int_\Omega \rho_\lambda(x)dx\right|$$
$$\leqslant C\left(\frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|}\right)^2 |\lambda|^{(n-m)/m}\left[\int_{\Omega-\Omega_0} \omega_0(x, \sqrt{n}\,|\lambda|^{-(1-\theta')/m})dx + |\lambda|^{-1/m}\operatorname{Log}|\lambda|\right]$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{R}$ *vérifiant* $|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant |\lambda|^{1-(\theta/m)}$.

(ii) *Supposons que* $\mathcal{A}$ *vérifie* (R_{h+1}). *Alors*: *pour tout couple de réels* (θ, θ') *vérifiant* $0 < \theta < \theta' < 1$ *et* $\theta < \dfrac{1}{2}$, *il existe* $C > 0$ *telle que*

$$(E_9)\qquad \left|\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_j-\lambda}-\int_{\Omega}\rho_\lambda(x)dx\right| \leqslant C\Big(\frac{|\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|}\Big)^2|\lambda|^{(n-m)/m}\Big[\int_{\Omega-\Omega_0}\omega_1(x,\sqrt{n}\,|\lambda|^{-(1-\theta')/m})dx+|\lambda|^{-1/m}\operatorname{Log}|\lambda|\Big]$$

pour tout $\lambda\in\mathcal{R}$ *vérifiant* $|\operatorname{Im}.\lambda|\geqslant|\lambda|^{1-(\theta/m)}$.

Démonstration. On considère la partition de Ω:

$$\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2$$

où:
$$\Omega_0=\{x\in\Omega:\frac{\delta(x)}{\sqrt{n}}\leqslant|\lambda|^{-1/m}\}$$

$$\Omega_1=\{x\in\Omega:|\lambda|^{-1/m}<\frac{\delta(x)}{\sqrt{n}}<|\lambda|^{1-(-\theta')/m}\}$$

$$\Omega_2=\{x\in\Omega:\frac{\delta(x)}{\sqrt{n}}\geqslant|\lambda|^{-(1-\theta')/m}\}\,.$$

Les hypothèses de régularité sur Ω et (E_1) entraînent:

$$\left|\int_{\Omega_0}(K_\lambda(x,x)-\rho_\lambda(x)dx\right|\leqslant C\frac{|\lambda|^{(n-1)/m}}{|\operatorname{Im}\lambda|}\,.$$

Ensuite sur Ω_1 on applique (E_2) avec $\rho=\frac{\delta(x)}{\sqrt{n}}$ et sur Ω_2 on applique (E_5) avec $\rho=|\lambda|^{-(1-\theta')/m}$. Après intégration, prenant j assez grand, on obtient (E_8). (ii) s'établit de la même manière à l'aide des estimations (E_1), (E_4) et (E_5).

Lemme 5.3. *On a le comportement suivant pour la fonction* $N(t)$:

$$N(t)=\gamma\cdot t^{n/m}+O(t^{(n-\theta)/m})\qquad t\to+\infty$$

pour tout $\theta<\frac{h}{h+2}$ *si* $\mathcal{A}$ *vérifie* (R_h); *pour tout* $\theta<\frac{h+1}{h+3}$ *si* $\mathcal{A}$ *vérifie* R_{h+1}, *où* $\gamma=(2\pi)^{-n}\int_\Omega dx\int_{|\mathcal{A}'(x,\xi)|\leqslant1}d\xi$.

Démonstration. On utilise la méthode de [8]. On choisit la détermination suivante de la puissance α, $\alpha\in\boldsymbol{R}$:

$$\lambda^\alpha=|\lambda|^\alpha e^{i\alpha\arg\lambda}\ où\ -\pi<\arg\lambda<\pi\,.$$

Posons $f(\lambda)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda_j)^2-\lambda}=\int_0^{+\infty}\frac{dN(\sqrt{t})}{t-\lambda}$, $\lambda\in\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R}^+$.

On a encore

$$(10)\qquad f(\lambda)=\frac{1}{2i\sqrt{-\lambda}}\sum_{j=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_j-i\sqrt{-\lambda}}-\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_j+i\sqrt{-\lambda}}\Big)$$

pour $\lambda\notin\boldsymbol{R}^+$.

