Saitō, H.
Osaka J. Math.
9 (1972), 293-332

FONCTIONS ENTIÈRES QUI SE REDUISENT À CERTAINS POLYNOMES (I)

HIROKO SAITŌ

(Received August 23, 1971)

Introduction

En 1969, M.T. Nishino [2] [3] a cherché des fonctions entières de deux variables complexes telles que toute leur surface première soit analytiquement homéomorphe à tout le plan d'une variable complexe en tant que surface de Riemann. Il a d'abord montré qu'une telle fonction entière peut se réduire à une fonction ne dépendant que d'une variable, au moyen d'un automorphisme analytique de tout l'espace. Plus tard, il a montré que toute surface première d'une fonction entière est analytiquement homéomorphe à tout le plan, s'il y a assez de surfaces premières analytiquement homéomorphes à tout le plan pour que les valeurs de la fonction prises sur ces surfaces forment un ensemble de capacité non nulle.

Nous nous proposons ici de chercher des fonctions entières de deux variables complexes telles que presque toute leur surface première soit analytiquement homéomorphe à tout plan pointé à l'origine d'une variable complexe z : $0<|z|<\infty$ en tant que surface de Riemann. Pour la simplicité, une telle surface sera dite de type (0,2). La fonction xy est un exemple simple de telle fonction. D'ailleurs, quand on y effectue un automorphisme analytique de tout l'espace des variables x et y, on obtiendra une fonction $f(x, y)$ dont toute surface première est de type (0, 2) à au plus deux surfaces avec la même valeur près. En outre, si l'on prend une fonction entière quelconque $F(z)$ d'une variable z, la fonction $F(f(x, y))$ possède aussi cette propriété.

En ce moment se pose le problème inverse suivant: Si une fonction entière admet suffisamment beaucoup de surfaces premières de type (0, 2) pour que les valeurs prises sur ces surfaces forment un ensemble de capacité non nulle, alors peut-on dire que toutes ses surfaces premières sont aussi de type (0, 2) à au plus deux d'elles avec la même valeur près et peut-on la réduire à certains polynomes par l'intérmediaire d'un automorphisme analytique convenable de tout l'espace et d'une fonction entière $F(z)$ d'une variable z?

La répose est affirmative et la fonction envisagée peut être réduit à un polynome de la forme

$$x^n y^m \quad \text{ou bien} \quad x^n(x^l y + a_0 + a_1 x + \cdots + a_{l-1} x^{l-1})^m.$$

Nous nous contentons ici d'anoncer ce résultat. La démonstration complète sera exposée ultérieurement.

Dans le présente mémoire, nous en donnons la solution dans un cas particulier auquel se réduira le cas général. Supposons à cet effect que la fonction entière envisagée $f(x, y)$ satisfait aux quatre conditions suivantes:

1) Pour toute valeur complexe non nulle c, la surface entière S_c donnée par

$$f(x, y)-c = 0$$

est non vide et irréductible dans tout l'espace.

2) Pour toute valeur complexe non nulle c, S_c est de type (0, 2).

3) Pour aucune valeur complexe non nulle c, il n'existe un point de S_c, en lequel les premières dérivées $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ s'annulent à la fois.

4) La surface entière donnée par $f(x, y) = 0$ se compose de deux surfaces premières.

Cela posé, nous montrerons dans la suite que la fonction $f(x, y)$ peut se réduire par un automorphisme analytique convenable de tout l'espace ou bien à un polynome de la forme $x^n y^m$ ou bien à celui de la forme $x^n(x^l y + a_0 + a_1 x + \cdots + a_{l-1} x^{l-1})^m$, où n et m sont des entiers positifs relativement premiers et l est un entier positif. Ceci est le but principal de la note actuelle.

I. Préliminaires

1. Définitions. Théorèmes. Nous commençons par rappeler quelques définitions et résultats dûs à *M.T. Nishino*, que l'on employera dans le mémoire actuel, en citant certaines parties de son mémoire[1], mot à mot.

Soit $f(x, y)$ une fonction entière dans l'espace de deux variables complexes x et y. Pour un nombre complexe a, chque composante irréductible S_0 de la surface analytique donnée par l'équation $f-a=0$ s'appelle *surface première de f avec la valeur a*, en peu de mot, *surface première*. Si la fonction $f-a$ prend la valeur nulle d'ordre ν sur S_0, S_0 est dite *d'ordre* ν *ou d'ordre èlevè lorsque* $\nu > 1$.

Soit S_0 une surface première de f avec la valeur a_0. Prenons en outre une droit analytique L que passe par un point ordinaire p_0 de S_0. On dit que L *passe par* p_0 *transversalement à* S_0 si, en changeant le système de coordonnées par une transformation linéaire non dégénérée telle que p_0 se ramène à l'origine et que L soit représentée par $x = 0$, et en décrivant un polycylindre (Δ, Δ') de la forme

$$\Delta : |x| < \rho, \qquad \Delta' : |y| < \rho'$$

1) Voir Nishino [1], [2], [3].

convenablement, on peut exprimer S_0 dans (Δ, Δ'), sous la forme

$$y = \xi(x),$$

où $\xi(x)$ est une fonction holomorphe et univalente dans Δ. Considérons une partie connexe Γ autour de p_0 sur L donnée par l'inégalité $|f - a_0| \leq \rho$, où ρ est un nombre réel positif. Alors, les conditions suivantes sont remplies, pourvu que ρ soit suffisamment petit: 1) Γ est compris dans l'intérieur d'un voisinage de p_0, 2) L est transversale à toute surface première qui passe par un point de Γ. 3) toute surface première qui passe par un point de Γ est d'ordre un à l'exception de S_0 au plus. Désignons par Σ_Γ l'ensemble de tous les points qui se trouvent sur une surface première passant par un point intérieur de Γ. On l'appelle *tube normal autour de S_0 par rapport à Γ* ou simplement *tube normal autour de S_0*.

Supposons ici qu'il n'y a aucun point dans Σ_Γ, en lequel les dérivées

$$\partial f/\partial x \quad \text{et} \quad \partial f/\partial y$$

s'annulent à la fois. Alors, nous allons former un revêtement étalé au-dessus de Σ_Γ comme ce qui suit. Considérons d'abord le revêtement universel de chaque surface première S dans Σ_Γ, que l'on désigne par $\tilde{S}$. Un point quelconque $\tilde{p}$ de $\tilde{S}$ est représenté par une paire (p, l) d'un point p sur S et d'une courbe l sur S joignant à p le point $O_s = S \cap \Gamma$ que l'on appelera *l'origin de S*. On introduit la relation d'équivalence entre les paires (p, l) de la façon habituelle et on a l' origine $\widehat{O}_s$ de $\tilde{S}$ comme d'habitude qui se trouve au-dessus de O_s. Soit V l' ensemble de tous les points $\tilde{p}_s$ qui se trouvent sur quelqu'une des $\tilde{S}$, pour toutes les S dans Σ_Γ. Comme il n'y a aucun point dans Σ_Γ, en lequel les dérivées $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ s'annulent à la fois, on peut introduire à V une topologie naturelle de manière que l'on puisse regarder V comme domaine multivalent sans point critique intérieur étalé au-dessus de Σ_Γ. On l'appelle *revêtement* (U) *de* Σ_Γ et on le désigne par $\tilde{\Sigma}_\Gamma$.

On doit à *M.T. Nishino* le

Théorème A. $\tilde{\Sigma}_\Gamma$ *est une variété de Stein.*

Ensuite, considérons un domaine multivalent étalé au-dessus d'un domaine cylindrique dans l'espace de deux variables complexes z et u de la forme (Γ, C), où Γ: $|z| < \rho$ et C: $|u| < \infty$. Pour chaque valeur c dans Γ, désignons par D_c la sous-variété analytique de D formée de tous les points qui se trouvent au-dessus de la droite analytique donnée par $z = c$. C'est une surface de Riemann étalée au-dessus du plan de u.

