Yoshioka, T. et Takamoto, Y.
Osaka J. Math.
14 (1977), 253–270

QUELQUES GROUPES D'AUTOMORPHISMES ANALYTIQUES DE C^2

TSUNEO YOSHIOKA ET YOSHIKO TAKAMOTO

(Received April 30, 1976)

1. Introduction

Lorsque Nishino commença en 1967 ses recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables (Voir Nishino [2]~[6]), un des buts principaux était de chercher des propriétés d'une fonction entière qui sont invariantes par tous les automorphismes analytiques de l'espace. Il étudiait surtout sur la famille des surfaces premières de la fonction, totalité des surfaces analytiques irréductibles dans l'espace sur lesquelles la fonction est constante. Concernant la famille des surfaces premières, il considérait (sans publier) certains groupes d'automorphismes analytiques de l'espace qui se déduisent d'une fonction entière: le groupe de ceux qui laissent invariante la famille des surfaces premières, le groupe de ceux qui laissent invariante la fonction et le groupe de ceux qui laissent invariante toute surface première.

Dans la présente note, nous nous plaçons dans l'espace C^2 de deux variables complexes et nous nous proposons de déterminer ces groupes dans certains cas où la fonction peut être ramenée à un polynôme et la topologie des surfaces premières est bien simple. (Voir la dernière moitié du §2).

En conséquence de nos études, on verra que les automorphismes de C^n introduits en 1950 par Hermes et Peschl [1]:

$$x_j' = x_j \exp(r_j A(x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}))\,, \qquad (j=1, \cdots, n),$$

où s_j sont des entiers $\geqq 0$, r_j sont des nombres complexes tels que $\sum r_j s_j = 0$, et A est une fonction entière d'une variable, se caractérisent, dans le cas où $n=2$, par la propriété qu'ils laissent invariante toute surface première du monôme $x_1^{s_1} x_2^{s_2}$.

Dans l'appendice, nous indiquerons toutes les possibilités du groupe des automorphismes du plan C qui laissent invariante une fonction méromorphe dans C, bien que les résultats soient tout élémentaires et probablement connus.

2. Généralités

Soit F une fonction entière non constante de deux variables. Avec Nishino

[2], nous appelons *surface première de* F toute composante irréductible de la surface entière définie par l'équation $F=c$ pour une valeur complexe c. Nous disons que F *appartient à la classe* (A) si la normalisée de toute surface première de F est analytiquement homéomorphe (ou biholomorphe) à la surface obtenue à partir d'une surface de Riemann compacte par exception d'un nombre fini de points. S'il en est ainsi, on sait, d'après Nishino [5] et [6], que presque toutes surfaces premières de F sauf un nombre fini au plus d'elles sont non singulières et ont même type (g,n), où g est leur genre et n est leur nombre de points frontières. Alors nous dirons que F est *de type* (g,n). F est dite *primitive* si, pour toute factorisation $F=\varphi\circ f$ avec une fonction entière φ d'une variable et une fonction entière f de deux variables, φ se réduit forcément à une fonction linéaire. Dans le cas où F appartient à la classe (A), cela équivaut à dire que la surface donnée par $f=c$ est irréductible pour presque toute valeur c. Nous appelons simplement *automorphisme de* $\boldsymbol{C}^2$ toute application holomorphe et bijective de l'espace $\boldsymbol{C}^2$ sur lui-même. On sait bien que, s'il en est ainsi, l'application inverse est aussi holomorphe. Nous disons qu'un automorphisme T de $\boldsymbol{C}^2$ *laisse invariante* la fonction F si $F\circ T=F$.

Cela posé, soit encore F une fonction entière non constante de deux variables et soit $\mathcal{S}$ la famille des surfaces premières de F. Supposons pour la simplicité que F appartient à la classe (A). D'après Nishino [5] et [6], ceci équivaut à dire qu'il existe une factorisation

$$F=\varphi\circ f\circ\Phi$$

avec une fonction entière φ d'une variable, un polynôme primitif f de deux variables, et un automorphisme Φ de $\boldsymbol{C}^2$. Manifestement, la famille des surfaces premières de $f\circ\Phi$ coïncide aves $\mathcal{S}$. Introduisons quatre groupes d'automorphismes de $\boldsymbol{C}^2$

$G=$ le groupe des automorphismes T de $\boldsymbol{C}^2$ tels que $S\in\mathcal{S}$ entraîne $T(S)\in\mathcal{S}$;

$H=$ le groupe de ceux qui laissent invariante F;

$N=$ le groupe de ceux qui laissent invariante $f\circ\Phi$;

$K=$ le groupe de ceux qui laissent invariante toute $S\in\mathcal{S}$: $T(S)=S$.

On aura immédiatement les énoncés suivants:

1) Ils sont en réalité des groupes.
2) $G\supset H\supset N\supset K$.
3) N et K sont des sous-groupes distingués de G.
4) G, N et K ne dépendent que de la famille $\mathcal{S}$.
5) L'application $T\mapsto\Phi\circ T\circ\Phi^{-1}$ donne les isomorphismes des quatre groupes pour F sur les quatre groupes correspondants pour la fonction $\varphi\circ f=$

$F\circ\Phi^{-1}$. Ceci nous permet de supposer sans restreindre la généralité que F soit la composée $\varphi\circ f$ d'une fonction entière φ d'une variable et d'un polynôme primitif f de deux variables.

En particulier, si F est de type (0,1), on peut supposer d'après Nishino [3] que f est de la forme

(1) $\qquad f(x, y)=x\,.$

Au même sens, si F est de type (0,2), on peut supposer d'après Saitô [7] que f est de la forme

(2-i) $\qquad f(x, y)=x^m y^n$

ou bien de la forme

(2–ii) $\qquad f(x, y)=x^m(x^l y+P(x))^n\,,$

où l, m et n sont des entiers positifs tels que m et n soient relativement premiers et $P(x)$ est un polynôme en x à coefficients complexes de degré inférieur à l, tel que $P(0)=1$.

Dans le §4, nous aurons tout immédiatement les groupes pour (1), qui admettent pour paramètres deux fonctions entières arbitraires d'une variable. Nous étudierons les groupes pour (2–i) dans le §5 et ceux pour (2–ii) dans les §6 et §7. Les groupes pour tous deux admettent pour paramètre une fonction entière arbitraire d'une variable.

Remarquons que l'on verra facilement que les groupes H, K et N sont tous finis pour une fonction entière de deux variables de la classe (A) et de type différent de (0,1) et de (0,2). Si le groupe G pour une telle fonction est infini, on pourrait dire que la fonction est d'un type exceptionnel, ce qui sera une étude ultérieure.

