Ikawa, M.
Osaka J. Math.
12 (1975), 69-115

PROBLÈMES MIXTES PAS NÉCESSAIREMENT L^2-BIEN POSÉS POUR LES ÉQUATIONS STRICTEMENT HYPERBOLIQUES

MITSURU IKAWA

(Reçu le 24 avril, 1974)

1. Introduction. Soit Ω un domaine de R^n dont la frontière S est compacte et C^∞. Etant donnés $A(x, t: D_x, D_t)$ un opérateur strictement hyperbolique d'ordre m et $B_j(x, t: D_x, D_t), j=1, 2, \cdots, \mu$, des opérateurs au bord d'ordre $m_j \leqslant m-1$ à coefficients appartenant à $\mathcal{B}(\Omega\times(0, \infty))$ et à $\mathcal{B}(S\times(0, \infty))$[1] respectivement, où on désigne $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$ par D_x et D_t.

Considérons le problème mixte

$$(1.1)\qquad \begin{cases} A(x, t: D_x, D_t)u(x, t) = f(x, t) & \text{dans} \quad \Omega\times(0, T) \\ B_j(x, t: D_x, D_t)u(x, t) = g_j(x, t) & \text{sur} \quad S\times(0, T) \\ & j=1, 2, \cdots, \mu \\ (D_t^j u)(x, 0) = h_j(x) & j = 0, 1, 2, \cdots, m-1\,. \end{cases}$$

On suppose que S n'est pas caractéristique de A et des B_j, c'est-à-dire,

$$(1.2)\qquad \begin{cases} A_0(x, t: n(x), 0)\neq 0 & \text{sur} \quad S\times[0, \infty) \\ B_{j0}(x, t: n(x), 0)\neq 0 & \text{sur} \quad S\times[0, \infty) \end{cases}$$

où $n(x)$ désigne la normale extérieure unitaire de S à $x\in S$ et A_0 et B_{j0} signifient les parties principales de A et de B_j. Et plus on pose la condition

$$(1.3)\qquad m_i\neq m_j \quad \text{si} \quad i\neq j\,.$$

Dans cet article nous allons considérer une classe des $\{A, B_j\}$ vérifiant (1.2) et (1.3), pour lesquels le problème mixte (1.1) est bien posé au sens de $\mathcal{E}$, qui a les propriétés suivantes:

(i) *C'est des conditions sur les parties principales de $\{A, B_j\}$ qui déterminent si $\{A, B_j\}$ appartient à la classe. A savoir, la classe est stable pour la*

1) $\mathcal{B}$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables dont toutes les dérivées sont bornées.

perturbation des termes d'ordre inférieur.

(ii) *Les propriétés géométriques de Ω ne prennent pas part à la classe.*

D'abord nous donnons la définition des problèmes bien posés au sens de $\mathcal{E}$.

DÉFINITION. On dit que le problème (1.1) est bien posé au sens de $\mathcal{E}$ lorsque pour toutes les données (h_j, g_j, f) telles que $h_j \in \mathcal{E}(\bar{\Omega})$, $j=0, 1, 2, \cdots, m-1$, $g_j \in \mathcal{E}(S \times [0, \infty))$, $j=1, 2, \cdots, \mu$, et $f \in \mathcal{E}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$, qui vérifient la condition de compatibilité d'ordre infini, il existe une et une seule solution $u(x, t) \in \mathcal{E}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ satisfaisant à (1.1), où $\mathcal{E}(E)$ désigne l'espace de Fréchet des fonctions indéfiniment différentiables définies dans un domaine E, dont la topologie est donnée par les semi-normes

$$|u|_{l,k} = \sum_{|\nu| \leq l} \sup_{x \in K} |D^\nu u(x)|$$

où l est un entier positif et K un sousensemble compact de E.

Nous expliquons la condition de compatibilité. Etant donné A sous la forme

$$A(x, t: D_x, D_t) = D_t^m + \sum_{j=1}^m p_j(x, t: D_x) D_t^{m-j}$$

où $p_j(x, t: D_x)$ est un opérateur différentiel en x d'ordre j. Pour $\{h_j, f\}$ définissons par récurrence $h_{m+l}(x)$, $l=0, 1, \cdots$ par la forme

$$h_{m+l}(x) = -\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (D_t^k p_j)(x, 0: D_x) h_{m+l-j-k}(x) + (D_t^l f)(x, 0).$$

Posons

$$u_p(x, t) = \sum_{j=0}^{m+p-1} \frac{t^j}{j!} h_j(x).$$

On dit que des données $\{h_j, g_j, f\}$ satisfont à la condition de compatibilité d'ordre k lorsque

$$D_t^l B_j u_k(x, t)|_{t=0} = (D_t^l g_j)(x, 0) \quad \text{sur} \quad S, \quad j = 1, 2, \cdots, \mu$$

pour $l=0, 1, 2, \cdots, k$.

Considérons l'équation algébrique par rapport à κ

$$(1.4) \qquad A_0(x, t: n(x)\kappa + \omega, \tau) = 0$$

où $x \in S$, $\omega \in T_x^* = \{\omega; \omega \in R^n, \sum_{i=1}^m n_i(x)\omega_i = 0\}$ et $\tau = \xi - i\eta$, $\eta > 0$. D'après l'hyperbolicité stricte de A on voit que $A_0(x, t: n(x)\kappa + \omega, \tau) \neq 0$ pour tout $\kappa \in R$, $\omega \in T_x^*$ et Im $\tau < 0$. Donc le nombre des racines à partie imaginaire positive de

(1.4) est indépendant de $(x, t\colon \omega, \tau)$. Désignons ce nombre par μ.[2]

Soient $\kappa_j^+(x, t\colon \omega, \tau)$, $j=1, 2, \cdots, \mu$, des racines à partie imaginaire positive de (1.4). Posons

$$A_+(x, t\colon \kappa, \omega, \tau) = \prod_{j=1}^{\mu} (\kappa-\kappa_j^+(x, t\colon \omega, \tau)) \tag{1.5}$$

et

$$\mathcal{R}(x, t\colon \omega, \tau) = \left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{B_{i0}(x, t\colon \kappa, \omega, \tau)\kappa^{j-1}}{A_+(x, t\colon \kappa, \omega, \tau)} d\kappa\right]_{i,j=1,2,\cdots,\mu}. \tag{1.6}$$

où C est un contour dans le plan complexe qui entoure toutes les κ_j^+. La matrice ci-dessus s'appelle *la matrice de Lopatinski*, et on appelle

$$R(x, t\colon \omega, \tau) = \text{dét}\, \mathcal{R}(x, t\colon \omega, \tau) \tag{1.7}$$

le déterminant de Lopatinski. Notons que $R(x, t\colon \omega, \tau)$ est homogène d'ordre $m_0 = \sum_{j=1}^{\mu} m_j - \frac{\mu(\mu-1)}{2}$ en (ω, τ), c'est à-dire,

$$R(x, t\colon \lambda\omega, \lambda\tau) = \lambda^{m_0} R(x, t\colon \omega, \tau) \qquad \forall\lambda>0.$$

Supposons que, au point $(x_0, t_0\colon \omega_0, \xi_0-i0)$, $\kappa_p^+(x, t_0\colon \omega_0, \xi_0)$, $p=1, 2, \cdots, l$[3], sont des racines simples de (1.4). Posons

$$\mathcal{R}_I(x, t\colon \omega, \tau) = \left[\sum_{p=1}^{l} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\kappa-\kappa_p^+|=\delta} \frac{B_{i0}(x, t\colon \kappa, \omega, \tau)\kappa^{j-1}}{A_+(x, t\colon \kappa, \omega, \tau)} d\kappa\right] \tag{1.8}$$

où la constante $\delta>0$ est choisie de telle façon que $\{\kappa; |\kappa-\kappa_j^+|\leq\delta\}$ ne contienne pas d'autres racines de (1.4). Remarquons que $\mathcal{R}_I$ est bien définie dans un voisinage de $(x_0, t_0\colon \omega_0, \xi_0)$. Posons

$$\mathcal{R}_{II}(x, t\colon \omega, \tau) = \mathcal{R}(x, t\colon \omega, \tau)-\mathcal{R}_I(x, t\colon \omega, \tau). \tag{1.9}$$

Nous allons traiter la classe des $\{A, B_j\}$ dont la matrice de Lopatinski satisfait aux conditions suivantes:

CONDITION I.

$R(x, t\colon \omega, \tau)\neq 0$ pour tout $(x, \omega)\in T^*(S)$ $t\in[0, \infty)$, $\operatorname{Im}\tau<0$.

$R(x, t\colon 0, 1)\neq 0$ pour tout $(x, t)\in S\times[0, \infty)$.

CONDITION II. Pour tout $(x_0, t_0\colon \omega_0, \xi_0)$ fixé, on a dans un voisinage de $(x_0, t_0\colon \omega_0, \xi_0)$

---

2) Ce nombre μ est égal à celui des opérateurs au bord que l'on doit poser.

3) Naturellement l dépend de $(x_0, t_0\colon \omega_0, \xi_0)$.

$$\operatorname{rank} \mathcal{R}_{II}(x, t: \omega, \tau) = \mu - l$$
$$\operatorname{rank} \mathcal{R}(x, t: \omega, \xi) = \operatorname{rank} \mathcal{R}_{I}(x, t: \omega, \xi) + \operatorname{rank} \mathcal{R}_{II}(x, t: \omega, \xi).$$

CONDITION III. Soit $R(x_0, t_0: \omega_0, \xi_0)=0$. Alors on trouve des voisinages $\mathcal{U}$ de $(x_0, t_0: \omega_0)$ et $\mathcal{U}_0$ de ξ_0 tels que pour tout $(x, t: \omega) \in \mathcal{U}$ il existe une et une seule racine $\tau=\xi(x, t: \omega)$ de $R(x, t: \omega, \tau)=0$ dans $\mathcal{U}_0$ et sa multiplicité reste constante dans $\mathcal{U}$.

Théorème. *Sous les conditions I, II et III, le problème mixte* (1.1) *est bien posé au sens de $\mathcal{E}$.*

Nous voulons souligner ici que la classe des $\{A, B_j\}$ introduite tout à l'heure contient des problèmes qui ne sont pas nécessairement bien posés au sens de L^2. L'un des exemples plus typiques L^2-mal posés vérifiant les conditions ci-dessus est le problème mixte pour l'équation des ondes avec la condition au limit donnée par une dérivée oblique ([3] et [4]).

Il faut considérer à quel point les conditions sont nécessaires pour que (1.1) soit bien posé au sens de $\mathcal{E}$. A propos de cette question nous allons donner les considérations détaillées dans l'article ultérieur, mais nous notons ici quelques remarques:

(a) Sur la CONDITION III. Le cas des coefficients constants et du demi-espace. S'il existe (ω_0, ξ_0) tel que

$$\mu - \operatorname{rank} \mathcal{R}(\omega_0, \xi_0) < \text{l'ordre du zéro de } R(\omega_0, \tau) \text{ à } \tau=\xi_0,$$

$\{A, B_j\}$ ne reste plus $\mathcal{E}$ bien posé par les perturbations des termes d'ordre inférieur.

(b) Sur la CONDITION II. L'exemple 2 de [5], qui n'est pas bien posé au sens de $\mathcal{E}$, est un des problèmes vérifiant la condition I mais pas la condition II. D'autre part, le problème mixte pour l'équation des ondes avec la condition de dérivée oblique dans le demi-espace est toujours bien posé au sens de $\mathcal{E}$ (voir Tsuji [9]).

Il s'agit que, lorsque la condition II n'a pas lieu, les propriétés géométriques interviennent dans la détermination des problèmes mixtes bien posés au sens de $\mathcal{E}$.

L'auteur désire exprimer les remerciements cordiaux à M. le Professeur H. Kumano-go pour les conseils.

2. Réduction aux problèmes dans le demi-espace

Soit $a(x, t)$ une fonction définie dans un voisinage de l'origine. On définit une fonction $a^\gamma(x, t)$ pour $\gamma>0$ par

$$a^\gamma(x, t) = a(\chi_\gamma(x, t))$$

où $\chi_\gamma(x, t)=(x, t)\chi(|(x, t)|/\gamma)$ et $\chi(l)$ est une fonction à valeurs réelles telle que

$$\chi(l)=\begin{cases}1 & l\leqslant 1\\ 0 & l\geqslant 2\,.\end{cases}$$

Lorsque γ est assez petit, $a^\gamma(x, t)$ est définie pour tout $(x, t)\in R^{n+1}$ et on a

$$a^\gamma(x, t)=a(x, t) \qquad \text{si} \quad |(x, t)|\leqslant\gamma \tag{2.1}$$

$$\sup_{(x,t)\in R^{n+1}}|a^\gamma(x, t)|\leqslant \sup_{|(x,t)|\leqslant 2\gamma}|a(x, t)| \tag{2.2}$$

$$\sup_{(x,t)\in R^{n+1}}|D^\alpha_{x,t}a^\gamma(x, t)|\leqslant C_\alpha\gamma^{1-|\alpha|}\sup_{\substack{|\beta|\leqslant|\alpha|\\ |(x,t)|\leqslant 2\gamma}}|D^\beta_{x,t}a(x, t)|\,. \tag{2.3}$$

Soit $A=\sum a_{\alpha j}(x, t)D^\alpha_x D^j_t$ un opérateur strictement hyperbolique dont les coefficients sont définis dans un voisinage de l'origine. Définissons un opérateur A^γ par

$$A^\gamma(x, t: D_x, D_s)=\sum a^\gamma_{\alpha j}(x, t)D^\alpha_x D^j_t\,, \tag{2.4}$$

alors il est un opérateur différentiel strictement hyperbolique défini dans R^{n+1}. Pour les opérateurs au bord $B_j(x, t: D_x, D_t)$ avec les coefficients donnés dans un voisinage de l'origine définissons $B^\gamma_j(x, t: D_x, D_t)$ par la même manière.

Désignons dès maintenant $(h_j, g_j, f)\in\sum(k; A, B_j, E, t_0)$ lorsque

$$(h_j, g_j, f)\in\prod_{j=1}^{m-1}H^{m+k-j}(E)\times\prod_{j=1}^{\mu}H^{m-m_j+k}(\partial E\times(t_0, \infty))\times H^k(E\times(t_0, \infty))$$

satisfont à la condition de compatibilité d'ordre k pour le domaine E à $t=t_0$.

Supposons que le théorème suivant soit démontré.

Théorème 2.1. *Etant donnés des opérateurs A et B_j dont les coefficients sont définis dans un voisinage de l'origine. Supposons que A et B satisfassent, dans un voisinage de l'origine, aux conditions I, II et III données dans le paragraphe* 1 *en prenant $\Omega=R^n_+=\{(x_1, x');\, x_1>0,\, x'\in R^{n-1}\}$.*

Alors il existe $\gamma>0$ tel que le problème mixte dans le demi-espace

$$\begin{cases}A^\gamma u(x, t)=f(x, t) & \textit{dans}\quad R^n_+\times(0, T)\\ B^\gamma_j(x, t)|_{x_1=0}=g_j(x', t) & j=1, 2, \cdots, \mu\\ (D^j_t u)(x, 0)=h_j(x) & j=0, 1, \cdots, m-1\end{cases} \tag{2.5}$$

admet une et une seule solution $u(x, t)\in H^{m+p-2}(R^n_+\times(0, T))$ pour toutes les données $(h_j, g_j, f)\in\sum(p; A^r, B^r_j, R^n_+, 0)$. Encore plus le problème (2.5) *a une vitesse finie propagatrice.*

Alors du théorème ci-dessus on déduit le théorème de l'existence des solutions dans des espaces de Sobolev, pour domaine général, sous l'hypothèse que la vitesse propagatrice reste bornée lorsque les coefficients de $\{A, B_j\}$ parcourent dans un ensemble borné en vérifiant les conditions I, II et III.

Théorème 2.2. *Pour* $T>0$ *fixé, il existe un entier* $N(T)$[4] *tel qu'il existe une solution* $u(x, t)\in H^{m+p-2}(\Omega\times(0, T))$ *du problème* (1.1) *pour les données* $(h_j, g_j, f)\in\sum(p+N(T);\ A, B_j, \Omega, 0)$ *et* (1.1) *represente un phénomène propagateur avec la vitesse finie.*

Etant donné $x_0\in S$. Supposons que la normale extérieure unitaire de S à x_0 soit $(-1, 0)$ et que S s'exprime dans un voisinage de x_0 par une équation

$$x_1=\varphi(x_2, \cdots, x_n)=\varphi(x').$$

Après le changement de variables Φ

$$\begin{cases} \tilde{x}_1=x_1-\varphi(x') \\ \tilde{x}'=x' \end{cases}$$

$\{A(x, t: D_x, D_t), B_j(x, t: D_x, D_t)\}$ se transforme en $\{\tilde{A}(\tilde{x}, t: D_{\tilde{x}}, D_t), \tilde{B}_j(\tilde{x}, t: D_{\tilde{x}}, D_t)\}$, qui vérifie les conditions I, II et III dans un voisinage $\tilde{\mathcal{V}}$ de l'origine. Si les données (h_j, g_j, f) satisfont à la condition de compatibilité, $(\tilde{h}_j, \tilde{g}_j, \tilde{f})$ les images de (h_j, g_j, f) par Φ la vérifient aussi dans $\tilde{\mathcal{V}}\cap\{t=0\}$.

Grâce au théorème 2.1 on trouve $\gamma>0$ et un voisinage de l'origine $\tilde{\mathcal{V}}'\subset\tilde{\mathcal{V}}$ tels qu'il existe une solution $\tilde{u}(x, t)$ du problème

$$\begin{cases} \tilde{A}^r\tilde{u}=\tilde{f} & \text{dans } \tilde{\mathcal{V}}'\cap R^n_+\times(0, \infty) \\ \tilde{B}^r_j\tilde{u}=\tilde{g}_j & \text{dans } \tilde{\mathcal{V}}'\cap R^{n-1}\times(0, \infty) \\ (D^j_t\tilde{u})(\tilde{x}, 0)=\tilde{h}_j & \text{dans } \tilde{\mathcal{V}}'\cap R^n_+\times\{t=0\}. \end{cases}$$

Alors $u(x, t)$ l'image de $\tilde{u}(x, t)$ par Φ^{-1}, qui est définie dans un voisinage $\mathcal{V}$ de $(x_0, 0)$, satisfait à

$$\begin{cases} Au=f & \text{dans } \mathcal{V}\cap(\Omega\times(0, \infty)) \\ B_ju=g_j & \text{dans } \mathcal{V}\cap(S\times(0, \infty)) \\ D^j_tu|_{t=0}=h_j & \text{dans } \mathcal{V}\cap(\Omega\times\{t=0), \end{cases}$$

où $\mathcal{V}$ dépend de φ et de γ.

