

UNE CARACTÉRISATION SUR LE PRINCIPE RELATIF DE DOMINATION POUR LES NOYAUX DE RIESZ-FROSTMAN

MASAYUKI ITÔ

(Received September 13, 1972)

1. Introduction et résultat

Soit R^n l'espace euclidien à dimensions $n (\geq 1)$; on note par $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ son point et pose $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$. Pour un nombre α avec $0 < \alpha < n$, le noyau de Riesz-Frostman d'ordre α est une fonction $x \rightarrow |x|^{\alpha-n}$ sur R^n , et il s'écrira symboliquement $r^{\alpha-n}$. Pour une mesure de Radon réelle μ dans R^n , le potentiel de Riesz-Frostman d'ordre α par μ est défini par

$$u_{\mu}^{(\alpha)}(x) = \int |x-y|^{\alpha-n} d\mu(y)$$

dès que la convolution $r^{\alpha-n} * \mu$ a un sens.

La notion du principe relatif de domination a été explicitement introduite par N. Ninomiya (cf. [4]), et il l'a discuté pour les noyaux de Riesz-Frostman (cf. [5]). Cette amélioration est obtenue dans [2], qui est l'énoncé suivant:

Soient α, β deux nombres avec $0 < \alpha \leq 2$ et $\alpha \leq \beta < n$. Alors $r^{\alpha-n}$ satisfait au principe de domination relatif à $r^{\beta-n}$; c'est-à-dire, quelles que soient μ, ν mesures de Radon positives dans R^n à support compact et avec

$$I(\mu; \alpha) = \int u_{\mu}^{(\alpha)}(x) d\mu(x) < +\infty,$$

$u_{\mu}^{(\alpha)}(x) \leq u_{\nu}^{(\beta)}(x)$ partout sur R^n dès que la même inégalité a lieu sur le support de μ , $\text{supp}(\mu)$.

Cela se base tout à fait sur le principe de domination pour $r^{\alpha-n}$ ¹⁾, et ce résultat est généralisé pour les noyaux de convolution de Hunt (cf. [3]).

Dans cette note, nous discuterons son inverse.

1) Si $r^{\alpha-n}$ satisfait au principe de domination relatif à lui-même, on dit simplement que cela satisfait au principe de domination.

Théorème. Soit α un nombre avec $0 < \alpha < n$. Alors l'énoncé suivant a lieu si et seulement si $0 < \alpha \leq 2$.

Il existe un noyau de convolution borné $N (\neq 0)$ sur R^n invariant par rotations²⁾ relatif auquel $r^{\alpha-n}$ satisfait au principe de domination; c'est-à-dire, quelles que soient μ une mesure de Radon positive dans R^n à support compact et φ une fonction non-négative, finie et continue dans R^n à support compact, $u_\mu^{(\alpha)} \leq N * \varphi$ partout sur R^n dès que $u_\mu^{(\alpha)}(x) \leq N * \varphi(x)$ sur $\text{supp}(\mu)$.

2. Deux lemmes

Remarquons d'abord la formule de Riesz. Pour deux nombres positifs α, β avec $\alpha + \beta < n$, il existe une constante positive $C(\alpha, \beta)$ telle que

$$r^{\alpha-n} * r^{\beta-n} = C(\alpha, \beta) r^{\alpha+\beta-n}$$

(cf. [6]). On désigne par Δ l'opérateur différentiel qui vérifie $\Delta r^{2-n} = -\varepsilon$ au sens des distributions, où ε est la mesure de Dirac à l'origine, et alors Δ est proportionnel au laplacien ordinaire sur R^n . Pour $0 < \alpha < 2$, la distribution $\text{pf. } r^{-\alpha-n}$ est de la forme

$$\text{pf. } r^{-\alpha-n}(\varphi) = \int (\varphi(x) - \varphi(0)) |x|^{-\alpha-n} dx$$

pour toute fonction infiniment dérivable φ dans R^n à support compact, et alors il existe une autre constante positive $A(\alpha)$ telle que

$$A(\alpha)(\text{pr. } r^{-\alpha-n}) * r^{\alpha-n} = -\varepsilon$$

au sens des distributions (cf. par exemple, [1]). On note $\Delta^{\alpha/2} = A(\alpha) \text{pf. } r^{-\alpha-n}$.