3. Un lemme

Considérons maintenant un polynôme primitif f de deux variables et, pour chaque $z\in \boldsymbol{C}$, désignons par S_z la surface analytique définie par $f=z$. On sait bien que pour presque toute valeur z, S_z est irréductible, non singulière, de même type que f et l'ordre de zéro de la fonction $f-z$ en S_z est égal à l'unité. Une valeur z pour laquelle S_z n'a pas toutes ces propriétés sera dite *valeur critique de f*. Dénotons E l'ensemble des valeurs critiques de f et $\mathcal{S}$ l'ensemble des surfaces premières de f. Établissons un lemme utile à la détermination du groupe G/N:

Lemme 1. *Soit T un automorphisme de $\boldsymbol{C}^2$ tel que $S\in\mathcal{S}$ entraîne $T(S)\in\mathcal{S}$, c'est-à-dire un élément de G pour f. Alors il existe un et un seul automorphisme (analytique) τ du plan $\boldsymbol{C}$ tel que $T(S_z)=S_{\tau(z)}$ pour toute $z\in\boldsymbol{C}$.*

En effet, pour $z \notin E$, on a $S_z \in \mathcal{S}$, d'où $T(S_z) \in \mathcal{S}$ par hypothèse. $\tau(z)$ est défini par la relation $T(S_z) \subset S_{\tau(z)}$. Soit maintenant $z \in E$. Prenons un point $p \in S_z$. Nous allons montrer que $f(T(p))$ ne dépend pas du choix de $p \in S_z$. Soient $q \in S_z$ et (z_ν), $\nu = 1, 2, \cdots$, une suite de valeurs non critiques tendant vers z. Prenons deux suites de points (p_ν) et (q_ν), tendant respectivement vers p et q et vérifiant $f(p_\nu) = f(q_\nu) = z_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$. On a aussitôt $f(T(p)) = \lim f(T(p_\nu)) = \lim \tau(z_\nu) = f(T(q))$, ce qui nous permet de poser $\tau(z) = f(T(p))$. Alors, τ est une fonction dans $\boldsymbol{C}$, telle que l'on ait $T(S_z) \subset S_{\tau(z)}$ pour toute $z \in \boldsymbol{C}$. D'ailleurs, elle est continue en tout point de l'ensemble fini E, d'après ce qui précède.

Nous allons montrer que τ est holomorphe en dehors de E. Soient $z_0 \notin E$ et $p \in S_{z_0}$. Prenons une courbe aualytique non singulière L au voisinage de p, qui passe par p transversalement à S_{z_0}. Comme l'ordre de zéro de $f - z_0$ en S_{z_0} est égal à l'unité, l'application θ qui fait correspondre à toute z voisine de z_0 le seul point $S_z \cap L$ est bien définie et holomorphe. Alors, τ est égale à $f \circ T \circ \theta$ au voisinage de z_0, ce qui montre que τ est holomorphe en dehors de E. D'après un théorème de Riemann, elle l'est dans $\boldsymbol{C}$ tout entier. Donc, elle est une fonction entière.

Nous allons montrer que τ est univalent. Supposons qu'il y ait deux valeurs distinctes z_1 et z_2 telles que $\tau(z_1) = \tau(z_2)$. Soit z' une valeur non critique assez voisine de $\tau(z_1)$. Alors il existerait deux valeurs z_1' et z_2' voisines de z_1 et z_2 respectivement, telles que l'on ait $\tau(z_1') = \tau(z_2') = z'$. D'où, $T(S_{z_1'}) = T(S_{z_2'}) = S_{z'}$ puisque $S_{z'}$ est irréductible. Or, on pourrait supposer $z_1' \neq z_2'$ contrairement à l'hypothèse que T est bijectif.

Nous avons montré que τ est une fonction linéaire non constante. T et τ étant bijectifs, on a $T(S_z) = S_{\tau(z)}$ pour toute z. L'unicité de τ est triviale.

c.q.f.d.

REMARQUES.

1) Pour toute z_0, T donne une application biholomorphe du voisinage Σ de S_{z_0} défini par $|f - z_0| < \rho$, ρ étant un nombre positif, sur le voisinage $T(\Sigma)$ de $S_{\tau(z_0)}$. D'après le lemme, cette application conserve la structure de famille des surfaces premières. Ceci montre que, si $z_0 \in E$, la nature de singularité de S_{z_0} et celle de $S_{\tau(z_0)}$ se coïncident exactement. Elles ont même nombre de composantes irréductibles, même topologie, même ordre, etc. En particulier, on a $\tau(E) = E$.

2) L'application $T \mapsto \tau$ est un homomorphisme du groupe G dans le groupe des automorphismes de $\boldsymbol{C}$ qui laissent invariant l'ensemble E. Le noyau de cet homomorphisme est manifestement le groupe N.

3) Si E se réduit à un seul point z_0, alors τ s'écrit

$$\tau(z) = z_0 + c(z - z_0)\,,$$

c étant une constante non nulle. L'application $T \mapsto c$ est un homomorphisme du groupe G dans le groupe multiplicatif $\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C} - \{0\}$ des nombres complexes non nuls.

4) Si E admet au moins deux points, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour τ, puisque τ induit une substitution des éléments de l'ensemble fini E et qu'une homographie laissant invariant le point à l'infini est complètement déterminée par les images de deux points distincts donnés. De là, le groupe G/N est fini.

4. Cas de la forme (1)

Au sens que nous avons dit plus haut, on peut réduire le cas où la fonction est de type (0,1) au cas où la fonction envisagée F est la composée $F = \varphi \circ f$ d'une fonction entière non constante φ d'une variable et du monôme

$$(1) \qquad f(x, y) = x\,.$$

Pour cette fonction, nous pouvons énoncer directement les résultats suivants:

Les groupes G, H et N sont formés des automorphismes de $\boldsymbol{C}^2$ de la forme

$$\begin{cases} x' = \tau(x) \\ y' = ye^{A(x)} + B(x)\,, \end{cases}$$

où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux fonctions entières arbitraires d'une variable, et τ est respectivement

1) *pour G, un automorphisme de $\boldsymbol{C}$ quelconque;*

2) *pour H, un automorphisme de $\boldsymbol{C}$ laissant invariante φ, mais d'ailleurs quelconque;*

3) *pour N, l'application identique.*

Le groupe K coïncide avec N. Les automorphismes de $\boldsymbol{C}$ qui laissent invariante une fonction entière d'une variable seront indiqués dans l'appendice.

5. Cas de la forme (2-i)

Soient

$$(2\text{-i}) \qquad f(x, y) = x^m y^n\,,$$

m et n étant deux entiers positifs relativement premiers, et φ une fonction entière non constante d'une variable. Ce paragraphe est consacré à la détermination des quatre groupes pour la fonction entière $F = \varphi \circ f$.

Pour toute valeur z, désignons, comme dans le §3, par S_z la surface définie par l'équation $f = z$. On voit aisément que, si $z \neq 0$, S_z est irréductible, non singulière et de type (0,2); autrement dit, S_z est analytiquement homéomorphe à $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}-\{0\}$. S_0 se décompose en deux composantes S_0': $x=0$ et S_0'': $y=0$. L'ordre de f est respectivement 1 en S_z ($z\neq 0$), m en S_0' et n en S_0''. $z=0$ est la seule valeur critique de f.

Soit T un automorphisme de $\boldsymbol{C}^2$, appartenant au groupe G pour F, c'est-à-dire transformant toute surface première de F sur elle-même ou sur une autre. D'après la Remarque 3) du §3, il existe une et une seule valeur $c\neq 0$, telle que l'on ait $T(S_z)=S_{cz}$ pour toute z.