Donc on a

Proposition 2.3. *Pour tout* $(x_0, t_0)\in S\times[0, T]$ *on trouve un voisinage* $\mathcal{V}_{(x_0, t_0)}$

4) L'exemple 1 de [5] nous montre que, en general, l'entier $N(T)$ dépend vraiment de A de B, de Ω et de T.

de (x_0, t_0) *dans* R^{n+1} *tel que pour toutes les données* $(h_j, g_j, f)\in\sum(k: A, B_j, \Omega, t_0)$ *il existe une fonction* $u_{(x_0, t_0)}(x, t)\in H^k(\mathcal{V}_{(x_0, t_0)}\cap\Omega\times(t_0, \infty))$ *vérifiant*

$$
(2.6)\qquad \begin{cases} Au_{(x_0, t_0)}(x, t) = f(x, t) & \textit{dans}\quad \mathcal{V}_{(x_0, t_0)}\cap(\Omega\times(t_0, \infty)) \\ B_j u_{(x_0, t_0)}(x, t) = g_j(x, t) & \textit{dans}\quad \mathcal{V}_{(x_0, t_0)}\cap(S\times(t_0, \infty)) \\ D_t^j u_{(x_0, t_0)}(x, t_0) = h_j(x) & \textit{dans}\quad \mathcal{V}_{(x_0, t_0)}\cap(\Omega\times\{t=t_0\})\,. \end{cases}
$$

D'autre part, le fait que la vitesse propagatrice du problème pour $\{\tilde{A}^r, \tilde{B}_j^r\}$ reste bornée lorsque (x_0, t_0) parcourt dans $S\times[0, T]$ se ramène à la vitesse finie du problème (1.1). Cela signifie qu'il suffit de construire locallement des solutions du problème (1.1), c'est-à-dire,

Proposition 2.4. *Supposons que pour tout* $(x_0, t_0)\in S\times[0, T]$ *on trouve un voisinage* $\mathcal{V}_{(x_0, t_0)}$ *de* (x_0, t_0) *dans* R^{n+1} *tel que pour* $(h_j, g_j, f)\in\sum(k: A, B_j, \Omega, t_0)$ *il existe une fonction* $u_{(x_0, t_0)}(x, t)\in H^{m+k-2}(\mathcal{V}_{(x_0, t_0)}\cap(\Omega\times(t_0, T)))$ *satisfaisant* (2.6). *Alors il existe* $\delta_0>0$ *tel que l'on trouve une fonction* $u(x, t)\in H^{m+k-2}(\Omega\times(t_0, t_0+\delta_0))$ *vérifiant* (1.1) *pour* $t\in(t_0, t_0+\delta_0)$. *Et plus* δ_0 *ne dépend pas de* $t_0\in[0, T]$.

Démonstration. Désignons par $v_{\max}$ la vitesse propagatrice du problème pour $\{A, B_j\}$ dans $\Omega\times(0, T)$ et par $\Lambda(x_0, t_0)$ un cône defini par

$$\Lambda(x_0, t_0) = \{(x, t);\ |x_0-x|\leqslant v_{\max}(t_0-t)\}\ .$$

On peut trouver $\delta_0>0$ tel que pour tout $(x, t_0)\in S\times[0, T]$

$$(2.7)\qquad \Lambda(x, t_0+\delta_0)\cap(\Omega\times(t_0, t_0+\delta_0))\subset\mathcal{V}_{(x_0, t_0)}$$

pour certain $x_0\in S$.

Définissons $u(x, t)$ dans $\Omega\times(t_0, t_0+\delta_0)$ par

$$(2.8)\qquad u(x, t) = u_{(x_0, t_0)}(x, t) \qquad \text{dans}\quad \Lambda(x_0, t_0+\delta_0)\cap(\Omega\times(t_0, t_0+\delta_0))$$

et dans $\Omega\times(t_0, t_0+\delta_0)-\bigcup_{x\in S}\Lambda(x, t_0+\delta_0)$ par

$$(2.9)\qquad u(x, t) = \text{la solution du problème de Cauchy pour } A, \text{ dont les données initiales sont } h_j,\ j=0, 1, 2, \cdots, m-1.$$

En tenant compte de la définition de la vitesse propagatrice on voit facilement que $u(x, t)$ est bien définie, qu'elle vérifie (1.1) dans $\Omega\times(t_0, t_0+\delta_0)$ et appartient à $H^{m+k-2}(\Omega\times(t_0, t_0+\delta_0))$. c.q.f.d.

En combinant les propositions 2.3 et 2.4 on montre le théorème 2.2. Etant donné $(h_j, g_j, f)\in\sum(k; A, B_j, \Omega, 0)$. L'existence locale de la solution est assurée par la proposition 2.3, donc la proposition 2.4 nous montre qu'il existe une solution $u_1(x, t)\in H^{m+k-2}(\Omega\times(0, \delta_0))$. Alors d'après $(D_t^j u)(x, \delta_0)\in$

$H^{m+k-j-5/2}(\Omega)$ et $((D_t^j u_1)(x, \delta_0), g_j, f) \in \sum (k-2; A, B_j, \Omega, \delta_0)$. L'application les propositions en prenant $\Omega \times \{t=\delta_0\}$ comme le plan initial donne l'existence d'une fonction $u_2(x, t) \in H^{m+k-4}(\Omega \times (\delta_0, 2\delta_0))$ vérifiant (1.1) dans $\Omega \times (\delta_0, 2\delta_0)$. On continue cette procédure successivement et on a

$$u_j(x, t) \in H^{m+k-2j}(\Omega \times ((j-1)\delta_0, j\delta_0)) .$$

Définissons $u(x, t)$ par

$$u(x, t) = u_j(x, t) \qquad \text{pour} \quad t \in ((j-1)\delta_0, j\delta_0)$$

et on a $u(x, t) \in H^{m+k-2([T/\delta_0])}(\Omega \times (0, T))$. Il est évident qu'elle est la solution désirée de (1.1). Donc le théorème 2.2 est démontré.

Problèmes dans le demi-espace (la démonstration du théorème 2.1)

Nous allons démontrer le théorème 2.1 dans les paragraphes suivants. A propos de l'uniformité de la vitesse propagatrice nous ne ferons pas de considération ou de déscription spéciale, mais on la voit aisement d'après la procédure de la démonstration du théorème 2.1.

Dans la suite, on désigne le demi-espace par

$$R_+^n = \{(x, y); x>0, y \in R^{n-1}\} .$$

3. Notations et des opérateurs pseudo-différentiels avec un paramètre

Pour k une constante réelle posons

$$(3.1) \qquad H^k = \{u(y, t); u \in \mathcal{S}'(R_y^{n-1} \times R_t) \text{ telle que}$$
$$\|u\|_k = (\iint_{R^n} (1+|\omega|^2+\xi^2)^k |\hat{u}(\omega, \xi)|^2 d\omega d\xi)^{1/2} < +\infty\}^{5)}$$

où $\hat{u}(\omega. \xi)$ est la transformée de Fourier de $u(y, t)$. Pour l un entier non négatif et k un nombre réel posons

$$(3.2) \qquad H^{l,k} = \{u(x, y, t); |||u(x, y, t)|||_{l,k}$$
$$= (\sum_{j=0}^{l} \int_0^\infty \|D_x^j u(x, y, t)\|_{l+k-j}^2 dx)^{1/2} < +\infty\} .$$

Etant donné η un nombre réel. Définissons les espaces H_η^k et $H_\eta^{l,k}$ par

$$H_\eta^k = \{u(y, t); e^{-\eta t} u(y, t) \in H^k\}$$

5) $\mathcal{S}$ est l'ensemble de toutes les fonctions définies dans $R_y^{n-1} \times R_t$ à décroissance rapide à l'infini. $\mathcal{S}'$ désigne le dual de $\mathcal{S}$.

$$H_\eta^{l,k} = \{u(x, y, t);\, e^{-\eta t}\, u(y, x, t) \in H^{l,k}\}\ .$$

Soit $\mathcal{P}(y, t\colon \omega, \tau)$ une fonction de $C^\infty(R_y^{n-1}\times R_t\times R_\omega^{n-1}\times C_-)$ à valeurs $k\times k$ matrices, où

$$C_- = \{\xi - i\eta;\, \eta>0\}\ .$$

On dit que $\mathcal{P}(y, t\colon \omega, \tau)$ appartient à S^m lorsqu'il a lieu

$$|\partial_{y,t}^\alpha D_{\omega,\tau}^\beta \mathcal{P}(y, t\colon \omega, \tau)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(|\omega|^2+|\tau|^2)^{(m-|\beta|)/2} \tag{3.3}$$

pour tout $(y, t\colon \omega, \tau)\in R_y^{n-1}\times R_t\times R_\omega^{n-1}\times C_-$.

Pour $\mathcal{P}\in S^m$ on définit un opérateur pseudo-différentiel $\mathcal{P}(y, t\colon D_y, D_t - i\eta)$ par

$$\mathcal{P}(y, t\colon D_y, D_t-i\eta)u(y, t) = \iint e^{i(\omega y+\tau t)}\mathcal{P}(y, t\colon \omega, \xi-i\eta)\hat{u}(\omega, \xi)\,d\omega\, d\xi$$

pour $u(y, t)\in \mathcal{S}$.

Nous notons quelques propriétés fondamentaux des opérateurs pseudo-différentiels sans donner des démonstrations.

Lemme 3.1. (i) *Soient* $\mathcal{P}\in S^m$ *et* $Q\in S^{m'}$. *Alors*

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}(y, t\colon D_y, D_t-i\eta)Q(y, t\colon D_y, D_t-i\eta)\\ &= \sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}(\partial_{\omega,\tau}^\alpha \mathcal{P})(D_{y,t}^\alpha Q)(y, t\colon D_y, D_t-i\eta) + \mathcal{R}_N(y, t\colon D_y, D_t-i\eta)\end{aligned}$$

où $\mathcal{R}_N\in S^{m+m'-N}$.

(ii) *Pour* $\mathcal{P}\in S^m$, *il existe* $\mathcal{P}^\sharp\in S^m$ *tel qu'il a lieu*

$$\begin{aligned}&(\mathcal{P}(y, t\colon D_y, D_t-i\eta)u(y, t), v(y, t))\\ &\quad= (u(y, t), \mathcal{P}^\sharp(y, t\colon D_y, D_t-i\eta)v(y, t)) \qquad \forall u, v\in \mathcal{S}\ .\end{aligned}$$

Et plus on a l'expansion suivante :

$$\mathcal{P}^\sharp(y, t\colon \omega, \tau) = \sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\partial_{y,t}^\alpha D_{\omega,\tau}^\alpha {}^*\mathcal{P}(y, t\colon \omega, \tau) + \mathcal{R}_N(y, t\colon \omega, \tau)$$

où ${}^*\mathcal{P}(y, t\colon \omega, \tau)$ *désigne la matrice adjointe de* $\mathcal{P}(y, t\colon \omega, \tau)$ *et* $\mathcal{R}_N\in S^{m-N}$.

(iii) *Si* $\mathcal{P}\in S^0$, *il existe une constante* $C_k>0$ *telle que*

$$\|\mathcal{P}(y, t\colon D_y, D_t-i\eta)u(y, t)\|_k \leqslant C_k\|u\|_k \qquad \forall u\in \mathcal{S}\ .$$

(iv) *Si* $\mathcal{P}\in S^{-1}$, *il existe une constante* $C_k>0$ *telle que*

$$\|\mathcal{P}(y, t\colon D_y, D_t-i\eta)u(y, t)\|_k \leqslant C_k\eta^{-1}\|u\|_k \qquad \forall u\in \mathcal{S}\ .$$

(v) *Soit* $\mathcal{P}(y, t\colon \omega, \tau)\in S^1$. *Supposons que*

$$\inf_{(y,t,\omega,\xi)\in R^{2n}} \lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{Re}\, \frac{1}{\lambda}\mathcal{P}(y,\, t\colon \lambda\omega,\, \lambda\xi - i\lambda\eta) \geqslant 2c(\eta)\,.$$

Alors il existe une constante $C>0$ telle que

$$\mathrm{Re}\,(\mathcal{P}(y,\, t\colon D_y,\, D_t - i\eta)u,\, u) \geqslant c(\eta)\|u\|^2 - C\|u\|^2\,.$$

Disons que un ensemble Γ de $R^n_{\omega,\xi}$ est conique lorsque $(\omega,\, \xi)\in\Gamma$ entraine $(\lambda\omega,\, \lambda\xi)\in\Gamma$ pour tout $\lambda\geqslant 1$. Pour deux ensembles coniques Γ_i, $i=1, 2$, $\Gamma_1\subset\subset\Gamma_2$ signifie qu'il existe $\varepsilon_0>0$ tel que pour tout $(\omega_0,\, \xi_0)\in\Gamma_1$ $\left\{(\omega,\, \xi);\ \left|\frac{(\omega,\, \xi)}{|(\omega,\, \xi)|} - \frac{(\omega_0,\, \xi_0)}{|(\omega_0,\, \xi_0)|}\right| \leqslant \varepsilon_0\right\}\subset\Gamma_2$.

Lemme 3.2. *Soient Γ_1 et Γ_2 des ensembles coniques tels que $\Gamma_1\subset\subset\Gamma_2$. Supposons que $\mathcal{P}(y,\, t\colon \omega,\, \tau)$ et $Q_i(y,\, t\colon \omega,\, \tau)$, $i=1, 2$, appartiennent à S^∞ et que*

$$Q_1(y,\, t\colon \omega,\, \tau) = Q_2(y,\, t\colon \omega,\, \tau) \qquad \forall(\omega,\, \tau)\in\Gamma_2 - i(0,\, \infty)\,.$$

Alors pour t, $s\in R$ quelconques il existe $C_{t,s}$ tel que

$$\|Q_1\mathcal{P}u - Q_2\mathcal{P}u\|_t \leqslant C_{t,s}\|u\|_s$$

pour toute $u(y,\, t)$ satisfaisant à

$$\mathrm{supp}\ \hat{u}(\omega,\, \tau)\subset\Gamma_1\,.$$

Quant au calcul des opérateurs pseudo-différentiels, lorsque l'on considère des fonctions ayant le support de la transformée de Fourier contenu dans un ensemble conique Γ_1, si seulement les symboles des opérateurs sont définis dans un voisinage conique Γ_2 de Γ_1 nous allons traiter les opérateurs comme ils ont des symbole définis dans tout espace sans décrire des prolongations des symoles. En effet, grâce au lemme au-dessus la différence des prolongations des symboles au dehors de Γ_2 peut être considérée comme un opérateur appartenant à $S^{-\infty}$.

4. Propriétés fondamentaux de $\mathcal{M}$ (d'après Kreiss [6])

Nous allons traiter le problème

$$(4.1)\qquad \begin{cases} Au(x,\, y,\, t) = f(x,\, y,\, t) & \text{dans}\quad R^n_+\times R_+ \\ B_j u(x,\, y,\, t)|_{x=0} = g_j(y,\, t) & j = 1, 2, \cdots, \mu \\ (D_t^j u)(x,\, y,\, 0) = h_j(x,\, y) & j = 0, 1, 2, \cdots, m-1 \end{cases}$$

par des systèmes équivaux.

Soit

$$A = a_0(x,\, y,\, t)D_x^m + a_1(x,\, y,\, t\colon D_y,\, D_t)D_x^{m-1} + \cdots + a_m(x,\, y,\, t\colon D_y,\, D_t)\,.$$

Alors $\{a_i(x, y, t: \omega, \tau)\}_{x\in R_+}$ est un ensemble borné de S^i.
Dénotons $(1+|\omega|^2+|\tau|^2)^{1/2}$ par λ et $\lambda(D_y, D_t-i\eta)$ par Λ.

Posons

$$u_i(x, y, t) = \Lambda^{m-i} D_x^{i-1} u(x, y, t)\,, \qquad i = 1, 2, \cdots, m\,,$$

et

$$U(x, y, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, y, t) \\ u_2(x, y, t) \\ \vdots \\ u_m(x, y, t) \end{pmatrix}.$$

Alors si l'on prend

$$(4.2) \qquad \mathcal{M}(x, y, t: \omega, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & i\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\lambda & \cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & i\lambda \\ -ia_m\lambda^{1-m}/a_0 & -ia_{m-1}\lambda^{2-m}/a_0 & \cdots\cdots & -ia_1/a_0 \end{pmatrix}$$

$A(x, y, t: D_x, D_y, D_t-i\eta)u(x, y, t)=f(x, y, t)$ se réduit à l'équation

$$(4.3) \qquad \partial_x U = \mathcal{M}(x, y, t: D_t, D_t-i\eta)\, U+F$$

où

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ if/a_0 \end{pmatrix}.$$

Supposons que B s'écrive

$$B_j(y, t: \kappa, \omega, \tau) = \sum_{k=1}^{m_j+1} b_{jk}(y, t: \omega, \tau)\kappa^{k-1}\,.$$

Si l'on définit une $\mu\times m$ matrice

$$\mathcal{B}(y, t: \omega, \tau) = [b_{jk}(y, t: \omega, \tau)\,\lambda^{-m_j+k-1}]_{\substack{j=1, 2, \cdots, \mu \\ k=1, 2, \cdots, m}}$$

en posant $b_{jk}=0$ pour $k\geqslant m_j+2$, alors $\mathcal{B}\in S^0$ et

$$B_j(y, t: D_x, D_y, D_t-i\eta)u(x, y, t)|_{x=0} = g_j(y, t) \qquad j = 1, 2, \cdots, \mu$$

sont équivaux à

$$\{\mathcal{B}(y, t: D_y, D_t-i\eta)+\mathcal{B}'_{-1}\}\, U(0, y, t) = G(y, t) \tag{4.4}$$

où $\mathcal{B}'_{-1}=[[\Lambda^{-m_j+k-1}, b_{jk}(y, t: D_y, D_t-i\eta)]]_{j,k}$ et

$$G(y, t) = \begin{pmatrix} \Lambda^{m-m_1-1}g_1(y, t) \\ \Lambda^{m-m_2-1}g_2(y, t) \\ \vdots \\ \Lambda^{m-m_\mu-1}g_\mu(y, t) \end{pmatrix}.$$

Désignons par $\mathcal{M}_0$ la partie principale de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire,

$$\mathcal{M}_0(x, y, t: \omega, \tau) = \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\mathcal{M}(x, y, t: h\omega, h\tau)\,,$$

et posons

$$\mathcal{M}_1(x, y, t: \omega, \tau) = \mathcal{M}(x, y, t, \omega, \tau)-\mathcal{M}_0(x, y, t: \omega, \tau)\,.$$

On résume quelques résultats qui sont entrainés immediatement des considérations de Kreiss [6].

En posant $\zeta=(\omega, \xi)\in R^n$ nous désignons souvent

$$\mathcal{M}_0(x, y, t: \omega, \xi-i\eta) \text{ comme } \mathcal{M}_0(x, y, t: \zeta, \eta)\,,$$

et dès maintenant on désigne $\dfrac{\zeta}{|\zeta|}$ et $\dfrac{\eta}{|\zeta|}$ par ζ' et. η'.

Lemme 4.1. *Pour tout $\zeta_0\neq 0$ fixé, il existe une matrice $\mathcal{I}_0$ non singulière telle que*

$$\mathcal{I}_0\mathcal{M}_0(0, 0, 0: \zeta_0, 0)\,\mathcal{I}_0^{-1} = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & M_r \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

et M_j, $j=1, 2, \cdots, r$, ont les propriétés suivantes:

(i)
$$M_j = \begin{pmatrix} \kappa_j & i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa_j & i & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \ddots & \ddots & i \\ \cdots & \cdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \kappa_j \end{pmatrix}$$

(ii) $\qquad \kappa_i \neq \kappa_j \qquad$ *si* $i \neq i$.[6]

Désignons l'ordre de la matrice M_j par $s(j)$.

