Krier, R.
Osaka J. Math.
12 (1975), 745–765

SUR LES IDÉAUX DE L'ALGÈBRE DE BANACH DES FONCTIONS INTÉGRABLES BIINVARIANTES*

RENÉ KRIER

(Received September 28, 1974)

1. Préliminaires

La lettre G désigne un groupe de Lie semi-simple, connexe, de centre fini; K est un sous-groupe compact maximal de G.

Nous supposons que *le rang de G/K est* 1.

Nous notons $L^1(K^1\backslash G/K)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur G et biinvariantes par K. C'est une algèbre de Banach commutative pour le produit de convolution des fonctions it pour la norme L^1. Son spectre de Gelfand s'identifie à l'ensemble des fonctions sphériques bornées de G.

Harish-Chandra ([3] et [4]) a démontré que l'ensemble des fonctions sphériques de G est paramétré par l'ensemble des nombres complexes $\boldsymbol{C}$, et que deux nombres complexes λ et μ définissent la même fonction sphérique si et seulement si $\mu=\pm\lambda$.

Helgason et Johnson ([5]) ont montré que λ définit une fonction sphérique *bornée* si et seulement si

$$|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant\rho\,,$$

où ρ est un paramètre qui dépend du groupe G.

Le spectre de Gelfand de l'algèbre $L^1(K\backslash G/K)$ s'identifie donc à la bande fermée

$$\bar{B}=\{\lambda\in\boldsymbol{C}\,|\,|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant\rho\}\,,$$

deux nombres complexes opposés représentent le même idéal maximal régulier.

La topologie de Gelfand et la topologie usuelle de $\bar{B}$ coïncident.

La lettre B désigne évidemment la bande ouverte $\{\lambda\in\boldsymbol{C}\,|\,|\operatorname{Im}\lambda|<\rho\}$.

Si $f\in L^1(K\backslash G/K)$ nous notons $\hat{f}$ la transformée de Gelfand de f. L'application $f\to\hat{f}$ est injective, ce que l'on traduit en disant que *l'algèbre* $L^1(K\backslash G/K)$

* Cet article est une partie de ma thèse de Doctorat de spécialité que j'ai préparée sous la direction de M. le Professeur Reiji TAKAHASHI, et que j'ai soutenue le 26 juin 1973 à l'Université de Nancy (France) ([7]).

est semi-simple. L'image de $L^1(K\backslash G/K)$ par l'application $f \rightarrow \hat{f}$ est notée $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$.

La fonction $\hat{f}$ est definie dans la bande $\bar{B}$, *paire, continue sur* $\bar{B}$, *analytique à l'intérieur, et elle tend vers zéro à l'infini.* On en déduit que *l'algèbre* $L^1(K\backslash G/K)$ *n'est pas régulière,* c'est-à-dire les transformées de Gelfand $\hat{f}$ ne séparent pas les points et les fermés de $\bar{B}$.

Voici un théorème du type Paley-Wiener qui permet de reconnaître si une fonction F définie dans la bande $\bar{B}$ est la transformée de Gelfand d'un élément de $L^1(K\backslash G/K)$ ([2], theorem 4, page 147):

Théorème 1.1.

Soit F une fonction definie dans $\bar{B}$, paire, indéfiniment différentiable dans $\bar{B}$, analytique à l'intérieur, et rapidement décroissante, c'est-à-dire pour tout couple d'entiers non négatifs (n, m) on a

$$\sup_{\lambda\in\bar{B}}|(1+\lambda^n)F^{(m)}(\lambda)|<+\infty\ .$$

La fonction F appartient à $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$.

Voici brièvement le contenu du présent article:

Au chapitre 2 nous essayons de *caractériser l'ensemble des zéros d'une fonction de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$.*

Au chapitre 3 nous nous posons les questions: "*Est-ce que tout idéal fermé de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ est l'intersection des idéaux maximaux réguliers qui le contiennent?*" et "*Est-ce que tout idéal fermé propre est contenu dans au moins un idéal maximal régulier?*". Pour répondre à ces questions nous sommes amenés à rechercher *les ensembles de synthèse de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$.*

Enfin, au chapitre 4 nous décrivons quelques *idéaux fermés primaires* de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$, sans réussir à les exhiber tous.

2. L'espace de Hardy $H^\infty(B)$. Caractérisation de l'ensemble des zéros d'une fonction de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$.

I) *L'espace de Hardy $H^\infty(U)$.*

Dans toute la suite U sera le disque unité ouvert, D sera le disque unité fermé, et C le cercle unité.

Nous notons $H^\infty(U)$ l'espace de Banach des fonctions analytiques bornées dans U, muni de la norme

$$||f||_\infty=\sup_{z\in U}|f(z)|.$$

Nous désignerons par $H^\infty(B)$ l'espace de Banach des fonctions analytiques bornées dans la bande B, muni de la norme

$$||F||_\infty=\sup_{\lambda\in B}|F(\lambda)|.$$

L'algèbre $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ est contenue dans $H^\infty(B)$. Si Φ est une représentation conforme de U dans B, et si $F\in H^\infty(B)$, alors la fonction $f(z)=F(\Phi(z))$ appartient à $H^\infty(U)$. Nous allons utiliser certains résultats sur les fonctions de $H^\infty(U)$ pour décrire les propriétés des fonctions de $H^\infty(B)$ via la représentation conforme Φ.

Voici les énoncés des résultats sur $H^\infty(U)$ qui nous intéressent. Commençons par deux théorèmes sur le comportement d'une fonction f de $H^\infty(U)$ au bord de U:

Théorème 2.1. ([9], theorem 11.20, page 234)
A toute fonction $f\in H^\infty(U)$ correspond une fonction $f^*\in L^\infty(C)$ définie presque partout par

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) .$$

De plus $\|f\|_\infty=\|f^*\|_\infty$ $(=\sup\text{ ess }|f^*|)$.

Théorème 2.2. ([6], page 38)
Toute fonction f de $H^\infty(U)$ converge non-tangentiellement vers f^* p.p. sur C.

Qu'en est-il des zéros d'une fonction f de $H^\infty(U)$? D'abord si f n'est pas identiquement nul dans U, alors les zéros de f n'ont pas de point d'accumulation dans U et sont au plus dénombrables. Mais on a un résultat beaucoup plus précis:

Théorème 2.3. ([9], theorem 15.23, page 303)
Supposons que $f\in H^\infty(U)$ n'est pas identiquement nul dans U, et que α_1, α_2, α_3, $\cdots$ sont les zéros de f dans U. Si p est l'ordre de multiplicité du zéro α, il sera répété p fois dans la suite (α_n). Alors

$$\textstyle\sum_{n\geq 1}(1-|\alpha_n|)<+\infty . \tag{2.4}$$

Inversement, si on se donne une suite de points (α_n) dans U vérifiant (2.4), il existe une fonction de $H^\infty(U)$ ayant précisément ces points comme zéros:

Théorème 2.5. ([9], theorem 15.21, page 302)
Soit (α_n) une suite de points dans U tel que $\alpha_n\neq 0$, et que la série (2.4) converge. Soit k un entier non négatif. Posons

$$b(z) = z^k \prod_{n\geq 1} \frac{\alpha_n - z}{1-\bar{\alpha}_n z}\,\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$$

pour tout $z\in U$.