Considérons le domaine $\boldsymbol{C}^*\times\boldsymbol{C}^*=\{(u, v)\in\boldsymbol{C}^2 \mid uv\neq 0\}$ et l'application holomorphe Φ de $\boldsymbol{C}^*\times\boldsymbol{C}^*$ sur $\boldsymbol{C}^2-S_0$ définie par

$$\Phi(u, v) = (u^n, vu^{-m}) .$$

On a d'abord $f(\Phi(u, v))=(u^n)^m(vu^{-m})^n=v^n$. Et, on voit immédiatement que, pour toute $v\in\boldsymbol{C}^*$, la restriction Φ_v de Φ à la droite pointée $S_v'=\boldsymbol{C}^*\times\{v\}$ est une application biholomorphe de S_v' sur S_{v^n}. Pour toute z, la restriction T_z de T à S_z est aussi une application biholomorphe de S_z sur S_{cz}. Prenons, une fois pour toutes, une valeur b telle que $b^n=$c. Posons

$$T_v' = \Phi_{bv}^{-1}\circ T_{v^n}\circ\Phi_v ,$$

qui est une application biholomorphe de S_v' sur S_{bv}'. On peut définir une application T' de $\boldsymbol{C}^*\times\boldsymbol{C}^*$ dans lui-même, de manière que sa restriction à toute S_v' soit égale à T_v'. T' est uniquement déterminée et elle est une bijection. Par définition, on a la relation

$$\Phi\circ T' = T\circ\Phi .$$

Afin de vérifier que T' est biholomorphe, on prend successivement $v_0\in\boldsymbol{C}^*$; δ tel que $0<\delta<|v_0|^n$; une composante connexe Δ, contenant v_0, du domaine donné par $|v^n-v_0^n|<\delta$; et finalement le voisinage $\sum$ de $S_{v_0{}^n}$ défini par $|f(x, y)-v_0{}^n|<\delta$. Alors, Φ applique $\boldsymbol{C}^*\times\Delta$ sur $\sum$ et $\boldsymbol{C}^*\times(b\Delta)$ sur $T(\sum)$, d'une façon holomorphe et bijective. D'où, T' est holomorphe, ce qui montre que T' est un automorphisme de $\boldsymbol{C}^*\times\boldsymbol{C}^*$ envoyant toute S_v' sur S_{bv}'. Il peut alors s'exprimer par

$$\text{(2–a)} \qquad T'(u, v) = (\alpha(v)u, bv)$$

ou bien par

$$\text{(2–b)} \qquad T'(u, v) = (\alpha(v)u^{-1}, bv) ,$$

où α est une fonction holomorphe dans $\boldsymbol{C}^*$ qui ne s'annule nulle part.

Supposons d'abord que T' s'exprime sous la forme (2–a). Nous allons montrer que $\alpha(v)$ est une fonction de v^n. Soit ρ l'une quelconque des n-ièmes racines de l'unité et soit Ψ l'automorphisme de $\boldsymbol{C}^*\times\boldsymbol{C}^*$ défini par

$$\Psi(u, v) = (\rho u, \rho^m v) .$$

Alors, $\Phi\circ\Psi(u, v)=\Phi(\rho u, \rho^m v)=((\rho u)^n, \rho^m v(\rho u)^{-m})=(u^n, vu^{-m})=\Phi(u, v)$. D'où, on a

$$\Phi_{\rho^m v}\circ\Psi_v = \Phi_v ,$$

où Ψ_v est la restriction de Ψ à S_v'. En vertu de cette relation, $T'_{\rho^m v}\circ\Psi_v= \Phi^{-1}_{b\rho^m v}\circ T_{(\rho^m v)^n}\circ\Phi_{\rho^m v}\circ\Psi_v=\Psi_{bv}\circ\Phi^{-1}_{bv}\circ T_{v^n}\circ\Phi_v=\Psi_{bv}\circ T_v'$, ce qui entraîne

$$T'\circ\Psi = \Psi\circ T' .$$

Récrivons les deux membres de cette relation au moyen de α:

$$T'\circ\Psi(u, v) = T'(\rho u, \rho^m v) = (\alpha(\rho^m v)\rho u, b\rho^m v)$$

et

$$\Psi\circ T'(u, v) = \Psi(\alpha(v)u, bv) = (\rho\alpha(v)u, \rho^m bv) .$$

Il en résulte que l'égalité $\alpha(\rho^m v)=\alpha(v)$ a lieu, quelque n-ième racine de l'unité que soit ρ. Donc, on peut écrire

$$\alpha(v) = \beta(v^n)$$

avec une fonction β holomorphe dans $\boldsymbol{C}^*$ n'ayant aucun zéro.

Soit (x, y) un point quelconque de $\boldsymbol{C}^2-S_0$. Prenons un point (u, v) dont l'image par Φ est (x, y). Posons $(x', y')=T(x, y)$ et $z=x^m y^n$. Alors, des relations $(x', y')=T\circ\Phi(u, v)=\Phi\circ T'(u, v)=\Phi(\alpha(v)u, bv)$, on déduit

$$x' = (\alpha(v)u)^n = \beta(v^n)^n u^n = x\beta(z)^n$$

et

$$y' = bv(\alpha(v)u)^{-m} = by\beta(z)^{-m} .$$

T étant holomorphe, x' et y' le sont aussi dans $\boldsymbol{C}^2$ tout entier en tant que fonctions des variables x et y. En tenant compte de ce que x' est holomorphe en un point de S_0'' n'appartenant pas à S_0', on voit que β est holomorphe à l'origine. Du fait que y' est holomorphe en un point de S_0' n'appartenant pas à S_0'', il s'ensuit que l'on a $\beta(0)\neq 0$. Par conséquent, on peut mettre β sous la forme

$$\beta(z) = e^{A(z)} ,$$

où A est une fonction entière, qui est déterminée par T d'une façon unique à l'addition d'un multiple de $2\pi i$ près. T s'exprime alors sous la forme

$$\begin{cases} x' = xe^{nA(z)} \\ y' = bye^{-mA(z)} , \end{cases}$$

où $z=x^m y^n$. Inversement, soient données une fonction entière A d'une variable et une valeur b non nulle. On voit directement que l'application de $\boldsymbol{C}^2$ dans lui-même définie par cette expression est un automorphisme de $\boldsymbol{C}^2$ qui envoie chaque S_z sur $S_{b^n z}$ et qui laisse invariantes S_0' et S_0''.