Lemme 4.2. *Il existe une matrice* $\mathcal{T}_0(x, y, t: \zeta, \eta)$ *définie dans un voisinage de* $(0, 0, 0, \zeta_0, 0)$ *qui est indéfiniment différentiable en* (x, y, t) *et analytique en* (ζ, η), *telle que*

$$(4.6) \qquad \mathcal{T}_0(x, y, t: \zeta, \eta)\mathcal{M}_0(x, y, t: \zeta, \eta)\mathcal{T}_0^{-1}(x, y, t: \zeta, \eta)$$
$$= \begin{pmatrix} M_1(x, y, t: \zeta, \eta) & & & 0 \\ & M_2(x, y, t: \zeta, \eta) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_r(x, y, t: \zeta, \eta) \end{pmatrix}$$

et au point $(0, 0, 0: \zeta_0, 0)$ M_j *sont indentiques à celles du lemme précédent.*

Supposons que

pour $j=1, 2, \cdots, l_1$ $s(j)=1$, $\mathrm{Re}\, \kappa_j(0, 0, 0: \zeta_0, 0)=0$
et $\mathrm{Re}\, \kappa_j(0, 0, 0: \zeta_0, \eta)<0$ si $\eta>0$,
pour $j=l_1+1, l_1+2, \cdots, l_2$ $s(j)=1$, $\mathrm{Re}\, \kappa_j(0, 0, 0: \zeta_0, 0)<0$
pour $j=l_2+1, l_2+2, \cdots, l_3$ $s(j)=1$, $\mathrm{Re}\, \kappa_j(0, 0, 0: \zeta_0, 0)=0$,
et $\mathrm{Re}\, \kappa_j(0, 0, 0: \zeta_0, \eta)>0$ si $\eta>0$,
pour $j=l_3+1, l_3+2, \cdots, l_4$ $s(j)=1$, $\mathrm{Re}\, \kappa_j(0, 0, 0: \zeta_0, 0)>0$,
pour $j=l_4+1, l_4+2, \cdots, l_5$ $s(j)\geqslant 2$, $\mathrm{Re}\, \kappa_j(0, 0, 0: \zeta_0, 0)=0$,
pour $j=l_5+1, l_5+2, \cdots, l_6$ $s(j)\geqslant 2$, $\mathrm{Re}\, \kappa_j(0, 0, 0: \zeta_0, 0)<0$,
pour $j=l_6+1, l_6+2, \cdots, l_7$ $s(j)\geqslant 2$, $\mathrm{Re}\, \kappa_j(0, 0, 0: \zeta_0, 0)>0$.

Soit $P_j(x, y, t: \zeta, \eta)$ la projection sur l'espace propre de M_j, c'est-à-dire,

$$P_j(x, y, t: \zeta, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\kappa_j - z| = \delta} (z - \mathcal{M}_0(x, y, t: \zeta, \eta))^{-1} dz$$

En considérant $M_j(0, 0, 0: |\zeta|\zeta_0, |\zeta|\eta')$ comme une fonction de $|\zeta|$ et de η', on peut la dévelloper comme suit:

$$M_j(0, 0, 0: |\zeta|\eta_0, |\zeta|\eta')$$
$$= |\zeta|(M_j(0, 0, 0: \zeta_0, 0)+\eta' N_j(\zeta_0)+0(\eta'^2))$$

où

6) Les valeurs propres de $\mathcal{M}_0(x, y, t: \zeta, \eta)$ sont égals aux racines κ de $A_0(x, y, t: \kappa, i\zeta)=0$.

$$N_j(\zeta_0)=\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12}\cdots\cdots n_{1s} \\ n_{21} & n_{22}\cdots\cdots n_{2s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ n_{s1} & n_{s2}\cdots\cdots n_{ss}\end{pmatrix},\quad s=s(j),$$

et on a

Lemme 4.3. *Pour $j=1, 2, \cdots, l_1, l_2+1, \cdots, l_3, l_4+1, \cdots, l_5$, tous les éléments de $N_j(\zeta_0)$ sont réels et il existe une constante $c>0$ telle que*

$$|n_{s1}|\geqslant c\,.$$

Et plus les valeurs propres $\kappa_{j\nu}(0, 0, 0: |\zeta|\zeta_0, \eta)$, $\nu=1, 2, \cdots, s(j)$, de $M_j(0, 0, 0: |\zeta|\zeta_0, \eta)$ sont à la forme suivante

$$\begin{aligned}&\kappa_{j\nu}(0, 0, 0: |\zeta|\zeta_0, \eta)\\ &=|\zeta|\kappa_j(0, 0, 0: \zeta_0, 0)+|\zeta|^{(s-1)/s}(in_{s1}\eta)^{1/s}+0(|\zeta|^{(s-2)/s}),\end{aligned}$$

donc pour $\eta>0$ M_j a

$$(4.7)\qquad \rho(j)=\begin{cases} s/2 & s\equiv 0(2) \\ (s-1)/2 \quad si & s\equiv 1(2) \ \text{ et } \ n_{s1}>0 \\ (s+1)/2 & s\equiv 1(2) \ \text{ et } \ n_{s1}<0\end{cases}$$

valeurs propres κ à partie reélle négative.

Proposition 4.4. *Pour $j=l_4+1, l_4+2, \cdots, l_5$, on peut trouver une matrice symétrique $R_j(x, y, t: \zeta, \eta)\in S^0$ de la forme*

$$(4.8)\qquad R_j(x, y, t: \zeta', \eta')=(D_j+E_j)-i\eta' F_j\,,$$

$$(4.9)\qquad D_j=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{1s} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{1s} & d_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & d_{1s} & d_{2s} & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{1s} & d_{2s} & d_{3s} & \cdots & d_{s-1s} & d_{ss}\end{pmatrix}$$

$$(4.10)\qquad F_j=\begin{pmatrix} 0 & -f_{12} & 0 & & & \\ f_{12} & 0 & -f_{23} & & 0 & \\ 0 & f_{23} & 0 & \ddots & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & & -f_{s-1s} \\ & & & & f_{s-1s} & 0\end{pmatrix}$$

où les élément de D_j et de F_j sont des constantes réelles et tous les éléments de *de* $E=[e_{lk}]_{l,k=0,2,\cdots,s(j)}$ *sont* C^∞ *et ils ont l'estimation*

$$(4.11)\qquad |e_{lk}(x, y, t: \zeta', \eta')| \leqslant C|\zeta'-\zeta_0| ,$$

et R_j *vérifie*

$$(4.12)\qquad \operatorname{Re} R_j(x, y, t: \zeta, \eta) M_j(x, y, t:, \zeta, \eta) \geqslant \eta I$$

pour (ζ, η) *tel que* $0<\eta/|\zeta|<\eta_0$.

REMARQUE. Il est très profitable de décrire brièvement la procédure de la construction de R_j. Pourvu que $n_{s1}d_{1s}\geqslant 2$ on peut choisir D_j arbtrairement sous la forme (4.9). Et puis on n'a qu'à choisir $f_{jj+1}=d^{j^2}$, $j=1, 2, \cdots, s-1$, pour une constante $d>0$ suffisamment large. E_j est déterminée, de telle façon que (4.11) ait lieu, par M_j et D_j en résolvant une équation linéaire.

5. Estimations au bord des solutions

Lemme 5.1. *Soient* $\beta_j(\tau)$, $j=1, 2, \cdots, h$, *des colonne vecteurs de longueur* h. *Pour* $j=1, 2, \cdots, l$, $\beta_j(\tau)$ *sont analytiques en* τ *et pour* $j=l+1, l+2, \cdots, h$, $\beta_j(\tau)$ *ont l'expansion de Puiseux.*

Si rank $[\beta_j(\tau_0)]_{j=1,2,\cdots,l}=l-\theta$, *l'ordre du zéro de* $g(\tau)=\text{dét}\,([\beta_j(\pi)]_{j=1,2,\cdots,h})$ *au point* τ_0 *est au moins* θ *et lorsqu'il a lieu*

$$(5.1)\qquad \beta_j(\tau_0)=\sum_{k=\theta+1}^{l}\alpha_{jk}\beta_k(\tau_0) \qquad j=1, 2, \cdots, \theta ,$$

on a une expansion

$$(5.2)\qquad g(\tau)=(\tau-\tau_0)^\theta\Big\{\text{dét}\Big[\frac{\partial\beta_1}{\partial\tau}-\sum_{k=\theta+1}^{l}\alpha_{1k}\frac{\partial\beta_k}{\partial\tau}, \cdots , \frac{\partial\beta_\theta}{\partial\tau}-\sum_{k=\beta+1}^{l}\alpha_{\theta k}\frac{\partial\beta_k}{\partial\tau}, \beta_{\theta+1}, \cdots, \beta_h\Big](\tau_0)+0(\tau-\tau_0)^q\Big\}$$

où q *est une constante positive.*

Démonstration. Sans géner la généralité il suffit de montrer (5.2) sous l'hypothèse que (5.1) a lieu. D'après l'hypothèse on a pour $j=1, 2, \cdots, l$,

$$\beta_j(\tau)=\beta_j(\tau_0)+(\tau-\tau_0)\frac{\partial\beta_j}{\partial\tau}(\tau_0)+0(\tau-\tau_0)^2 ,$$

et pour $j=l+1, l+2, \cdots, h$,

$$\beta_j(\tau)=\beta_j(\tau_0)+0(\tau-\tau_0)^{q_j}, \qquad q_j>0 .$$

$$g(\tau)=\text{dét}\Big[\beta_1(\tau_0)+(\tau-\tau_0)\frac{\partial\beta_1}{\partial\tau}(\tau_0)+0(\tau-\tau_0)^2,\cdots$$

$$\cdots,\beta_l(\tau_0)+(\tau-\tau_0)\frac{\partial\beta_l}{\partial\tau}(\tau_0)+0(\tau-\tau_0)^2,$$

$$\beta_{l+1}(\tau_0)+0(\tau-\tau_0)^{q_{l+1}},\cdots,\beta_k(\tau_0)+0(\tau-\tau_0)^{q_k}\Big]$$

$$=\text{dét}\Big[(\tau-\tau_0)\Big(\frac{\partial\beta_1}{\partial\tau}-\sum\alpha_{1k}\frac{\partial\beta_k}{\partial\tau}\Big)(\tau_0)+0(\tau-\tau_0)^2,\cdots$$

$$\cdots,(\tau-\tau_0)\Big(\frac{\partial\beta_\theta}{\partial\tau}-\sum\alpha_{\theta k}\frac{\partial\beta_k}{\partial\tau}\Big)(\tau_0)+0(\tau-\tau_0)^2,\ \beta_{\theta+1}(\tau_0)+0(\tau-\tau_0),$$

$$\cdots,\beta_l(\tau_0)+0(\tau-\tau_0),\ \beta_{l+1}(\tau_0)+0(\tau-\tau_0)^{q_{l+1}},\cdots$$

$$\cdots,\beta_k(\tau_0)+0(\tau-\tau_0)^{q_k}\Big]$$

$$=(\tau-\tau_0)^\theta\Big\{\text{dét}\Big[\Big(\frac{\partial\beta_1}{\partial\tau}-\sum\alpha_{1k}\frac{\partial\beta_k}{\partial\tau}\Big)(\tau_0),\cdots,\Big(\frac{\partial\beta_\theta}{\partial\tau}-\sum\alpha_{\theta k}\frac{\partial\beta_k}{\partial\tau}\Big)(\tau_0),$$

$$\beta_{\theta+1}(\tau_0),\cdots,\beta_k(\tau_0)\Big]+0(\tau-\tau_0)^q\Big\}\quad q>0\,.$$

c.q.f.d.

Nous introduisons des notation pour désigner des matrices. Supposons que pour chaque (i, j), h_{ij} soit un colonne vecteur de longueur k. On désigne par

$$H=[h_{ij}]_{\substack{I=\{i_1,i_2,\cdots,i_p\}\\ j=1,2,\cdots,f(i_l)}}$$

une $k\times\sum_{q=1}^{p}f(i_q)$ matrice définie par

$$H=[h_{i_11}h_{i_12}\cdots h_{i_1f(i_1)}h_{i_21}h_{i_22}\cdots h_{i_pf(i_p)}]\,.$$

Soit h_i un colonne vecteur de longueur k avec un indice i. On dénote pour un sousensemble des indices $I=\{i_1,\cdots,i_p\}$ par $H=[h_i]_{i\in I}$ une matrice $k\times p$

$$H=[h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_p}]\,.$$

Nous allons maintenant considérer la matrice et le déterminant de Lopatinski. Désignons par $B_{jk}(y, t\colon\omega, \tau)$ un colonne vecteur de longueur μ défini par

$$B_{jk}=\begin{pmatrix}B_1^{(k-1)}(y,t\colon\kappa_j,\omega,\tau)\\ B_2^{(k-1)}(y,t\colon\kappa_j,\omega,\tau)\\ \vdots\\ B_\mu^{(k-1)}(y,t\colon\kappa_j\ \omega,\tau)\end{pmatrix}$$

où $B_j^{(k-1)}=\partial_\kappa^{k-1}B_j(y, t\colon\kappa, \omega, \tau)$.

Alors par la définition de la matrice de Lopatinski on a

$$\mathcal{R}(0, 0: \zeta_0, 0) = [B_{jk}(0, 0: \zeta_0, 0)]_{\substack{j=1,2,\cdots,l_2,l_4+1,\cdots,l_6 \\ k=1,2,\cdots,\rho(j)}} \tag{5.3}$$

$$\mathcal{R}_I(0, 0: \zeta_0, 0) = [B_{11}B_{21}\cdots B_{l_{21}}, 0, 0\cdots 0] \tag{5.4}$$

et

$$\mathcal{R}_{II}(0, 0: \zeta_0, 0) = [0, 0\cdots 0, B_{jk}(0, 0: \zeta_0, 0)]_{\substack{j=l_4+1,\cdots,l_6 \\ k=1,2,\cdots,\rho(j)}}. \tag{5.5}$$

D'après la condition II, si $R(y, t: \zeta, 0)=0$, on a nécessairement rank $\mathcal{R}_I(y, t: \zeta, 0) \leqslant l_2-1$. Cela signifie que les points (y, t, ζ) tels que $R(y, t: \zeta, 0)=0$ coïncident avec ceux où le déterminant de Gramme des vecteurs $B_{11}, \cdots, B_{l_{21}}$ devient null. Grâce à la condition III on a une et une seule racine $\xi(y, t: \omega)$ de $R(y, t: \zeta, 0)=0$ dans un voisinage de ξ_0, qui est aussi le zéro du déterminant de Gramme de $\{B_{11}, \cdots, B_{l_{21}}\}$. D'autre part, le zéro du déterminant de Gramme est C^∞ en (y, t) et analytique en ζ. Donc on a vu que $\xi(y, t: \omega)$ est C^∞ en (y, t) et analytique en ω. Et plus l'ordre du zéro de $R(y, t: \omega, \tau)$ à $\tau=\xi\,(y, t: \omega)$ est θ pour tout $(y, t, \omega)\in\mathcal{U}$ un voisinage de $(0, 0, \omega_0)$. Donc on en déduit en tenant compte de la condition II

$$\text{rank}\, \mathcal{R}_I(y, t: \omega, \xi(y, t: \omega)) = l_2-\theta \qquad \forall(y, t, \omega)\in\mathcal{U}\,. \tag{5.6}$$

Supposons que $B_{\theta+11}(0, 0: \omega_0, \xi_0), \cdots, B_{l_{21}}(0, 0: \omega_0, \xi_0)$ soient linéairement indépendants. Alors nous pouvons supposer que

(5.7) $B_{\theta+11}(y, t: \omega, \xi(y, t: \omega)), \cdots, B_{l_{21}}(y, t: \omega, \xi(y, t, \omega))$ sont aussi linéairement indépendants pour tout $(y, t, \omega)\in\mathcal{U}$

En combinant (5.6) et (5.7) on a

$$B_{j1}(y, t: \omega, \xi(y, t: \omega)) = \sum_{k=\theta+1}^{l_2} \alpha_{jk}(y, t: \omega) B_{k1}(y, t: \omega, \xi(y, t: \omega)) \tag{5.8}$$

$$j = 1, 2, \cdots, \theta\,.$$

Il est immédiat de voir

$$\text{dét}\left[\frac{\partial B_{11}}{\partial\tau} - \sum \alpha_{1k}\frac{\partial B_{k1}}{\partial\tau}, \cdots, \frac{\partial B_{\theta 1}}{\partial\tau} - \sum \alpha_{\theta k}\frac{\partial B_{k1}}{\partial\tau}, \right. \tag{5.8}$$

$$\left. B_{\theta+11}\cdots B_{l_6\rho(l_6)}\right](0, 0: \omega_0, \xi_0) \neq 0$$

par l'application du lemme 5.1 en tenant compte de (5.8) et du fait que l'ordre du zéro de $R(y, t: \omega, \tau)$ est θ.

Posons

$$(5.10)\qquad \mathcal{T}_0(x, y, t\colon \omega, \tau)^{-1} = [T_{ij}(x, y, t\colon \zeta, \eta)]_{\substack{i=1,2,\cdots,l_7\\ l=1,2,\cdots,s(i)}}$$

alors T_{ij}, qui est un colonne vecteur de longueur m, est indéfiniment différentiable en (x, y, t) et analytique en (ω, τ) et pour $i=1, 2, \cdots, l_4$,

$$(5.11)\qquad T_{i1}(x, y, t\colon \omega, \tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ \kappa_i(x, y, t\colon \omega, \tau)\lambda^{-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \kappa_i(x, y, t\colon \omega, \tau)^{m-1}\lambda^{-m+1} \end{pmatrix}$$

et pour $i \geqslant l_4$,

$$(5.12)\qquad T_{ij}(0, 0, 0\colon \zeta_0, 0) = \partial_\kappa^{j-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \kappa \\ \kappa^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \kappa^{m-1} \end{pmatrix}_{\kappa=\kappa_i(0, 0, 0\colon \zeta_0, 0)}$$

Posons

$$I^- = \{(i, j)\,; i = 1, 2, \cdots, l_7 \text{ tel que } \rho(i) > 1, \\ \text{et } j = 1, 2, \cdots, \rho(i)\}$$

et

$$I^+ = \{(i, j)\,; i \in \{1, 2, \cdots, l_7\},\quad j = 1, 2, \cdots, s(i)\} - I^- .$$

Définissons

$$(5.13)\qquad (\mathcal{T}_0(x, y, t\colon \zeta, \eta)^{-1})^- = [T_{ij}(x, y, t\colon \zeta, \eta)]_{(i,j)\in I^-}$$

et

$$(\mathcal{T}_0(x, y, t\colon \zeta, \eta)^{-1})^+ = [T_{ij}(x, y, t\colon \zeta, \eta)]_{(i,j)\in I^+} .$$

Notons que $(\mathcal{T}_0^{-1})^-$ est $m\times\mu$ matrice, parce que $\sum_{i=1}^{l_7} \rho(i)=\mu$. On définit une $\mu\times\mu$ matrice $\tilde{\mathcal{R}}(y, t\colon \omega, \tau)$ par

$$(5.14)\qquad \tilde{\mathcal{R}}(y, t\colon \omega, \tau) = \mathcal{B}(y, t\colon \omega, \tau)(\mathcal{T}_0(0, y, t\colon \omega, \tau)^{-1})^- .$$

Si l'on pose $\tilde{\mathcal{R}}=[R_j]_{j=1,2,\cdots,\mu}$, grâce à (5.11) on a

$$(5.15)\qquad R_j(y, t\colon \omega, \tau) = B_{j1}(0, y, t\colon \omega, \tau) \qquad j = 1, 2, \cdots, l_2$$

et d'après (5.5), (5.11) et (5.12)

$$(5.16)\qquad \tilde{\mathcal{R}}(0, 0\colon \zeta_0, 0) = \mathcal{R}(0, 0\colon \zeta_0, 0) .$$

La relation (5.8) nous donne

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(y,\, t\colon \omega,\, \tau) &= \operatorname{dét} \tilde{\mathscr{R}}(y,\, t\colon \omega,\, \tau) \\
&= (\tau-\xi(y,\, t\colon \omega))^{\theta}\Big\{\operatorname{dét}\Big[\frac{\partial B_{11}}{\partial\tau}-\sum \alpha_{1k}\frac{\partial B_{k1}}{\partial\tau},\, \cdots \\
&\quad \cdots,\, \frac{\partial B_{\theta 1}}{\partial\tau}-\sum \alpha_{\theta k}\frac{\partial B_{k1}}{\partial\tau},\, R_{\theta+1}\cdots R_{\mu}\Big](y,\, t\colon \omega,\, \xi(y,\, t\colon \omega)) \\
&\quad +(\tau-\xi(y,\, t\colon \omega))^{q}\Big\} \qquad q>0\,.
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après

$$\begin{aligned}
&\operatorname{dét}\Big[\frac{\partial B_{11}}{\partial\tau}-\sum \alpha_{1k}\frac{\partial B_{k1}}{\partial\tau},\, \cdots,\, \frac{\partial B_{\theta 1}}{\partial\tau}-\sum \alpha_{\theta k}\frac{\partial B_{k1}}{\partial\tau},\, B_{\theta+1},\, \cdots \\
&\quad \cdots,\, B_{l_6 p(l_6)}\Big](0,\, 0\colon \omega_0,\, \zeta_0) \\
&= \operatorname{dét}\Big[\frac{\partial B_{11}}{\partial\tau}-\sum \alpha_{1k}\frac{\partial B_{k1}}{\partial\tau},\, \cdots,\, \frac{\partial B_{\theta 1}}{\partial\tau}-\sum \alpha_{\theta k}\frac{\partial B_{k1}}{\partial\tau},\, R_{\theta+1},\, \cdots \\
&\quad \cdots,\, R_{\mu}\Big](0,\, 0\colon \omega_0,\, \xi_0)\,,
\end{aligned}$$

qui est différent du zéro. Donc on a

Lemme 5.2. *Pour* $(y,\, t,\, \omega)\in\mathcal{U}$ $\tilde{R}(y,\, t\colon,\, \omega,\, \tau)$ *a un seul zéro* $\tau=\xi(y,\, t\colon \omega)$ *dans* $\mathcal{U}_0$, *qui est d'order* θ, *et plus on a*

(5.17) $\quad \operatorname{rank} \tilde{\mathscr{R}}(y,\, t\colon \omega,\, \xi(y,\, t\colon \omega)) = \mu-\theta$

(5.18) $\quad \operatorname{rank} (\tilde{\mathscr{R}}-\mathscr{R}_{I}) = \mu-l_2\,.$

Désignons par $R_{ij}(y,\, t\colon \omega,\, \tau)$ le $(i,\, j)$ cofacteur de la matrice $\tilde{\mathscr{R}}(y,\, t\colon \omega,\, \tau)$.