Alors b appartient à $H^\infty(U)$ et n'a pas de zéros dans U sauf aux points α_n et éventuellement à l'origine si $k>0$. La fonction b est appelée un produit de Blaschke.

DÉFINITIONS. ([9], 17.14, page 336)

Une fonction $m \in H^\infty(U)$ *est appelée fonction intérieure si* $|m^*| = 1$ *p.p. sur* C. *Si* φ *est une fonction positive, mesurable sur* C *telle que* $\log \varphi \in L^1(C)$, *posons*

$$q(z) = c \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log \varphi(e^{i\theta})d\theta\right\}$$

pour tout $z \in U$, *c étant un nombre complexe de module* 1. *La fonction q est appelée fonction extérieure.*

Le théorème suivant donne une description complète des fonctions intérieures:

Théorème 2.6. ([9], theorem 17.15, page 337)

Soit c un nombre complexe de module 1, *b un produit de Blaschke, et* μ *une mesure borélienne positive sur C singulière par rapport à la mesure de Lebesgue* (*i.e. la mesure* μ *est concentrée sur un ensemble dont la mesure de Lebesgue est nulle.*) *Posons*

$$m(z) = cb(z) \exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\mu(\theta)\right\}$$

pour tout $z \in U$. *Alors m est une fonction intérieure, et toute fonction intérieure est de cette forme.*

Le théorème précédent montre que les produits de Blaschke sont des fonctions intérieures particulières. Une fonction intérieure qui n'a pas de zéros dans U, et qui est positive à l'origine est appelée *fonction singulière.* Toute fonction intérieure est, à un facteur constant de module 1 près, le produit d'une fonction singulière et d'un produit de Blaschke.

Théorème 2.7. ([9], theorem 17.16, page 337)

Supposons que q est la fonction extérieure relative à φ *comme dans la définition précédente. Alors*

1) $\lim_{r\to 1}|q(re^{i\theta})| = \varphi(e^{i\theta})$ *p.p. sur* C,
2) *la fonction q appartient à* $H^\infty(U)$ *si et seulement si* φ *appartient à* $L^\infty(C)$. *Dans ce cas on a* $||q||_\infty = ||\varphi||_\infty$.

Théorème de factorisation 2.8. ([9], theorem 17.17, page 338)

Supposons que $f \in H^\infty(U)$ *n'est pas identiquement nul dans* U. *Alors*

1) *la fonction* $\log|f^*|$ *appartient à* $L^1(C)$,
2) *la fonction extérieure*

$$q_f(z) = \exp\left\{1/(2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log|f^*(e^{i\theta})|d\theta\right\}$$

est dans $H^\infty(U)$,

3) *il existe une fonction intérieure* m_f *telle que*

$$f = m_f q_f \, .$$

Cette factorisation de f *est unique. Les fonctions* m_f *et* q_f *sont appelées respectivement le facteur intérieur et le facteur extérieur de* f.

II) *Représentation conforme du disque* U *dans la bande* B.

L'application $z \to w = i(1+z)/(1-z)$ est une représentation conforme du disque U dans le demi-plan $\Pi = \{w \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$. Elle se prolonge en un homéomorphisme de $D - \{1\}$ sur $\bar{\Pi} = \{w \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Im} w \geqslant 0\}$ qui transforme $C - \{1\}$ dans la droite réelle. L'application $w \to \lambda = (2\rho/\pi) \log w - i\rho$ est une représentation conforme du demi-plan Π dans la bande B, si on pose $\log w = \log |w| + i \arg w$, avec $0 < \arg w < \pi$. Elle se prolonge en un homéomorphisme de $\bar{\Pi} - \{0\}$ sur $\bar{B}$.

Composons ces deux représentations conformes! L'application

$$\Phi\colon\ z \to \lambda = (2\rho/\pi) \log \left(i \frac{1+z}{1-z} \right) - i\rho \tag{2.9}$$

est une représentation conforme de U dans B qui se prolonge en un homéomorphisme de $D - \{\pm 1\}$ sur $\bar{B}$. Elle transforme le demi-cercle supérieur $\{e^{i\theta},\ 0 < \theta < \pi\}$ dans la droite $\{t + i\rho,\ t \in \boldsymbol{R}\}$, et le demi-cercle inférieur $\{e^{i\theta},\ -\pi < \theta < 0\}$ dans la droite $\{t - i\rho,\ t \in \boldsymbol{R}\}$.

L'application réciproque s'écrit:

$$\Phi^{-1}\colon\ \lambda \to z = \frac{\exp(\pi/2\rho)\lambda - 1}{\exp(\pi/2\rho)\lambda + 1} \, . \tag{2.10}$$

III) *Les zéros d'une fonction de* $H^\infty(B)$.

Supposons que $F \in H^\infty(B)$ n'est pas identiquement nul. Nous posons

$$f(z) = F\left[\frac{2\rho}{\pi} \log \left(i \frac{1+z}{1-z} \right) - i\rho \right] \tag{2.11}$$

pour tout $z \in U$. La fonction f appartient à $H^\infty(U)$.

Définissons la fonction F^* sur $\partial \bar{B}$ (=frontière de $\bar{B}$) de la manière suivante:

$$\begin{aligned} F^*(t+i\rho) &= \lim\nolimits_{y \to \rho} F(t+iy) \, , \\ \text{et} \quad F^*(t-i\rho) &= \lim\nolimits_{y \to \rho} F(t-iy) \, . \end{aligned}$$

D'après les théorèmes (2.1) et (2.2) la fonction F^* est définie p.p. sur $\partial \bar{B}$, elle n'est autre que l'image par la représentation conforme Φ de la fonction f^* restreinte à $C - \{\pm 1\}$, elle est essentiellement bornée, la fonction F converge non-tangentiellement vers F^* p.p. sur $\partial \bar{B}$, et on a

$$\|F\|_\infty = \|F^*\|_\infty .$$

Notons β_1, β_2, β_3, $\cdots$ les zéros de F dans la bande ouverte B, chaque zéro étant répété p fois, si p est son ordre de multiplicité. Les zéros de la fonction f sont alors les points

$$\alpha_n = \frac{\exp(\pi/2\rho)\beta_n - 1}{\exp(\pi/2\rho)\beta_n + 1}.$$

Le théorème (2.3) nous dit que la série de terme général $(1-|\alpha_n|)$ converge.

Lemme 2.12.

Si nous posons $\beta_n = \xi_n + i\eta_n$, alors la série $\sum_{n\geq 1}(1-|\alpha_n|)$ converge si et seulement si la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\pi/2\rho)\eta_n}{ch(\pi/2\rho)\xi_n} \tag{2.13}$$

converge.

Démonstration.

Pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\cos(\pi/2\rho)\eta_n}{ch(\pi/2\rho)\xi_n} &= \frac{2\cos(\pi/2\rho)\eta_n}{\exp(\pi/2\rho)\xi_n + \exp(-\pi/2\rho)\xi_n} \\ &= 2\frac{\exp(\pi/2\rho)\xi_n \cos(\pi/2\rho)\eta_n}{\exp(\pi/\rho)\xi_n + 1}.\end{aligned}$$

D'autre part $\exp(\pi/2\rho)\beta_n = (1+\alpha_n)/(1-\alpha_n)$, d'où, en séparant les parties réelle et imaginaire:

$$\exp(\pi/2\rho)\xi_n \cos(\pi/2\rho)\eta_n = (1-|\alpha_n|^2)/|1-\alpha_n|^2 .$$

Ensuite
$$(\pi/2\rho)\xi_n = \log\left|\frac{1+\alpha_n}{1-\alpha_n}\right|,$$

$$\exp(\pi/2\rho)\xi_n = \left|\frac{1+\alpha_n}{1-\alpha_n}\right|,$$

$$\exp(\pi/\rho)\xi_n = \left|\frac{1+\alpha_n}{1-\alpha_n}\right|^2,$$

et enfin $\exp(\pi/\rho)\xi_n + 1 = 2\dfrac{1+|\alpha_n|^2}{1-|\alpha_n|^2}$. En rassemblant tous ces résultats nous obtenons

$$\frac{\cos(\pi/2\rho)\eta_n}{ch(\pi/2\rho)\xi_n} = \frac{(1-|\alpha_n|)(1+|\alpha_n|)}{1+|\alpha_n|^2}.$$

Puisque $0 \leqslant |\alpha_n| < 1$, nous en déduisons les inégalités:

$$\frac{1}{2}(1-|\alpha_n|)\leqslant\frac{\cos(\pi/2\rho)\eta_n}{ch(\pi/2\rho)\xi_n}\leqslant 2(1-|\alpha_n|).$$

Ceci achève la démonstration du lemme.

Ainsi le lemme précédent nous dit quelle est la distribution des zéros de F dans la bande B: il faut que la série (2.13) converge--en gros cela signifie que la suite (β_n) doit tendre rapidement vers la frontière de B y compris les points $+\infty$ et $-\infty$.

Inversement, soient $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots$ une suite de nombres complexes dans B tels que $\beta_n \neq 0$ et que le série (2.13) converge. Soit k un entier non négatif. D'après le théorème (2.5) et le lemme (2.12) le produit de Blaschke

$$b(z)=z^k\prod_{n\geqslant 1}\frac{\alpha_n-z}{1-\bar{\alpha}_n\cdot z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}, \qquad z\in U,$$

converge, appartient à $H^\infty(U)$, et n'a pas de zéros dans U sauf aux points α_n et éventuellement à l'origine si $k>0$. Posons

$$\mathscr{B}(\lambda)=b\Big(\frac{\exp(\pi/2\rho)\lambda-1}{\exp(\pi/2\rho)\lambda+1}\Big)$$

pour tout $\lambda\in B$. Un calcul facile montre que

$$\mathscr{B}(\lambda)=\Big(\frac{\exp(\pi/2\rho)\lambda-1}{\exp(\pi/2\rho)\lambda+1}\Big)^k\cdot\prod_{n\geqslant 1}\frac{|1-\exp(\pi/\rho)\beta_n|}{1-\exp(\pi/\rho)\beta_n}\,\frac{\exp(\pi/2\rho)\lambda-\exp(\pi/2\rho)\beta_n}{\exp(\pi/2\rho)\lambda+\exp(\pi/2\rho)\bar{\beta}_n} \tag{2.14}$$

La fonction $\mathscr{B}$ appartient à $H^\infty(B)$, elle n'a pas de zéros dans B, sauf aux points β_n, et éventuellement à l'origine si $k>0$. Nous disons que $\mathscr{B}$ est le produit de Blaschke formé à partir des zéros de F.

Nous avons parlé des zéros de F dans la bande B. Qu'en est-il des zéros de F^* dans $\partial\bar{B}$? Le théorème (2.8), 1) nous dit que la fonction $\log|f^*|$ est intégrable sur C pour la mesure de Lebesgue $d\theta$. Ceci signifie essentiellement que

$$1/(2\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\log|f^*(e^{i\theta})|\,d\theta>-\infty.$$

Faisons le changement de variables

$$\begin{aligned} e^{i\theta}&=\frac{i\exp(\pi/2\rho)t-1}{i\exp(\pi/2\rho)t+1} &&\text{si}\quad 0<\theta<\pi,\\ e^{i\theta}&=\frac{-i\exp(\pi/2\rho)t-1}{-i\exp(\pi/2\rho)t+1} &&\text{si}\quad -\pi<\theta<0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Nous aurons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \log|F^*(t-i\rho)| \frac{dt}{\rho\, ch(\pi/2\rho)t} + \int_{-\infty}^{+\infty} \log|F^*(t+i\rho)| \frac{dt}{\rho\, ch(\pi/2\rho)t} > -\infty .$$

Par conséquent chacun des termes du premier membre de l'inégalité précédente doit être strictement supérieur à $-\infty$. Nous en déduisons que l'ensemble des zéros de F^* dans $\partial\bar{B}$ est un ensemble dont la mesure de Lebesgue est nulle.

IV) *Factorisation canonique d'une fonction de $H^\infty(B)$.*

Nous supposons que $F \in H^\infty(B)$ n'est pas identiquement nul dans B, et nous définissons f comme en (2.11). Appliquons le théorème de factorisation (2.8) à la fonction f: La fonction f s'écrit de manière unique $f=mq$ où m et q sont donnés respectivement par les théorèmes (2.6) et (2.8), 2). De plus $|q^*|=|f^*|$ p.p. sur C, la fonction q appartient à $H^\infty(U)$, et $\|q\|_\infty=\|f^*\|_\infty$, c'est ce que nous dit le théorème (2.7). La fonction m est de la forme $m=cbs$ où c est une constante de module 1, b le produit de Blaschke formé à partir des zéros de f dans U, et s une fonction singulière--c'est l'énoncé du théorème (2.6).

Traduisons ces résultats via la représentation conforme Φ de U dans B! Ecrivons

$$\begin{aligned} q(z) &= \exp\left\{1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|f^*(e^{i\theta})|\, d\theta\right\} \\ &= \exp\left\{1/(2\pi) \int_{-\pi}^{0} + 1/(2\pi) \int_{0}^{\pi}\right\} . \end{aligned}$$

Faisons le changement de variables (2.15) et posons

$$z = \frac{\exp(\pi/2\rho)\lambda - 1}{\exp(\pi/2\rho)\lambda + 1}$$

Nous obtenons

$$\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = \frac{\exp(\pi/2\rho)t \exp(\pi/2\rho)\lambda - i}{\exp(\pi/2\rho)t - i \exp(\pi/2\rho)\lambda} \quad \text{si} \quad -\pi<\theta<0 ,$$

$$\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = \frac{\exp(\pi/2\rho)t \exp(\pi/2\rho)\lambda + i}{\exp(\pi/2\rho)t + i \exp(\pi/2\rho)\lambda} \quad \text{si} \quad 0<\theta<\pi ,$$

et

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= q(z) \\ &= \exp\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(\pi/2\rho)t \exp(\pi/2\rho)\lambda - i}{\exp(\pi/2\rho)t - i \exp(\pi/2\rho)\lambda} \log|F^*(t-i\rho)| \frac{dt}{\rho\, ch(\pi/2\rho)t}\right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(\pi/2\rho)t \exp(\pi/2\rho)\lambda + i}{\exp(\pi/2\rho)t + i \exp(\pi/2\rho)\lambda} \log|F^*(t+i\rho)| \frac{dt}{\rho\, ch(\pi/2\rho)t}\right] . \qquad (2.16) \end{aligned}$$

La fonction s s'écrit

$$s(z) = c \exp\left[-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta)\right], \qquad z \in U,$$

où μ est une mesure borélienne sur C, positive, bornée et singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, c est une constante de module 1.