Passons maintenant au cas où T' s'exprime sous la forme (2–b): $T'(u, v)=(\alpha(v)u^{-1}, bv)$. Nous allons montrer que, k étant un entier tel que $km\equiv 2 \pmod{n}$, il existe une fonction β holomorphe dans $\boldsymbol{C}^*$, ne s'annulant nulle part, et telle qu'on ait

$$\alpha(v) = v^k \beta(v^n)\,.$$

Soient ρ et Ψ comme dans le cas précédent. On aura tout de même $T'\circ\Psi=\Psi\circ T'$. Il vient

$$T'\circ\Psi(u, v) = T'(\rho u, \rho^m v) = (\alpha(\rho^m v)(\rho u)^{-1}, b\rho^m v)$$

et

$$\Psi\circ T'(u, v) = \Psi(\alpha(v)u^{-1}, bv) = (\rho\alpha(v)u^{-1}, \rho^m bv)\,.$$

D'où, $\alpha(\rho^m v)=\rho^2\alpha(v)$ pour toute n-ième racine ρ de l'unité. En posant

$$\alpha(v) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu v^\nu\,,$$

on obtient

$$\alpha(\rho^m v) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu \rho^{\nu m} v^\nu = \rho^2 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu v^\nu\,,$$

ce qui montre que $\alpha_\nu \neq 0$ entraîne $\nu m\equiv 2 \pmod{n}$. En vertu de $(m, n)=1$, $\alpha_\nu\neq 0$ entraîne donc $\nu\equiv k \pmod{n}$, d'où l'énoncé. Comme dans le cas précédent, il vient

$$x' = (\alpha(v)u^{-1})^n = v^{kn}\beta(v^n)^n u^{-n} = z^k \beta(z)^n x^{-1}$$

et

$$y' = bv(\alpha(v)u^{-1})^{-m} = bz^{-(km-2)/n}\beta(z)^{-m} y^{-1}\,,$$

où $z=x^m y^n$. x' et y' sont des fonctions entières de x et y. En envisageant x' au voisinage de S_0, on voit que $z=0$ n'est pas point singulier essentiel de β. Reprenons k de manière que β reste holomorphe en $z=0$ et qu'on ait $\beta(0)\neq 0$. x' étant holomorphe en S_0', on a $k\geqq 1$. y' étant holomorphe en S_0'', on a $km-2+1\leqq 0$. De là, on déduit successivement $km=1$, $k=m=1$, $km-2=-1\equiv 0 \pmod{n}$, $n=1$ et $b=c$. En écrivant $\beta(z)=e^{A(z)}$ avec une fonction entière A, nous avons ainsi obtenu la condition $m=n=1$ et l'expression suivante de T:

$$\begin{cases} x' = ye^{A(xy)} \\ y' = bxe^{-A(xy)}\,. \end{cases}$$

Inversement, pour toute fonction entière A d'une variable et pour toute valeur b non nulle, cette expression donne pour $f(x, y)=xy$ un automorphisme de $\boldsymbol{C}^2$, qui transforme toute S_z sur S_{bz} et qui permute S_0' et S_0''.

En résumé:

Soit $f(x, y)=x^m y^n$, où m et n sont des entiers positifs relativement premiers et soit φ une fonction entière non constante d'une variable. Les groupes G, H et N pour la fonction $F=\varphi\circ f$ sont formés des automorphismes de $\boldsymbol{C}^2$ de la forme

$$\begin{cases} x' = xe^{nA(x^m y^n)} \\ y' = bye^{-mA(x^m y^n)} \end{cases}$$

et, seulement dans le cas où $m=n=1$, de ceux de la forme

$$\begin{cases} x' = ye^{A(xy)} \\ y' = bxe^{-A(xy)}, \end{cases}$$

où A est une fonction entière arbitraire d'une variable et b est respectivement

1) *pour G, une valeur non nulle quelconque;*

2) *pour H, une (kn)-ième racine de l'unité quelconque quand l'origine est centre de φ d'ordre k;*

3) *pour N, égale à l'unité.*

Si $(m, n)\neq(1, 1)$, le groupe K coïncide avec N. Si $m=n=1$, le groupe K est formé des automorphismes de $\boldsymbol{C}^2$ de la première forme précédente avec $b=1$. Donc, on a $[N: K]=2$.

REMARQUES.

1) Si l'origine n'est pas centre de φ c'est-à-dire si $k=1$, on peut supposer que $b=1$ pour H. Car, on peut ajouter à A un multiple de $2\pi i/n$ sans changer x'. Alors, H devient égal à N.

2) Comme nous l'avons dit dans l'Introduction, les automorphismes introduits par Hermes et Peschl sont, dans le cas de deux variables, ceux qui appartiennent au groupe K pour $f(x, y)=x^m y^n$.

6. Cas de la forme (2-ii)

Soit maintenant

$$\text{(2–ii)} \qquad f(x, y) = x^m(x^l y+P(x))^n,$$

où l, m et n sont des entiers positifs, tels que $(m, n)=1$, et $P(x)$ est un polynôme en x de degré $<l$, tel que $P(0)=1$. Soit φ une fonction entière non constante d'une variable. Dans ce §, nous étudions les groupes pour $F=\varphi\circ f$. La

méthode étant parallèle à celle dans le § précédent, nous exposerons les parties importantes et les résultats différents.

Pour chaque valeur z, désignons aussi par S_z la surface $f=z$. $z=0$ est la seule valeur critique de f. S_0 se décompose en deux composantes S_0': $x=0$ et S_0'': $x^l y+P(x)=0$. S_0' et S_0'' n'ont pas de point commun. S_0' est de type (0, 1) mais S_0'' est de type (0, 2). Pour toute $z\neq 0$, S_z est de type (0, 2).

Soit T un automorphisme de $\boldsymbol{C}^2$ appartenant au groupe G pour F. On a alors une et une seule valeur $c\neq 0$ telle que $T(S_z)=S_{cz}$ pour toute z. L'application Φ de $\boldsymbol{C}^*\times\boldsymbol{C}^*$ sur $\boldsymbol{C}^2-S_0$ définie par

$$\Phi(u, v) = (u^n, u^{-nl}(vu^{-m}-P(u^n)))$$

jouera le même rôle que celle du § précédent. D'abord on a $f(\Phi(u, v))=v^n$. En choisissant une des n-ièmes racines de c, soit b, on introduit un automorphisme T' de $\boldsymbol{C}^*\times\boldsymbol{C}^*$ comme précédemment de manière que l'on ait $\Phi\circ T'=T\circ\Phi$. T' sera exprimé alors par (2–a) ou bien par (2–b) du §5. Dans le présent cas, on pourra montrer sans difficulté que la forme (2–b) n'a pas lieu. C'est parce que S_0' et S_0'' n'ont pas même type. T' étant de la forme (2–a), il existera aussi une fonction β holomorphe dans $\boldsymbol{C}^*$, n'ayant aucun zéro et telle que l'on ait $\alpha(v)=\beta(v^n)$ pour toute $v\neq 0$. En vertu de la relation $\Phi\circ T'=T\circ\Phi$, $(x', y')=T(x, y)$ s'écrit dans $\boldsymbol{C}^2-S_0$ sous la forme

$$\begin{cases} x' = x\beta(z)^n \\ y' = x^{-l}\beta(z)^{-nl}(b(x^l y+P(x))\beta(z)^{-m}-P(x\beta(z)^n)), \end{cases}$$

où $z=f(x, y)$. x' étant holomorphe en S_0'', β est holomorphe à l'origine. Si $\beta(0)=0$, y' aurait pôles sur S_0''. Par suite $\beta(0)\neq 0$, ce qui nous permet d'écrire

$$\beta(z) = \beta_0 e^{A(z)}$$

avec une constante β_0 non nulle et avec une fonction entière A d'une variable telle que $A(0)=0$. T est alors de la forme

$$\begin{cases} x' = \beta_0^n x e^{nA(z)} \\ y' = \beta_0^{-(nl+m)} b y e^{-(nl+m)A(z)} \\ \qquad +\dfrac{\beta_0^{-m} b P(x) e^{-mA(z)}-P(\beta_0^n x e^{nA(z)})}{x^l}\beta_0^{-nl}e^{-nlA(z)}. \end{cases}$$