Soit α un nombre avec $0 < \alpha < n$; on appelle l'indice de α l'entier non-négatif p tel que $0 < \frac{\alpha}{2} - p \leq 1$, et on écrit $\Delta^{\alpha/2} = \Delta^p * \Delta^{(\alpha/2)-p}$ dès que $p \geq 1$. Dans ce cas, on a

$$\Delta^{\alpha/2} * r^{\alpha-n} = \frac{(-1)^{p+1}}{C(2p, \alpha-2p) C(2(p-1), 2) \cdots C(2, 2)} \varepsilon.$$

Lemme 1. Soient α un nombre avec $0 < \alpha < n$ et N un noyau de convolution borné sur R^n , et supposons que $r^{\alpha-n}$ satisfait au principe de domination relatif à N . Alors, pour une fonction non-négative, finie et continue φ dans R^n à support compact, il existe une mesure de Radon positive μ'_φ dans R^n et une constante non-négative c_φ telles que

2) Un noyau de convolution N sur R^n signifie une mesure de Radon positive dans R^n . On dit qu'il est borné si, quelle que soit φ une fonction finie et continue à support compact, $N * \varphi$ est bornée.

$$u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)} + c_\varphi = N*\varphi \text{ sur } R^n.$$

En effet, d'après la théorie générale du balayage (cf. [4]), pour un entier positif m , il existe une mesure de Radon positive μ'_m portée par B telle que

$$u_{\mu'_m}^{(\alpha)}(x) \leq N*\varphi(x) \text{ sur } R^n \text{ et } u_{\mu'_m}^{(\alpha)}(x) = N*\varphi(x) \alpha\text{-}p.p. \text{ sur } B_m^3,$$

où $B_m = \{x \in R^n; |x| \leq m\}$. La suite $(u_{\mu'_m}^{(\alpha)})_{m=1}^\infty$ converge fortement vers $N*\varphi$ dans L_{loc} avec $m \rightarrow +\infty$ ⁴⁾. La suite $(\mu'_m)_{m=1}^\infty$ étant vaguement bornée, on peut supposer qu'il existe une mesure de Radon positive μ'_φ dans R^n telle que $(\mu'_m)_{m=1}^\infty$ converge vaguement vers μ'_φ avec $m \rightarrow +\infty$. On a $N*\varphi \geq u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}$ sur R^n , d'après la semi-continuité inférieure de $r^{\alpha-n}$. La suite $(u_{\mu'_m}^{(\alpha)})_{m=1}^\infty$ étant uniformément bornée sur R^n , on obtient que la suite $(\Delta^{\alpha/2} * u_{\mu'_m}^{(\alpha)})_{m=1}^\infty$ converge vers $\Delta^{\alpha/2} * (N*\varphi)$ au sens des distributions dans R^n avec $m \rightarrow \infty$. Donc

$$\Delta^{\alpha/2} * (N*\varphi - u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \Delta^{\alpha/2} * (u_{\mu'_m}^{(\alpha)} - u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}) = 0$$

au sens des distributions dans R^n . Pour une fonction infiniment dérivable ψ dans R^n à support compact, la fonction $(N*\varphi - u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}) * \psi$ est bornée, et par suite elle est égale à une constante. En effet, on a

$$\Delta^{(\alpha/2-p)} * \Delta^p (N*\varphi - u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}) * \psi(x) = 0$$

pour tout x de R^n dès que l'indice p de α est ≥ 1 . Dans ce cas, d'après le résultat de Riesz concernant la $(\frac{2}{\alpha} - p)$ -harmonicité (cf. [6]), $\Delta^p (N*\varphi - u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}) * \psi$ est égale à une constante, et donc elle est égale à 0. Par récurrence, $(N*\varphi - u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}) * \psi$ est aussi égale à une constante. La fonction ψ étant quelconque, il existe une constante non-négative c_φ telle que $N*\varphi - u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)} = c_\varphi$ presque partout sur R^n . Posons

$$f_m(x) = \begin{cases} c_m, & |x| \leq \frac{1}{m} \\ 0, & |x| > \frac{1}{m}, \end{cases}$$

où c_m est une constante positive telle que l'on ait $\int f_m dx = 1$. On a alors

$$u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)}(x+y) f_m(y) dy$$

- 3) Une propriété a lieu α -p.p. sur un sous-ensemble X de R^n si, quelle que soit λ une mesure de Radon positive dans R^n avec $supp(\lambda) \subset X$ et $I(\lambda; \alpha) < +\infty$, elle a lieu presque partout pour λ .
- 4) L_{loc} est l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions localement sommables dans R^n .

sur R^n , d'où $N*\varphi = u_{\mu_\varphi}^{(\varphi)} + c_\varphi$ partout sur R^n .