Nous coupons l'intégrale précédente en quatre morceaux:

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi<\theta<0} + \int_{\theta=0} + \int_{0<\theta<\pi} + \int_{\theta=\pi}.$$

De nouveau faisons le changement de variables (2.15), et posons

$$z = \frac{\exp(\pi/2\rho)\lambda - 1}{\exp(\pi/2\rho)\lambda + 1}.$$

L'image de la mesure μ restreinte à $]0, \pi[$ (resp. $]-\pi, 0[$) sera une mesure ν_1 (resp. ν_2) définie sur la droite $\{t+i\rho,\ t \in R\}$ (resp. $\{t-i\rho,\ t \in R\}$). Les deux mesures ν_1 et ν_2 sont positives, bornées et singulières par rapport à la mesure de Lebesgue.

Enfin soient $a=\mu(\{0\})$ et $b=\mu(\{\pi\})$; alors

$$\begin{aligned} S(\lambda) = s(z) = c \exp\left[-a \exp(\pi/2\rho)\lambda - b \exp(-\pi/2\rho)\lambda\right]\cdot \\ \exp\left[-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(\pi/2\rho)t \exp(\pi/2\rho)\lambda + i}{\exp(\pi/2\rho)t + i \exp(\pi/2\rho)\lambda} d\nu_1(t)\right]\cdot \\ \exp\left[-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(\pi/2\rho)t \exp(\pi/2\rho)\lambda - i}{\exp(\pi/2\rho)t - i \exp(\pi/2\rho)\lambda} d\nu_2(t)\right] \end{aligned} \tag{2.17}$$

La fonction S sera encore appelée une fonction singulière.

Résumons:

Théorème de factorisation 2.18.

Supposons que $F \in H^\infty(B)$ n'est pas identiquement nul dans B. La fonction F s'écrit de façon unique

$$F = MQ.$$

1) *La fonction Q est donnée par la formule* (2.16), *elle appartient à $H^\infty(B)$, et elle vérifie*:

$$\begin{aligned} &|Q^*| = |F^*| \quad \textit{p.p. sur} \quad \partial\bar{B}, \\ &|Q(\lambda)| \geqslant |F(\lambda)| \quad \textit{pour tout} \quad \lambda \in B, \\ &\|Q\|_\infty = \|F^*\|_\infty. \end{aligned}$$

2) *La fonction M appartient à $H^\infty(B)$ et vérifie*:

$$\begin{aligned} &|M^*| = 1 \quad \textit{p.p. sur} \quad \partial\bar{B}, \\ &|M(\lambda)| \leqslant 1 \quad \textit{pour tout} \quad \lambda \in B. \end{aligned}$$

3) *Soit $\mathcal{B}$ le produit de Blaschke formé à partir des zéros de F dans B. Il existe une constante c de module* 1 *et une fonction singulière S de la forme* (2.17) *telles que*

$$M = c\mathcal{B}S\,.$$

Cette factorisation de F sera dite *factorisation canonique de F.* Les fonctions M et Q sont appelées respectivement *facteur intérieur et extérieur de F.*

V) *Caractérisation de l'ensemble des zéros d'une fonction de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$.*

Toute fonction de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ est un élément de $H^\infty(B)$, les résultats du paragraphe III sur les zéros des éléments de $H^\infty(B)$ sont donc vrais pour toute fonction de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$. Le théorème suivant n'est qu'un résumé de ces résultats.

Théorème 2.19.

Supposons que $F\in\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ n'est pas identiquement nul, et notons E l'ensemble des zéros de F dans $\bar{B}$.

1) *$E\cap B$ est un ensemble au plus dénombrable, notons-le $(\beta_n)_{n\geq 1}$.*
2) Si $\beta_n=\xi_n+i\eta_n$ *la série*

$$\sum\nolimits_{n\geq 1}\frac{\cos(\pi/2\rho)\eta_n}{ch(\pi/2\rho)\xi_n}$$

converge.

3) *$E\cap\partial\bar{B}$ est un ensemble dont la mesure de Lebesgue est nulle, et qui contient tous les points d'accumulation de la suite (β_n).*

REMARQUE.

Puisque toute fonction de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ est paire, il est évident que l'ensemble E de ses zéros vérifie la propriété $-E=E$. Voilà pourquoi nous supposons une fois pour toutes que les ensembles E envisagés dans la suite de ce chapitre possèdent cette propriété.

Corollaire 2.20.

Soit $I\neq\{0\}$ un idéal fermé propre de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$, et supposons que son enveloppe E n'est pas vide. L'ensemble E vérifie alors les conditions du théorème précédent.

Celui qui lit le théorème (2.19) est évidemment tenté de se poser la question si les conditions nécessaires énoncées dans ce théorème sont suffisantes. Nous ne savons pas répondre à cette question.

Si E est un sous-ensemble fermé de $\bar{B}$ vérifiant les conditions du théorème (2.19), il existe bien une fonction F paire, continue dans $\bar{B}$, analytique à l'intérieur, et tendant vers zéro à l'infini telle que E soit l'ensemble des zéros de F, mais malheureusement on ne sait pas reconnaître si F est un élément de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$. En effet, le seul théorème qui permet d'affirmer qu'une fonction

F appartient à $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ est le théorème (1.1) qui exige que F soit suffisamment régulière.

Voici néanmoins quelques classes de sous-ensembles fermés de $\bar{B}$ qui sont les ensembles des zéros de fonctions de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$.

Proposition 2.21.

Si E est un sous-ensemble fini de $\bar{B}$, alors E est l'ensemble des zéros d'une fonction de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$.

Démonstration.

Soit $R > \rho$, et considérons E comme un sous-ensemble fermé de la bande

$$\bar{B}_R = \{\lambda \in \boldsymbol{C} \,\big|\, |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant R\} .$$

Il existe une fonction H paire, continue dans $\bar{B}_R$, analytique à l'intérieur et tendant vers zéro à l'infini, telle que E soit l'ensemble des zéros de H.

D'après le théorème (1.1) la fonction $F=H\cdot\exp(-\lambda^2)$ est un élément de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$; l'ensemble E est évidemment l'ensemble des zéros de F.

Proposition 2.22.

Soit $E=\{\beta_n\}_{n\geqslant 1}$ où $\beta_n=\xi_n+i\eta_n$ est différent de zéro et appartient à B. Si l'ensemble E vérifie les conditions suivantes:

1. *E n' a pas de point d'accumulation dans $\bar{B}$,*
2. *il existe $R>\rho$ tel que la série*

$$\sum\nolimits_{n\geqslant 1}\frac{1}{ch(\pi/2R)\xi_n}$$

converge,

alors E est l'ensemble des zéros d'un élément de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$.

Démonstration.

Considérons de nouveau E comme un sous-ensemble de $\bar{B}_R$. Pour tout $n\geqslant 1$ nous avons

$$\frac{\cos(\pi/2R)\eta_n}{ch(\pi/2R)\xi_n}\leqslant\frac{1}{ch(\pi/2)\,\xi_n},$$

il s'ensuit que la série $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{\cos(\pi/2R)\eta_n}{ch(\pi/2R)\xi_n}$ converge. Il existe une fonction H paire, continue dans $\bar{B}_R$, analytique à l'intérieur, et tendant vers zéro à l'infini, tel que E soit l'ensemble des zéros de H. La fonction $F=H\cdot\exp(-\lambda^2)$ est un élément de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$, d'après le théorème (1.1), et E est l'ensemble des zéros de F.