On choisit une région $\mathscr{D}$ du plan complexe de la forme:

$$\mathscr{D} = \{\lambda \in \boldsymbol{C},\ d(\lambda) \geqslant 4C|\lambda|^{1-(1/2m)};\ |\lambda| \geqslant 1\}$$

de sorte que si $\lambda \in \mathscr{D}$ alors $\pm i\sqrt{-\lambda} \in \mathscr{R} = \{\lambda \in \boldsymbol{C},\ |\operatorname{Im} \lambda| \geqslant C(1+|\lambda|)^{1-(1/m)}\}$
On déduit l'inégalité suivante: $\lambda \in \mathscr{D}$, $d(\lambda) \geqslant 2|\lambda|^{1-(\theta/2m)}$ entraînent

$$\text{(11)} \qquad |f(\lambda) - (-\lambda)^{(n-2m)/2m} \int_\Omega \operatorname{Im} \rho_t(x)dx| \\ \leqslant C\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^2 |\lambda|^{(n-2m)/2m}(|\lambda|^{-h(1-\theta')/2m} + |\lambda|^{-1/2m}) \operatorname{Log} |\lambda|$$

si $\mathscr{A}$ vérifie (R_h). On déduit alors le comportement de $N(t)$ de celui de $f(\lambda)$ par la formule de Pleijel [9] qui s'écrit ici:

$$\text{(12)} \qquad |I(t) - N(\sqrt{t})| \leqslant a(1+\pi^{-2})t^{1-(\theta/2m)}|f(t+\mathrm{i}at^{1-(\theta/2m)})|$$

où a est un réel>0 assez grand et $I(t) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{L(t)} f(\lambda)d\lambda$, $L(t)$ étant une courbe orientée joignant $t+\mathrm{i}at^{1-(\theta/2m)}$ à $t-\mathrm{i}at^{1-(\theta/2m)}$ dans $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R}^+$. Si $\mathscr{A}$ vérifie (R_{h+1}) on a l'inégalité (11) en remplaçant h par $(h+1)$. On termine de la même manière.

Pour séparer N_+ et N_- dans N on utilise une formule réciproque de la formule de Pleijel:

Lemme 5.4 (Pham The Lai [8]). *Soit $\sigma(t)$ une fonction localement à variation bornée définie sur* $[0, +\infty]$. *Supposons que $\sigma(t)$ véerifie*:

$$\sigma(t) = P\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}t^\alpha + 0(t^{\alpha-\beta}) \qquad t \to +\infty$$

avec $P \geqslant 0$, $0<\alpha<1$ *et* $\beta>0$. *Alors pour tout $\lambda \notin \boldsymbol{R}^+$, l'intégrale de Stieljes*: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}$ *est absolument convergente et on a*:

$$\text{(13)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda} = P(-\lambda)^{\alpha-1} + O\left[\frac{1}{|\lambda|}\right] + O\left[|\lambda|^{\alpha-1-\beta}\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^2\right]$$

pour $|\lambda| \to +\infty$; $\lambda \notin \boldsymbol{R}^+$.

5.5. Fin de la démonstration du théorème 1

Posons

$$g(\lambda) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_j}{(\operatorname{Re} \lambda_j)^2 - \lambda} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\, dN_+(\sqrt{t})}{t-\lambda} - \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\, dN_-(\sqrt{t})}{t-\lambda}.$$

D'où l'on tire

$$\int_0^{-\infty} \frac{\sqrt{t}\, dN_-(\sqrt{t})}{t-\lambda} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\, dN_-(\sqrt{t})}{t-\lambda} - \frac{1}{2} g(\lambda) . \tag{14}$$

On étudie le comportement en λ des deux termes du second membre et la formule de Pleijel permet d'en déduire $N_-(t)$.