On suppose ici que D satisfait aux conditions suivantes:

1) D est une variété de Stein.
2) Pour toute c dans Γ, D_c est connexe, simplement connexe et de type parabolique[2].
3) Pour toute c dans Γ, D_c n'a aucun point singulier comme surface analytique dans D.
4) Il y a au moins un feuillet de D qui contient une partie univalente justement étalée au-dessus d'un voisinage de la droite analytique donnée par l'équation $u=0$ dans (Γ, C).

On dit un tel domaine *de type* (T). On désigne par O l'ensemble de tous les points dans la partie exprimée en 4), qui se trouvent au-dessus de la droite analytique $u = 0$. Alors, d'après 2), pour toute valeur dans Γ, on peut faire correspondre à D_c tout le plan d'une variable complexe w par une fonction holomorphe $w = \varphi_c(p)$ sur D_c biunivoquement. De plus, cette fonction, désignée par $\varphi_c(p)$, est déterminée de la façon unique, quand on y impose deux conditions:

$$\varphi_c(\mathrm{O}_c) = 0 \quad \text{et} \quad \partial\varphi(O_c)/\partial u = 1,$$

où O_c est le seul point commun de O et de D_c. Par suite, on peut définir une fonction $\varphi(p)$ dans D en posant sur D_c pour toute c dans Γ

$$\varphi(p) = \varphi_c(p).$$

On peut regarder la fonction

$$w = \varphi(p)$$

comme transformation biunivoque de D au domaine cylindrique de la forme (Γ, C'), où C' signifie tout le plan de w, telle que, pour toute c dans Γ, à D_c corresponde biunivoquement la droite analytique $z = c$. On appelle $\varphi(p)$ *fonction attachée au domaine D*. En ce moment, grâce à *M.T. Nishino,* on a le

Théorème B. *$\varphi(p)$ est une fonction holomorhe dans D.*

Maintenant, considérons une fonction entière $f(x, y)$ de x et y satisfaisant aux conditions (A) suivantes;

1) Pour tout nombre complexe c, la surface entière S_c donnée par

$$f(x, y)-c = 0$$

est non vide et irréductible dans tout l'espace.

2) Pour tout nombre complexe c, S_c est simplement connexe et de type parabolique en tant que surface de Riemann d'une variable complexe.

---

2) Cela vaut dire qu'on peut faire correspondre à D_c tout le plan d'une variable complexe holomorphiquement et biunivoquement.

3) Il n'existe dans l'espace aucun point, en lequel les dériveés

$$\partial f/\partial x \quad \text{et} \quad \partial f/\partial y$$

s'annulent à la fois.

Alors, grâce à *M.T. Nishino*, on a le

Théorème C. *Pour une fonction entière $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions (A), on peut toujours trouver une autre fonction entiére $g(x, y)$ telle que la paire (f, g) définisse un automorphisme analytique de tout l'espace de x et y.*

On appelle $g(x, y)$ *fonction associèe à* $f(x, y)$.

2. Réductibilité des fonctions entières. Avant d'aborder à la résolution de nortre problème, on indiquera deux lemmes et un corollaire concernant la réductibilité des fonctions entières de plusieurs variables.

Soit F une fonction entière de n variables complexes $x_1, \cdots, x_n$. Supposons d'abord qu'il y a un nombre complexe c_0 tel que les ordres des surfaces premières de F avec la valeur c_0 sont tous divisibles par un nombre entier positif r qui peut être un.

Alors, on a le

Lemme 1. *Il y a une fonction entière $G(x)$ telle que l'on ait*

$$F = [G(x)]^r + c.$$

En effet, soient $S^i (i=1, 2, \cdots)$ toutes les surfaces premières de F avec la valeur c_0 et soient n_i $(i=1, 2, \cdots)$ les ordres des S^i $(i=1, 2, \cdots)$ respectivement. Posons $n_i = r \cdot n_i'$. Grâce à *Cousin*, on peut trouver une fonction entière $H(x)$ qui prend la valeur nulle justement avec l'ordre n_i' sur chaque S^i et qui ne s' annule jamais en dehors de ces S^i. Formons ici la fonction

$$\Omega(x) = (F(x) - c_0)/[H(x)]^r.$$

Elle est évidemment une fonction entière qui ne prend jamais la valeur nulle dans tout l'espace. Par suite, on peut trouver une autre fonction entière $\Omega^*(x)$ telle que l'on ait

$$\Omega(x) = [\Omega^*(x)]^r.$$

Posons $G(x) = \Omega^*(x) \cdot H(x)$. Alors, on a la relation demandée

$$F(x) = [G(x)]^r + c_0.$$

Le lemme a été donc démontré.

Soit $F(x)$ aussi une fonction entière de n variables complexes $x_1, \cdots, x_n$.

Supposons qu'il y un nombre complexe c_0 tel que la surface entière S_0 donnée par l'équation $F - c_0 = 0$ se compose d'un nombre fini de surfaces premières.

Alors, on a le

Lemme 2. *F prend toutes les valeurs complexes sans exception.*

En effet, supposons, pour réduire à l'absurde, qu'il y ait un nombre complexe c' que F ne prend pas pour valeur. Alors on a l'égalité

$$F(x)-c' = e^{G(x)},$$

où $G(x)$ est une fonction entière convenable de (x). En ce moment, α étant une des racines de l'équation $e^{\alpha} = c_0 - c'$, il résulte de l'hypothèse que G ne prend qu'un nombre fini de valeurs parmi celles données par $\alpha + 2n\pi i$, où n parcourt l'ensemble des entiers. C'est évidemment l'absurde puisque, d'après le théorème de *Picard*, G devrait être réduit à une constante. Le lemme a été donc démontré.

De deux lemmes ci-dessus, on déduira facilement le corollaire suivant.

Soit F une fonction entière de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Supposons qu'il y a un nombre complexe c_0 tel que la surface entière S_0 donnée par l' équation $F - c_0 = 0$ est irréductible. Désignons, en général, par S_c la surface entière donnée par l'équation $F - c_0 = 0$. Alors, on a le

Corollaire 1. *1) Si l'ordre de S_0 est un, il en est de même pour toute S_c pourvu que S_c soit irréductible.*

2) Si l'ordre de S_0 est élevé, toute S_c doit être réductible.

3) De plus, en tout cas, les ordres des composantes irréductibles de S_0 n'admettent jamais divisieur commun plus grand que l'unité.

En effet, 1. Supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'il y ait un nombre $c' (\neq c_0)$ tel que $S_{c'}$ est irréductible et d'ordre r $(r > 1)$, bien que S_0 soit d'ordre un. D'après le lemme 1, on peut avoir l'égalité

$$F = [G(x)]^r + c',$$

où $G(x)$ est une fonction entière de (x). D'après le lemme 2, G prend toutes les valeurs complexes puisque la surface entière donnée par $G = 0$ est irréductible. Or, il y aurait justement r racines distinctes de l'équation $\alpha^r + c' = c_0$ et $F = c_0$ posséderait au moins r composantes, ce qui contredit l'hypothèse.

2. Lorsque S_0 est d'ordre r $(r > 1)$, on a d'après le lemme 1, l'égalité

$$F = [G(x)]^r + c_0$$

où G est un fonction entière. Donc, d'après le raisonnement ci-dessus, on peut dire que G prend toutes les valeurs complexes et que, pour tout nombre com-

plexe c ($c \neq c_0$), la surface entière S_c est réductible.
3. Enfin, supposons, aussi pour le réduire à l'absurde, qu'il y ait un nombre complexe c'' tel que $S_{c''}$ soit réductible et les ordres de toutes composantes irréductible de $S_{c''}$ aient le plus grand diviseur commun r ($r > 1$), bien que S_0 soit irréductible. D'après le lemme 1, on a l'égalité

$$F = [G(x)]^r + c'',$$

où $G(x)$ est une fonction entière de (x). En général, toute fonction entière prend toutes les valeurs finies sauf une valeur au plus. Donc, je dis d'abord que r est deux au plus. Car, sinon, comme on le voit facilement de l'égalité, S_0 devrait être réductible, ce qui contredit l'hypothèse. De plus, désignant par a un nombre tel que l'on ait $a^2 + c'' = c_0$, on peut dire, en même raison, que G ne prend pas l'une des valeurs a et $-a$, soit a. Alors, la fonction G peut s'écrire $G(x) = e^{H(x)} + a$, avec une fonction entière $H(x)$. Par suite, on a

$$F - c_0 = e^{H(x)}[e^{H(x)} + 2a].$$

Ceci signifie que S_0 est réductible puisque $H(x)$ prend aussi toutes les valeurs finies sauf une valeur au plus. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse. Donc, le lemme a été démontré completèment.