Proposition 2.23.

Soit $E=\{\beta_n\}_{n\geqslant 1}$ où $\beta_n=\xi_n+i\eta_n$ est différent de zéro et appartient à B, pour

tout $n \geqslant 1$.
Si E vérifie les conditions suivantes:

1. *E n'a pas de point d'accumulation dans* $\bar{B}$,
2. *la série* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\cos(\pi/2\rho)\eta_n}{ch(\pi/2\rho)\xi_n}$ *converge,*
3. *il existe* $\alpha \geqslant 1/2$ *et* $M \geqslant 0$ *tels que*

$$\frac{1}{\exp(\pi/2\rho)(2\alpha-1)\,|\xi_n| \cdot \cos(\pi/2\rho)\eta_n} \leqslant M, \textit{ pour tout } n,$$

alors E est l'ensemble des zéros d'une fonction de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$.

REMARQUE. La condition (3) signifie que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ ne doit pas tendre trop tangentiellement vers l'infini.

Démonstration.

Passons dans le disque unité à l'aide de la représentation conforme Φ^{-1}!

Posons
$$\alpha_n = \frac{\exp(\pi/2\rho)\beta_n - 1}{\exp(\pi/2\rho)\beta_n + 1}.$$

Lemme.

1. *La suite* $(\alpha_n)_{n>1}$ *a deux points d'accumulation, à savoir* 1 *et* -1.
2. *Elle vérifie la condition de Blaschke.*
3. *Notons* $F = \{1, -1\}$. *Il existe* $c \geqslant 1$ *et* $M' \geqslant 0$ *tel que*

$$\operatorname{dist}(\alpha_n, F)^c < M'(1 - |\alpha_n|), \qquad n \geqslant 1.$$

Démonstration du lemme.

$$\operatorname{dist}(\alpha_n, F) = \begin{cases} |1-\alpha_n| & \text{lorsque } \operatorname{Re}\alpha_n \geqslant 0 \text{ c-à-d. lorsque } \xi_n \geqslant 0 \\ |1+\alpha_n| & \text{lorsque } \operatorname{Re}\alpha_n \leqslant 0 \text{ c-à-d. lorsque } \xi_n \leqslant 0 \end{cases}$$

On montre facilement que

$$|1-\alpha_n|^2 = \frac{4}{1+2\exp(\pi/2\rho)\xi_n \cos(\pi/2\rho)\eta_n + \exp(\pi/\rho)\xi_n}$$

et que

$$|1+\alpha_n|^2 = \frac{4}{1+2\exp(-\pi/2\rho)\xi_n \cos(\pi/2\rho)\eta_n + \exp(-\pi/\rho)\xi_n}$$

Par conséquent:

$$\operatorname{dist}(\alpha_n, F)^2 = \frac{4}{1+2\exp(\pi/2\rho)\,|\xi_n|\cos(\pi/2\rho)\eta_n + \exp(\pi/\rho)\,|\xi_n|}$$

D'autre part, nous avons

$$1 - |\alpha_n|^2 = \frac{4\exp(\pi/2\rho)\xi_n \cos(\pi/2\rho)\eta_n}{1+2\exp(\pi/2\rho)\xi_n \cos(\pi/2\rho)\eta_n + \exp(\pi/\rho)\xi_n}$$

$$= \frac{4 \exp(-\pi/2\rho)\xi_n \cos(\pi/2\rho)\eta_n}{1+2\exp(-\pi/2\rho)\xi_n \cos(\pi/2\rho)\eta_n + \exp(-\pi/\rho)\xi_n}$$
$$= \frac{4 \exp(\pi/2\rho)|\xi_n| \cos(\pi/2\rho)\eta_n}{1+2\exp(\pi/2\rho)|\xi_n| \cos(\pi/2\rho)\eta_n + \exp(\pi/\rho)|\xi_n|}.$$

On vérifie ensuite que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{dist}(\alpha_n, F)^{2\alpha}}{1-|\alpha_n|^2} \exp(\pi/2\rho)(2\alpha-1)|\xi_n| \cos(\pi/2\rho)\eta_n = 4^{\alpha-1}.$$

L'hypothèse 3 entraîne donc que

$$\operatorname{dist}(\alpha_n, F)^{2\alpha} \leqslant 4^{\alpha-1}M(1-|\alpha_n|^2), \qquad n \geqslant 1.$$

Mais alors

$$\operatorname{dist}(\alpha_n, F)^{2\alpha} \leqslant 4^{\alpha-1}M(1+|\alpha_n|)(1-|\alpha_n|) \leqslant 2\cdot 4^{\alpha-1}M(1-|\alpha_n|), \qquad n \geqslant 1.$$

La démonstration du lemme est achevée.

Le lemme précédent et le théorème 2 de [10] nous permettent d'affirmer qu'il existe une fonction h analytique dans U dont les dérivées de tout ordre sont bornées dans U et tel que $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ est l'ensemble des zéros de h.

Posons $H = h\circ\Phi^{-1}$; la fonction H est analytique dans B, ses dérivées de tout ordre sont bornées dans B, et E est l'ensemble des zéros de H. De nouveau $F = H\cdot\exp(-\lambda^2)$ est une fonction de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ dont E est l'ensemble des zéros.

Remarque.

Les deux propositions (2.22) et (2.23) nous disent essentiellement comment la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ doit tendre vers l'infini afin que l'ensemble $\{\beta_n\}_{n\geqslant 1}$ soit l'ensemble des zéros d'une fonction de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$. Les conditions énoncées dans les deux propositions sont indépendantes, c'est-à-dire l'une n'entraîne pas l'autre. Plus précisément la suite

$$\beta_n = \xi_n + i\eta_n \text{ avec } \begin{cases} \xi_n = n \\ \eta_n = \rho - \exp\left(-\dfrac{\pi}{2\rho}\exp n\right) \end{cases}$$

vérifie les conditions de la proposition (2.22) sans vérifier celle de la proposition (2.23). D'autre part la suite

$$\beta_n = \xi_n + i\eta_n \text{ avec } \begin{cases} \xi_n = (2\rho/\pi)\log n \\ \eta_n = \rho - n^{-\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0) \end{cases}$$

vérifie les conditions de la proposition (2.23), mais non celles de la proposition (2.22).

3. Les ensembles de synthèse de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$

Ce qui suit a fait l'objet d'une note au C.R. Acad. Sc. Paris t. 278 pages A 417-418 (1974).

Rappelons pour commencer deux définitions bien connues de l'analyse harmonique:

Lorsque I est un idéal fermé de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ on appelle enveloppe de I-et on note $h(I)$-l'ensemble de tous les idéaux maximaux réguliers qui contiennent I; c'est un sous-ensemble fermé de $\bar{B}$. C'est encore l'ensemble des zéros communs à toutes les fonctions F de I.

Lorsque E est un sous-ensemble de $\bar{B}$, on appelle noyau de E-et on note $k(E)$-l'intersection de tous des idéaux maximaux réguliers de E; c'est un idéal fermé de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$. L'idéal $k(E)$ est encore l'ensemble de tous les $F\in\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ qui s'annulent sur E.

Le problème que nous allons essayer de résoudre est le suivant: Est-ce que tout idéal fermé I de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ est l'intersection des idéaux maximaux réguliers qui le contiennent, ou encore a-t-on $I=kh(I)$? Ce problème nous amène tout naturellement à la question suivante: Parmi les sous-ensembles fermés de $\bar{B}$ lesquels sont de synthèse?