Il est évident que le numérateur de la fraction précédente s'annule sur S_0': $x=0$ avec l'ordre $\geqq l$. En particulier, en tenant compte de $P(0)=1$ et $A(0)=0$, on a $b=\beta_0^m$. En posant $a=\beta_0^n$, nous mettons T sous la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = axe^{nA(z)} \\ y' = a^{-l}ye^{-(nl+m)A(z)}+g(x, y)(ax)^{-l}e^{-nlA(z)}, \end{cases}$$

où

$$(4) \qquad g(x, y) = P(x)e^{-mA(f(x,y))} - P(axe^{nA(f(x,y))}) .$$

Remarquons que $a^m = \beta_0^{mn} = b^n = c$.

Inversement, soient données une constante a non nulle et une fonction entière A d'une variable de manière que $A(0)=0$ et que la fonction $g(x, y)$ définie par (4) avec ces a et A s'annule sur S_0' avec l'ordre $\geqq l$. L'application T définie par (3) est alors holomorphe dans C^2. On a aussitôt $f(x', y') = cf(x, y)$, où $c = a^m$, ce qui montre que $T(S_z) \subset S_{cz}$ pour toute z. En outre, on peut vérifier directement que l'application donnée par

$$\begin{cases} x = a^{-1}x'e^{-nA'} \\ y = a^l y' e^{(nl+m)A'} \\ \qquad + (P(x')e^{mA'} - P(a^{-1}x'e^{-nA'}))x'^{-l}a^l e^{nlA'} , \end{cases}$$

où $A' = A(a^{-m}f(x', y'))$, est, dans $C^2 - S_0'$, l'application inverse de T. T transforme $C^2 - S_0'$ sur lui-même, de la façon biholomorphe. Évidemment, $T(S_0') \subset S_0'$. Pour prouver que T appartient au groupe G pour $F = \varphi \circ f$, il reste donc à montrer que T applique S_0' sur elle-même bijectivement.

Nous annonçons ici un lemme qui sera démontré dans le § suivant, en désignant par $P^{(\nu)}(0)$ la valeur en 0 de la ν-ième dérivée de P, etc., et par $[r]$ le plus grand entier qui ne dépasse pas un nombre réel r:

Lemme 2. *Soient a une constante et A une fonction entière d'une variable telle que $A(0)=0$. Soit $g(x, y)$ la fonction définie par (4) avec ces a et A. Pour $\nu = 1, 2, \cdots, l$, on a*

$$\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} g(0, y) = \begin{cases} P^{(\nu)}(0)\,(1-a^\nu) & (si\ 1 \leqq \nu < m) , \\ P^{(\nu)}(0)\,(1-a^\nu) + Q_\nu & (si\ \nu \geqq m) , \end{cases}$$

où Q_ν est un polynôme en $A^{(1)}(0), \cdots, A^{([\nu/m])}(0)$, sans terme constant, dont les coefficients sont polynômes en a, $P^{(1)}(0), \cdots, P^{(\nu-1)}(0)$ à coefficients entiers.

Notamment, les valeurs $(\partial/\partial x)^\nu g(0, y)$ pour $1 \leqq \nu \leqq l$ sont indépendantes de la variable y.

D'après ce lemme, on voit que, si $g(x, y)$ s'annule sur S_0' avec l'ordre $\geqq l$, alors $h(x, y) = x^{-l}g(x, y)$ est holomorphe en tout point de S_0' et $h(0, y)$ se réduit à une constante h_0. D'où, T devient sur S_0'

$$x' = 0 , \qquad y' = a^{-l}(y + h_0) ,$$

ce qui montre que T applique S_0' sur elle-même de la manière bijective. T étant bijective et holomorphe, T^{-1} est holomorphe dans tout C^2. Nous avons ainsi vu que T est un élément de G pour F tel que $T(S_z) = S_{cz}$ pour toute z.

En résumé:

Soit $f(x, y)=x^m(x^l y+P(x))^n$, où l, m et n sont des entiers positifs, tels que m et n soient relativement premiers, et $P(x)$ est un polynôme en x de degré $<l$, tel que $P(0)=1$. Soient φ une fonction entière non constante d'une variable et $F=\varphi\circ f$. Le groupe G pour la fonction F est formé des automorphismes de $\boldsymbol{C}^2$ de la forme (3), où $z=f(x, y)$, a est une constante non nulle et A est une fonction entière d'une variable, telles que l'on ait $A(0)=0$ et que la fonction $g(x, y)$ donnée par (4) s'annule sur S_0': $x=0$ avec l'ordre $\geqq l$. Ceci équivaut à dire que l'on a

$$\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} g(0, y) = 0 \qquad (\nu=1, 2, \cdots, l-1).$$

Supposons que $z=0$ est centre de $\varphi(z)$ d'ordre k. (S'il n'en est pas ainsi, on pose $k=1$). Pour qu'un automorphisme de cette forme (3) appartienne au groupe H, il faut et il suffit que $a^{km}=1$. Pour qu'il appartienne au groupe N, il faut et il suffit que $a^m=1$. Pour la présente fonction f, le groupe K coïncide avec N.

D'après le Lemme 2, les valeurs a, $A^{(1)}(0), \cdots, A^{([(l-1)/m])}(0)$ subissent certaines conditions algébriques. Si $a=1$ et $A^{(1)}(0)=\cdots=A^{([(l-1)/m])}(0)=0$, alors ces conditions sont toutes remplies et, par suite, aucun de ces groupes ne réduit à l'élément unité. D'ailleurs, $A^{(\nu)}(0)$ étant tout arbitraires pour $\nu>[(l-1)/m]$, on peut dire que les groupes admettent pour paramètre une fonction entière arbitraire d'une variable.

REMARQUES.

1) Si $l\leqq m$, les conditions deviennent tout simples:

$$P^{(\nu)}(0)(1-a^\nu) = 0 \qquad (\nu=1, 2, \cdots, l-1),$$

donc, la fonction entière A ne subit que la condition $A(0)=0$.

2) Si $l\leqq m$ et $P(x)$ n'est pas constant, alors a est une certaine racine de l'unité. Le groupe G/N est donc fini. Il peut arriver que G se réduise à N.

3) Lorsque $P(x)$ est constant, $l\leqq m$ ou non, on pourra observer, suivant le procédé du § suivant, que les conditions se réduisent à

$$A^{(1)}(0) = \cdots = A^{([(l-1)/m])}(0) = 0.$$

a étant arbitraire, le groupe G/N est isomorphe au groupe multiplicatif $\boldsymbol{C}^*$.