Lemme 5.3. *Si* $j\leqslant l_2$, *pour tout* i

(5.19) $\quad R_{ij}(y,\, t\colon \omega,\, \tau) = (\tau-\xi(y,\, t\colon \omega))^{\theta-1}Q_{ij}(y,\, t\colon \omega,\, \tau)$

où $Q_{ij}\in S^{-\theta+1}$, *et si* $j\geqslant l_2+1$, *pour tout* i

(5.20) $\quad R_{ij}(y,\, t\colon \omega,\, \tau) = (\tau-\xi(y,\, t\colon \omega))^{\theta}Q_{ij}(y,\, t\colon \omega,\, \tau)$

où $Q_{ij}\in S^{-\theta}$.

Démonstration. Posons

$$\begin{array}{rc} & \qquad\quad j \\ & \qquad\quad \vee \\ \mathscr{R}_{ij} = & \left(\begin{array}{c|c} \tilde{\mathscr{R}} & \\ \hline & \end{array}\right) \\ i> & \end{array}$$

Il est évident que pour (i, j) quelconque

$$\text{rank } \mathcal{R}_{ij} \leqslant \mu-\theta=(\mu-1)-(\theta-1),$$

donc l'application du lemme 5.1 montre que (5.19) a lieu pour n'en port quel (i, j). Si $j \geqslant l_2+1$,

$$\text{rank } \mathcal{R}_{ij} \leqslant \mu-\theta-1=(\mu-1)-\theta \tag{5.21}$$

parce que l'on a rank $\mathcal{R}_{ij} \leqslant$ rank $\mathcal{R}_{Iij}$+rank $(\mathcal{R}-\mathcal{R}_I)_{ij}$, d'après (5.17) et (5.18) rank $(\mathcal{R}-\mathcal{R}_I)_{ij}=\mu-l_2-1$, et que cela nous donne (5.21). On en déduit immediat (5.20) en appliquant le lemme 5.1. c.q.f.d.

Définissons une $\mu\times\mu$ matrice $Q_0=[q_{ij}]\in S^0$ par

$$q_{ij}=\lambda^{\theta-1}Q_{ji} \qquad \text{pour} \quad i\leqslant l_2$$
$$q_{ij}=\lambda^{\theta}Q_{ji} \qquad \text{pour} \quad i\geqslant l_2+1$$

et nous avons

Lemme 5.4. *Dans un voisinage de* $(0, 0: \omega_0, \xi_0)$ *on a*

$$\sum_{j=1}^{\mu} q_{ij}r_{jk}=\delta_{ik}(\tau-\xi(y, t:\omega))\lambda^{-1}r(y, t:\omega, \tau) \qquad \textit{pour} \quad i\leqslant l_2 \tag{5.22}$$

et

$$\sum_{j=1}^{\mu} q_{ij}r_{jk}=\delta_{ik}\, r(y, t:\omega, \tau) \qquad \textit{pour} \quad i\geqslant l_2+1, \tag{5.23}$$

où $\tilde{\mathcal{R}}=[r_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,\mu}$, $\delta_{ik}=\begin{cases}0\\1\end{cases}$ *si* $\begin{cases}i\neq k\\ i=k\end{cases}$ *et* $r\in S^0$ *vérifiant* $|r(y, t:\omega.\,\tau)|\geqslant c>0$.

Démonstration. Grâce à la définition de R_{ij} on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\mu} R_{ji}r_{jk} &= \delta_{ik}\tilde{R}(y, t:\omega, \tau)\\ &= \delta_{ik}(\tau-\xi(y, t:\omega))^{\theta}r'(y, t:\omega, \tau),\end{aligned}$$

et par l'hypothèse il a lieu $r'(y, t:\omega, \tau)\neq 0$ dans $\mathcal{V}\times\mathcal{V}_0$. La substitution de (5.19) donne pour $j\leqslant l_2$

$$\sum_{j=1}^{\mu} Q_{ij}r_{jk}=\delta_{ik}(\tau-\xi(y, t:\omega))r',$$

cela implique (5.22) par la muliplication par $\lambda^{\theta-1}$ en prenant $r=\lambda^{\theta}r'\in S^0$. (5.23) est aussi montré par le même raisonnement. c.q.f.d.

Supposns que

$$\text{supp } \hat{U}(0, \omega, \xi)\subset\left\{(\omega, \xi);\left|\frac{(\omega, \xi)}{|(\omega, \xi)|}-\zeta_0\right|\leqslant\varepsilon_0\right\}$$

et que le lemme 5.4 a lieu pour un voisinage conique Γ_2 de Γ_1.

On va déduire des estimations à priori de $U(0, y, t)$ de l'équation

$$\{\mathcal{B}(y, t: D_y, D_t-i\eta)+\mathcal{B}'_{-1}\} U(0, y, t) = G(y, t) .$$

Comme nous avons prévenu dans le paragraphe 3 on peut achever le calcul des opérateurs pseudo-différentiels sans prendre des valeurs des symboles à l'extérieur de Γ_2 en considération.

Soit $W=(w_{ij})_{\substack{i=1,\dots,l_7 \\ j=1,2,\dots,s(i)}}$ un colonne vecteur le longueur m. On désigne par W^- un colonne vecteur de longueur μ défini par

$$W^- = (w_{ij})_{(i,j)\in I^-}$$

et W^+ un colonne vecteur de longueur $m-\mu$ défini par

$$W^+ = (w_{ij})_{(i,j)\in I^+} .$$

Posons

$$W(y, t) = \mathcal{I}_0(y, t: D_y, D_t-i\eta)U(0, y, t) ,$$

alors on a

$$\begin{aligned}\mathcal{B}U &= (\mathcal{B}\circ\mathcal{I}_0^{-1}\circ\mathcal{I}_0)U^{7)} \\ &= (\mathcal{B}\circ\mathcal{I}_0^{-1})W+\mathcal{B}''_{-1}U\end{aligned}$$

où $\mathcal{B}''_{-1}\in S^{-1}$. Par les définitions de $(\mathcal{I}_0^{-1})^{\pm}$ et de $W^{\pm}$

$$(\mathcal{B}\circ\mathcal{I}_0^{-1})W = (\mathcal{B}\circ(\mathcal{I}_0^{-1})^-)W^-+(\mathcal{B}\circ(\mathcal{I}_0^{-1})^+)W^+ .$$

Rappelons que

$$\mathcal{B}\circ(\mathcal{I}_0^{-1})^-(0, y, t: \omega, \tau) = \tilde{\mathcal{R}}(y, t: \omega, \tau) .$$

Nous avons

$$\tilde{\mathcal{R}}(y, t: D_y, D_t-i\eta)W^- = G-(\mathcal{B}\circ(\mathcal{I}_0^{-1})^+)W^+-\mathcal{B}_{-1}U , \tag{5.24}$$

où $\mathcal{B}_{-1}=\mathcal{B}'_{-1}+\mathcal{B}''_{-}\in S^{-1}$.

En appliquant $\Lambda Q(y, t: D_y, D_t-i\eta)$ à (5.24) et utilisant le résultat du lemme 5.4 on a

---

7) Soient $\mathcal{P}(y, t: \omega, \tau)\in S^m$ et $Q(y, t: \omega, \tau)\in S^{m'}$, $(\mathcal{P}\circ Q)(y, t: D_y, D_t-i\eta)$ signifie l'opérateur pseudo-différentiel défini par le symbole $\mathcal{W}(y, t: \omega, \tau)=\mathcal{P}(y, t: \omega. \tau)Q(y, t: \omega, \tau)\in S^{m+m'}$.

$$\Lambda Q\tilde{\mathfrak{R}}W^- = \begin{pmatrix} (D_t-\xi(y,t:D_y)-i\eta)rw_{11} \\ (D_t-\xi(y,t:D_y)-i\eta)rw_{21} \\ \vdots \\ (D_t-\xi(y,t:D_y)-i\eta)rw_{l_21} \\ \Lambda rw_{l_4+11} \\ \vdots \\ \Lambda rw_{l_6 s(l_6)} \end{pmatrix} + (\text{ordre } 0)W^- .$$

Par (v) du lemme 3.1,

$$\begin{aligned} &\|(D_t-i\eta-\xi(y,t:D_y))rw_{j1}\|_k \\ &\geqslant \eta\|rw_{j1}\|_k - C\|rw_{j1}\|_k \\ &\geqslant c\eta\|w_{j1}\|_k - C\|w_{j1}\|_k . \end{aligned}$$

D'autre part il est évident

$$\begin{aligned} &\|(\text{ordre } 0)W^- + \Lambda Q(G-\mathcal{B}\circ(\mathcal{I}_0^{-1})^+W^+ - \mathcal{B}_{-1}U)\|_k \\ &\leqslant C\{\|W^-\|_k + \|G\|_{k+1} + \|W^+\|_{k+1} + \|U\|_k\} . \end{aligned}$$

Donc on a

Lemme 5.5. *Pour tout k réel, il existe $C_k>0$ tel que l'on a pour η suffisamment large*

$$\begin{aligned} (5.25) \qquad &\sum_{i=1}^{l_2} \eta\|w_{i1}\|_k + \sum_{i=l_4+1}^{l_6} \sum_{j=1}^{\rho(i)} \|w_{ij}\|_{k+1} \\ &\leqslant C_k\{\|G\|_{k+1} + \|W^+\|_{k+1} + \|U\|_k\} . \end{aligned}$$

Soient $\psi_j(y,t:\omega,\tau)$, $j=1,2,\cdots,l_2$, des fonctions de S^0 telles que

$$(5.26) \qquad \lambda\sum_{j=1}^{\mu} |q_{ij}(y,t:\omega,\tau)| \leqslant c|\tau-\xi(y,t:\omega)| \qquad \text{sur} \quad \operatorname{supp}\psi_i(y,t:\omega,\tau) .$$

Lemme 5.6. *Il existe une constante $C_k>0$ telle que*

$$\begin{aligned} (5.27) \qquad &\sum_{j=1}^{l_2} \|\psi_j(y,t:D_y,D_t-i\eta)w_{j1}\|_{k+1} + \sum_{i=l_4+1}^{l_6} \sum_{j=1}^{\rho(i)} \|w_{ij}\|_{k+1} \\ &\leqslant C_k\{\|W^-\|_k + \|G\|_{k+1} + \|W^+\|_{k+1} + \|U\|_k\} . \end{aligned}$$

Démonstration. Grâce à (5.26) on a

$$\left|\sum_{l=1}^{\mu} \lambda\psi_j q_{jl} r_{lk}\right| \leqslant c|\tau-\xi(y,t:\omega)|\,|\psi_j| ,$$

alors $q'_{ij}(y,t:\omega,\tau)=\lambda(\tau-\xi(y,t:\omega))^{-1}q_{ij}\psi_i\in S^0$. Donc par (5.22) on a

$$\sum_{j=1}^{\mu} q'_{ij}r_{ji} = \psi_i r .$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned}\|\psi_i r w_{i1}\|_{k+1} &\leqslant \sum_{j=1}^{\mu} \|q'_{ij}(y, t: D_y, D_t - i\eta) r_{ji} w_{i1}\|_{k+1} \\ &\leqslant C\|G - \mathcal{B}\circ(\mathcal{I}_0^{-1})^+ W^+ - \mathcal{B}_{-1}U + (\text{ordre}-1)W^-\|_{k+1} \\ &\leqslant C\{\|G\|_{k+1} + \|W^+\|_{k+1} + \|W^-\|_k + \|U\|_k\}\,.\end{aligned}$$

On en déduit (5.27). c.q.f.d.

En combinant les lemmes 5.5 et 5.6 on a

Proposition 5.7. *Supposons que* supp $\hat{U}(0, \omega, \xi) \subset \{(\omega, \xi);\, |\zeta' - \zeta_0| \leqslant \varepsilon_0\}$. *Soient* $\psi_j(y, t: \omega, \tau)$, $j=1, 2, \cdots, l_2$, *des fonctions de* S^0 *vérifiant* (5.26). *On déduit de l'équation* (4.4)

$$\sum_{j=1}^{l_2} \|(\Lambda\psi_j(y, t: D_y, D_t - i\eta) + \eta) w_{j1}\|_{k-1} + \sum_{i=l_4+1}^{l_6} \sum_{j=1}^{\rho(i)} \|w_{ij}\|_k \leqslant C_k\{\|G\|_k + \|W^+\|_k + \|U\|_{k+1}\}\,. \tag{5.28}$$

6. Estimations à priori des solutions de (2.5)

Supposons que

$$\bigcup_{x \geqslant 0} \operatorname{supp} \hat{U}(x, \omega, \xi) \subset \Gamma_1 = \left\{(\omega, \xi);\, \left|\frac{(\omega, \xi)}{|(\omega, \xi)|} - \zeta_0\right| \leqslant \varepsilon_0\right\}.$$

Désignons $\mathcal{I}_0 \mathcal{M}_0 \mathcal{I}_0^{-1}$ par $\mathcal{K}_0$. Appliquons $\mathcal{I}_0 \Lambda^k$ à

$$\partial_x U = \mathcal{M}U + F$$

et on a

$$\begin{aligned}&\partial_x(\mathcal{I}_0\Lambda^k U) - (\partial_x \mathcal{I}_0)\Lambda^k U \\ &= \mathcal{I}_0 \mathcal{M}\Lambda^k U + \mathcal{I}_0[\Lambda^k, \mathcal{M}]\, U + \mathcal{I}_0\Lambda^k F \\ &= \mathcal{K}_0\mathcal{I}_0\Lambda^k U + \{(\mathcal{I}_0\cdot\mathcal{M}_0 - \mathcal{K}_0\cdot\mathcal{I}_0) + \mathcal{I}_0\mathcal{M}_1\}\, \Lambda^k U \\ &\quad + \mathcal{I}_0[\Lambda^k, \mathcal{M}]\, U + \mathcal{I}_0\Lambda^k F \\ &= (\mathcal{K}_0 + \tilde{\mathcal{M}}_{1,k})\mathcal{I}_0\Lambda^k U + \mathcal{R}_{-1,k}\Lambda^k U + \mathcal{I}_0\Lambda^k F\end{aligned}$$

où

$$\tilde{\mathcal{M}}_{1,k} = \{\mathcal{I}_0\cdot\mathcal{M}_0 - \mathcal{K}_0\cdot\mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_0\mathcal{M}_1 + \mathcal{I}_0[\Lambda^k, \mathcal{M}](\mathcal{I}_0\Lambda^k)^{-1}\}\,,$$

qui appartient à S^0, et $\mathcal{R}_{-1,k} \in S^{-1}$ parce que

$$\mathcal{I}_0\cdot\mathcal{M}_0 - \mathcal{K}_0\cdot\mathcal{I}_0 \in S^0 \qquad \text{et} \quad [\Lambda^k, \mathcal{M}] \in S^k\,.$$

Donc si l'on pose

$$\mathcal{M}_{1,k} = \tilde{\mathcal{M}}_{1,k} + (\partial_x\mathcal{I}_0)\,\mathcal{I}_0^{-1}$$

on a

$$(6.1)\qquad \partial_x(\mathcal{T}_0\Lambda^k U)=(\mathcal{K}_0+\mathcal{M}_{1,k})(\mathcal{T}_0\Lambda^k U)+\mathcal{R}_{-1,k}\Lambda^k U+\mathcal{T}_0\Lambda^k F\,.$$

Lemme 6.1. *Pour une matrice arbitraire $\mathcal{E}(x, y, t: \omega, \tau)\in S^0$, on peut trouver des matrices $\mathcal{T}_1(x, y, t: \omega, \tau)$ dans S^{-1} et $\mathcal{K}_1(x, y, t: \omega, \tau)$ dans S^0 telles que $\mathcal{K}_1$ est à la forme du second membre de* (4.5) *et qu'ils satisfont à l'équation*

$$(6.2)\qquad (\mathcal{T}_1\mathcal{M}_0-\mathcal{K}_0\mathcal{T}_1)\mathcal{T}_0^{-1}=\mathcal{E}+\mathcal{K}_1\,.$$

Démonstration. Posons

$$\mathcal{T}_0(x, y, t: \omega, \tau)^{-1}=[t_{ij}(x, y, t: \omega, \tau)]_{i,j=1,2,\cdots,m}$$

et

$$\mathcal{T}_1(x, y, t: \omega, \tau)=[g_{ij}(x, y, t: \omega, \tau)]_{i,j=1,2,\cdots,m}\,.$$

Si l'on pose $i(k)=\sum_{j=1}^{k}s(j)$ il est facile de voir que l'application linéaire de C^{m^2} dans C^{m^2} définie par

$$(6.3)\qquad \mathcal{T}_1=[g_{ij}]\longrightarrow(\mathcal{T}_1\mathcal{M}_0-\mathcal{K}_0\mathcal{T}_1)\mathcal{T}_0^{-1}=[f_{ij}]$$

a la propriété suivante:

$$g_{ij}=0\qquad \text{si}\quad i\notin[i(k),\, i(k+1)[$$

entaine $f_{ij}=0$ pour $i\notin[i(k),\, i(k+1)[$. Donc il suffit de considérer l'application

$$(6.4)\qquad [g_{ij}]_{\substack{i\in[i(k),i(k+1)[\\ j=1,2,\cdots,m}}\longrightarrow[f_{ij}]_{\substack{i\in[i(k),i(k+1)[\\ j=1,2,\cdots,m}}\,.$$

Désignons par g_j un colonne vecteur $[g_{ij}]_{i\in[i(k),i(k+1)[}$ de longueur $i(k+1)-i(k)$. Alors l'application (6.4) s'exprime comme suit:

$$(6.5)\qquad \begin{pmatrix} t_{21}-t_{11}M_k, & t_{31}-t_{21}M_k, & \cdots\cdots, & \sum a_l t_{l1}-t_{m1}M_k \\ t_{22}-t_{12}M_k, & t_{32}-t_{22}M_k, & \cdots\cdots, & \sum a_l t_{l2}-t_{m2}M_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{2m}-t_{1m}M_k, & t_{3m}-t_{2m}M_k, & \cdots, & \sum a_l t_{lm}-t_{mm}M_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ g_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

Il suffit de montrer que (6.5) est surjective de $C^{m\cdot s(k)}$ dans

$$(6.6)\qquad \{[f_j]_{j=l_2,\cdots,i(k)-1,i(k)+1,\cdots,m}\}=C^{(m-s(k))s(k)}\,.$$

Considérons le déterminant de la matrice

$$
(6.7)\qquad \begin{pmatrix}
t_{21}-t_{11}M_k,\ t_{31}-t_{21}M_k,\ \cdots\cdots,\ t_{l+11}-t_{l1}M_k \\
t_{22}-t_{12}M_k,\ t_{32}-t_{22}M_k,\ \cdots\cdots,\ t_{l+12}-t_{l2}M_k \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
t_{2p}-t_{1p}M_k,\ t_{3p}-t_{2p}M_k,\ \cdots\cdots,\ t_{l+1p}-t_{lp}M_k \\
t_{2q}-t_{1q}M_k,\ t_{3q}-t_{q2}M_k,\ \cdots\cdots,\ t_{l+1q}-t_{lq}M_k \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
t_{2m}-t_{1m}M_k,\ t_{3m}-t_{2m}M_k,\ \cdots,\ t_{l+1m}-t_{lm}M_k
\end{pmatrix}
$$

où $l=m-s(k)$, $p=i(k)-1$ et $q=i(k+1)$. Comme au point $(0, 0, 0\colon \zeta_0, 0)$ $\mathcal{T}_0^{-1}$ s'écrit à la forme (5.10) avec les propriété de (5.11) et de (5.12), tenant compte que les κ_j définissant t_{ij} de (6.7) ne sont pas des valeurs propres de M_k on peut montrer que le déterminant de (6.7) est différent du zéro. Donc l'application (6.4) est surjective de $C^{m\cdot s(k)}$ dans l'espace (6.6). Cela montre que le lemme est démontré. c.q.f.d.