II. Fonctions entières de deux variables complexes satisfaisant aux conditions $(B_{1,1})$

3. Problèmes. Dans la partie actuelle, nous considérons des fonctions entières $f(x, y)$ dans l'espace de deux variables complexes x et y satisfaisant aux conditions suivantes, que l'on appellera *conditions* $(B_{1,1})$:

1) Pour tout nombre complexe c différent de 0, la surface entière donnée par

$$f(x, y) - c = 0$$

est non vide et irréductible dans tout l'espace. On la désignera par S_c.

2) Pour tout nombre complexe c différent de 0, S_c est analytiquement homéomorphe à tout le plan d'une variable complexe z pointé seulement à l'origine: $0 < |z| < \infty$ en tant que surface de Riemann. Une telle surface sera dite *de type* (0, 2).

3) Pour aucun nombre complexe c différent de 0, il n'existe de point de S_c, en lequel les premières dérivées

$$\partial f/\partial x \quad \text{et} \quad \partial f/\partial y$$

s'annulent à la fois.

4) La surface entière donnée par

$$f(x, y) = 0$$

se compose de deux surfaces premières S_0' et S_0''.

5) S_0' et S_0'' sont d'ordre *1* toutes les deux.

On peut voir facilement qu'un polynome de la forme xy ou $x(x^l y + a_0 + \cdots + a_{l-1} x^{l-1})$, où l est un entier positif et a_i $(i = 0, \cdots, l-1)$ sont des nombres complexes quelconques, satisfait à ces conditions. Par suite, toute fonction entière qui peut se réduire à l'un de ces polynomes par un automorphisme analytique de tout l'espace de (x, y), satisfait aussi à ces conditions.

Le but de cette partie est d'indiquer inversement qu'une fonction entière $f(x, y)$ peut se réduire toujours au polynome xy ou bien à celui de la forme $x(x^l y + a_0 + \cdots + a_{l-1} x^{l-1})$, où l est un entier positif et a_i $(i = 1, \cdots, l-1)$ sont des nombres complexes, par un automorphisme analytique convenable de l'espace de (x, y), pourvu que f satisfasse aux conditions $(B_{1,1})$ seulement.

Afin d'indiquer ce fait, nous posons d'abord ici le problème suivant:

Problème B. *Pour une fonction entière $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions $(B_{1,1})$, trouver une autre fonction entière $\varphi(x, y)$ telle que, pour tout c $(\neq 0)$, la fonction donnée par la restriction de φ à S_c fasse correspondre, holomorphiquement et biunivoquement, à S_c tout le plan d'une variable complexe w pointé à l'origine: $0 < |w| < +\infty$.*

On appellera $\varphi(x, y)$ *fonction adjointe à f*. Comme on a vu dans le mémoire de *M.T. Nishino,* la partie essentielle du problème est de nature locale; cela revient à dire qu'il s'agit de construire une telle fonction $\varphi(x, y)$ dans un tube normal. Cependant, il nous conviendra dans nôrtre étude de discerner deux problèmes suivants;

Problème (a). *Pour tout c $(\neq 0)$, construire une telle fonction $\varphi(x, y)$ dans un tube normal Σ_Γ autour de S_c, ne contenant ni S_0' ni S_0''.*

Problème (b). *Construire une telle fonction $\varphi(x, y)$ dans $\Sigma_\Gamma \cup S_0''$, où $\Sigma_{\Gamma 0}$ est un tube normal autour de S_0'.*

Remarquons ici que, pour tout c $(\neq 0)$, la surface première S_c est en vertu de la condition 3) sans singularité et d'ordre *1*.

4. Résolution du problème (a). Soit $f(x, y)$ une fonction entière qui satisfait aux conditions $(B_{1,1})$. Prenant un nombre complexe quelconque c_0 $(\neq 0)$, on considère la surface entière S_{c_0}. Soit p un point quelconque sur S_{c_0} et soit L une droite analytique passant par p transversalement à S_{c_0}. On peut supposer, sans restreindre la généralité, que L est donnée par $x = 0$, en changeant si nécessaire les coordonnées convenablement. Ensuite, prenant la partie connexe Γ autour de p sur L donnée par $|f - c_0| < \rho$, on considère un tube normal Σ_Γ, où

ρ est un nombre réel positif plus petit que $|c_0|$; dans le cas actuel, ce tube est la partie donnée par $|f - c_0| < \rho$ dans tout l'espace.

Comme toute surface première $S_{c'}$ dans Σ_Γ est, par hypothèse, de type (0, 2), le revêtement universel de $S_{c'}$ est simplement connexe et de type parabolique. En outre, d'après l'hypothèse, il n'y a dans Σ_Γ aucun point en lequel deux premières dérivées $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ s'annulent à la fois. Ceci nous permet de construire le revêtement (U) de Σ_Γ de la manière expliquée dans la section 1. Désignons-le par $\tilde{\Sigma}_\Gamma$. Lorsqu'on prend $z=f$ et x pour système de coordonnées dans $\tilde{\Sigma}_\Gamma$, $\tilde{\Sigma}_\Gamma$ est regardé comme domaine multivalent étalé au-dessus de (Γ^*, C), où Γ^* est le cercle donnée par $|z-c_0| < \rho$ sur le plan d'une variable complexe z et C est tout le plan $|x| < \infty$. Car, le domaine d'holomorphie de la fonction obtenue par la résolution de l'équation

$$z - f(x, y) = 0$$

par rapport à y au-dessus de (Γ^*, C) est un domaine multivalent D étalé au-dessus de (Γ^*, C). En tant que variété, D est holomorphiquement équivalente à Σ_Γ. De plus, on voit facilement qu'il est de type (T).

Par suite, d'après le théorème A, on peut trouver une fonction holomorphe $\tilde{\varphi}$ sur $\tilde{\Sigma}_\Gamma$ qui transforme chaque $\tilde{S}_{c'}$ $(c' \in \Gamma^*)$ à tout le plan d'une variable $\tilde{w}$ biunivoquement.

Pour obtenir une fonction voulue φ dans un tube normal autour de S_c, nous allons modifier la fonction $\tilde{\varphi}$ ainsi obtenue de manière que ses valeurs prises aux points de $\tilde{\Sigma}_\Gamma$ situes au-dessus d'un point quelconque de Σ_Γ ne se différent que d'un multiple de $2\pi i$. A cet effet, considérons d'abord une fonction ψ_c sur S_c qui fait correspondre biunivoquement à S_c tout le plan pointé à l'origine d'une variable u et qui envoie l'origine $S_c \cap \Gamma$ de S_c au point $u = 1$. Une telle fonction ψ_c existe certainement. Soit τ_c la courbe fermée sur S_c, correspondant au cercle $|u| = 1$ orienté dans le sens positif. Choisissons ensuite une fonction holomorphe ψ dans Σ_Γ dont la restriction à S_c coïncide avec ψ_c. Ceci est possible, puisque Σ_Γ est domaine d'holomorphie et que S_c n'a pas de point singulier. Comme *M. T. Nishino* l'a montré, f et ψ forment un système de coordonnées[3] en tout point de S_c. A l'aide de ces fonctions, quand on reprend ρ suffisamment petit, on peut décrire sur chaque surface $S_{c'}$ telle que $|c'-c| < \rho$ une courbe $\tau_{c'}$ partant de l'origine $O_{S_{c'}}$ de $S_{c'}$ et y retournant, de manière que, pour $c' = c$, $\tau_{c'}$ soit égale à la courbe τ_c donnée à l'avance et que $\tau_{c'}$ varie continûment avec c'. Il est clair que chaque $\tau_{c'}$ représente un générateur du groupe fondamental de $S_{c'}$ et que les points $(O_{S_c}, \tau_{c'})$ sur $\tilde{\Sigma}_\Gamma$ forment un ensemble connexe, $\tilde{\Gamma}_1$ justement étalé au-dessus de Γ, différent de l'ensemble $\tilde{\Gamma}_0$ des origines des $\tilde{S}_{c'}$ $(|c'-c| < \rho)$.