Dans ce cas, la couple $(\mu'_\varphi, c_\varphi)$ est uniquement déterminée. En effet, soit $(\mu''_\varphi, c'_\varphi)$ une autre couple qui vérifie la présente condition. Alors, quelle que soit ψ une fonction finie et continue dans R^n à support compact,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (u_{\mu_\varphi}^{(\varphi)} - u_{\mu''_\varphi}^{(\varphi)}) * \psi(x) = 0.$$

et donc $c_\varphi = c'_\varphi$. L'autre égalité $\mu'_\varphi = \mu''_\varphi$ résulte immédiatement du principe d'unicité pour $r^{\alpha-n}$ 5)

Corollaire 1. Soient α, β deux nombres avec $0 < \alpha, \beta < n$. Si $r^{\alpha-n}$ satisfait au principe de domination relatif à $r^{\beta-n}$, on a alors $\alpha \leq \beta$.

En effet, d'après le présent lemme, pour une fonction non-négative, finie et continue φ dans R^n à support compact, il existe une mesure de Radon positive μ'_φ dans R^n telle que $u_{\mu'_\varphi}^{(\beta)} = u_{\mu'_\varphi}^{(\varphi)}$ partout sur R^n , où φ désigne aussi la mesure positive avec la densité φ . Supposons $\alpha > \beta$; alors, d'après la formule de Riesz et le théorème de Fubini,

$$u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha)} = u_{C(\beta, \alpha - \beta) u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha - \beta)}}^{(\beta)} \text{ sur } R^n.$$

On a donc, d'après le principe d'unicité pour $r^{\beta-n}$,

$$\varphi = C(\beta, \alpha - \beta) u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha - \beta)}.$$

Si $\varphi \neq 0$, alors $\mu'_\varphi \neq 0$ et par suite $u_{\mu'_\varphi}^{(\alpha - \beta)}$ est à support non-compact, d'où une contradiction. Par conséquent, $\alpha \leq \beta$.

Lemme 2. Soit μ une mesure de Radon positive dans R^n à support compact et invariante par rotations. Si $\text{supp}(\mu) \ni 0$, alors, quel que soit α un nombre avec $0 < \alpha < n$, $u_\mu^{(\alpha)}$ est fini et continu dans R^n .

De la manière usuelle, il existe une mesure positive λ dans $R^+ = \{t > 0\}$ portée par un intervalle fermé $\ni 0$ telle que

$$u_\mu^{(\alpha)}(x) = \int u_{\sigma_r}^{(\alpha)}(x) d\lambda(r),$$

où σ_r est la mesure uniforme sur $S_r = \{x \in R^n; |x| = r\}$ de masse totale d'unité. Le potentiel $u_{\sigma_r}^{(\alpha)}$ étant fini et continu dans R^n , $u_\mu^{(\alpha)}$ l'est aussi.

5) Cela signifie que, quelle que soit λ une mesure de Radon réelle dans R^n , $\lambda = 0$ si et seulement si $u_\lambda^{(\alpha)} = 0$. Cela résulte évidemment de $\Delta^{\alpha/2} * u_\lambda^{(\alpha)} = 0$.

3. La démonstration du théorème

Il suffit de voir que si l'énoncé dans théorème a lieu, alors $0 < \alpha \leq 2$, car son inverse est déjà connu. Soit φ une fonction non-négative, non-zéro, finie et continue dans R^n à support compact et invariante par rotations; alors, d'après le lemme 1, il existe une mesure de Radon positive λ dans R^n et une constante $c \geq 0$ telles que $N*\varphi = u_\lambda^{(\alpha)} + c$ partout sur R^n . D'après l'unicité de la couple (λ, c) , λ est invariante par rotations. Pose $\psi = \lambda*\varphi$ et $C = c \int \varphi dx$. Ayant $N \neq 0$, on a $(\psi, C) \neq (0, 0)$. On choisit deux nombres positifs r_1, r_2 avec $r_1 \leq r_2$ tels que

$$\text{supp}(\psi) \not\subset C(0; r_1, r_2) \text{ ou } \text{supp}(\psi) \cap C(0; r_1, r_2) = \emptyset,$$

où $C(0; r_1, r_2) = \{x \in R^n; r_1 \leq |x| \leq r_2\}$. En utilisant encore la théorie générale du balayage (cf. [4]), il existe une mesure de Radon positive μ' dans R^n portée par $C(0; r_1, r_2)$ telle que

$$u_{\mu'}^{(\alpha)} \leq u_\psi^{(\alpha)} + C \text{ sur } R^n \text{ et } u_{\mu'}^{(\alpha)} = u_\psi^{(\alpha)} + C \text{ } \alpha\text{-p.p.p. sur } C(r_1, r_2),$$