Soit $\mathcal{T}_1(x, y, t\colon \omega, \tau)$ une solution de (6.2) en posant $\mathcal{E}=-\mathcal{M}_{1,k}(x, y, t\colon \omega, \tau)$. Alors si l'on pose $W=(\mathcal{T}_0+\mathcal{T}_1)\Lambda^k U$ on déduit de (6.1) avec l'aide de (6.2)

$$
(6.8)\qquad \partial_x W=(\mathcal{K}_0+\mathcal{K}_1)W+\mathcal{M}_{k,-1}\Lambda^k U+(\mathcal{T}_0+\mathcal{T}_1)\Lambda^k F
$$

où $\mathcal{M}_{k,-1}\in S^{-1}$. En effet

$$
\begin{aligned}
\partial_x W &= \partial_x(\mathcal{T}_0\Lambda^k\mathcal{T})+\mathcal{T}_1\Lambda^k\partial_x U+(\partial_x\mathcal{T}_1)\Lambda^k U \\
&= (\mathcal{K}_0+\mathcal{M}_{1,k})\mathcal{T}_0\Lambda^k U+\mathcal{R}_{-1,k}\Lambda^k U+\mathcal{T}_0\Lambda^k F \\
&\quad +\mathcal{T}_1\Lambda^k\{(\mathcal{M}_0+\mathcal{M}_1)U+F\}+(\partial_x\mathcal{T}_1)\Lambda^k U \\
&= \mathcal{K}_0 W+(\mathcal{T}_1\mathcal{M}_0-\mathcal{K}_0\mathcal{T}_1)\Lambda^k U \\
&\quad +\{\mathcal{T}_1[\Lambda^k, \mathcal{M}_0]+\mathcal{M}_{1,k}\mathcal{T}_0\Lambda^k+(\partial_x\mathcal{T}_1)\Lambda^k+\mathcal{R}_{-1,k}\Lambda^k\}U \\
&\quad +(\mathcal{T}_0+\mathcal{T}_1)\Lambda^k F,
\end{aligned}
$$

puisque

$$
\mathcal{T}_1\mathcal{M}_0-\mathcal{K}_0\mathcal{T}_1=-\mathcal{M}_{1,k}\mathcal{T}_0+\mathcal{K}_1\mathcal{T}_0+(\text{ordre}-1)
$$

et que

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{T}_1[\Lambda^k, \mathcal{M}_0]+\mathcal{M}_{1,k}\mathcal{T}_0\Lambda^k+(\partial_x\mathcal{T}_1)\Lambda^k+\mathcal{R}_{-1,k}\Lambda^k)\Lambda^{-k}\in S^{-1}, \\
&= \mathcal{K}_0 W+\mathcal{K}_1 W+\mathcal{M}_{k,-1}\Lambda^k U+(\mathcal{T}_0+\mathcal{T}_1)\Lambda^k F.
\end{aligned}
$$

Donc (6.8) est montre.

Puisque $\mathcal{K}_0$ et $\mathcal{K}_1$ ont la forme de (4.6) on considère (6.8) en décomposant à chaque M_j, à savoir,

$$
(6.9)\qquad \partial_x W_j=(M_j(x, y, t\colon D_y, D_t-i\eta)+M_{j0}(x, y, t\colon D_y, D_t-i\eta))W_j+\widetilde{F}_j,\quad j=1, 2, \cdots, l_7,
$$

où $W_j(x, y, t)$ est un colonne vecteur de longueur $s(j)$, $M_j\in S^1$ est celle du lemme 4.2, $M_{j_0}\in S^0$ et

$$\widetilde{F}=\mathcal{M}_{k,-1}\Lambda^k U+(\mathcal{I}_0+\mathcal{I}_1)\Lambda^k F.$$

Désignons $\int_{R_y^{n-1}}\int_{R_t} U(y, t)V(y, t)dy\,dt$ par $\langle U, V\rangle$

et

$$\int_{R_{+x}}\int_{R_y^{n-1}}\int_{R_t} U(x, y, t)V(x, y, t)dx\,dy\,dt \quad \text{par } (U, V).$$

Supposons que

$$\bigcup_x \operatorname{supp} \hat{W}(x, \omega, \xi)\subset\{\zeta;\ |\zeta'-\zeta_0|<\delta\}. \tag{6.6}$$

Pour $j=l_4+1, l_4+2, \cdots, l_5$, grâce à la proposition 4.4 il existe $R_j(x,y,t:\omega,\tau)\in S^0$ définie dans $\{\zeta:\ |\zeta'-\zeta_0|<\delta\}$ telle que

$$\operatorname{Re} R_j(x, y, t: \omega, \tau)M_j(x, y, t: \omega, \tau)\geqslant\eta I.$$

$$\begin{aligned}&2\operatorname{Re}(R_j(x, y, t: D_y, D_t-i\eta)W_j, \partial_x W_j)\\&=-\langle R_j(0, y, t: D_y, D_t-i\eta)W_j, W_j\rangle-((\partial_x R_j)W_j, W_j)\\&\qquad-((R_j-R_j^*)\partial_x W_j, W_j).\end{aligned}$$

Puisque $R_j-R_j^*\in S^{-1}$ et $\partial_x W_j=(M_j+M_{j0})W_j+\widetilde{F}_j$ on a

$$|||(R_j-R_j^*)\partial_x W_j|||_{0,0}\leqslant C(|||W_j|||_{0,0}+|||\widetilde{F}_j|||_{0,-1}).$$

Donc

$$\begin{aligned}&|((\partial_x R_j)W_j+(R_j-R_j^*)\partial_x W_j, W_j)|\\&\leqslant C(|||W_j|||_{0,0}+|||\widetilde{F}_j|||_{0,-1})|||W_j|||_{0,0}.\end{aligned}$$

En conséquence

$$\begin{aligned}&2\operatorname{Re}(R_j(x, y, t: D_y, D_t-i\eta)W_j, \partial_x W_j)\\&\leqslant-\operatorname{Re}\langle R_j(0, y, t: D_y, D_t-i\eta)W_j(0, y, t), W_j(0, y, t)\rangle\\&\qquad+C|||W_j|||_{0,0}(|||W_j|||_{0,0}+|||\widetilde{F}_j|||_{0,-1}).\end{aligned}\tag{6.11}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}&2\operatorname{Re}(R_j(x, y, t: D_y, D_t-i\eta)W_j, (M_j+M_{j0})W_j+\widetilde{F}_j)\\&=2\operatorname{Re}(W_j, R_jM_jW_j)+2\operatorname{Re}(W_j, (R_j^*-R_j)M_jW_j)\\&\qquad+2\operatorname{Re}(W_j, R_j^*M_{0j}W_j)+(R_jW_j, \widetilde{F}_j)\end{aligned}\tag{6.12}$$

en utilisant $2\mathrm{Re}\,(W_j,\ R_jM_jW_j)\geqslant 2\eta|||W_j|||^2_{0,0}-C|||W_j|||^2_{0,0}$,

$$\geqslant(2\eta-C)|||W_j|||^2_{0,0}-|||W_j|||_{0,0}(|||W_j|||_{0,0}+|||\widetilde{F}_j|||)\,.$$

On déduit de (6.11) et de (6.12)

$$\begin{aligned}&-\mathrm{Re}\,\langle R_j(0,\ y,\ t\colon D_y,\ D_t-i\eta)W_j(0,\ y,\ t),\ W_j(0,\ y,\ t)\rangle\\&+C|||W_j|||_{0,0}(|||W_j|||_{0,0}+|||\widetilde{F}_j|||_{0,0})\\&\geqslant(2\eta-C)|||W_j|||^2_{0,0}-|||W_j|||_{0,0}(|||W_j|||_{0,0}+|||\widetilde{F}_j|||_{0,-1})\end{aligned}$$

donc pour η suffissament large il a lieu

$$\eta|||W_j|||^2_{0,0}+\mathrm{Re}\,\langle R_jW_j,\ W_j\rangle\leqslant\frac{C}{\eta}|||\widetilde{F}_j|||^2_{0,0}\,. \tag{6.13}$$

Notons que l'on peut trouver une matrice D_j de la forme (4.9) vérifiant $d_{1s}n_{s1}\geqslant 2$, pour une constante quelconque $d>0$, telle qu'il a lieu

$$\begin{aligned}&{}^tVD_j\bar{V}\geqslant -c(|v_1|^2+\cdots+|v_{\rho(j)}|^2)+d(|v_{\rho(j)+1}|^2+\cdots+|v_{s(j)}|^2)\\&\qquad\text{pour tout } V=(x_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{s(j)})\in C^{s(j)}\end{aligned} \tag{6.14}$$

où c est une constante indépendante de d.

Compte tenu que tous les éléments de $E_j(x\,y,\ t\colon\omega,\ \tau)$ et de $i\eta'F_j$ sont très petits on a

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\,\langle R_j(0,\ y,\ t\colon D_y,\ D_t-i\eta)W_j(0,\ y,\ t),\ W_j(0,\ y,\ t)\rangle\\&\geqslant -c\sum_{i=1}^{\rho(j)}\|w_{ji}(0,\ y,\ t)\|^2_0+d\sum_{i=\rho(j)+1}^{s(j)}\|w_{ji}(0,\ y,\ t)\|^2_0\\&=-c\|W_j^-\|^2_0+d\|W_j^+\|^2_0\,.\end{aligned}$$

La substitution de cette estimation dans (6.13) nous donne

$$\begin{aligned}&\eta|||W_j|||^2_{0,0}-c\|W_j^-(0,\ y,\ t)\|^2_0+d\|W_j^+(0,\ y,\ t)\|^2_0\\&\leqslant\frac{C}{\eta}|||\widetilde{F}_j|||^2_{0,0}\,.\end{aligned} \tag{6.15}$$

Puis on considère (6.9) pour $j=1,\ 2,\ \cdots,\ l_1$. Supposons l'existence d'une fonction $\psi_j(x,\ y,\ t\colon\omega,\ \tau)$ à valeurs non négatives telle que $\{\psi_j(x,y,\ t\colon\omega,\ \tau)\}_{x\geqslant 0}$ est bornée dans S^0 et qu'elle satisfait à

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\lambda\psi_j}{\partial x}+\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\,\mathrm{Im}\,\kappa_j}{\partial\omega_l}\frac{\partial\lambda\psi_j}{\partial y_l}-\frac{\partial\,\mathrm{Im}\,\kappa_j}{\partial y_l}\frac{\partial\lambda\psi_j}{\partial\omega_l}\right)\\&\qquad+\frac{\partial\,\mathrm{Im}\,\kappa_j}{\partial\xi}\frac{\partial\lambda\psi_j}{\partial t}-\frac{\partial\,\mathrm{Im}\,\kappa_j}{\partial t}\frac{\partial\lambda\psi_j}{\partial\xi}=0\,.\end{aligned} \tag{6.16}$$

Rappelons que d'après la définition de l_1 et le lemme 4.2 κ_j s'exprime comme suit:

$$\kappa_j(x, y, t: \omega, \tau) = \eta\kappa_{j1}(x, y, t: \omega, \tau)+i\kappa_{j2}(x, y, t: \omega, \tau) \tag{6.17}$$

où $\kappa_{ji}\in S^{i-1}$ $i = 1, 2$ et $-\kappa_{ji}(x, y, t: \omega, \tau)>c_0>0$ dans un voisinage de $(0, 0, 0: \omega_0, \xi_0)$.

$$\begin{aligned} &-2\mathrm{Re}\,((\psi_j^*(x, y, t: D_y, D_t-i\eta)\Lambda+\eta)(\Lambda\psi_j(x, y, t: D_y, D_t-i\eta) \\ &\qquad\qquad +\eta)\,w_j, \partial_x w_j) \\ &= -2\mathrm{Re}\,((\Lambda\psi_j+\eta)w_j, \partial_x(\Lambda\psi_j+\eta)w_j) \\ &\qquad\qquad +2\mathrm{Re}\,((\Lambda\psi_j+\eta)w_j, \Lambda(\partial_x\psi_j)w_j) \\ &= \|(\Lambda\psi_j+\eta)w_j(0, y, t)\|_0^2+2\mathrm{Re}\,((\Lambda\psi_j+\eta)w_j, \Lambda(\partial_x\psi_j)w_j)\,. \end{aligned} \tag{6.18}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} &-2\mathrm{Re}\,((\psi_j^*\Lambda+\eta)(\Lambda\psi_j+\eta)w_j, (\kappa_j+\tilde{\kappa}_j)w_j+\tilde{f}_i) \\ &= 2\mathrm{Re}\,((\Lambda\psi_j+\eta)w_j, (-\kappa_j-\tilde{\kappa}_j)(\Lambda\psi_j+\eta)w_j-(\Lambda\psi_j+\eta)\tilde{f}_j) \\ &\qquad +2\mathrm{Re}\,((\Lambda\psi_j+\eta)w_j, -[\Lambda\psi_j, \kappa_j+\tilde{\kappa}_j]w_j)\,. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Grâce à (6.17)

$$\begin{aligned} &((\Lambda\psi_j+\eta)w_j, -(\kappa_j+\tilde{\kappa}_j)(\Lambda\psi_j+\eta)w_j) \\ &\geqslant c_0\eta|||(\Lambda\psi_j+\eta)w_j|||_{0,0}^2-C|||(\Lambda\psi_j+\eta)w_j|||_{0,0}^2\,. \end{aligned}$$

Notons que

$$\frac{\partial\Lambda\psi_j}{\partial x}+[\kappa_j+\tilde{\kappa}_j, \Lambda\psi_j]\in\eta S^0\,.$$

En effet $\eta[\kappa_{j1}, \Lambda\psi_j]\in\eta S^0$ et $[\tilde{\kappa}_j, \Lambda\psi_j]\in S^0$ et l'hypothèse (6.16) nous donne

$$\frac{\partial\Lambda\psi_j}{\partial x}+i[\kappa_{j2}, \Lambda\psi_j]\in S^0\,.$$

Donc il a lieu l'estimation

$$\begin{aligned} &2\mathrm{Re}\left((\Lambda\psi_j+\eta)w_j, \left([\kappa_j+\tilde{\kappa}_j, \Lambda\psi_j]+\Lambda\frac{\partial\psi_j}{\partial x}\right)w_j\right) \\ &\leqslant C\eta|||(\Lambda\psi_j+\eta)w_j|||_{0,0}|||w_j|||_{0,0}\,. \end{aligned} \tag{6.20}$$

En tenant compte de (6.9), les estimations (6.18), (6.19) et (6.20) nous donnent

$$\begin{aligned} &-\|(\Lambda\psi_j+\eta)w_j\|_0^2+\eta|||(\Lambda\psi_j+\eta)w_j|||_{0,0}^2-C\eta|||(\Lambda\psi_j+\eta)w_j|||_{0,0}|||w_j|||_{0,0} \\ &\qquad\leqslant C|||(\Lambda\psi_j+\eta)w_j|||_{0,0}|||(\Lambda\psi_j+\eta)\tilde{f}_j|||_{0,0}\,. \end{aligned}$$

Donc on a pour η suffisamment large, en utilisant $|||(\Lambda\psi_j+\eta)w_j|||_{0,0}\geqslant c\eta|||w_j|||_{0,0}$,

$$(6.12)\qquad -||(\Lambda\psi_j+\eta)w_j||_0^2+\eta|||(\Lambda\psi_j+\eta)w_j|||_{0,0}^2\leqslant\frac{C}{\eta}|||(\Lambda\psi_j+\eta)\tilde{f}_j|||_{0,0}^2\,.$$

Pour $j=l_1+1,\cdots,l_2$, en raison de $-\mathrm{Re}\,\kappa_j(x,y,t\colon\omega,\tau)\geqslant c_0\lambda$, on montre sans difficulté pour toute fonction $\psi_j\in S^0$ à valeurs non négatives

$$(6.22)\qquad -||(\Lambda\psi_j+\eta)w_j||_0^2+\eta|||(\Lambda\psi_j+\eta)w_j|||_{0,0}^2\leqslant\frac{C}{\eta}|||(\Lambda\psi_j+\eta)\tilde{f}_j|||_{0,0}^2\,.$$

Il est aussi facile de montrer que pour $j=l_2+1,\cdots,l_4$

$$(6.23)\qquad ||w_j||_0^2+\eta|||w_j|||_{0,0}^2\leqslant C\frac{1}{\eta}|||\tilde{f}_j|||_{0,0}^2\,.$$

Pour $j=l_5+1,\cdots,l_6$, on peut vérifier sans peine qu'il a lieu

$$-\mathrm{Re}\,R_jM_j(x,y,t\colon\omega,\tau)\geqslant c\lambda I$$

pour

$$R_j=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & d_3 \end{pmatrix}$$

pourvu que d_i, $i=1,2,\cdots,s(j)$ soient des constantes à croissance vite. Donc on a immediat

$$\begin{aligned}-2\mathrm{Re}\,(R_j(M_j+\tilde{M}_j)W_j,\ W_j)&\geqslant C|||W_j|||_{0,1/2}^2\geqslant c\eta|||W_j|||_{0,0}^0,\\ 2\mathrm{Re}\,(-R_j\partial_xW_j,\ W_j)&=\mathrm{Re}\langle R_jW_j(0,y,t),\ W_j(0,y,t)\rangle\leqslant c||W_j||_0^2\end{aligned}$$

et puis

$$(6.24)\qquad -c||W_j(0,y,t)||_0^2+\eta|||W_j|||_{0,0}^2\leqslant\frac{C}{\eta}|||\hat{F}_j|||_{0,0}^2\,.$$