3) Nishino [2], p. 225, Lemme 2.

Soit τ^* la transformation de $\tilde{\Sigma}_\Gamma$ sur lui-même, dont la restriction à chaque $\tilde{S}_{c'}$ est la transformation de revêtement induite par $\tau_{c'}$. Il est aisé de voir que τ^* est un automorphisme analytique de $\tilde{\Sigma}_\Gamma$, envoyant $\tilde{\Gamma}_0$ sur $\tilde{\Gamma}_1$.

Revenons à la fonction $\tilde{\varphi}$. Soient α_0 et α_1 les restrictions de $\tilde{\varphi}$ à $\tilde{\Gamma}_0$ et à $\tilde{\Gamma}_1$ respectivement. Elles pouvent être regardées comme fonctions de z, uniformes et holomorphes dans le cercle $|z-c|<\rho$. Pour chque z ($|z-c|<\rho$), on a $\alpha_0(z)\neq\alpha_1(z)$, puisque $\tilde{\Gamma}_0$ et $\tilde{\Gamma}_1$ sont disjointe.

Posons

$$\tilde{\varphi}^* = 2\pi i \frac{\tilde{\varphi} - \alpha_0(f)}{\alpha_1(f) - \alpha_0(f)} \quad .$$

Alors, on a la relation

$$\tilde{\varphi}^*(\tau^*(p)) = \tilde{\varphi}^*(p) + 2\pi i,$$

puisque la restriction de $\tilde{\varphi}^*$ à $\tilde{S}_{c'}$ ($c' \in \Gamma^*$) fait correspondre à $\tilde{S}_{c'}$ tout le plan d'une variable $\tilde{w}$, holomorphiquement et biunivoquement, et que τ^* définit un automorphisme analytique de tout le plan de $\tilde{w}$ n'ayant pas de point fixe. Il suit de là que la fonction donnée par

$$\varphi(p) = e^{\tilde{\varphi}^*(P)}$$

peut être regardée comme fonction uniforme et holomophe dans Σ_Γ et de plus qu'elle transforme S_c sur tout le plan pointé à l'origine: $0<|w|<\infty$, holomorphiquement et biunivoquement. Elle est manifestement une fonction que l'on demandée.

On a ainsi obtenu le

Lemme 3. *Le problème (a) est toujours résoluble.*

La transformation donnée par

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ w = \varphi(x, y) \end{cases}$$

fait correspondre à Σ_Γ le domaine cylindrique (Γ, C^*), où C^*: $0<|w|<\infty$, holomorphiquement et biunivoquement.

On appellera donc $\varphi(x, y)$ fonction attachée à Σ_Γ.

5. Résolution du problème (b). Soit $f(x, y)$ une fonction entière satisfaisant aux conditions $(B_{1,1})$, et considérons, comme d'habitude, un tube normal Σ_Γ autour de la surface première S_0', où Γ est la partie donnée par l'inégalité $|f|<\rho$ ($\rho>0$) d'une droite analytique L passant par un point ordinaire p_0 de S_0'

($p_0 \notin S_0''$), transversalement à S_0'. Dans le cas actuel, Σ_Γ est la partie donnée par $|f|<\rho$ dans tout l'espace à l'exception de $S_0'-(S_0' \cap S_0'')$. Désignons par D le domaine défini par $|f|<\rho$ dans tout l'espace.

Dans la section actuelle, nous résoudrons le problème (b) dans D. D'après le lemme 3, pour tout c ($\neq 0$) dans le cercle Γ^* : $|z|<\rho$, on peut déterminer un tube normal Σ_{Γ_c} autour de S_c ne contenant ni S_0' ni S_0''et une fonction holomorphe φ_c attachée à Σ_{Γ_c}. En ce moment, la fonction φ_c est déterminée uniquement à son inverse $1/\varphi_c$ près, sous la condition qu'elle prend sur Γ la valeur un. Donc, lorsqu'on prend et fixe une valeur c_0 ($\neq 0$) dans Γ^* et qu'on choisit l'une de ces deux fonctions attachées, soit φ_{c_0}, on voit aisément que la fonction φ_{c_0} peut être prolongée analytiquement, sans restriction, dans tout $\Sigma_\Gamma - S_0$ en prenant sur Γ_c la valeur un. Désignons la fonction ainsi prolongée par φ.

Je dis ici que

φ est uniforme.

En effet, elle a évidemment deux branches au plus: φ_c ou $1/\varphi_c$. Supposons, pour le réduire à l'absurde, que φ ait deux branches. Considérons ici la surface de Riemann R de la fonction $\sqrt{f}$, étalée au-dessus de la partie $|f|<\rho$ et désignons par R_0 la partie de R obtenue par l'exception des surfaces critiques, qui se trouvent au-dessus de S_0' et de S_0''. Alors, on pourra voir facilement que φ est uniforme sur R_0. De plus, on peut dire que φ est holomorphe dans tout R. Car, φ ne prend jamais la valeur nulle dans R_0 et φ ne prend pas la valeur un en dehors de l'ensemble étalé au-dessus de Γ. D'où, elle est au plus méromorphe dans tout R. D'autre part, deux branches φ' et φ'' de la fonction φ au-dessus de même point de $\Sigma_\Gamma - S_0'$ satisfait toujours à la relation $\varphi' \cdot \varphi'' = 1$. Ceci signifie que φ prend la valeur 1 ou -1 au-dessus de S_0' et de S_0''. Donc, φ est holomorphe sur R tout entière et ne prend jamais la valeur nulle sur R.

Soit maintenant T la transformation de R dans l'espace de deux variables complexes z et w, donnée par

$$\begin{cases} z' = \sqrt{f(p)} \\ w = \varphi(p). \end{cases}$$

Elle fait correspondre à R_0 le domaine cylindrique Δ de la forme $0<|z|<\sqrt{\rho}$ et $0<|w|<\infty$, holomorphiquement et biunivoquement. Ecrivons, dans Δ, deux courbes simples fermées γ_1 et γ_2 de la forme $z'=c_0$, $|w|=r$ et $w=a$, $|z'|=r$, respectivement. Elles représentent évidemment une base du premier groupe d'homologie de Δ. Prenons, en outre, deux droites analytiques L_1 et L_2 passant transversalement par des points réguliers p_1 et p_2 de S_0' et de S_0'' respectivement. Soient δ_1^0 et δ_2^0 deux courbes simples fermées sur L_1 et sur L_2 données par la même équation $|f|=\rho'$ ($\rho'<\rho$) pour toutes les deux et soient δ_1 et δ_2 les courbes simples fermées dans R_0 qui se trouvent au-dessus de δ_1^0 et de δ_2^0 respectivement.

Soient γ_1^* et γ_2^* les courbes sur R_0 qui correspondent par (T) à γ_1 et à γ_2 respectivement. Alors, δ_1 te δ_2 sont homologues

$$\text{à} \quad m\gamma_1^* + n\gamma_2^* \quad \text{et à} \quad m'\gamma_1^* + n'\gamma_2^*,$$

où m, n, m' et n' sont des entiers. Or, il n'existe pas des nombres entiers différents de zéro m_1 et m_2 tels que $m_1\delta_1$ soit homologue à $m_2\delta_2$ dans R_0. Car, il y a une fonction holomorphe dans R qui ne s'annule que sur la surface analytique située au-dessus de S_0'. Par suite $mn'-nm' \neq 0$. Il y a des entiers k, k_1 et k_2 tels que $k \neq 0$ et que $k\gamma_1^*$ soit homologue à $k_1\delta_1 + k_2\delta_2$. Ceci est l'absurde. Car, φ ne prend jamais la valeur nulle dans tout R, ce qui montre que la variation totale de l'argument de φ suivant $k_1\delta_1 + k_2\delta_2$ est nulle. Or, celle de φ suivant γ_1^* est égale à 2π. Donc, l'énoncé a été démontré.