car $u_\psi^{(\alpha)} + C = N*\varphi*\varphi$ sur R^n . Dans ce cas, μ' est uniquement déterminée, d'après le principe d'énergie pour $r^{\alpha-n}$ 6), et donc μ' est invariante par rotations. Supposons $\alpha > 2$ et soit p l'indice de α ; alors

$$\Delta^p u_{\mu'}^{(\alpha)} = \Delta^p (u_\psi^{(\alpha)} + C)$$

au sens des distributions dans $\{x \in R^n; r_1 < |x| < r_2\}$, et donc

$$u_{\mu'}^{(\alpha-2p)} = u_\psi^{(\alpha-2p)}$$

presque partout dans $\{x \in R^n; r_1 < |x| < r_2\}$. On a $u_\psi^{(\alpha-2p)} = u_\lambda^{(\alpha-2p)}*\varphi$, et donc $u_\psi^{(\alpha-2p)}$ est fini et continu dans R^n . D'autre part, d'après le lemme 2, $u_{\mu'}^{(\alpha-2p)}$ est fini et continu dans R^n . Donc

$$u_{\mu'}^{(\alpha-2p)} = u_\psi^{(\alpha-2p)} \text{ sur } C(0; r_1, r_2).$$

D'après le principe de domination et le principe d'unicité pour $r^{(\alpha-2p)-n}$, on a

$$u_{\mu'}^{(\alpha-2p)} \leq u_\psi^{(\alpha-2p)} \text{ sur } R^n \text{ et } u_{\mu'}^{(\alpha-2p)} \not\equiv u_\psi^{(\alpha-2p)} \text{ (resp. } \mu' = 0)$$

dès que $\psi \neq 0$ (resp. $\psi = 0$). Par conséquent.

$$r^{2p-n} * (u_\psi^{(\alpha-2p)} - u_{\mu'}^{(\alpha-2p)}) > 0 \text{ sur } R^n \text{ (resp. } u_\psi^{(\alpha-2p)} - u_{\mu'}^{(\alpha-2p)} \equiv 0)$$

dès que $\psi \neq 0$ (resp. $\psi = 0$). Mais cela est en contradiction avec $u_{\mu'}^{(\alpha)} = u_\psi^{(\alpha)} + C$

6) Cela signifie que, quelle que soit λ une mesure de Radon réelle dans R^n avec $I(|\lambda|; \alpha) < +\infty$, $\lambda = 0$ si et seulement si $I(\lambda; \alpha) = 0$. Cela résulte du fait que la transformation de Fourier de $r^{\alpha-n}$ est égale à $C r^{-\alpha}$ (cf. [1]), où C est une constante positive.

sur $C(0; r_1, r_2)$, d'où $\alpha \leq 2$. La démonstration est ainsi complète.

Corollaire 2. Soit α un nombre avec $0 < \alpha < n$. S'il existe un nombre β avec $0 < \beta < n$ tel que $r^{\alpha-n}$ satisfasse au principe de domination relatif à $r^{\beta-n}$, alors $0 < \alpha \leq 2$.

Notre méthode reste valable pour les noyaux besseliens.

REMARQUE. Soit α un nombre positif quelconque ; on note k_α le noyau bessélien d'ordre α . Pour que l'énoncé suivant ait lieu, il faut et il suffit que $0 < \alpha \leq 2$.

Il existe un noyau de convolution borné N sur R^n invariant par rotations tel que k_α satisfasse au principe de domination relatif à N .

On remarque ici que k_α est une fonction continue au sens large dans R^n dont la transformation de Fourier est égale à $1/(+|x|^2)^{\alpha/2}$. Le potentiel bessélien d'ordre α par une mesure μ est défini par

$$v_\mu^{(\alpha)}(x) = \int k_\alpha(x-y) d\mu(y)$$

dès que cette convolution a un sens.

UNIVERSITÉ DE NAGOYA

Bibliographies

- [1] J. Deny: *Les potentiels d'énergie finie*, Acta Math. **82** (1950), 107-183.
- [2] M. Itô: *Remarks on Ninomiya's domination principle*, Proc. Japan Acad. **40** (1964), 743-746.
- [3] I. Higuchi and M. Itô: *Characterization of relative domination principle*, Nagoya Math. J. **50** (1973), 175-184.
- [4] N. Ninomiya: *Sur le problème du balayage généralisé*, J. Math. Osaka City Univ. **12** (1961), 115-138.
- [5] ———: *Sur un principe du maximum pour le potentiel de Riesz-Frostman*, ibid. **13** (1952), 57-62.
- [6] M. Riesz: *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels*, Acta Sci. Math. Szeged **9** (1938), 1-42.