Par le même raisonnement on vérifie que pour $j=l_6+1,\ l_6+2,\cdots,l_7$

$$(6.25)\qquad d||W_j(0,y,t)||_0^2+\eta|||W_j|||_{0,0}^2\leqslant\frac{C}{\eta}|||\tilde{F}_j|||_{0,0}^2\,.$$

En combinant les estimations de (6.15), de (6.22), de (6.23), de (6.24) et de (6.25) on a

$$-\sum_{j=1}^{l_2}\|(\Lambda\psi_j+\eta)w_j\|_0^2+d\sum_{j=l_2+1}^{l_4}\|w_j\|_1^2 \tag{6.26}$$
$$+\sum_{j=l_4+1}^{l_7}(-c\|W_j^-\|_1^2+d\|W_j^+\|_1^2)$$
$$+\eta\{\sum_{j=1}^{l_2}|||(\Lambda\psi_j+\eta)w_j|||_{0,0}^2+\sum_{j=l_2+1}^{l_7}|||W_j|||_{0,1}^2\}$$
$$\leqslant\frac{C}{\eta}\{\sum_{j=1}^{l_2}|||(\Lambda\psi_j+\eta)\tilde{f}_j|||_{0,1}^2+\sum_{j=l_2+1}^{l_7}|||\tilde{F}_j|||_{0,1}^2\}\ .$$

Rappelons l'estimation (5.28) et nous avons

$$-\sum_{j=1}^{l_2}\|(\Lambda\psi_j+\eta)w_j\|_0^2-\sum_{j=l_4+1}^{l_7}\|W^-\|_1^2 \tag{6.27}$$
$$+d(\sum_{j=l_2+1}^{l_4}\|w\|_1^2+\sum_{j=l_4+1}^{l_7}\|W^+\|_1^2)$$
$$\geqslant\sum_{j=1}^{l_2}\|(\Lambda\psi_j+\eta)w_j\|_0^2+\sum_{j=l_2+1}^{m}\|w_j\|_1^2-\|G\|_1^2$$

si la constante $d>0$ est choisie suffisamment large. Donc on a

Proposition 6.2. *Pour* ζ_0 *un point quelconque de* $\{\zeta;\zeta=(\omega,\xi)\in R^n,\ |\zeta|=1\}$ *il existe un voisinage* $\Gamma(\zeta_0)=\{\zeta';\zeta'\in R^n,\ |\zeta'|=1,\ |\zeta'-\zeta_0|\leqslant\delta_{\zeta_0}\}$ *avec les propriétés suivantes*:

Soient $\psi_j(x, y, t:\omega,\tau)$, $j=1, 2, \cdots, l_2$, *des fonctions vérifiant* (5.26) *et* (6.16). *Pour toute fonction* $U(x, y, t)$ *satisfaisant à* (4.3) *et à* (4.4) *telle que*

$$\bigcup_{x\geqslant 0}\operatorname{supp}\hat{U}(x,\omega,\xi)\subset\{\zeta;\zeta'=\zeta/|\zeta|\in\Gamma(\zeta_0)\}$$

il a lieu l'estimation pour η *suffisamment large*

$$\sum_{j=1}^{l_2}\|(\Lambda\psi_j+\eta)P_jU\|_k^2+\|(I-\sum_{j=1}^{l_2}P_j)U\|_{k+1} \tag{6.28}$$
$$+\eta\{\sum_{j=1}^{l_2}|||(\Lambda\psi_j+\eta)P_jU|||_{0,k}^2+|||(I-\sum_{j=1}^{l_2}P_j)U|||_{0,k+1}^2\}$$
$$\leqslant C\Big[\frac{1}{\eta}\{\sum_{j=1}^{l_2}|||(\Lambda\psi_j+\eta)P_jF|||_{0,k}^2+|||(I-\sum_{j=1}^{l_2}P_j)F|||_{0,k+1}^2\}+\|G\|_{k+1}^2\Big]\,.$$

Démonstration. Parce que $W=(\mathcal{I}_0+\mathcal{I}_1)\Lambda^kU$ on a

$$w_j=\Lambda^kP_jU+(\text{ordre }k-1)U\qquad\text{pour}\quad j=1,2,\cdots,l_2$$

en conséquence

$$\|(\Lambda\psi_j+\eta)w_j\|_0\geqslant\|(\Lambda\psi_j+\eta)P_jU\|_k-C\|U\|_k\,,$$

et

$$\sum_{j=l_2+1}^{m}||w_j||_1 \geqslant ||(I-\sum_{j=1}^{l_2}P_j)U||_{k+1}-C||U||_k .$$

D'autre part pour η large on a

$$C||U||_k \leqslant \sum_{j=1}^{l_2}||(\Lambda\psi_j+\eta)P_jU||_k+||(I-\sum_{j=1}^{l_2}P_j)U||_{k+1} .$$

Et

$$|||(\Lambda\psi_j+\Lambda)P_j\widetilde{F}|||_{0,0}+|||(I-\sum_{j=1}^{l_2}P_j)\widetilde{F}|||_{0,1}$$

$$\leqslant |||(\Lambda\psi_j+\Lambda)P_jF|||_{0,k}+|||(I-\sum_{j=1}^{l_2}P_j)F|||_{0,k+1}+C|||U|||_{0,k} .$$

Donc on déduit (6.28) de (6.26) et de (6.27). c.q.f.d.

7. Estimations à priori des solutions de (2.5) (bis)

Dans ce paragraphe nous déduisons de la proposition 6.2 les estimations à priori des solutions de (2.5) pour γ petit.

Posons

$$\sum = \{\zeta;\zeta\in R^n \quad \text{et} \quad |\zeta| = 1\}$$

et on décrit $\zeta=(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1}, \xi)$ de $\sum$ par les coordonnées polaires comme suit:

$$\begin{aligned}\xi &= \cos\theta_1\\ \omega_1 &= \sin\theta_1\cos\theta_2\\ &\vdots\\ \omega_{n-1} &= \sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} ,\end{aligned}$$

$0\leqslant\theta_1\leqslant\pi$, $0\leqslant\theta_i\leqslant 2\pi$, $i=2, 3, \cdots, n-1$. Désignons par J un multi-indice $(j_1, j_2, \cdots, j_{n-1})$ tel que $j_1\in\{1, 2, \cdots, N\}$ et $j_k\in\{1, 2, \cdots, 2N\}$ $k=2, 3, \cdots, n-1$.

Posons

$$\begin{aligned}\Xi = (1, 0, \cdots, 0)\cup(N, 0, \cdots, 0)\\ \cup(\{2, 3, \cdots, N-1\}\times\{1, 2, \cdots, 2N-1\}^{n-2})\end{aligned}$$

où N est un nombre pair, et définissons Λ_J pour $J\in\Xi$ un sousensemble de $\sum$ par

$$\Lambda_{(1,0,\cdots,0)} = \left\{\zeta(\theta);\theta_1\in\left[0, \frac{\pi}{N}\right]\right\}$$

$$\Lambda_{(N,0,\cdots,0)} = \left\{\zeta(\theta);\theta_1\in\left[\frac{N-1}{N}\pi, \pi\right]\right\}$$

et pour J tel que $j_1\neq 1$, N,

$$\Lambda_J = \left\{\zeta(\theta);\ \theta_k \in \left[\frac{\pi}{N} j_k, \frac{\pi}{N}(j_k+1)\right],\quad k = 1, 2, \cdots, n\right\}.$$

Posons

$$|J - J'| = \max_k |j_k - j_k'|$$

si j_1 et j_1' sont différents de 1 et de N, et

$$|(1, 0, \cdots, 0) - J| = |1 - j_1|$$
$$|(N, 0, \cdots, 0) - J| = |N - j_1|\,.$$

Introduisons une partition de l'unité sur $\sum$. Posons

$$\Xi_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0) \cup (N, 0, \cdots, 0)$$
$$\cup(\{2, 4, \cdots, N-2\} \times \{2, 4, \cdots, 2N-2\}^{n-1})\,.$$

$\sigma_J(\zeta)$, $J \in \Xi_1$ sont des fonctions indéfiniment différentiables avec les propriétés suivantes:

$$\operatorname{supp} \sigma_J(\zeta) \subset \left\{\zeta(\theta);\ \theta_k \in \left[\frac{\pi}{N}\left(j_k - \frac{2}{3}\right), \frac{\pi}{N}\left(j_k + \frac{2}{3}\right)\right]\right\}$$

$$\sigma_J(\zeta) = 1 \qquad \text{sur } \left\{\zeta(\theta);\ \theta_k \in \left[\frac{\pi}{N}\left(j_k - \frac{1}{3}\right), \frac{\pi}{N}\left(j_k + \frac{1}{3}\right)\right]\right\} \text{ si } j_1 \neq 1, N\,,$$

$$\operatorname{supp} \sigma_{(1,0,\cdots,0)}(\zeta) \subset \left\{\zeta(\theta);\ \theta_1 \in \left[0, \frac{2}{3}\frac{\pi}{N}\right]\right\}$$

$$\sigma_{(1,0,\cdots,0)}(\zeta) = 1 \quad \text{sur } \left\{\zeta(\theta);\ \theta_1 \in \left[0, \frac{1}{3}\frac{\pi}{N}\right]\right\}.$$

$$\operatorname{supp} \sigma_{(N,0,0,\cdots,0)}(\zeta) \subset \left\{\zeta(\theta);\ \theta_1 \in \left[\left(N - \frac{2}{3}\right)\frac{\pi}{N}, \pi\right]\right\}$$

$$\sigma_{(N,0,\cdots,0)}(\zeta) = 1 \quad \text{sur } \left\{\zeta(\theta);\ \theta_1 \in \left[\left(N - \frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{N}, \pi\right]\right\},$$

et

$$\sum_{J \in \Xi_1} \sigma_J(\zeta)^2 = 1 \quad \text{sur } \sum\,. \tag{7.1}$$

On peut supposer que pour chaque $J \in \Xi_1$ il existe $\zeta_0 \in \sum$ tel que

$$\bigcup_{|J-J'| \leqslant 6} \Lambda_{J'} \subset \Gamma(\zeta_0)\,, \tag{7.2}$$

si l'on prend N suffisamment large, où $\Gamma(\zeta)$ est celui de la proposition 6.2.

Soit $J_0 \in \Xi_1$ fixé. Pour $J \in \Xi$ tel que $|J - J_0| \leqslant 4$ on définit $\chi_j(J)$, $j = 1, 2, \cdots, l_2$[8], comme suit:

$$\chi_j(J) = 1$$

8) l_2 dépend de ζ_0.

si $\sum_{i=1}^{\mu} |q_{ij}(y, t: \omega, \tau)| \leqslant c|\tau - \xi(0, y, t: \omega)| \quad V(y, t: \omega, \xi) \in R^n \times \bigcup_{|J'-J|\leqslant 2} \Delta_{J'}$

$\chi_j(J) = 0$ au cas d'ailleurs.

Et puis on définit $\psi_{j0}(\zeta)$ pour $\zeta \in \bigcup_{|J'-J_0|\leqslant 4} \Lambda_{J'}$ comme suit:

$$(7.3) \qquad \psi_{j0}(\zeta) = 0 \quad \text{sur } \{\zeta;\, \mathrm{dis}\,(\zeta,\ \{\zeta',\ \zeta' \in \bigcup_{\chi_j(J')=0} \Lambda_{J'}\}) \leqslant \varepsilon_0\}$$
$$\psi_{j0}(\zeta) = 1 \quad \text{cas d'ailleurs.}$$

Posons

$$\psi_{j1}(\zeta) = \rho_{\varepsilon_0/2}(\zeta) * \psi_{j0}(\zeta)$$

où $\rho(\zeta)$ est une fonction de $C_0^\infty(R^n)$ telle que

$$\rho(\zeta) \geqslant 0, \quad \mathrm{supp}\, \rho(\zeta) \subset \{\zeta;\, |\zeta| \leqslant 1\}$$

et que

$$\int \rho(\zeta)\, d\zeta = 1\,,$$

et

$$\rho_{\varepsilon_0/2}(\zeta) = \left(\frac{2}{\varepsilon_0}\right)^n \rho\left(\frac{2\zeta}{\varepsilon_0}\right).$$

Alors si l'on prend ε_0 assez petit, on a

$$(7.4) \qquad \psi_{j1}(\zeta) = 0 \quad \text{sur } \bigcup_{\chi_j(J)=0} \Lambda_J$$

$$(7.5) \qquad \psi_{j1}(\zeta) = 1 \quad \text{si } \mathrm{dis}\,(\zeta, \bigcup_{\chi_j(J)=0} \Lambda_J) \geqslant 2\varepsilon_0\,.$$

Prenons comme $\psi_j(x, y, t: \zeta)$ la solution de l'équation

$$(7.6) \qquad \frac{\partial \lambda \psi_j}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \kappa_{j2}}{\partial \omega_l} \frac{\partial \lambda \psi_j}{\partial y_l} - \frac{\partial \kappa_{j2}}{\partial y_l} \frac{\partial \lambda \psi_j}{\partial \omega_l} \right) + \frac{\partial \kappa_{j2}}{\partial \xi} \frac{\partial \lambda \psi_j}{\partial t} - \frac{\partial \kappa_{j2}}{\partial t} \frac{\partial \lambda \psi_j}{\partial \xi} = 0$$

qui vérifie

$$(7.7) \qquad \psi_j(x, y, t: \zeta) = \psi_{j1}(\zeta) \qquad \text{pour } x \geqq \gamma\,,$$

où $\kappa_j(x, y, t: \omega, \tau)$ dénote **la** racine simple à partie négative de

$$A_0^\gamma\left(x, y, t: \frac{1}{i}\kappa, \omega, \tau\right) = 0\,.$$

Il est évident d'exister une seule solution parce que

$$(7.8) \qquad \frac{\partial \kappa_{j2}}{\partial y_l} = 0 \qquad \text{pour } x \geqslant \gamma\,.$$

Donc il ne nous reste qu'à montrer que $\psi_j(0, y, t: \omega, \tau)$ vérifie (5.26) si γ est petit. Considérons la courbe bicaractéristique de (7.6) $(x, y(x), t(x), \zeta(x))_{x\geqslant 0}$, c'est-à- dire, une courbe vérifiant

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial y_l}{\partial x} = \frac{\partial \kappa_{j2}}{\partial \omega_l}(x, y, t: \zeta)\\
&\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial \kappa_{j2}}{\partial \xi}(x, y, t: \zeta)\\
&\frac{\partial \omega_l}{\partial x} = -\frac{\partial \kappa_{j2}}{\partial y_l}(x, y, t: \zeta)\\
&\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \kappa_{j2}}{\partial t}(x, y, t: \zeta)\\
&(y(0), t(0)) = (y_0, t_0)\\
&\zeta(0) = \zeta' .
\end{aligned}$$

Alors on a $\lambda(\zeta(x))\psi_j(x, y(x), t(x); \zeta(x))=$constante pour $x\geqslant 0$. Cela signifie que ψ_j est non-négative lorsque $\psi_{j1}(\zeta)\geqslant 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
|\zeta_l(x)-\zeta_l'| &= \left|\int_0^x \frac{\partial \kappa_{j2}}{\partial y_l}(x, y, t: \zeta)\,dx\right|\\
&\leqslant \int_0^\gamma \left|\frac{\partial \kappa_{j2}}{\partial y_l}(x, y, t: \zeta)\right| dx\\
&\leqslant c\gamma ,
\end{aligned}$$

où la constante c ne dépend pas de γ. Cela signifie que $\psi_j(0, y, t: \zeta)=0$ si $\psi_{j1}(\zeta')=0$ sur $\{\zeta';\, |\zeta'-\zeta| \leqslant c\gamma\}$. En tenant compte de (7.3) et de la définition de $\chi_j(J)$, ψ_j vérifie (5.26) pourvu que γ soit petit.

Il est évident que $\{\psi_j(x, y, t: \omega, \tau)\}_{x\geqslant 0}$ est un ensemble borné de S^0 parce que ψ_j ne dépend de x seulement pour $0\leqslant x\leqslant\gamma$.

Alors pour chaque $J_0\in\Xi$, $\psi_{jJ_0}(\zeta)$, $j=1, 2, \cdots, l_2$, sont définies dans $\bigcup_{|J-J_0|\leqslant 4}\Delta_J$, qui vérifient (5.26) et (6.16).

Soit $\tilde{\sigma}_{J_0}(\zeta)$ une fonction de S^0 telle que

$$\tilde{\sigma}_{J_0}(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{sur } \bigcup_{|J-J_0|\leq 2}\Delta_J\\ 0 & \text{dans } \bigcup_{|J-J_0|\leqslant 3}\Delta_J . \end{cases}$$

Lemme 7.1. *Pour toute $U(y, t)\in H^k$ on a*

$$(7.9)\qquad \sum_{j=1}^{l_2(J_0)} \|\tilde{\sigma}_{J_0}(\Lambda\psi_{jJ_0}+\eta)P_{jJ_0}U\|_{k-1}^2+\|\tilde{\sigma}_{J_0}(I-\sum_{j=1}^{l_2(J_0)}P_{jJ_0})U\|_k^2$$
$$\leqslant C\sum_{\substack{|J-J_0|\leqslant 2\\ J\in\Xi_1}}\{\sum_{j=1}^{l_2(J)}\|(\Lambda\psi_{jJ_0}+\eta)P_{jJ}\sigma_J U\|_k^2+\|(I-\sum_{j=1}^{l_2(J)}P_{jJ})\sigma_J U\|_k^2\}^{9)}\,.$$

Démonstration. Si $P_{jJ_0}(x, y, t\colon \omega, \tau)$ est un des P_{kJ}, $k=1, 2, \cdots, l_2(J)$, pour tout $|J-J_0|\leqslant 2$, l'estimation

$$(7.10)\qquad \|\tilde{\sigma}_{J_0}(\Lambda\psi_{jJ_0}+\eta)P_{jJ_0}U\|_{k-1}^2$$
$$\leqslant C\sum_{\substack{|J-J_0|\leqslant 2\\ J\in\Xi_1}}\sum_{j=1}^{l_2(J)}\|(\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{jJ}\sigma_J U\|_{k-1}^2$$

a lieu parce que

$$(7.11)\qquad \tilde{\sigma}_{J_0}(\zeta)^2\leqslant\sum_{\substack{|J-J_0|\leqslant 2\\ J\in\Xi_1}}\sigma_J(\zeta)^2\,.$$

Pour P_{jJ_0} tel qu'il n'appartient pas à P_{kJ}, $k=k, 2, \cdots, l_2(J)$ pour certain J, $\psi_{jJ_0}(x, y, t\colon \omega, \tau)=1$ sur $\bigcup_{|J-J_0|\leqslant 4}\Delta_J$ par la définition. Donc J tel que P_{jJ} appartient aux P_{kJ}, $k=1, 2, \cdots, l_2(J)$, si l'on suppose $P_{kJ_0}=P_{kJ}$, $\psi_{kJ}=1$ sur supp $\tilde{\sigma}_{J_0}$, et pour J tel que P_{jJ_0} n'appartient pas aux $P_{jJ}, j=1, \cdots, l_2(J)$, $\|\sigma_J\tilde{\sigma}_{J_0}\Lambda\psi_{kJ_0}P_{kJ_0}U\|_{k-1}\leqslant\|\sigma_J(I-\sum_{j=1}^{l_2(J)}P_{jJ})U\|_k$. En conséquence $\|\tilde{\sigma}_{J_0}P_{jJ_0}U\|_k$ est majoré par le second membre de (7.10). On voit facilement que les autres termes du premier membre sont aussi majorées par le second membre par le même raisonnement. c.q.f.d.