En effet, si nous savons que $h(I)$ est de synthèse alors nous avons bien $I=kh(I)$.

Quelle sera maintenant la définition exacte des ensembles de synthèse? Il y a dans $\bar{B}$ des sous-ensembles fermés E tels qu'il n'y a pas d'idéal fermé ayant E pour enveloppe (cf (2.20)). La question si un tel ensemble est de synthèse ou non est vide de sens.

Par contre s'il existe un idéal fermé I ayant E pour enveloppe, alors E est encore l'enveloppe de $k(E)$ et I est contenu dans $k(E)$.

Ces considérations-là nous ont amenés à poser la définition suivante:

DÉFINITION.

Soit E un sous-ensemble fermé de $\bar{B}$ tel que $h(k(E))=E$. On dit que E est un ensemble de synthèse pour l'algèbre $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ si l'idéal $k(E)$ est l'unique idéal fermé ayant E pour enveloppe.

Théorème 3.1.

Le fermé $E=\bar{B}$ est l'unique ensemble de synthèse pour $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$.

Démonstration.

Dire que $L^1(K\backslash G/K)$ est semi-simple, c'est dire que l'idéal $k(\bar{B})=\{0\}$ est l'unique idéal fermé ayant $\bar{B}$ comme enveloppe: l'ensemble $\bar{B}$ est donc de synthèse.

Soit E un fermé de $\bar{B}$, différent de $\bar{B}$, et vérifiant $h(k(E))=E$. Pour tout nombre réel $a>0$ nous posons

$$S_a(\lambda) = \exp\left[-2a\,ch(\pi/2\rho)\lambda\right], \qquad (\lambda \in \bar{B}).$$

La fonction S_a est une fonction singulière, on se reportera à (2.17); rappelons que par conséquent la fonction $|S_a|$ est égale à 1 p.p. sur $\partial\bar{B}$.

$\mathcal{A}_0$ désigne l'ensemble des fonctions continues dans $\bar{B}$, analytiques à l'intérieur, et tendant vers zéro à l'infini. Cet ensemble est muni de la norme de la convergence uniforme dans $\bar{B}$.

Nous notons J_a l'ensemble des fonctions F de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ qui s'écrivent

$$F = S_a \cdot G$$

où G est une fonction de $\mathcal{A}_0$, nulle sur E. Que J_a est un idéal de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ contenu dans $k(E)$, c'est évident. Montrons que J_a est fermé dans $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$! Pour cela nous supposons que la suite de fonctions $F_n = S_a \cdot G_n$ converge vers une fonction F dans $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$. Il s'agit de prouver que F appartient à J_a, c'est-à-dire qu'il existe une fonction G de $\mathcal{A}_0$ qui est nulle sur E, et telle que $F = S_a \cdot G$.

Puisque la suite F_n converge vers F uniformément sur $\bar{B}$, nous aurons

$$\sup_{\lambda\in\bar{B}} |S_a(\lambda)G_n(\lambda) - S_a(\lambda)G_m(\lambda)| = \sup_{\lambda\in\partial\bar{B}} |G_n(\lambda) - G_m(\lambda)|$$

tend vers zéro lorsque n et m tendent vers l'infini. La suite des G_n est donc une suite de Cauchy dans $\mathcal{A}_0$, et par conséquent elle converge vers une fonction G dans $\mathcal{A}_0$.

Comme d'autre part

$$\sup_{\lambda\in\bar{B}} |S_a(\lambda)G_n(\lambda) - F(\lambda)| = \sup_{\lambda\in\partial\bar{B}} |G_n(\lambda) - \overline{S_a(\lambda)}F(\lambda)|$$

tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, nous avons l'égalité

$$G(\lambda) = \overline{S_a(\lambda)}F(\lambda)$$

pour tout $\lambda \in \partial\bar{B}$, ou encore

$$F(\lambda) = S_a(\lambda)G(\lambda)$$

pour tout $\lambda \in \partial\bar{B}$. Le principe du maximum nous permet d'affirmer que l'égalité précédente est vraie dans toute la bande $\bar{B}$.

Quelle est l'enveloppe de l'idéal J_a? Puisque J_a est contenu dans $k(E)$, nous concluons que $h(J_a)$ contient E. Ainsi pour montrer que $h(J_a) = E$, il suffit de prouver que si γ est un point de $\bar{B}$ qui n'appartient pas à E, alors γ n'est pas dans $h(J_a)$. Puisque γ n'est pas dans E, il y a une fonction H dans $k(E)$ qui n'est pas nulle en γ. Posons

$$F(\lambda) = S_a(\lambda)\exp(-\lambda^2)H(\lambda), \qquad \lambda \in \bar{B}.$$

La fonction F appartient à $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$, puisque les fonctions $S_a \exp(-\lambda^2)$ et

H sont dans $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$, d'autre part F s'écrit comme produit de la fonction S_a et d'une fonction $G\in\mathcal{A}_0$ qui est nulle sur E. Par conséquent la fonction F appartient à l'idéal J_a. Enfin le fait que F n'est pas nul en γ entraîne que γ n'appartient pas à $h(J_a)$.

Nous venons d'exhiber une famille $(J_a)_{a>0}$ d'idéaux fermés de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$, contenus dans $k(E)$, et ayant l'ensemble E pour enveloppe. Deux cas sont possibles:

—Ou bien il existe un $a>0$ tel que l'idéal J_a est distinct de $k(E)$: l'ensemble E n'est pas de synthèse.

—Ou bien nous avons l'égalité $J_a=k(E)$ pour tout $a>0$. Ceci entraîne que pour toute fonction $F\in k(E)$, et pour tout $a>0$ il existe une fonction $G_a\in\mathcal{A}_0$ telle que $F=S_aG_a$. Par conséquent si nous fixons $a>0$, nous pouvons écrire

$$S_aG_a = S_bG_b \qquad \text{pour tout } b>0\,,$$

ou encore $G_a=S_{b-a}G_b$.

Nous en déduisons que pour tout $b>0$ et pour tout $x\in\boldsymbol{R}$

$$|G_a(x)| \leqslant |S_{b-a}(x)|\, \|G_b\|_\infty\,.$$

Comme d'autre part $\|G_b\|_\infty=\|F\|_\infty$, nous aurons

$$|G_a(x)| \leqslant |S_{b-a}(x)|\, \|F\|_\infty\,,$$

pour tout $b>0$ et pour tout $x\in\boldsymbol{R}$. Faisons tendre b vers l'infini! Le nombre $|S_{b-a}(x)|\,\|F\|_\infty$ tend vers zéro. La fonction G_a est nulle sur $\boldsymbol{R}$, donc dans $\bar{\boldsymbol{B}}$. Il en est de même de la fonction F, puisque $F=S_a\cdot G_a$

Ainsi donc l'égalité $J_a=k(E)$ pour tout $a>0$ entraîne que l'idéal $k(E)$ est réduit à l'élément zéro. Ceci entraîne à son tour que $h(k(E))=\bar{\boldsymbol{B}}$, ou encore $E=\bar{\boldsymbol{B}}$, contrairement à l'hypothèse. Ceci achève la démonstration du théorème.

L'ensemble vide est un sous-ensemble fermé de $\bar{\boldsymbol{B}}$ qui vérifie $h(k(\phi))=\phi$. Le théorème précédent nous permet donc d'énoncer le corollaire:

Corollaire 3.2.