Ensuite, nous allons indiquer le fait que

La fonction φ, qui est maintenant uniforme et holomorphe dans $D-(S_0' \cup S_0'')$, est prolongeable holomorphiquement à tout point sur $S_0'-(S_0' \cap S_0'')$ et au plus méromorphiquement à celui sur S_0''.

En effect, φ ne prend pour valeur ni 0, ni 1 et ni ∞ dans $D-(S_0' \cup S_0'' \cup \Gamma)$. Il en résulte que φ est méromorphe dans tout D. Si S_0' était pôle de φ, $1/\varphi$ serait holomorphe dans $D-S_0''$. D'ailleurs, $1/\varphi$ prendrait la valeur nulle sur S_0' et la valeur un sur Γ. Ceci est l'absurde, puisque S_0' intersecte Γ. L'énoncé a été démontré.

Comme φ ne prend pas la valeur nule dans $D-(S_0' \cup S_0'')$ et que la valeur de φ en $S_0' \cap \Gamma$ est un, φ ne peut prendre la valeur nulle sur $S_0'-(S_0' \cap S_0'')$. D'où la fonction $1/\varphi$ est encore holomorphe dans $D-S_0''$. Ce que nous venons de voir montre que, pour résoudre le problème (b), il suffit de prendre la fonction si elle est encore holomorphe en tout point de S_0'' et sinon la fonction $1/\varphi$.

On a ainsi montré le

Lemme 4. *Le problème* (b) *est toujours résoluble.*

La solution du problème (b) s'appellera *fonction attachée à D.*

6. Résolution du problème B. Soit, de nouveau, $f(x, y)$ une fonction entière qui satisfait aux conditions $(B_{1,1})$. Nous allons maintenant construire une autre fonction entière $\varphi(x, y)$ telle que, pour tout nombre complexe non nul c, à S_c corresponde tout le plan d'une variable complexe pointé à l'origine par la fonction φ, holomorphiquement et biunivoquement.

D'après le lemme 3, on peut trouver, pour tout nombre complexe non nul c, un domaine Σ_{Γ_c} donne par $|f-c| < \rho_c$, où ρ_c est un nombre positif convenable plus petit que $|c|$, et une fonction holomorphe φ_c dans Σ_{Γ_c} qui fait correspondre à $S_{c'}$ tout le plan pointé à l'origine pour tout nombre c' tel que $|c-c'|<\rho$ holomorphiquement et biunivoquement. Remarquons que, si φ_c satisfait à ces conditions, la fonction $1/\varphi_c$ y satisfait aussi.

D'après le lemme 4, on peut trouver aussi un domaine Σ_0 donné par $|f|<\rho_0$, où ρ_0 est un nombre positif convenable, et une fonction holomorphe φ_0, qui a même caractère que φ_c pour toute $S_{c'}$ telle que $0<|c'|<\rho_0$. On désignera par Γ_c^* le cercle donné par $|z-c|<\rho_c$ sur le plan d'une variable complexe z. En ce moment, lorsqu'on prend deux tels domaines Σ_c et $\Sigma_{c'}$ tels que l'on ait $\Sigma_c \cap \Sigma_{c'} \neq 0$ et prend deux fonctions φ_c et $\varphi_{c'}$ comme ci-dessus, on a toujours l'égalité

$$\varphi_c = \alpha_{cc'}(f)\, \varphi_c$$

ou bien

$$\varphi_c = \frac{\alpha_{cc'}(f)}{\varphi_{c'}}$$

où $\alpha_{cc'}(z)$ est une fonction holomorphe de z dans, $\Gamma_c^* \cap \Gamma_{c'}^*$, n'y s'annulant jamais. Partant du cercle central Γ_0^* et marchant de proche en proche à des cercles plus loins, on peut facilement déterminer, pour chaque c, la fonction φ_c, en remplaçant si nécessaire φ_c par $1/\varphi_c$, de manière que l'égalité de deuxième espèce ne se présente pas pour toute paire de valeurs c et c' telles que Σ_{Γ_c} intersecte $\Sigma_{\Gamma_{c'}}$.

Donc, on a une donnée du deuxième problème de *Cousin* dans tout le plan de la variable z, quand on considère la totalité des paires

$$\{\alpha_{cc'},\ \Gamma_c^* \cap \Gamma_{c'}^*\}.$$

Grâce à *Cousin*, on peut toujours résoudre le problème: c'est-à-dire, dans chaque cercle on a une fonction holomorphe $\alpha_c(z)$ telle qu'elle ne prenne jamais la valeur nulle dans Γ_c^* et qu'on ait

$$\alpha_{cc'}(z) = \frac{\alpha_c(z)}{\alpha_{c'}(z)} \qquad \text{dans } \Gamma_c^* \cap \Gamma_{c'}^*,$$

pourvu que cette intersection ne soit pas vide. A l'aide de ces fonctions, posons

$$\varphi_c'(x, y) = \alpha_c(f(x, y)) \cdot \varphi_c(x, y).$$

Pour chaque c, cette fonction φ_c' holomorphe dans Σ_{Γ_c}, est une fonction attachée à Σ_{Γ_c}. En outre, on a

$$\varphi_c'(x, y) = \varphi_{c'}'(x, y) \qquad \text{dans } \Sigma_{\Gamma_c} \cap \Sigma_{\Gamma_{c'}},$$

pourvu que l'intersection ne soit pas vide. Donc, on obtient une fonction entière φ, en posant dans chaque Σ_{Γ_c}

$$\varphi(x, y) = \alpha_c(f(x, y))\cdot\varphi_c(x, y).$$

Elle est certainement une fonction adjointe à $f(x, y)$.

En effect, pour tout nombre complexe $c\ (\neq 0)$ la fonction $\varphi(x, y)$ fait correspondre à S_c a tout le plan pointé à l'origine, holomorphiquement et biunivoquement.

On a ainsi établi le

Lemme 5. *Le problème B est toujours résoluble.*

7. Classification. Soit $f(x, y)$ une fonction entière de x et y satisfaisant aux conditions $(B_{1,1})$. Dans la section actuelle, nous allons étudier les surfaces premières S_0' et S_0'' de f avec la valeur nulle.

Envisageons la surface première S_0'. Soit de nouveau L une droite analytique passant transversalement à S_0' par un point p_0 de S_0', qui est point ordinaire de $f = 0$. Supposons sans restreindre la généralité que L est définie par $x = 0$. Prenons sur L un domaine Γ autour de p_0 donné par $|f|<\rho$, où ρ est un nombre positif assez petit pour que f soit univalente comme fontion sur Γ et que toute surface première de f intersectant Γ soit transversale à L. Dans cette circonstance, x et $z=f(x, y)$ peuvent être regardés comme système de coordonnées dans un voisinage connexe de p_0 donnée par $|x|<\delta$, $|f|<\rho$, où δ est un nombre positif suffisamment petit pour que dans l'équation

$$z - f(x, y) = 0$$

la variable y puisse être résolue comme fonction uniforme et holomorphe dans le dicylindre (σ, Γ^*), où σ: $|x|<\delta$ et Γ^*: $|z|<\rho$.

La fonction φ construit dans la section 5 est une fonction entière telle que, pour tout $c\ (\neq 0)$, φ fasse correspondre à S_c tout le plan d'une variable pointé à l'origine, holomorphiquement et biunivoquement. Maintenant, φ considérée comme fonction holomorphe de deux variables x et z dans (σ, Γ^*), posons

$$\alpha(z) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(0, z), \quad B(z) = \varphi(0, z)$$

et ensuite

$$\varphi^*(x, z) = \frac{\varphi(x, z) - \beta(z)}{\alpha(z)}.$$

Comme φ est univalente sur S_c pour $0<|c|<\rho$, on a $\alpha(c) \neq 0$ pour $0<|c|<\rho$. φ^* est donc holomorphe dans $(\sigma, \Gamma^* - \{0\})$ et on a pour $0<|z|<\rho$

$$\varphi^*(0, z) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x}\varphi^*(0, z) = 1.$$

Remarquons d'abord que $\beta(z)$ s'annule jamais pour $|c|<\rho$.