Puisque

$$(\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{jJ}[\sigma_{J'}, \mathcal{M}]$$
$$=[\sigma_{J'}, \mathcal{M}](\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{jJ}+(\text{ordre } 0)\,,$$

il a lieu pour une constante $C>0$

$$(7.12)\qquad |||(\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{jJ}[\sigma_{J'}, \mathcal{M}]U|||_{0,k}$$
$$\leqslant C\{|||\tilde{\sigma}_{J'}(\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{jJ}U|||_{0,k}+C|||\tilde{\sigma}_{J'}U|||_{0,k}\}\,.$$

Prenons γ petit de façon que l'on puisse trouver $\psi_{jJ}(x, y, t\colon \omega, \tau)$ vérifiant (5.26) et (6.16) pour tout $J\in\Xi_1$. Puisque

$$(7.13)\qquad \begin{cases} \partial_x\sigma_J(D_{y,t})U=\mathcal{M}\sigma_J(D_{y,t})U+[\mathcal{M}, \sigma_J(D_{y,t})]U+\sigma_J(D_{y,t})F \\ \mathcal{B}\sigma_J(D_{y,t})U|_{x=0}=\sigma_J(D_{y,t})G+[\mathcal{B}, \sigma_J]U(0, y, t)\,, \end{cases}$$

9) Nous désignons l_2, ψ_j et P_j comme au-dessus pour clarifier qu'ils dépendent de ζ_0 tel que $\Gamma(\zeta_0)\supset\bigcup_{|J-J'|\leq 6}\Delta_{J'}$.

en tenant compte de la défintion de $\sigma_J(\zeta)$, la proposition 6.2 est applicable à (7.13) et on a pour tout J

$$(7.14)\qquad \sum_{j=1}^{l_2(J)} \|(\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{kJ}\sigma_J U\|_{k-1}^2 + \|(I-\sum_{j=1}^{l_2(J)} P_{jJ})\sigma_J U\|_k^2$$

$$+\eta\{\sum_{j=1}^{l_2(J)} |||(\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{jJ}\sigma_J U|||_{0,k-1}^2 + |||(I-\sum_{j=1}^{l_2(J)} P_{jJ})\sigma_J U|||_{0,k}^2\}$$

$$\leqslant C\Big[\frac{1}{\eta}\{\sum_{j=1}^{l_2(J)} |||(\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{jJ}\sigma_J F|||_{0,k-1}^2 + |||(I-\sum_{j=1}^{l_2(J)} P_{jJ})\sigma_J F|||_{0,k}^2$$

$$+\sum_{j=1}^{l_2(J)} |||(\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{jJ}[\mathcal{M}, \sigma_J]U|||_{0,k-1}^2$$

$$+|||(I-\sum_{j=1}^{l_2(J)} P_{jJ})[\mathcal{M}, \sigma_J]U|||_{0,k-1}^2\}$$

$$+\|\sigma_J G\|_k^2 + \|[\mathcal{B}, \sigma_J]U\|_k^2\Big].$$

Il est évident qu'il a lieu pour η large

$$(7.15)\qquad \sum_{J\in\Xi_1} \|[\mathcal{B}, \sigma_J]U\|_k^2 \leqslant C\|U\|_{k-1}^2$$

$$\leqslant \frac{C}{\eta}\sum_{J\in\Xi_1}\{\sum_{j=1}^{l_2(J)} \|(\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{jJ}\sigma_J U\|_{k-1}^2 + \|(I-\sum_{j=1}^{l_2(J)} P_{jJ})\sigma_J U\|_k\}\,.$$

Par (7.12)

$$\sum_{J\in\Xi_1}\{\sum_{j=1}^{l_2(J)} |||\tilde\sigma_J(\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{jJ}[\sigma_J, \mathcal{M}]U|||_{0,k-1}^2$$

$$+|||\tilde\sigma_J(I-\sum_{j=1}^{l_2(J)} P_{jJ})[\sigma_J, \mathcal{M}]U|||_{0,k}^2\}$$

$$\leqslant C\sum_{J\in\Xi_1}\{\sum_{j=1}^{l_2(J)} |||\tilde\sigma_J(\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{jJ}U|||_{0,k-1}^2 + |||\tilde\sigma_J(I-\sum_{j=1}^{l_2(J)} P_{jJ})U|||_{0,k}^2\}\,,$$

d'après (7.9),

$$\leqslant C\sum_{J\in\Xi_1}\{\sum_{j=1}^{l_2(J)} |||\tilde\sigma_J(\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{jJ}\sigma_J U|||_{0,k-1}^2 + |||\tilde\sigma_J(I-\sum_{j=1}^{l_2(J)} P_{jJ})\sigma_J U|||_{0,k}^2\}\,.$$

Donc on a pour η suffisamment large

$$(7.16)\qquad \sum_{J\in\Xi_1}[\sum_{j=1}^{l_2(J)} \|\tilde\sigma_J(\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{jJ}\sigma_J U\|_{k-1}^2 + \|\tilde\sigma_J(I-\sum_{j=1}^{l_2(J)} P_{jJ})\sigma_J U\|_k^2$$

$$+\eta\{\sum_{j=1}^{l_2(J)} |||\tilde\sigma_J(\Lambda\psi_{jJ}+\eta)P_{jJ}\sigma_J U|||_{0,k-1}^2 + |||\tilde\sigma_J(I-\sum_{j=1}^{l_2(J)} P_{jJ})\sigma_J U|||_{0,k}^2\}$$

$$\leqslant C\Big\{\frac{1}{\eta}|||F|||_{0,k}^2 + \|G\|_k^2\Big\}\,.$$

D'autre part

$$\eta|||U|||^2_{0,k-1}+||U||^2_{k-1}$$
$$\leqslant C\cdot\text{le premier membre de (7.16).}$$

Cela résulte

Théorème 7.2. *Pour $u(x, y, t)$ une solution quelconque du problème* (2.5), *si γ est assez petit, il a lieu l'estimation*

$$\eta|||u|||^2_{m-1,k-1}+||u||^2_{m+k-2}\leqslant C_k\left\{\frac{1}{\eta}|||f|||^2_{0,k}+\sum_{j=1}^{\mu}||g_j||^2_{m-m_j+k-1}\right\}$$

pour η suffisamment large.

8. L'existence et la régularité des solution de (2.5)

Pour un opérateur differentiel $Q(x, y, t\colon D_x, D_y, D_t)$ on désigne par $Q_\varepsilon(x, y, t\colon D_x, D_y, D_t)$ un opérateur pseudo-différentiel défini par le symbole

$$Q_\varepsilon(x, y, t\colon \kappa, \omega, \tau) = Q(x, y, t\colon \kappa, \omega, \tau-i\varepsilon\lambda(\omega, \tau))\,.$$

Considérons le problème suivant:

$$(8.1)\qquad \begin{cases} A^\eta_\varepsilon(x, y, t\colon D_x, D_y, D_t-i\eta)u(x, y, t)=f(x, y, t) \\ B^\eta_\varepsilon(x, y, t\colon D_x, D_y, D_t-i\eta)u(x, y, t)|_{x=0}=g_j(y, t) \end{cases}$$
$$j=1, 2, \cdots, \mu.$$

Lemme 8.1. *On peut trouver $\varepsilon_0>0$ et $\eta_0>0$ tels que, si $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ et $\eta\geqslant\eta_0$ on a l'estimation*

$$(8.2)\qquad |||(\eta+\varepsilon\Lambda)u|||^2_{m-1,k-1}+||(\varepsilon\Lambda+1)u||^2_{m+k-2}$$
$$\leqslant C_k\{|||(\eta+\varepsilon\Lambda)^{-1}f|||^2_{0,k}+\sum_{j=1}^{\mu}||g_j||^2_{m-m_j-1+k}\}$$

où C_k est indépendant de ε.

Démonstration. Supposons que $U(x, y, t)$ satisfait à l'hypothèse de la proposition 6.2. On obtient l'estimation

$$(8.3)\qquad \sum_{j=1}^{l_2}|||(\eta+\varepsilon\Lambda)(\Lambda\psi_j+\eta+\varepsilon\Lambda)P_jU|||^2_{0,k-1}$$
$$+|||(\eta+\varepsilon\Lambda)(I-\sum_{j=1}^{l_2}P_j)U|||^2_{0,k}$$
$$+\sum_{j=1}^{l_2}||(\Lambda\psi_j+\eta+\varepsilon\Lambda)P_jU||^2_{k-1}+||(I-\sum_{j=1}^{l_2}P_j)U||^2_k$$
$$\leqslant C_k(|||(\eta+\varepsilon\Lambda)^{-1}f|||^2_{0,k}+||G||^2_k)$$

où C_k est indépendant de ε, parce que l'on peut effectuer le raisonnement de la proposition 6.2 en remplacant η par $\eta+\varepsilon\lambda(\omega, \tau)$ sans aucune modification. Et la considération du paragraphe 7 est aussi applicable pour le problème (8.1). Donc on voit que (8.1) a lieu. c.q.d.f.

Lemme 8.2. *On trouve $\varepsilon_0'>0$ et $\eta_0'>0$ tels que, pour $\{f, g_j\}\in H^{0,k}\times \prod_{j=1}^{\mu} H^{m-m_j+k-1}$, il existe une et une seule solution $u(x, y, t)$ de (8.1) dans $H^{m-1,k}$ si $\varepsilon_0'>\varepsilon>0$ et $\eta>\eta_0'$.*

Démonstration. D'après la définition de A_ε^γ et l'hyperbolicité stricte de A, on voit immediat

$$|A^\gamma_\varepsilon(x, y, t\colon \kappa, \omega, \xi-i\eta)| \geqslant C\varepsilon^m(\kappa^2+|\omega|^2+\xi^2)^{m/2} \quad \text{pour } (\kappa, \omega, \xi)\in R^{n+1}\,. \tag{8.4}$$

Et plus le déterminant de Lopatinski $R^\gamma(y, t\colon \omega, \tau; \varepsilon)$ de (8.1), c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} R^\gamma(y, t\colon \omega, \tau\colon \varepsilon) &= \text{dét}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{B^\gamma_{i0\varepsilon}(y, t\colon \kappa, \omega, \tau)\kappa^{j-1}}{A^\gamma_{\varepsilon+}(0, y, t\colon \kappa, \omega, \tau)}d\kappa\right] \\ &= R^\gamma(y, t\colon \omega, \tau-i\varepsilon\lambda(\omega, \tau))\,, \end{aligned}$$

où R^γ est le déterminant de Lopatinski de $\{A^\gamma, B^\gamma_j\}$.

La condition III nous assure que

$$|R^\gamma(y, t\colon \omega, \tau\colon \varepsilon)| \geqslant c>0 \quad \text{pour tout } (y, t)\in R^n \text{ et } (\omega, \tau)\in \{(\omega, \tau);\, \omega^2+|\tau|^2=1,\ \mathrm{Im}\,\tau\leqslant 0\}\,. \tag{8.5}$$

A_ε^γ et $B^\gamma_{j\varepsilon}$ ne sont plus des opérateurs différentiels, mais par rapport à x ils sont encore des opérateurs différentiels. Donc on peut dire que le problème au limit (8.1) est elliptique et appliquer la méthode bien connue de l'existence des solutions des problèmes au limit du type elliptique. En effet, si l'on construit des systèmes adjoints de $\{A, B_j\}$ et de $\{A^\gamma_\varepsilon, B^\gamma_{j\varepsilon}\}$ en suivant la méthode de Sakamoto [7], on a $\{A^{\gamma\prime}_\varepsilon, B^{\gamma\prime}_{j0\varepsilon}\}=\{(A_0')^\gamma_\varepsilon, (B'_{j0})^\gamma_\varepsilon\}$ où $\{A^{\gamma\prime}_{\varepsilon0}, B^{\gamma\prime}_{j0\varepsilon}\}$ et $\{A', B'\}$ dénotent des systèmes adjoints de $\{A^\gamma_\varepsilon, B^\gamma_{j\varepsilon}\}$ et de $\{A, B_j\}$ respectivement. En utilisant lemme 5.2 de [8]

$$|\text{le déterminant de Lopatinski de } \{A^{\gamma\prime}_\varepsilon, B^{\gamma\prime}_{j\varepsilon}\}| \geqslant c>0 \quad \text{pour tout } (y, t) \text{ et } (\omega, \tau)\in \{(\omega, \tau);\, |\omega|^2+|\tau|^2=1,\ \mathrm{Im}\,\tau\leqslant 0\}\,.$$

Donc on voit que la méthode pour les problèmes du type elliptique est applicable, en conséquence notre lemme est démontré. c.q.f.d.

Lemme 8.3. *Supposons que γ est petit et ζ suffisamment large. Pour $\{f, g_j\}$ quelconque de $H^{0,k}\times \prod_{j=1}^{\mu} H^{m-m_j-1+k}$ il existe une et une seule solution $u(x, y, t)\in H^{m-1,k-1}$ de*

$$(8.6)\qquad \begin{cases} A^{\gamma}(x, y, t: D_x, D_y, D_t-i\eta)u(x, y, t) = f(x, y, t) \\ B^{\gamma}_j(y, t: D_x, D_y, D_t-i\eta)u(x, y, t)|_{x=0} = g_j(y, t) \qquad j=1, 2, \cdots, \mu . \end{cases}$$

Démonstration. Grâce au lemme 8.2 il existe une solution $u(x, y, t: \varepsilon)$ de (8.1) pour tout $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. D'autre part, d'après l'estimation (8.2) on voit que

$$\{u(x, y, t: \varepsilon);\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\}$$

est un ensemble borné de $H^{m-1,k-1}$. Donc il est faiblement compact dans $H^{m-1,k-1}$, en conséquence on peut trouver ε_j, $j=1, 2, \cdots$ tels que $\varepsilon_j\to+0$ et $u(x, y, t: \varepsilon_j)$ converge faiblement dans $H^{m-1,k-1}$ lorsque $j\to\infty$. Désignons par $u(x, y, t)$ le limit de $u(x, y, t: \varepsilon_j)$. On voit immediat que $u(x, y, t)$ est la solution désirée. L'unicite des solutions de (8.6) résulte de l'estimation à priori des solutions. c.q.f.d.

En utilisant

$$\begin{aligned} &A(x, y, t: D_x, D_y, D_t)u)(x, y, t) \\ &= e^{\eta t}A(x, y, t: D_x, D_y, D_t-i\eta)(e^{-\eta t}u(x, y, t)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &B_j(y, t: D_x, D_y, D_t)u(x, y, t)|_{x=0} \\ &= e^{\eta t}B(y, t: D_x, D_y, D_t-i\eta)(e^{-\eta t}u(x, y, t))|_{x=0}, \end{aligned}$$

on déduit du théorème 7.2 et du lemme 8.3

Lemme 8.4. *Pour $\{f, g_j\}\in H^{0,k}_{\eta}\times \prod_{j=1}^{\mu} H^{m-m_j+k-1}_{\eta}$ quelconque il existe une et une seule solution $u(x, y, t)$ dans $H^{m-1,k-1}_{\eta}$ de*

$$(8.7)\qquad \begin{cases} A^{\gamma}(x, y, t: D_x, D_y, D_t)u = f \\ B^{\gamma}_j(y, t: D_x, D_y, D_t)u|_{x=0} = g_j \qquad j=1, 2, \cdots, \mu , \end{cases}$$

et il a lieu l'estimation

$$(8.8)\qquad \begin{aligned} &\eta|||u|||^2_{m-1,k-1,\eta}+||u||^2_{m+k-2,\eta} \\ &\leqslant C\Big\{\frac{1}{\eta}|||f|||^2_{0,k,\eta}+\sum_{j=1}^{\mu}||g_j||^2_{m-m_j+k-1,\eta}\Big\}, \end{aligned}$$

où

$$|||u|||_{l,p,\eta} = |||e^{-\eta t}u|||_{l,p} \quad et \quad ||u||_{p,\eta} = ||e^{-\eta t}u||_{p} .$$

Il résulte de (8.8) le fait suivant: si supp f_j et supp g_j sont contenus dans $\{t; t \geqslant t_0\}$ supp u est aussi contenu dans $\{t; t \geqslant t_0\}$. En effet, notons que pour $h(x, y, t) \in H_{l,k,\eta}$ supp $h \subset \{t; t \geqslant t_0\}$ est équivalent à

$$|||e^{\eta t_0} h(x, y, t)|||_{l,k,\eta} \leqslant C \qquad \forall \eta \geqslant \eta_0 .$$

Supposons que supp f et supp g sont contenus dans $\{t; t \geqslant t_0\}$ on voit par la remarque au-dessus que le second membre de (8.8) est majoré par $Ce^{-\eta t_0}$ pour tout $\eta \geqslant \eta_0$. Donc on a

$$|||e^{\eta t_0} u(x, y, t)|||_{m-1, j-1, \eta} \leqslant C\eta^{-1} \qquad \forall \eta \geqslant \eta_0 ,$$

cela nous montre que

$$\text{supp}\, u \subset \{t; t \geqslant t_0\} .$$

Soit $\{h_j, g_j, f\} \in \sum(k: A^\gamma, B_j^\gamma, R_+^n, 0)$. Les données h_j et f peuvent se prolonger en fonctions $\tilde{h}_j$ et $\tilde{f}$ définies dans $R_x \times R_y^{n-1}$ et $R_x \times R_y^{n-1} \times R_{+t}$ de façon que

$$\|\tilde{h}_j\|_{m+k-j, L^2(R^n)} \leqslant C \|h_j\|_{m+k-j, L^2(R_+^n)}$$
$$\|\tilde{f}\|_{k, L^2(R_+^{n+1})} \leqslant C \|f\|_{k, L^2(R_+^n \times R_+)} .$$

Soit $v(x, y, t)$ une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} A^r v = \tilde{f} & \text{dans } R^n \times (0, \infty) \\ D_t^j v|_{t=0} = \tilde{h}_j & j = 0, 1, 2, \cdots, m-1 . \end{cases}$$

Alors $e^{-\eta t} v \in H^{m+k-1}(R^n \times R_+)$ et il a lieu

$$\eta \|e^{-\eta t} v\|^2_{m+k-1, L^2(R^n \times R_+)} \leqslant C \Big\{ \sum_{j=0}^{m-1} \|\tilde{h}_j\|^2_{m+k-j, L^2(R^n)} + \eta^{-1} \|e^{-\eta t} \tilde{f}\|^2_{k, L^2(R^n \times R_+)} \Big\} . \tag{8.9}$$

Posons

$$\tilde{g}_j(y, t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ g_j - B_j v|_{x=0} & t \geqslant 0 \end{cases}$$

et la condition de compatibilité assure que

$$\tilde{g}_j(y, t) \in H^{m-m_j+k-1} . \tag{8.10}$$

En effet, puisque $g_j - B_j v|_{x=0} \in H^{m-m_j+k-1}(R^{n-1} \times R_+)$ il suffit de verifier

$$\lim_{t \to 0} \partial_t^l (g_j - B_j v|_{x=0}) = 0 \qquad l = 0, 1, \cdots, m - m_j + k - 2 ,$$

mais ce n'est rein d'autre que la condition de compatibilité d'ordre k.

Grâce au lemme 8.4 l'existence d'une fonction $w(x, y, t)$ dans $H_\eta^{m-1, k-1}$ avec le support contenu dans $\{t; t \geqslant 0\}$ vérifiant

$$\begin{cases} A^{\gamma}w = 0 \\ B_j^{\gamma}w = g_j - (B_j v)|_{x=0} . \end{cases}$$

Alors

$$u = v + w$$

est une solution désirée.

L'unicité des solutions déduit du théorème 7.2.