4) Par rapport au groupe $N=K$, les conditions se rendent bien simples, même si $l>m$:

$$a^m = 1, \quad P^{(\nu)}(0)(1-a^\nu) = 0 \qquad (\nu=1, 2, \cdots, l-1),$$
$$A^{(1)}(0) = \cdots = A^{([(l-1)/m])}(0) = 0.$$

Car, on pourra montrer que Q_{jm} $(jm<l)$ est somme d'un multiple non nul de

$A^{(j)}(0)$ et d'un polynôme en $A^{(1)}(0), \cdots, A^{(j-1)}(0)$, sans terme constant, dont les coefficients sont des polynômes en a, $P^{(1)}(0), \cdots, P^{(jm-1)}(0)$ à coefficients entiers.

5) Dans le cas où $1<m<l$ et $P^{(1)}(0)\neq 0$, on verra que les conditions se réduisent à

$$a=1\,,\quad A^{(1)}(0)=\cdots=A^{([(l-1)/m])}(0)=0\,.$$

7. Démonstration du Lemme 2

Pour prouver le Lemme 2, nous pouvons considérer la variable y comme paramètre et nous convenons d'écrire

$$D^\nu f=\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}f(x,y)\,,\qquad (D^\nu f)_0=\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}f(0,y)\,,\quad \text{etc.}$$

Introduisons par récurrence une suite d'opérateurs différentiels $L_{\nu,i}$ ($\nu=1, 2, \cdots$; $i=0, 1, 2, \cdots, \nu+1$) comme suit:

$$\begin{aligned}&L_{\nu,0}\varphi=L_{\nu,\nu+1}\varphi=0\,,\\ &L_{1,1}\varphi=D\varphi\,,\\ &L_{\nu+1,i}\varphi=D(L_{\nu,i}\varphi)+(D\varphi)(L_{\nu,i-1}\varphi)\,,\end{aligned}$$

pour $\nu\geqq 1$ et $1\leqq i\leqq \nu+1$, où φ est une fonction entière. Par exemple, il vient $L_{2,1}\varphi=D^2\varphi$, $L_{2,2}\varphi=(D\varphi)^2$; $L_{3,1}\varphi=D^3\varphi$, $L_{3,2}\varphi=3(D\varphi)(D^2\varphi)$, $L_{3,3}\varphi=(D\varphi)^3$. Définissons une autre suite L_ν ($\nu=0, 1, 2, \cdots$) par

$$\begin{aligned}&L_0\varphi=1\,,\\ &L_{\nu+1}\varphi=D(L_\nu\varphi)+(D\varphi)(L_\nu\varphi);\end{aligned}$$

en particulier, $L_1\varphi=D\varphi$. On aura tout de suite les relations

$$(5)\qquad L_\nu\varphi=\textstyle\sum_{i=1}^{\nu} L_{\nu,i}\varphi\qquad(\nu=1, 2, \cdots)\,.$$

Pour $\nu=1, 2, \cdots$ et pour $i=1, 2, \cdots, \nu$, désignons par $\Lambda_{\nu,i}$ l'ensemble des suites de ν nombres entiers non négatifs $\lambda=(\lambda_1, \cdots, \lambda_\nu)$ tels que $\sum_{k=1}^{\nu} k\lambda_k=\nu$ et que $\sum_{k=1}^{\nu}\lambda_k=i$. Alors, $L_{\nu,i}\varphi$ s'écrit comme polynôme des dérivées de φ d'ordre $\leqq\nu$ sous la forme

$$(6)\qquad L_{\nu,i}\varphi=\textstyle\sum_\lambda \alpha_\lambda(D\varphi)^{\lambda_1}\cdots(D^\nu\varphi)^{\lambda_\nu}\,,$$

où $\lambda=(\lambda_1, \cdots, \lambda_\nu)$ parcourt l'ensemble $\Lambda_{\nu,i}$ et les coefficients α_λ sont les entiers positifs qui sont déterminés complètement par récurrence; par exemple, $\alpha_{(1)}=1$; $\alpha_{(0,1)}=1$, $\alpha_{(2,0)}=1$; $\alpha_{(0,0,1)}=1$, $\alpha_{(1,1,0)}=3$, $\alpha_{(3,0,0)}=1$.

Au moyen des opérateurs introduits ci-dessus, on a pour $\nu=1, 2, \cdots$ les formules suivantes:

$$(7) \quad \begin{cases} D^\nu(Q(\varphi(x))) = \sum_{i=1}^{\nu} (D^i Q)(\varphi(x)) \cdot (L_{\nu,i}\varphi(x))\,, \\ D^\nu(e^{\varphi(x)}) \quad = (L_\nu \varphi(x))\, e^{\varphi(x)}\,, \\ D^\nu(x e^{\varphi(x)}) \quad = (\nu L_{\nu-1}\varphi(x) + x L_\nu \varphi(x))\, e^{\varphi(x)}\,, \end{cases}$$

où φ et Q sont des fonctions entières d'une variable.

En effect, pour $\nu=1$, la première formule sera vérifiée immédiatement. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} D(D^\nu(Q(\varphi))) &= \sum_{i=1}^{\nu} (D^{i+1}Q)(\varphi) \cdot (D\varphi)(L_{\nu,i}\varphi) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\nu} (D^i Q)(\varphi) \cdot D(L_{\nu,i}\varphi) \\ &= \sum_{i=1}^{\nu+1} (D^i Q)(\varphi) \cdot (L_{\nu+1,i}\varphi)\,, \end{aligned}$$

ce qui prouve la première. En particulier, pour $Q(\varphi)=e^\varphi$, la première et (5) entraînent la deuxième. La troisième est une conséquence de la deuxième et de la formule de Leibniz.

Cela posé, commençons par remarquer que l'on a

$$(Df)_0 = \cdots = (D^{m-1}f)_0 = 0\,, \qquad \text{et} \quad (D^m f)_0 = m!$$

et, pour $m<\nu<m+l$, $(D^\nu f)_0$ est un polynôme en $(DP)_0, \cdots, (D^{\nu-m}P)_0$, sans terme constant, à coefficients entiers donc il ne dépend pas de la variable y. Pour la simplicité de l'écriture, soit R_0 l'anneau des entiers et soient, pour $\nu=1, 2, \cdots, l-1$, R_ν l'anneau des polynômes en $(DP)_0, \cdots, (D^\nu P)_0$ à coefficients entiers. Alors, $R_0 \subset R_1 \subset \cdots \subset R_{l-1}$ et $(D^\nu f)_0 \in R_{\nu-m}$.