D'après le théorème de *Koebe*, nous allons voir que φ^* *est aussi holomorphe en tout point de* $z=0$ *et* $\varphi^*(x, 0)$ *est non constante comme fonction de* x *dans* σ.

En effet, d'après le théorème de *Koebe*, on a pour $0<|z|<\rho$

$$\frac{|x|}{1+|\frac{x}{\delta}|^2} \leqq |\varphi^*(x, z)| \leqq \frac{|x|}{1-|\frac{x}{\delta}|^2}.$$

La deuxième inégalité montré que $\varphi^*(x, z)$ est bornée en module pour $|x|<\delta_0$ et $0<|z|<\rho$, quand on prend δ_0 tel que $0<|\delta_0|<\delta$. D'après le théorème de *Riemann*, $\varphi^*(x, z)$ est holomorphe dans (σ, Γ^*) tout entier. La première inégalité entraîne gue $\varphi^*(x, 0)$ est différent de zéro pourvu que x ne soit pas nul. Or, $\varphi^*(0, 0)$ est évidemment égal à zéro. $\varphi^*(x, 0)$ est donc non constante.

Comme la fonction φ^* peut s'écrire

$$\varphi^* = \frac{\varphi-\beta(f)}{\alpha(f)},$$

nous pouvons considérer φ^* comme fonction holomorphe de x et y dans $D-S_0''$, où le domaine D est donné par $|f|<\rho$ dans tout l'espace.

On peut dire alors que φ^* *possède les propriétés suivantes*

1) *Pour tout* $c\neq 0$, φ^* *fait correspondre à* S_c *tout le plan d'une variable pointé en un seul point* $-\beta(c)/\alpha(c)$, *holomorphiquement et biunivoquement.*
2) *La restriction de* φ^* *à* S_0' *est univalente.*
3) φ^* *s'annule sur* Γ.

En effet, 1) et 3) sont immédiates. Pour voir 2), prenons une suite $\{a_i\}$ de nombres complexes tels que $0<|a_i|<\rho$ tendans vers zéro et considérons la suite correspondante de surfaces premières $\{S_{a_i}\}$. Lorsqu'on prend sur S_0' un domaine borné σ_0 ne consistant qu'en des points ordinaires de $f=0$, chaque S_{a_i} pour i assez grand admet un domaine analytiquement homéomorphe à σ_0. A la restriction de φ à S_{a_i} correspond à l'aide de cet homéomorphisme une fonction holomorphe φ_i dans σ_0, de manière que la suite $\{\varphi_i\}$ converge uniformément dans σ_0. Ceci est possible certainement, puisque σ_0 admet dans l'espace un voisinage qui est analytiquement homéomorphe à l'espace produit (σ_0, Γ^*), pourvu que ρ soit assez petit. Chaque φ_i étant univalente et la restriction de φ à S_0' étant non constante, la limite φ est univalente d'abord dans un tel domaine σ_0 et par suite dans tout S_0'.

Considérons maintenant la transformation donnée par la paire

$$\begin{cases} z=f(x, y) \\ u=\varphi^*(x, y) \end{cases}$$

du domaine $D-S_0''$ dans l'espace de deux variables complexes z et u. En vertu des propriétés de φ^*, la transformation est holomorphe et injective. Désignons par D' l'image de $D-S_0''$ par la transformation et par D_c' l'intersection de D' et du plan analytique $z=c$. Alors, D_c' $(0<|c|<\rho)$ est l'image de S_c et D_0' est celle de $S_0'-(S_0'\cap S_0'')$. Il est clair que $D-S_0''$ est un domaine pseudoconvexe et, par suite, D' l'est aussi. D'après le théorème de *Hartogs*, D_0' contient tous les points du plan analytique $z=0$, sauf le point $u=-1/\alpha(0)$ dans le cas où $\alpha(0)\neq 0$. A propos de la forme de S_0', on doit discerner d'abord deux cas, suivant que la valeur $\alpha(z)$ en $z=0$ est nulle ou non. Dans le deuxième cas, encore deux cas se présentent suivant que $S_0'\cap S_0''$ est vide ou non. Nous conviendrons de dire qu'une surface entière est de type (0, 1) si elle est connexe, simplement connexe et de type parabolique.

En somme, on a pour S_0' trois cas suivants:

Si $\alpha(0)=0$, $S_0'\cap S_0''$ est nécessairement vide et S_0' est de type (0, 1). Si $\alpha(0)\neq 0$ et $S_0'\cap S_0''=0$, S_0' est de type (0, 2). Si $\alpha(0)\neq 0$ et $S_0'\cap S_0''\neq 0$, S_0' est de type (0, 1).

Il en est de même de S_0''.

En consequence, les fonctions entières satisfaisant aux conditions $(B_{1,1})$ sont classifiées pour la forme en quatre classes suivantes:

(*a*) $S_0'\cap S_0''$ consiste en un et un seul point et S_0' et S_0'' toutes deux sont de type (0, 1).

(*b*) $S_0'\cap S_0''$ est vide, l'une des S_0' et S_0'' est de type (0,2) et l'autre est de type (0, 1).

(*c*) $S_0'\cap S_0''$ est vide et S_0' et S_0'' toutes deux sont de type (0, 1).

(*d*) $S_0'\cap S_0''$ est vide et S_0' et S_0'' toutes deux sont de type (0, 2).

Cependant, nous verrons plus tard dans la section 9 que les cas (*c*) et (*d*) ne peuvent jamais se présenter.

Finalement, faisons une remarque importante. En vertu de φ^*, on voit que, sur $S_0'\cup S_0''$, il n'existe pas d'autre point singulier que le point d'intersection $S_0'\cap S_0''$, en lequel les dérivées

$$\partial f/\partial x \quad \text{et} \quad \partial f/\partial y$$

s'annulent à la fois.

8. Fonction adjointe φ. Dans la section 6, on a vu que, pour une fonction entière $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions $(B_{1,1})$, il existe toujours une fonction entière adjointe à f. Dans la section actuelle, nous étudions cette fonction d'une façon plus précise dans les deux premiers (*a*) et (*b*) des quatre cas que l'on a discernés dans la section précédente.

Type (*a*). Premièrement, soit, de nouveau, $f(x, y)$ une fonction entière satisfaisant aux conditions $(B_{1,1})$ et supposons qu'elle est de type (a); c'est-à-dire que $S_0' \cap S_0''$ consiste en un et un seul point et S_0' et S_0'' sont de type (0, 1). Les notations étant celles dans la section précédente, on a dans ce cas $\alpha(0) \neq 0$. Ceci signifie qu'en vertu de $\varphi = \alpha(f)\varphi^* + \beta(f)$, la restriction de φ à S_0' est aussi univalente. La transformation définie par

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ w = \varphi(x, y) \end{cases}$$

fait correspondre à tout l'espace à l'exception de S_0'' le domaine $|z| < \infty$, $0 < |w| < \infty$, holomorphiquement et biunivoquement. La valeur de φ au point d'intersection $S_0' \cap S_0''$ doit être nulle. Comme φ ne prend jamais la valeur nulle en dehors de S_0'', φ s'annule identiquement sur S_0''.

Je dis ici que

φ satisfait aux conditions (A).

En effet, à l'aide de cette transformation, on voit aisément que, pour tout nombre complexe a différent de zéro, la surface donnée par $\varphi = a$ est non vide et irréductible. D'ailleurs, elle est de type (0, 1). Il n'existe aucun point sur elle en lequel les dérivées

$$\partial\varphi/\partial x \quad \text{et} \quad \partial\varphi/\partial y$$

s'annulent à la fois. D'autre part, la surface définie par $\varphi = 0$ est S_0'' qui est non vide, irréductible et de type (0, 1). De plus, d'après le lemme 2, elle est d' ordre un. D'après le théorème 2[4] dans le mémoire (II) de *M.T. Nishino* elle n'a aucun point singulier. Donc, la fonction φ satisfait certainement aux conditions (A).