Nous abordons l'étude de la régularité des solutions. Supposons que

$$(8.11) \qquad \begin{cases} h_j(x, y) = 0 & j = 0, 1, \cdots, m-1 \\ f(x, y, t) \in H_\eta^{p,k} \\ g_j(y, t) \in H_\eta^{m-m_j+k+p} \end{cases}$$

Puisque $f \in H_\eta^{0,p+k}$ le lemme 8.4 nous montre

$$(8.12) \qquad u(x, y, t) \in H_\eta^{m-1,p+k-1} .$$

D'après $A^{\gamma}u = f$

$$(8.13) \qquad D_x^m u = -\sum_{j=1}^{m} \frac{a_j^{\gamma}}{a_0^{\gamma}} D_x^{m-j} u + f(x, y, t) .$$

Alors (8.12) montre que le second membre de (8.13) appartient à $H_\eta^{0,p+k-2}$. Donc on a

$$(8.14) \qquad u(x, y, t) \in H_\eta^{m,p+k-2} .$$

Si $p-1 \geqslant 1$, (8.13) et (8.14) nous donne

$$u(x, y, t) \in H_\eta^{m+1,p+k-3} .$$

On fait progressivement ce raisonnement et on obtient finallement

$$u(x, y, t) \in H_\eta^{m+p-1,k-1} .$$

Pour des données initiales non zéros il se ramène au cas des données initiales zéros avec l'aide de la solution du problème de Cauchy pour les données $\tilde{h}_j(x, t)$ qui sont des prolongements de $h_j(x, y)$ pour $x<0$, comme on l'a utilisé pour montrer l'existence des solutions.

De cette façon nous avons

Théorème 8.1. *Soit γ assez petit. Pour $\{h_j, g_j, f\} \in \sum(p\colon A^{\gamma}, B_j^{\gamma}, R_+^n, 0)$ quelconque, il existe une et une seule solution $u(x, y, t)$ de (2.5) dans $H_\eta^{m+p-2,0}$.*

9. La vitesse finie propagatrice

Puisque $R(y, t: \omega, \tau) \neq 0$ pour $\omega \in R^{n-1}$, $\operatorname{Im} \tau < 0$ et $R(y, t: 0, 1) \neq 0$ on voit que pour chaque (y, t) fixé $R(y, t: \omega, \tau)$ est une fonction hyperbolique par rapoprt à $(0, 1)$ avec un cône $C(y, t)$, qui est donné par

$$C(y, t) = \{(\omega, \xi); \xi > \sigma_0(y, t: \omega)\}$$

où $\sigma_0(y, t: \omega)$ est une fonction continue à valeurs réelles telle que

$$\sigma_0(y, t: \lambda\omega) = \lambda\sigma_0(y, t: \omega) \qquad \forall \lambda > 0 .$$[10]

D'après la définition des fonctions hyperboliques on a

$$R(y, t: \omega, \tau) \neq 0 \qquad \text{pour} \quad (\omega, \tau) \in R^n - iC(y, t) ,$$

en tenant compte de l'homogénéité de R. Cela signifie

$$\text{(9.1)} \qquad R(y, t: \omega + \mu\tau, \nu\tau) \neq 0 , \qquad \text{si } (\mu, \nu) \in C(y, t) ,$$
$$\text{pour tout } \omega \in R^{n-1},\ \operatorname{Im} \tau < 0 .$$

Lemme 9.1. *Il existe un cône $C'(y, t)$ contenant* (0.1) *tel que pour $\varphi(y, t)$ vérifiant*

$$(\varphi_y(y, t), \varphi_t(y, t)) \in C'(y, t)$$

$\tilde{\mathfrak{R}}(y, t: \omega, \tau)$ la matrice de Lopatinski de

$$\tilde{A}(x, y, t: \kappa, \omega, \tau) = A(x, y, t: \kappa, \omega + \varphi_y\tau, \varphi_t\tau)$$
$$\tilde{B}_j(y, t: \kappa, \omega, \tau) = B_j(y, t: \kappa, \omega + \varphi_y\tau, \varphi_t\tau)$$

satisfait anx conditions I, II et III données dans le paragraphe 1.

Démonstration. D'abord notons que

$$\text{(9.2)} \qquad \tilde{\mathfrak{R}}(y, t: \omega, \tau) = \mathfrak{R}(y, t: \omega + \varphi_y(y, t)\tau, \varphi_t(y, t)\tau)$$

où $\mathfrak{R}$ est la matrice de Lopatinski de $\{A, B_j\}$. Posons

$$\tilde{R}(y, t: \omega, \tau) = \text{dét}\, \tilde{\mathfrak{R}}(y, t: \omega, \tau) .$$

$\tilde{R}(0, 0: \omega_0, \xi_0) = 0$ est équivalent à $R(0, 0: \omega_0 + \varphi_y\xi_0, \varphi_t\xi_0) = 0$. Donc par la condition III on a

$$\varphi_t\xi_0 = \xi(0, 0: \omega_0 + \varphi_y\xi_0) .$$

10) La définition des fonctions hyperboliques et leurs propriétés fondamentaux sont données dans le paragraphe 2 de Sakamoto [8]. Les faits que nous avons décrits se déduisent du lemme 4.1 de [8].

Sous la condition de

$$(9.3)\qquad \varphi_t > \sum_{i=1}^{n-1} \left|\frac{\partial \xi}{\partial \omega_i}\right| |\varphi_{y_i}|$$

il existe une fonction $\tilde{\tilde{\xi}}(y, t\colon \omega)$ définie dans un voisinage de $(0, 0, \omega_0)$ telle que

$$\xi = \tilde{\tilde{\xi}}(y, t\colon \omega)$$

est équivalent à

$$\varphi_t \xi = \xi(y, t\colon \omega + \varphi_y \xi)\,.$$

On voit que l'ordre du zéro de $\varphi_t \tau - \xi(y, t\colon \omega + \varphi_y \tau)$ au point $\tau = \tilde{\tilde{\xi}}(y, t\colon \omega)$ est 1. En conséquence dans un voisinage de $(0, 0\colon \omega_0, \xi_0)$

$$\begin{aligned} \tilde{R}(y, t\colon \omega, \tau) &= (\varphi_t \tau - \xi(y, t\colon \omega + \varphi_y \tau))^\theta \tilde{\tilde{R}}(y, t\colon \omega, \tau) \\ &= (\tau - \tilde{\tilde{\xi}}(y, t\colon \omega))^\theta \tilde{\tilde{R}}'(y, t\colon \omega, \tau) \end{aligned}$$

et $\tilde{\tilde{R}}' \neq 0$. Donc $\tilde{R}$ vérifie ii) de la condition III.

Considérons les racines par rapport à κ de

$$\tilde{A}_0(0, y, t\colon \kappa, \omega, \xi) = A_0(0, y, t\colon \kappa, \omega + \varphi_y \xi, \varphi_t \xi) = 0$$

pour (y, t, ω, ξ) dans un voisinage de $(0, 0, \omega_0, \xi_0)$. Soit $\kappa(y, t\colon \omega, \xi)$ une racine simple de $A_0(0, y, t\colon \kappa, \omega, \xi) = 0$ pour (y, t, ω, ξ) dans un voisinage de $(0, 0, \omega_0 + \varphi_y(0, 0)\xi_0, \varphi_t(0, 0)\xi_0)$. Alors $\kappa(y, t\colon \omega + \varphi_y \xi, \varphi_t \xi)$ est une racine simple de $\tilde{A}_0(0, y, t\colon \kappa, \omega, \xi) = 0$. Réciproquement, lorsque $\tilde{\kappa}(y, t\colon \omega, \xi)$ est une racine simple de $\tilde{A}_0(0, y, t\colon \kappa, \omega, \xi) = 0$, $\kappa(y, t\colon \omega', \xi') = \tilde{\kappa}(y, t\colon \omega' + \varphi_y \xi', \varphi_t \xi')$ est aussi une racine simple de $A_0(0, y, t\colon \kappa, \omega', \xi') = 0$. En conséquence

$$\tilde{\mathfrak{R}}_I(y, t\colon \omega, \tau) = \mathfrak{R}_I(y, t\colon \omega + \varphi_y \tau, \varphi_t \tau)\,,$$

donc

$$\tilde{\mathfrak{R}}_{II}(y, t\colon \omega, \tau) = \mathfrak{R}_{II}(y, t\colon \omega + \varphi_y \tau, \varphi_t \tau)\,.$$

On voit immédiat

$$(9.4)\qquad \operatorname{rank} \tilde{\mathfrak{R}}_I = l_2 - \theta$$

$$(9.5)\qquad \operatorname{rank} \tilde{\mathfrak{R}} = \operatorname{rank} \tilde{\mathfrak{R}}_I + \operatorname{rank} \tilde{\mathfrak{R}}_{II}\,.$$

D'autre part, par (9.1) il a lieu

$$\tilde{R}(y, t\colon \omega, \tau) = R(y, t\colon \omega + \varphi_y \tau, \varphi_t \tau) \neq 0 \qquad \text{pour tout}\quad \omega \in R^{n-1},\ \operatorname{Im} \tau < 0$$

lorsque

$$(9.6)\qquad (\varphi_y, \varphi_t) \in C(y, t)\,.$$

Donc le lemme est démontré pourvu que l'on prende $C'(y, t)$ de façon que $(\varphi_y, \varphi_t)\in C'(y, t)$ entraine (9.3) et (9.6). c.q.f.d.

Nous allons montrer que le problème mixte représente un phénomène propagateur avec une vitesse finie.

Lemme 9.2. (L'unicité localle des solutions) *Supposons que* $\{A, B_j\}$ *satisfait aux conditions I, II et III dans un voisinage* $\mathcal{U}$ *de* $(0, 0, 0)\in R^{n+1}$. *Etant donnée* $u\in C^m(\mathcal{U})$ *satisfaisant à*

(9.7) $\quad Au = 0 \quad$ *dans* $\quad \mathcal{U}\cap(R^n_+\times R_+)$

(9.8) $\quad B_j u = 0 \quad$ *dans* $\quad \mathcal{U}\cap(R^{n-1}\times R_+) \quad j = 1, 2, \cdots, \mu$

(9.9) $\quad (D_t^j u)(x, y, 0) = 0 \quad$ *dans* $\quad \mathcal{U}\cap(R^n_+\times \{t=0\})$.

Alors il existe un voisinage $\mathcal{U}'$ *de* $(0, 0, 0)$ *de* R^{n+1} *tel que* $u(x, y, t)=0$ *dans* $\mathcal{U}'\cap(R^n_+\times R_+)$.

Démonstration. Considérons la transformation de Folmgren

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ t' = t+x^2+|y|^2 . \end{cases}$$

Il existe $\varepsilon_0>0$ tel que

(9.10) $\quad D_{\varepsilon_0} = \{(x, y, t);\ t+x^2+|y|^2\leqslant\varepsilon_0,\ t>0\}\subset\mathcal{U}$.

Définissons $\tilde{u}(x', y', t')$ par

$$\tilde{u}(x', y', t') = \tilde{u}(x, y, t+x^2+|y|^2) = u(x, y, t)$$
$$\text{dans } \{(x', y', t');\ \varepsilon_0\geqslant t'\geqslant x'+|y'|^2,\ x'\geqslant 0\}$$

et

$$\tilde{u}(x', y', t') = 0 \qquad \text{dans } \{(x', y', t');\ t'\leqslant\varepsilon_0,\ t'\leqslant x'^2+|y'|^2,\ x'\geqslant 0\} .$$

Notons que

$$\partial_t^m u(x, y, 0) = 0 \qquad \text{dans } \{(x, y);\ x^2+|y|^2\leqslant\varepsilon_0,\ x>0\}$$

d'après (9.7) et (9.9). Donc on a

(9.11) $\quad \tilde{u}(x', y', t')\in C^m(R^n_+\times(-\infty, \varepsilon_0))$

et

(9.12) $\quad \operatorname{supp}\tilde{u}\subset\{(x', y', t');\ t'\geqslant x'^2+|y'|^2\}$.

D'autre part, si l'on pose

$$\begin{aligned}&\tilde{A}(x', y', t': D_{x'}, D_{y'}, D_{t'})\\ &= A(x, y, t: D_{x'}+2xD_{t'}, D_{y'}+2yD_{t'}, D_{t'})\\ &\tilde{B}_j(y', t': D_{x'}, D_{y'}, D_{t'})\\ &= B_j(y, t: D_{x'}+2xD_{t'}, D_{y'}+2yD_{t'}, D_{t'}),\end{aligned}$$

$\tilde{u}(x', y', t')$ satisfait à

$$\begin{aligned}\tilde{A}\tilde{u} &= 0 \qquad \text{dans} \quad R^n_+ \times (-\infty, \varepsilon_0)\\ \tilde{B}_j\tilde{u} &= 0 \qquad \text{dans} \quad R^{n-1} \times (-\infty, \varepsilon_0).\end{aligned}$$

Remarquons que, grâce au lemme 9.1, $\{\tilde{A}, \tilde{B}_j\}$ satisfait aux conditions I, II et III dans $\{(y, t); |(y, t)| < \varepsilon_0\}$ si ε_0 est petit. Fixons $\gamma > 0$ de telle façon qu'il ait lieu l'estimation à priori du théorème 7.2 pour $\{\tilde{A}^\gamma, \tilde{B}^\gamma_j\}$. Si l'on prend $\varepsilon_0 > 0$ petit par rapport à γ, en tenant compte de (9.12), on a

$$\begin{aligned}\tilde{A}^\gamma\tilde{u} &= 0 \qquad \text{dans} \quad R^n_+ \times (-\infty, \varepsilon_0)\\ \tilde{B}^\gamma_j\tilde{u} &= 0 \qquad \text{dans} \quad R^{n-1} \times (-\infty, \varepsilon_0).\end{aligned}$$

Alors le théorème 7.2 nous montre

(9.13) $\quad \tilde{u}(x', y', t') = 0 \qquad \text{pour} \quad t' \leqslant \varepsilon_0.$

Cela signifie que $u(x, y, t) = 0$ dans $D_{\varepsilon_0} \cap (R^n_+ \times R_+)$. c.q.f.d.

L'unicité localle des solutions dans un voisinage de (x, y, t) tel que $x > 0$ se déduit de celle du problème de Cauchy pour A.

Dénotons par v_C la vitesse propagatrice du problème de Cauchy pour A, et posons

(9.14) $\quad v_0 = \inf_{v \in V_{C'}} v$

où

$$V_{C'} = \{v; \{(\omega, \xi); \xi \geqslant v|\omega|\} \subset C'(y, t), V(y, t)\}.$$

Définissons

$$\begin{aligned}\Lambda(x_0, y_0, t_0) = \{(x, y, t); &|x - x_0| \leqslant v_C(t_0 - t),\\ &|y - y_0| \leqslant v_0(t_0 - t)\}.\end{aligned}$$

Théorème 9.3. *Soit $\gamma > 0$ fixé. Supposons que une fonction $u(x, y, t) \in C^m(\Lambda(x_0, y_0, t_0) \cap (R^n_+ \times R_+))$ vérifie*

(9.15) $\quad A^\gamma u = 0 \qquad$ *dans* $\Lambda(x_0, y_0, t_0) \cap (R^n_+ \times R_+)$

(9.16) $\quad B^\gamma_j u = 0 \qquad$ *dans* $\Lambda(x_0, y_0, t_0) \cap (R^{n-1} \times R_+)$

(9.17) $\quad D^j_t u|_{t=0} = 0 \qquad$ *dans* $\Lambda(x_0, y_0, t_0) \cap (R^n_+ \times \{t = 0\}).$

On a

$$u(x, y, t) = 0 \qquad \textit{dans} \quad \Lambda(x_0, y_0, t_0) \cap (R^n_+ \times R_+)\,.$$

Démonstration. On peut supposer que $u(x, y, t)$ est une fonction de $C^m(R^n_+ \times R_+)$. Posons

$$u_j(x, y) = D_t^j u(x, y, 0), \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, m-1\,,$$
$$f(x, y, t) = A^\gamma u(x, y, t)$$

et d'après (9.15) et (9.17) nous pouvons prolonger u_j et f en $\tilde{u}_j \in C^{m-j}(R^n)$ et en $\tilde{f} \in C^0(R^n \times R_+)$ de telle façon que

$$\operatorname{supp} \tilde{u}_j(x, y) \subset \{(x, y);\ |x_0 - x| \geqslant v_C t_0,\ |y_0 - y| \geqslant v_0 t_0\}$$
$$\operatorname{supp} \tilde{f}(x, y, t) \subset \{(x, y, t);\ |x - x_0| \geqslant v_C(t_0 - t)\,,$$
$$|y - y_0| \geqslant v_0(t_0 - t)\}\,.$$

Prenons une fonction $w(x, y, t) \in C^m(R^n \times R_+)$ telle que

$$A^\gamma w(x, y, t) = \tilde{f}(x, y, t) \qquad \text{pour} \quad t > 0$$
$$D_t^j w(x, y, 0) = \tilde{u}_j(x, y)\,.$$

Par la définition de la vitesse propagatrice et la situation des supports de $\tilde{u}_j$ et de $\tilde{f}$, si $v_0 \geqslant v_C$,

$$\operatorname{supp} w(x, y, t) \subset \{(x, y, t);\ |x - x_0| \geqslant v_C(t_0 - t)\,,\ |y - y_0| \geqslant v_0(t_0 - t)\}\,. \tag{9.18}$$

Posons

$$v(x, y, t) = u(x, y, t) - w(x, y, t)$$

et on a

$$\begin{cases} A^\gamma v = 0 & \text{dans} \quad R^n_+ \times R_+ \\ B_j^\gamma v\,|_{x=0} = 0 & \text{dans } \Lambda(x_0, y_0, t_0) \cap (R^{n-1} \times R_+) \\ (D_t^j v)(x, y, 0) = 0 & \text{dans} \quad R^n_+\,. \end{cases} \tag{9.19}$$

L'unicité localle est déjà démontrée. D'autre part les conditions I, II et III sont stables sous la transformation

$$\begin{cases} t' = \varphi(y, t) \\ y' = y \end{cases}$$

pourvu que $(\varphi_y, \varphi_t) \in C'(y, t)$. Donc on peut profiter la méthode "sweeping out" de F. John en prenant

$$\varphi_\theta(y, t) = v_0(t_0 - t) - \sqrt{|y - y_0|^2 + \theta}$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant v_0 t_0$$

et montrer que

$$(9.20) \qquad v(x, y, t) = 0 \qquad \text{dans } \{(x, y, t);\ |y_0 - y| \leqslant v_0(t_0 - t)\}\ .$$

Alors (9.18) et (9.20) nous donnent

$$u(x, y, t) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Lambda(x_0, y_0, t_0) \cap (R^n_+ \times R_+)\ .$$

c.q.f.d.

UNIVERSITÉ D'OSAKA

Références

[1] S. Agmon: *Problèmes mixtes pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur*, Colloques internationaux du C.N.R.S., 1963, 13–18.

[2] T. Balaban: *On the mixed problem for a hyperbolic equation*, Mem. Amer. Math. Soc., No. 112 (1970).

[3] M. Ikawa: *On the mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition*, Proc. Japan Acad. **44** (1968), 1033–1037.

[4] M. Ikawa: *Mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition*, Osaka J. Math. **7** (1970), 495–525.

[5] M. Ikawa: *Remarques sur les problèmes mixtes pour l'équation des ondes*, Colloque international du C.N.R.S., 1973, Astérisque 2 et 3, 217–221.

[6] O.H. Kreiss: *Initial boundary value problems for hyperoblic systems*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 277–298.

[7] R. Sakamoto: *Mixed problems for hyperbolic equations*, I *and* II, J. Math. Kyoto Univ. **10** (1970), 349–373, 403–417.

[8] R. Sakamoto: *$\mathcal{E}$-well posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients*, J. Math. Kyoto Univ. **14** (1974), 93–118.

[9] M. Tsuji: *Characterization of the well-posed mixed problem for wave equation in a quarter space*, Proc. Japan Acad. **50** (1974), 138–142.