Supposons que $\mathcal{A}$ vérifie (R_h). On a facilement:

$$\begin{aligned} &|g(\lambda)-(-\lambda)^{(n-m)/2m}\int_\Omega \mathrm{Re}\ \rho_t(x)dx| \\ &\qquad \leqslant C\Big(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\Big)^2 (|\lambda|^{(n-m-h+h\theta')/2m} + |\lambda|^{(n-m-1)/2m}) \operatorname{Log} |\lambda| \end{aligned} \tag{15}$$

pour $\lambda \in \mathcal{D}$ et $d(\lambda) \geqslant 2|\lambda|^{1-(\theta/2m)}$.

Posons

$$h(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\, dN(\sqrt{t})}{t-\lambda} .$$

h est la transformée de Stieljes de $d\sigma(t)$ où $\sigma(t) = \int_0^t \sqrt{s}\, dN(\sqrt{s})$. On on a:

$$\sigma(t) = \sqrt{t}\cdot N(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{N(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} ds$$

et le lemme 5.3 donne:

$$\sigma(t) = \frac{n}{n+m}\gamma\cdot t^{(n+m)/2m} + O(t^{n+m-\theta)/2m}) \qquad t \to +\infty$$

pour tout $\theta < \dfrac{h}{h+2}$.

De (13) il résulte alors:

$$h(\lambda) = \Big(tg\frac{n\pi}{2m}\Big)\cdot C_1(-\lambda)^{(n-n)/2m} + O\Big[|\lambda|^{(n-m-\theta)/2m}\Big(\frac{\lambda}{d(\lambda)}\Big)^2\Big] \tag{16}$$

où $C_1 = \int_\Omega \mathrm{Im}\ \rho_i(x)dx$.

Posons

$$C_2 = \int_\Omega \mathrm{Re}\ \rho_i(x)dx \text{ et } h_-(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\, dN_-(\sqrt{t})}{t-\lambda} .$$

h_- est la transformée de Stieljès de $d\sigma_-(t)$ où $\sigma_-(t) = \int_0^t \sqrt{s}\cdot dN_-(\sqrt{s})$.

De la formule de Pleijel on déduit alors

$$\sigma_-(t) = \frac{m}{(n+m)\pi}\Big(C_1 \sin\frac{\pi n}{2m} - C_2 \cos\frac{\pi n}{2m}\Big) t^{(n+m)/2m} + O(t^{(n+m-\theta)/2m}) \qquad t \to +\infty . \tag{17}$$

Par un calcul analogue à celui fait dans [1] (p. 258-260) on obtient:

$$N_-(T) = \gamma_- t^{n/m} + O(t^{(n-\theta)/m}), \qquad t \to +\infty\,; \theta < \frac{h}{h+2}.$$

Lorsque $\mathcal{A}$ vérifie (R_{h+1}) on obtient de la même manière:

$$N_-(t) = \gamma_- t^{n/m} + O(t^{(n-\theta)/m}), \qquad t \to +\infty, \text{ pour tout } \theta < \frac{h+1}{h+3}.$$

Compte tenu du lemme 5.3 le théorème 1 est démontré.

UNIVERSITÉ DE NANTES

Bibliographie

[1] S. Agmon: Lectures on elliptic boundary value problems, van Nostrand, Math. Studies, 1965.

[2] S. Agmon: *On kernels eigenvalues and eigenfunctions of operators related to elliptic problems*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 627–663.

[3] S. Agmon: *Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators*, Arch. Rational Mech. Anal. **28** (1968), 165–183.

[4] S. Agmon and Y. Kannai: *On the asymptotic behaviour of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators*, Israel J. Math. **5** (1967), 1–30.

[5] K. Maruo: *Asymptotic distribution of eigenvalue of non symmetric operators*, Osaka J. Math. **9** (1972), 547–560.

[6] K. Maruo and H. Tanabe: *On the asymptotic distribution of eigenvalues of operators associated with strongly elliptic sesquilinear forms*, Osaka J. Math. **8** (1971), 323–345.

[7] G. Metivier: Formule asymptotique avec estimation du reste pour les valeurs propres de problèmes aux limites elliptiques, Université de Nice (1975).

[8] Pham The Lai: Comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres d'un opérateur elliptique non nécessairement autoadjoint - Université de Nantes (à paraître).

[9] A. Pleijel: *On a theorem by P. Malliavin*, Israel J. Math. **1** (1963), 166–168.