Type (b). Dans ce cas, $S_0' \cap S_0''$ est vide et l'une des S_0' et S_0'' est de type (0, 2) et l'autre est de type (0, 1). Pour fixer les idées, supposons que S_0' est de type (0, 2). Conservons encore les notations dans la section précédente. On a d'abord $\alpha(0) \neq 0$; car, sinon, S_0' serait de type (0, 1). La restriction à S_0' de $\varphi = \alpha(f)\varphi^* + \beta(f)$ fait donc correspondre à S_0' tout le plan de w pointé à l'origine, holomorphiquement et biunivoquement. La transformation définie par

$$(T) \qquad \begin{cases} z = f(x, y) \\ w = \varphi(x, y) \end{cases}$$

fait correspondre à tout l'espace à l'exception de S_0'' le domaine cylindrique Δ: $|z| < \infty$, $0 < |w| < \infty$, holomorphiquement et biunivoquement.

Je dis ici que *φ s'annule identiquement sur S_0''.*

En effect, supposons, pour réduire à l'absurde, qu'il n'en soit pas ainsi.

4) Nishino [2], No. 9.

Comme la valeur de φ est différente de zéro en dehors de S_0'', elle le sera aussi sur S_0'', dans cette hypothèse.

Ecrivons, dans Δ, une courbe simple fermée γ de la forme $z=c_0$ et $|w|=r$ $(r>0)$. Elle représente évidemment la base du premier groupe d'homologie de Δ. Prenons une droite analytique L' passant par un point quelconque p' de S_0'' transversalement à S_0'', et écrivons sur L' une courbe simple fermée δ donnée par $|f|=\rho'$ $(\rho'<\rho)$. Désignant par δ^* l'image de δ par la transformation (T), on a un nombre entier non nul k tel que δ^* soit homologue à $k\gamma$. Ceci est évidemment l'absurde puisque φ est holomorphe dans tout l'espace D et n'y prend jamais la valeur nulle. L'énoncé a été donc démontré.

La surface définie par $\varphi=0$ est donc égale à S_0''. En vertu de l'hypothèse que cette surface est de type (0, 1) et à l'aide de la transformation ci-dessus, on pourra aisément vérifier que

La fonction φ satisfait aussi aux conditions (A).

D'après ce que l'on a dit jusqu'ici et d'après la démonstration, réalisée dans la section suivante, du fait qu'il n'y a aucune fonction entière de type (c) ni de type (d), on a le

Théorème 1. *Pour une fonction entière $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions $(B_{1,1})$ données au début de la section 3, on peut toujours trouver une fonction entière adjointe à f qui satisfait aux conditions (A) données dans la section 1.*

9. Non existence d'une fonction de type (c) ni de type (d). Dans la section actuelle, nous allons montrer qu'il n'existe aucune fonction entière de type (c) ni de type (d).

Type (d). Supposons qu'il existe une fonction entière $f(x, y)$ de x et y de type (d). Prenons ici une hypersphère Q^r donnée par l'inégalité de la forme $|x|^2+|y|^2<r^2$, où r est un nombre positif quelconque. En générale, pour une surface entière S dans l'espace, toute composante connexe de $S\cap Q^r$ est limitée par un nombre fini de courbes fermées[4]. De plus, si S est de type (0, 2), il y a une et une seule composant de $S\cap Q^r$ qui est limitée par deux courbes et les autres composantes, s'il existe, sont limitées chacun par une seule courbe, dès que r surpasse un certain nombre positif r_0.

Or, d'après l'hypothèse, S_0' et S_0'' sont de type (0, 2). Donc, on peut prendre, dans le cas actuel, un nombre positif r' tel que chacun des $Q^r\cap S_0'$ et $Q^r\cap S_0''$ continue une composante connexe doublement connexe. Désignons par $(S')_r$ et $(S'')_r$ leurs composantes doublement connexes, respectivement.

D'autre part, on peut voir facilement que pour tout nombre complexe a $(\neq 0)$ siffisamment petit en module, $S_a\cap Q^r$ est homéomorphe à $(S_0'\cap S_0'')\cap Q^r$ et par suite admet deux composantes doublement connexes. Ceci est l'absurde

5) Voir, par exemple, [3] p. 246

puisque toute S_a est de type (0, 2).

On a donc l'énoncé que

Il n'existe pas de fonction entière de type (d).

Type (c). Supposons aussi pour le réduire à l'absurde qu'il y ait une fonction entière $f(x, y)$ de type (c); c'est-à-dire, f satisfait aux conditions ($B_{1,1}$) et ses deux surfaces premières avec la valeur nulle S_0' et S_0'' n'ont pas de point commun et sont toutes les deux de type (0, 1). Soit Σ_{Γ_0}un tube normal autour de S_0' et soit D le domaine donné par $|f|<\rho_0$ dans tout l'espace, où ρ_0 est un nombre positif qui définit Σ_{Γ_0}. Considérons, comme d'habitude, une fonction φ_0 attachée à D telle que l'on ait $\varphi_0(\Gamma)\equiv 1$. Dans le cas actuel, on peut dire que

φ_0 prend pour valeur un sur S_0' et zéro sur S_0'' identiquement.

En effet, φ_0 ne peut jamais prendre la valeur nulle en tout de S_0' puisqu'elle ne s'annule en aucun point de $\Sigma_{\Gamma_0}-S_0'$ et on a $S_0'\cap S_0''=0$. Par suite, elle doit être une constante sur S_0', c'est-à-dire, prend la valeur un puisque S_0' est de type (0, 1) et $\varphi_0(\Gamma_0)\equiv 1$, où Γ_0 est le point commun aux S_0' et Γ. D'autre part, d'après le même raisonnement que l'on a fait dans la section précédente, on pourra voir que φ_0 prend la valeur nulle sur S_0'' identiquement. Donc, l'énoncé est vrai certainement.

Au moyen de la fonction φ_0 comme ce que l'on a fait dans la section précédente, on peut avoir une fonction adjointe φ à f qui a même caractère que φ_0 dans D. Considérons ici la transformation donnée par

$$(T)\qquad \begin{cases} z = f(x, y) \\ w = \varphi(x, y) \end{cases}$$

Elle fait correspondre évidemment à tout l'espace de (x, y) à l'exception de $S_0'\cap S_0''$ le domaine cylindrique (C_z^*, C_w^*) dans l'espace de (z, w), où $C_z^*: 0<|z|<\infty$ et $C_w^*: 0<|w|<\infty$, holomorphiquement et biunivoquement. De plus, les images de S_0' et S_0'' sont deux points $(0, 1)$ et $(0, 0)$, respectivement.

Il suit de là que la fonction φ satisfait aux conditions suivantes:

Désignons, pour un nombre complexe a, par T_a la surface entière donnée par $\varphi-a=0$.

1) Toute T_a $(a\neq 1)$ est non vide et irréductible dans tout l'espace. T_0 coïncide justment avec S_0''.

2) Toute T_a $(a\neq 1, 0)$ est de type (0, 2). T_0 est de type (0, 1).

3) T_1 se compose de deux surfaces premières; l'une d'elles coïncide avec S_0'. Désignons-la par T_1'. Dénotons T_1'' l'autre. Si $T_1'\cap T_1''\neq 0$, $T_1'\cap T_1''$ consiste en un seul point et T_1'' est de type (0, 1). Sinon, T_1'' est de type (0, 2).

4) Il n'y a acuun point, en lequel les dérivées $\partial\varphi/\partial x$ et $\partial\varphi/\partial y$ s'annulent à la fois, en dehors de T_1'. De plus, T_1' n'a pas de point singulier.

En suite, nous allons déformer la fonction f un peu comme ce qui suit.