En vertu de la formule (6) et des remarques précédentes, on observe que

$$(8) \quad \begin{cases} (L_{\nu,i}f)_0 = 0\,, & (\text{si } 1 \leqq \nu < m \text{ ou si } m \leqq \nu < m+l,\ \nu/m < i \leqq \nu)\,, \\ (L_{\nu,i}f)_0 \in R_{\nu-m} & (\text{si } m \leqq \nu < m+l)\,. \end{cases}$$

En effect, supposons que $m \leqq \nu < m+l$, $\nu/m < i \leqq \nu$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_\nu) \in \Lambda_{\nu,i}$. Si $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$, on aurait $\nu = m\lambda_m + \cdots + \nu\lambda_\nu \geqq m(\lambda_m + \cdots + \lambda_\nu) = mi > \nu$. D'où, tous les termes dans la sommation de (6) pour $\varphi=f$ se réduisent à zéro en $x=0$. Le reste de (8) est trivial.

D'après (6), (7) et (8), on a pour un entier p $(=-m$ ou $n)$

$$(9) \qquad (L_\nu(pA(f)))_0 = \begin{cases} 1 & (\text{si } \nu=0)\,, \\ 0 & (\text{si } 1 \leqq \nu < m)\,. \end{cases}$$

Et, si $m \leqq \nu < m+l$, elle est un polynôme en $(DA)_0, \cdots, (D^{[\nu/m]}A)_0$ sans terme constant à coefficients dans $R_{\nu-m}$.

En effect, d'après (7) on a

$$(D^\nu(pA(f)))_0 = p \sum_{i=1}^{\nu} (D^i A)_0 (L_{\nu,i}f)_0\,.$$

D'après (8), elle est nulle pour $1 \leqq \nu < m$ et égale à

$$p \sum_{i=1}^{[\nu/m]} (D^i A)_0 \, (L_{\nu,i} f)_0 \,,$$

qui est une forme linéaire en $(DA)_0, \cdots, (D^{[\nu/m]}A)_0$ à coefficients dans $R_{\nu-m}$, pour $m \leqq \nu < m+l$. En vertu de (5) et (6), on en déduit aussitôt l'énoncé (9).

Nous allons montrer que l'on a

$$(10) \qquad (L_{\nu,i}(axe^{nA(f)}))_0 = \begin{cases} a^\nu & (\text{si } 1 \leqq \nu \leqq m+l,\ i=\nu)\,, \\ 0 & (\text{si } 1 \leqq \nu \leqq m,\ 1 \leqq i < \nu)\,. \end{cases}$$

Et, si $m < \nu \leqq m+l$ et $1 \leqq i < \nu$, elle est produit de a^i par un polynôme en $(DA)_0, \cdots, (D^{[(\nu-1)/m]}A)_0$ sans terme constant à coefficients dans $R_{\nu-m-1}$.

En effect, en vertu de (7), on a pour $x=0$ et pour $\nu \geqq 1$

$$(D^\nu(axe^{nA(f)}))_0 = a\nu(L_{\nu-1}(nA(f)))_0 \,,$$

à laquelle (9) est applicable. Le cas où $\nu=1$ est un cas exceptionnel, où cette valeur de la dérivée est égale à a. Dans la formule (6) pour la fonction $\varphi(x) = axe^{nA(f)}$, le terme avec $(\lambda_1, \cdots, \lambda_\nu) = (\nu, 0, \cdots, 0)$, qui ne figure que pour $i=\nu$, est exceptionnel. En outre, on a $\alpha_{(\nu,0,\dots,0)} = 1$ pour $\nu \geqq 1$. En tenant compte de ces faits, on arrivera à l'énoncé (10), à l'aide de (6) et (9).

Démonstration du Lemme 2.

Il s'agit de calculer les valeurs en $x=0$ des dérivées d'ordre $\leqq l$ de la fonction

$$g(x, y) = P(x) e^{-mA(f(x,y))} - P(axe^{nA(f(x,y))}) \,.$$

On a en vertu de (7)

$$\begin{aligned} D^\nu g = {} & \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} D^i P(x) \cdot L_{\nu-i}(-mA(f)) \cdot e^{-mA(f)} \\ & - \sum_{i=1}^{\nu} (D^i P)(axe^{nA(f)}) \cdot L_{\nu,i}(axe^{nA(f)}) \,. \end{aligned}$$

En tenant compte de $f(0, y)=0$, $P(0)=1$ et $A(0)=0$, on en déduit

$$\begin{aligned} (11) \qquad (D^\nu g)_0 = {} & (D^\nu P)_0 \, (1-a^\nu) \\ & + \sum_{i=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{i} (D^i P)_0 \, (L_{\nu-i}(-mA(f)))_0 \\ & - \sum_{i=1}^{\nu-1} (D^i P)_0 \cdot (L_{\nu,i}(axe^{nA(f)}))_0 \,. \end{aligned}$$

D'après (9) et (10), on a pour $1 \leqq \nu < m$

$$(D^\nu g)_0 = (D^\nu P)_0 \, (1-a^\nu) \,,$$

où on remarque que $(D^\nu P)_0 = 0$ pour $\nu \geqq l$. Si $m \leqq \nu \leqq l (< l+m)$, le deuxième terme du second membre de (11) est un polynôme en $(DA)_0, \cdots, (D^{[\nu/m]}A)_0$ sans terme constant à coefficients dans $R_{\nu-1}$. Le troisième terme est un polynôme en $(DA)_0, \cdots, (D^{[(\nu-1)/m]}A)_0$ sans terme constant à coefficients dans $R_{\nu-1}[a]$, anneau des polynômes en a à coefficients dans $R_{\nu-1}$, ce qui achève la démonstration du Lemme 2.

8. Appendice

Soit donnée une fonction φ, uniforme et méromorphe dans tout le plan $\boldsymbol{C}$, et supposée non constante. Il s'agit du groupe G des automorphismes de $\boldsymbol{C}$ qui laissent invariante la fonction φ.

Pour cela, désignons par Ω le sous-groupe additif de $\boldsymbol{C}$ formé des périodes de φ. Pour $\omega \in \boldsymbol{C}$, l'automorphisme τ de $\boldsymbol{C}$ défini par $\tau(z)=z+\omega$ s'appellera *translation correspondant à* ω. Pour $\theta \in \boldsymbol{R}$ et pour $a \in \boldsymbol{C}$, l'automorphisme ρ de $\boldsymbol{C}$ défini par $\rho(z)=e^{i\theta}(z-a)+a$ sera dit *rotation de centre* a *et d'angle* θ. Les translations correspondant à toutes les $\omega \in \Omega$ forment un sous-groupe A de G. Cela revient à dire que A est formé des éléments de G n'ayant pas de point invariant. A est manifestement isomorphe à Ω. Il est un groupe abélien libre de rang $\leqq 2$. Pour $a \in \boldsymbol{C}$, désignons par G_a l'ensemble des éléments de G qui laissent invariant le point a. G_a est un sous-groupe fini de G. Si l'ordre $k=|G_a|$ est >1, on dit que a est un *centre de* φ *d'ordre* k. Pour un entier $k>1$, notons E_k l'ensemble des centres de φ d'ordre k et posons $E=E_2 \cup E_3 \cup \cdots$.

Cela posé, en discernant neuf cas, nous pouvons énoncer les résultats suivants:

1°. [rang $\Omega=0$, $E=\emptyset$].

Dans ce cas, G se réduit à l'élément unité.

2°. [rang $\Omega=0$, $E \neq \emptyset$].