L'ensemble vide n'est pas de synthèse, ou encore: il y a dans $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ au moins un idéal fermé propre qui n'est contenu dans aucun idéal maximal régulier.

Le résultat du corollaire peut être précisé comme suit:

Proposition 3.3.

Il y a dans $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ une famille $(J_a)_{a>0}$ d'idéaux fermés propres distincts qui ne sont contenus dans aucun idéal maximal régulier.

Démonstration.

Pour tout $a>0$, nous notons J_a l'ensemble des fonctions F de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ qui s'écrivent

$$F = S_a \cdot G ,$$

où $G \in \mathcal{A}_0$. D'après la démonstration du théorème précédent, nous savons que J_a est un idéal fermé de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ et que $h(J_a)=\phi$, quel que soit $a>0$.

De plus si $a'>a$ alors $J_a \subsetneqq J_{a'}$. En effet la fonction

$$F(\lambda) = S_a(\lambda)\cdot \exp(-\lambda^2) , \qquad \lambda \in \bar{B} ,$$

appartient à J_a, mais n'appartient pas à $J_{a'}$.

Enfin pour $a>0$ l'idéal J_a est propre. Car la fonction

$$\lambda \to \exp(-\lambda^2) , \qquad \lambda \in \bar{B} ,$$

est une fonction de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$, mais elle n'appartient à aucun des J_a, $a>0$.

Le corollaire (3.2) et la proposition (3.3) peuvent être traduits comme suit:

Il y a des fonctions F dans $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ qui ne sont jamais nulles dans $\bar{B}$, et telles que l'idéal fermé engendré par F est différent de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$.

En particulier s'il existe $a>0$ tel que F/S_a tend vers zéro à l'infini, alors l'idéal fermé engendré par F est contenu dans l'idéal fermé propre J_a, et est donc différent de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$. Par conséquent il est naturel de poser le problème suivant:

Soit F une fonction de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ qui n'est jamais nulle dans $\bar{B}$, et qui ne tend pas trop rapidement vers zéro à l'infini, plus précisément: *quel que soit $a>0$, la fonction F/S_a ne tend pas vers zéro à l'infini.* Ceci équivaut à dire que dans la décomposition canonique de F (cf. théorème (2.18)) le facteur intérieur de F est la fonction 1, et que le facteur extérieur est la fonction F elle-même. *Est-ce qu'alors l'idéal fermé engendré par F est égal à $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$?*

4. Quelques idéaux fermés primaires de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$

Rappelons que $\mathcal{A}_0$ désigne l'algèbre de Banach des fonctions continues dans $\bar{B}$, analytiques à l'intérieur, et tendant vers zéro à l'infini. L'algèbre $\mathcal{A}_0$ est muni de la norme de la convergence uniforme dans $\bar{B}$.

a) Soit β un point de la bande ouverte B. Pour tout entier $k\geqslant 1$ et pour tout réel $a\geqslant 0$ nous posons

$$\mathcal{B}_k(\lambda) = \left[\frac{|1-ch(\pi/2\rho)\beta|}{1-ch(\pi/2\rho)\beta}\,\frac{ch(\pi/2\rho)\lambda-ch(\pi/2\rho)\beta}{ch(\pi/2\rho)\lambda+ch(\pi/2\rho)\bar{\beta}}\right]^k \qquad \text{si } \beta\neq 0 ,$$

$$\mathcal{B}_k(\lambda) = \left(\frac{ch(\pi/2\rho)\lambda-1}{ch(\pi/2\rho)\lambda+1}\right)^k \qquad \text{si } \beta=0 ,$$

$$S_a(\lambda) = \exp(-2a\, ch(\pi/2\rho)\lambda)$$

et

$$M_{k,a}(\lambda) = \mathcal{B}_k(\lambda) S_a(\lambda) .$$

En nous reportant à (2.14) et à (2.17) nous constatons que $\mathcal{B}_k$ n'est autre que le produit de Blaschke formé à partir des zéros β et $-\beta$ dont l'ordre de multiplicité est k, et que S_a est une fonction singulière. La fonction $M_{k,a}$ est une fonction intérieure puisqu'elle est le produit de deux fonctions intérieures.

Lemme.

Pour tout entier $k \geqslant 1$ et pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, l'ensemble

$$J(k;\, a) = M_{k,a}\mathcal{A}_0$$

est un idéal fermé de $\mathcal{A}_0$.

Démonstration.

Puisque $M_{k,a}$ est une fonction analytique au voisinage de $\bar{B}$, vérifiant $|M_{k,a}(\lambda)| \leqslant 1$ pout tout $\lambda \in \bar{B}$, il est trivial que $J(k;\, a)$ est un idéal de $\mathcal{A}_0$.

Pour montrer que $J(k;\, a)$ est fermé dans $\mathcal{A}_0$ supposons qu'il existe une suite (F_n) dans $\mathcal{A}_0$ telle que $M_{k,a}F_n$ converge vers une fonction G de $\mathcal{A}_0$ uniformément dans $\bar{B}$.
Ecrivons

$$\begin{aligned}&\sup_{\lambda\in\partial\bar{B}}|M_{k,a}(\lambda)F_n(\lambda) - M_{k,a}(\lambda)F_m(\lambda)| = \\ &\sup_{\lambda\in\partial\bar{B}}|F_n(\lambda) - F_m(\lambda)|\,.\end{aligned}$$

La suite (F_n) est donc de Cauchy dans $\mathcal{A}_0$, elle tend donc vers un élément F de $\mathcal{A}_0$. D'autre part nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}&\sup_{\lambda\in\partial\bar{B}}|M_{k,a}(\lambda)F_n(\lambda) - G(\lambda)| = \\ &\sup_{\lambda\in\partial\bar{B}}|F_n(\lambda) - \overline{M_{k,a}(\lambda)}G(\lambda)|\,.\end{aligned}$$

Nous en déduisons que sur $\partial\bar{B}$ nous avons

$$F(\lambda) = \overline{M_{k,a}(\lambda)}G(\lambda)\,,$$

ou encore

$$G(\lambda) = M_{k,a}(\lambda)F(\lambda)\,.$$

La fonction G appartient donc à $J(k;\, a)$.

Proposition 4.1.

L'ensemble $I(k;\, a) = J(k;\, a) \cap \hat{L}^1(K\backslash G/K)$ est un idéal fermé primaire de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$.

Démonstration.

Etant donné que la topologie de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ est plus fine que celle induite par $\mathcal{A}_0$, on conclut que $I(k;\, a)$ est un idéal fermé de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$.

L'idéal $I(k;\, a)$ est contenu dans l'idéal maximal régulier

$$\mu_\beta = \{F \in \hat{L}^1(K\backslash G/K) \,|\, F(\beta) = 0\}\,.$$

Comme d'autre part la fonction $F(\lambda)=M_{k,a}(\lambda)\exp(-\lambda^2)$, qui appartient à $I(k;a)$, ne s'annule qu'aux points β et $-\beta$, l'idéal $I(k;\,a)$ n'est contenu dans aucun autre idéal maximal régulier.

REMARQUE.

L'idéal $I(k;\,a)$ est caractérisé par deux nombres k et a. Le nombre k nous dit que l'ordre de multiplicité du zéro β d'une fonction F de $I(k;\,a)$ est au moins égal à k, tandis que le nombre a nous montre avec quelle vitesse la fonction F tend vers zéro à l'infini.