E se réduit à un seul point, soit a, et on a $G=G_a$. G est un groupe cyclique d'ordre fini $k=|G_a|$, engendré par la rotation de centre a et d'angle $2\pi/k$. $\varphi(z)$ est une fonction de $(z-a)^k$.

3°. [rang $\Omega=1$, $E=\emptyset$].

On a $G=A$. $\varphi(z)$ est une fonction de $e^{\alpha z}$, où $2\pi i\alpha^{-1}$ est un générateur de Ω.

4°. [rang $\Omega=1$, $E \neq \emptyset$].

Soient $a \in E$, ω un générateur de Ω, τ la translation correspondant à ω, et ρ la rotation de centre a et d'angle π. G est alors engendré par ρ et τ avec les relations fondamentales $\rho^2=id$ et $\rho\tau=\tau^{-1}\rho$. On a $[G: A]=2$ et $E=E_2=a+\frac{1}{2}\Omega$. $\varphi(z)$ est une fonction de $\cos(\alpha z+\beta)$, où $\alpha=2\pi\omega^{-1}$ et $\beta=-\alpha a$.

5°. [rang $\Omega=2$, $E=\emptyset$].

On a $G=A$. φ est une fonction elliptique dont le groupe des périodes est Ω.

6°. [rang $\Omega=2$, $E=E_2\neq\emptyset$].

Soient $a\in E_2$; ρ la rotation de centre a et d'angle π; ω_1, ω_2 une base de Ω; τ_1 et τ_2 les translations correspondant à ω_1 et à ω_2 resp. Alors, G est engendré par τ_1, τ_2 et ρ avec les relations fondamentales $\rho^2=id$, $\tau_1\tau_2=\tau_2\tau_1$, $\rho\tau_1=\tau_1^{-1}\rho$ et $\rho\tau_2=\tau_2^{-1}\rho$. On a $[G: A]=2$ et $E=E_2=a+\frac{1}{2}\Omega$. $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle de la fonction de Weierstrass $\mathfrak{P}(z-a;\ \omega_1,\ \omega_2)$.

Dans les derniers trois cas suivants, soit k l'entier maximum tel que $E_k\neq\emptyset$. Si rang $\Omega=2$ et $E\neq E_2$, on voit aisément que k doit être 3, 4 ou 6. Prenons un point a de E_k, $\omega_1\in\Omega$ et $\omega_2\in\Omega$ de manière que $|\omega_1|$ soit la plus petite non nulle; qu'on ait $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$, $-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\,(\omega_2/\omega_1)\leqq\frac{1}{2}$, $|\omega_2/\omega_1|\geq 1$; et que ω_1 et ω_2 forment une base de Ω. Soient ρ la rotation de centre a et d'angle $2\pi/k$; τ_1 et τ_2 les translations correspondant à ω_1 et ω_2 resp.

7°. [rang $\Omega=2$, $k=3$].

On a $\omega_2/\omega_1=e^{\pi i/3}$ et G est engendré par τ_1, τ_2 et ρ avec les relations fondamentales $\rho^3=id$, $\tau_1\tau_2=\tau_2\tau_1$, $\rho\tau_1=\tau_1^{-1}\tau_2\rho$ et $\rho\tau_2=\tau_1^{-1}\rho$. On a $[G: A]=3$ et $E=E_3=(a+\Omega)\cup(a+(\omega_1+\omega_2)/3+\Omega)\cup(a-(\omega_1+\omega_2)/3+\Omega)$. $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle de $\mathfrak{P}'(z-a;\ \omega_1,\ \omega_2)$.

8°. [rang $\Omega=2$, $k=4$].

On a $\omega_2/\omega_1=i$ et G est engendré par τ_1, τ_2 et ρ avec les relations fondamentales $\rho^4=id$, $\tau_1\tau_2=\tau_2\tau_1$, $\rho\tau_1=\tau_2\rho$ et $\rho\tau_2=\tau_1^{-1}\rho$. On a $[G: A]=4$, $E=E_4\cup E_2$, $E_4=(a+\Omega)\cup(a+(\omega_1+\omega_2)/2+\Omega)$ et $E_2=(a+\omega_1/2+\Omega)\cup(a+\omega_2/2+\Omega)$. $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle de $\mathfrak{P}''(z-a;\ \omega_1,\ \omega_2)$.

9°. [rang $\Omega=2$, $k=6$].

On a $\omega_2/\omega_1=e^{\pi/i3}$ et G est engendré par τ_1, τ_2 et ρ avec les relations fondamentales $\rho^6=id$, $\tau_1\tau_2=\tau_2\tau_1$, $\rho\tau_1=\tau_2\rho$ et $\rho\tau_2=\tau_1^{-1}\tau_2\rho$. On a $[G: A]=6$, $E=E_6\cup E_3\cup E_2$, $E_6=a+\Omega$, $E_3=(a+(\omega_1+\omega_2)/3+\Omega)\cup(a-(\omega_1+\omega_2)/3+\Omega)$ et $E_2=(a+\omega_1/2+\Omega)\cup(a+\omega_2/2+\Omega)\cup(a+(\omega_1+\omega_2)/2+\Omega)$. $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle de $\mathfrak{P}^{(4)}(z-a;\ \omega_1,\ \omega_2)$.

Les résultats qu'on vient d'indiquer seront aisément établis à l'aide des énoncés suivants, qu'on sait bien:

1) Tout élément de G est une translation ou une rotation.
2) Si $a\in E$ et $\tau\in G$, alors $G_{\tau(a)}=\tau G_a\tau^{-1}$ et $\tau(a)\in E$.

3) Soient $a \in E$; $b \in E$; k un entier >1 qui divise à la fois l'ordre de G_a et celui de G_b; et $\zeta \in \boldsymbol{C}$ tel que $\zeta^k=1$. Alors, $(1-\zeta)(a-b) \in \Omega$.

4) Soient p et q des entiers >1 tels que $E_p \neq \emptyset$ et $E_q \neq \emptyset$. Alors, il existe un point $a \in \boldsymbol{C}$ tel que le plus petit multiple commun aux p et q divise l'ordre de G_a.

UNIVERSITÉ FÉMININE DE NARA
KANAZAWA JOSHI TANKI DAIGAKU KÔTÔ-GAKKÔ

Bibliographie

[1] H. Hermes und E. Peschl: *Über analytische Automorphismen des* R_{2n}, Math. Ann. **122** (1950), 66–70.
[2] T. Nishino: *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes* (I). J. Math. Kyoto Univ. **8** (1968), 49–100.
[3] ——— (II). *Fonctions entières qui se réduisent à celles d'une variable*, ibid. **9** (1969), 221–274.
[4] ——— (III). *Sur quelques propriétés topologiques des surfaces premières*, ibid. **10** (1970), 245–271.
[5] ——— (IV). *Types de surfaces premières*, ibid. **13** (1973), 217–272.
[6] ——— (V). *Fonctions qui se réduisent aux polynômes*. ibid. **15** (1975), 527–553.
[7] H. Saitō: *Fonctions entières qui se réduisent à certains polynomes*, Osaka J. Math. **9** (1972), 293–332.