Nous allons comparer maintenant les ideaux $I(k;\,a)$ pour différentes valeurs de k et a.

Proposition 4.2.

1. $I(k+1;\,a)\subsetneq I(k;\,a)$,
2. *si* $a<a'$, *alors* $I(k;\,a')\subsetneq I(k;\,a)$,
3. *si* $a<a'$, *alors* $I(k;\,a')\cap I(k+1;\,a)=I(k+1,\,a')$.

Démonstration.

La seule chose non triviale à démontrer est que les deux inclusions sont strictes.

1. La fonction $F(\lambda)=M_{k,a}(\lambda)\exp(-\lambda^2)$ appartient à $I(k;\,a)$, mais elle n'appartient pas à $I(k+1;\,a)$, sinon la fonction $\lambda\rightarrow\exp(-\lambda^2)$ serait nulle aux points $\pm\beta$.

2. Cette même fonction F n'appartient pas à $I(k;\,a')$. Par l'absurde, admettons qu'il existe une fonction $G\in\mathcal{A}_0$ telle que

$$M_{k,a}(\lambda)\exp(-\lambda^2)=M_{k,a'}(\lambda)G(\lambda)\,,\qquad \lambda\in\bar{B}\,,$$

ou encore $G(\lambda)=S_{a-a'}(\lambda)\exp(-\lambda^2)$. On en déduit que $\lim_{|\xi|\to\infty}|G(\xi)|=+\infty$, ce qui contredit le fait que G appartient à $\mathcal{A}_0$.

Résumons tous ces résultats!

Théoreme 4.3.

Soit β un point de la bande ouverte B. A tout entier $k\geqslant 1$ et à tout nombre réel $a\geqslant 0$ on sait associer un idéal fermé primaire $I(k;\,a)$ de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ contenu dans l'idéal maximal régulier μ_β. Deux couples $(k,\,a)$ et $(k',\,a')$ distincts définissent deux idéaux primaires distincts. De plus si $a<a'$ nous avons les inclusions strictes suivantes:

$$\begin{array}{ccc} I(k;\,a) & \supset & I(k;\,a') \\ \cup & & \cup \\ I(k+1;\,a) & \supset & I(k+1;\,a')\,. \end{array}$$

b) Nous en arrivons maintenant à la description de certains idéaux fermés primaires contenus dans l'idéal maximal régulier μ_β où $\beta\in\partial\bar{B}$.

On voudrait évidemment que ces idéaux soient encore caractérisés d'une part par la vitesse avec laquelle leurs éléments tendent vers zéro à l'infini, et d'autre part par la vitesse avec laquelle leurs éléments tendent vers zéro au point β.

Fixons les notations! Nous posons

$$\beta = t+i\rho\,,$$
$$T_b(\lambda) = \exp\left[-2b\frac{1-i\,sh(\pi/2\rho)t\;ch(\pi/2\rho)\lambda}{ch(\pi/2\rho)\lambda-i\,sh(\pi/2\rho)t}\right],$$
$$M_{a,b}(\lambda) = S_a(\lambda)T_b(\lambda)\,,\quad a\geqslant 0 \quad \text{et} \quad b\geqslant 0\,.$$

La fonction $M_{a,b}$ est une fonction singulière, on n'a qu'à se reporter à l'expression générale des fonctions singulières en (2.17).

Nous notons $J(a;b)$ l'ensemble des fonctions $F\in\mathcal{A}_0$ qui s'écrivent $F(\lambda)= M_{a,b}(\lambda)G(\lambda)$ où $G\in\mathcal{A}_0$ vérifie $G(\pm\beta)=0$. On montre que $J(a;b)$ est un idéal fermé de $\mathcal{A}_0$. L'ensemble $I(a;b)=J(a;b)\cap\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ est donc un idéal fermé de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ contenu dans l'idéal maximal régulier μ_β.

Est-ce que l'idéal $I(a;b)$ est primaire? En d'autres mots existe-t-il une fonction $F\in I(a;b)$ qui n'est jamais nulle dans la bande $\bar{B}$ sauf aux points $\pm\beta$?

La fonction

$$F(\lambda) = S_a(\lambda)T_b(\lambda)(ch(\pi/2\rho)\lambda-i\,sh(\pi/2\rho)t)^4\exp(-\lambda^2)$$

est la fonction que nous cherchons!

Lemme.

La fonction F vérifie:

a) *F est paire et deux fois continûment dérivable dans la bande $\bar{B}$,*

b) *pour $j=0, 1, 2$ et pour tout $k\in\boldsymbol{N}$ il existe une constante $A_{k,j}>0$ telle que*

$$(1+|\lambda|)^k|d^j/d\lambda^j F(\lambda)|\leqslant A_{k,j}$$

pour tout $\lambda\in\bar{B}$.

Dans le cas où G est le groupe $SL(2, \boldsymbol{R})$ Ehrenpreis et Mautner ont démontré qu'une fonction F qui vérifie les conditions a) et b) du lemme précédent appartient à $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$. ([1], page 433) Leur résultat reste vrai dans le cas général ([7], page 98-109).

Théorème 4.4.

Soit β un point de $\partial\bar{B}$. A tout couple (a, b) de nombres réels positifs ou nuls on sait associer un idéal fermé primaire $I(a, b)$ de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$ contenu dans l'idéal maximal régulier μ_β. Deux couples (a, b) et (a', b') distincts définissent deux idéaux fermés primaires distincts. De plus si $a<a'$ et $b<b'$ alors nous avons les inclusions strictes suivantes:

$$\begin{array}{ccc} I(a, b) & \supset & I(a, b') \\ \cup & & \cup \\ I(a', b) & \supset & I(a', b') \end{array}$$

c) Est-ce que nous avons décrit tous les idéaux fermés primaires de $\hat{L}^1(K\backslash G/K)$? Il semble que non, car les idéaux primaires que nous venons d'exhiber sont fermés non seulement pour la norme $\|\cdot\|_1$, mais encore pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

UNIVERSITÉ DE NANCY I

Bibliographie

[1] L. Ehrenpreis and F.I. Mautner: *Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups* I, Ann. of Math. **61** (1955), 406–439.

[2] M. Flensted-Jensen: *Paley-Wiener type theorems for a differential operator connected with symmetric spaces,* Ark. Mat. **10** (1972), 143–162.

[3] Harish-Chandra: *Representation of semi-simple Lie groups* II, Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 26–65.

[4] ———: *Spherical functions on a semi-simple Lie group* I, Amer. J. Math. **80** (1958), 241–310.

[5] S. Helgason and K. Johnson: *The bounded spherical functions on symmetric spaces,* Advances in Math. **3** (1969), 586–593.

[6] K. Hoffman: Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall, Inc., 1962.

[7] R. Krier: *Etude des idéaux de l'algèbre de Banach des fonctions intégrables biinvariantes*; Thèse de Doctorat de spécialité; Nancy; juin 1973.

[8] ———: *Sur les ensembles de synthèse de l'algèbre de Banach commutative* $L^1(K\backslash G/K)$, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **278** (1974), 417–418.

[9] W. Rudin: Real and Complex Analysis, McGraw Hill Book Company, 1974.

[10] J. Wells: *On the zeros of functions with derivatives in* H_1 *and* H_∞, Canad. J. Math. **22** (1970), 342–347.