Considérons un tube normal Σ'_{r_0} autour de T_0 pour la fonction φ. Alors, on peut regarder f comme une fonction attachée à $\Sigma'_{r'_0}-T_0$, en vertu de la transformation (T). Donc, d'après le même raisonnement que l'on a fait dans la section 5, il y a deux fonctions holomorphes $\alpha'(w)$ et $\beta'(w)$ dans le cercle $|w|<\rho'_0$, où ρ'_0 est un nombre positif qui définit le tube $\Sigma'_{r'_0}$ telles que la fonction f^* donnée par la relation

$$\frac{f(x, y)-\beta'(\varphi(x, y))}{\alpha'(\varphi(x, y))}$$

soit holomorphe dans $\Sigma'_{r'_0}$ et elle ne soit pas constante sur T_0. Cette fonction est alors univalente sur T_0. En ce moment, $\alpha'(w)$ et $\beta'(w)$ peuvent s'écrire d'une façon unique

$$\begin{aligned} \alpha'(w) &= w^l\cdot\alpha^*(w) \\ \beta'(w) &= \beta^*(w)+w^l\cdot\tilde{\beta}'(w), \end{aligned}$$

où $\alpha^*(w)$ est une fonction holomorphe, ne s'annulant pas à l'origine, $\beta^*(w)$ un polynome de degré $< l$ et $\tilde{\beta}'(w)$ une fonction holomorphe de w au voisinage de l'origine.

Posons ici

$$\psi=\frac{f-\beta^*(\varphi)}{\varphi^l}.$$

Cette fonction ψ est évidemment une fonction entière, qui est égale à $f^*\alpha^*(\varphi)+\tilde{\beta}'(\varphi)$ au voisinage de T_0.

Considérons maintenant la transformation donnée par

$$\begin{cases} w=\varphi(x, y) \\ u=\psi(x, y). \end{cases}$$

Elle fait évidemment correspondre à tout l'espace de (x, y) à l'exception de T'_1 tout l'espace de (w, u) à l'exception de la surface analytique σ donnée par l' équation $w^{l-1}u-\beta^{**}(w)=0$, holomorphiquement et biunivoquement, où $\beta^*(w)=-w\cdot\beta^{**}(w)$ et $\beta^{**}(w)$ est un polynome de w, ne s'annulant pas à l'origine. De plus, l'image de T'_1 est le seul point $(1, \beta^{**}(1))$.

Je dis ici que

L'existence d'une telle transformation est l'absurde.

En effet, dénotons H l'ensemble produit de la forme $|w|=1/2$, $|u|=r_0$, où r_0 est un nombre positif suffisamment grand pour que l'on ait $|\beta^{**}(w)|/|w^{l-1}|<r_0$ pour $|w|=1/2$. En munissant de l'orientation habituelle cette surface H de dimension réele 2, considérons l'intégrale double de la forme

$$I = \iint_H \frac{w^{l-2}(1-w)}{w^{l-1}u-\beta^{**}(u)}\, dw \wedge du.$$

D'après un calcul facile, on a l'égalité

$$I = -4\pi^2$$

D'autre part, on peut dire que la fonction donnée de la forme

$$\Phi(x, y) = \frac{\varphi^{l-2}(1-\varphi)}{\varphi^{l-1}\psi-\beta^{**}(\psi)}$$

est holomorphe dans tout l'espace de (x, y) puisque $\varphi^{l-1}\psi-\beta^{**}(\psi)$ est holomorphe dans tout l'espace de (x, y) et que celle-ci ne s'annule jamais en dehors de T_1' et prend zéro d'ordre *1* en T_1'. Donc d'après le théorème de *Poincare*[6], l'intégrale

$$\iint_{H^*} \frac{\varphi^{l-2}(1-\varphi)}{\varphi^{l-1}\psi-\beta^{**}(\varphi)}\, d\varphi \wedge d\psi$$

se réduit à nulle, où H^* est l'image réciproque de H par la transformation (T). Ceci est certainement l'absurde. Donc, il n'existe aucune fonction entière de type (c).

D'où, on peut conclure le

Théorème 2. *Toute fonction entière satisfaisant aux conditions* $(B_{1,1})$ *est ou bien de type* (a) *ou bien de type* (b).

10. Fonctions entière satisfaisant aux conditions $(\mathbf{B}_{1,1})$. Dans la section actuelle, on déterminera toute fonction entière satisfaisant aux conditions $(B_{1,1})$.

Soit, de nouveau, $f(x, y)$ une telle fonction. D'après le théorème 1, il y a une fonction adjointe à f, que l'on désigne par φ, que satisfait aux conditions (A). Par suite, d'après le théorème C, on a une autre fonction entière ψ telle que la transformation (T_1) définie par

$$(T_1) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi(x, y) \\ y_1 = \psi(x, y) \end{cases}$$

soit un automorphisme analytique de tout l'espace de (x, y).

6) E. Picard et G. Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, p. 52.

Désignons par $f_1(x_1, y_1)$ la fonction correspondant à f par la transformation T_1 : $f(x, y) = f_1(\varphi(x, y), \psi(x, y))$. Alors, on peut évidemment l'écrire sous la forme

$$f_1(x_1, y_1) = a_0(x_1) + a_1(x_1) \cdot y_1,$$

où $a_0(x_1)$ et $a_1(x_1)$ sont des fonctions entières de x_1. De plus, comme elle s'annule pour $x_1 = 0$, on peut la mettre sous la forme

$$f_1(x_1, y_1) = x_1 \cdot (a_0^*(x_1) + a_1^*(x_1) y_1).$$

Au moins un des $a_0^*(0)$ et $a_1^*(0)$ n'est pas nul, puisque la droite analytique $x_1 = 0$ est par hypothèse une surface première de f_1 d'ordre un. De plus, $a_1^*(x_1)$ ne peut avoir d'autre zéro que $x_1 = 0$.

Envisageons ici la fonction

$$a_0^*(x_1) + a_1^*(x_1) \cdot y_1.$$

Alors, il se présente deux cas selon qu'on a $S_0' \cap S_0'' \neq 0$ ou $S_0' \cap S_0'' = 0$.

Dans le premier cas, S_0' et S_0'' toutes les deux étant de type (0, 1), la fonction $a_1^*(x_1)$ ne s'annulent en aucun point de tout le point de x_1.

Formons donc une autre transformation

$$(T_{12}) \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = a_1^*(x_1) \cdot y_1 + a_0^*(x_1). \end{cases}$$

Elle est un automorphisme analytique de tout l'espace de (x_1, y_1). Par cet automorphisme, $f_1(x_1, y_1)$ se réduit au polynome $x_2 y_2$. C'est-à-dire, la fonction $f(x, y)$ se réduit au polynome xy par l'automorphisme analytique de tout l'espace de (x, y), qui est le produit des deux automorphismes (T_1) et (T_{12}).

Dans le deuxième cas, l'une des S_0' et S_0'' étant de type (0, 2), on a l'égalité

$$a_1^*(x_1) = x_1^l \cdot e^{h(x_1)}$$

où l est un entier positif et $h(x_1)$ est une fonction entière de x_1. Développons $a_0^*(x_1)$ en série de Tylor:

$$a_0^*(x_1) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^2 + \cdots,$$

et posons

$$R(x_1) = b_l + b_{l+1} x_1 + b_{l+2} x_1^2 + \cdots.$$

$R(x_1)$ est une fonction entière de x_1. Considérons en suite la transformation donnée par

$$(T_{22}) \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 \cdot e^{h(x_1)} + R(x_1). \end{cases}$$

Elle est un automorphisme analytique de tout l'espace de (x_1, y_1). Par cet automorphisme, $f_1(x_1, y_1)$ se réduit au polynome $x_2(x_2^l y_2 + b_0 + \cdots + b_{l-1}x_2^{l-1})$. C'est-à-dire, la fonction $f(x, y)$ se réduit au polynome $x(x^l y + b_0 + \cdots + b_{l-1}x^{l-1})$, où l est un entier positif, et $b_0, \cdots, b_{l-1}$ sont des constantes avec $b_0 \neq 0$, par le produit de deux automorphismes (T_1) et (T_{22}).

On a l'énoncé que

Toute fonction entière de deux variables complexes x et y satisfaisant aux conditions $(B_{1,1})$ se réduit ou bien au polynome xy ou bien à celui de la forme $x(x^l y + b_0 + \cdots + b_{l-1}x^{l-1})$, où l est un entier positif et $b_0, b_1, \cdots, b_{l-1}$ sont des nombres complexes $(b_0 \neq 0)$, par un automorphisme analytique convenable de tout l'espace de (x, y).

III. Fonctions entières de deux variables complexes satisfaisant aux conditions $(\mathrm{B}_{n,m})$ avec $\mathrm{m}>1$.

11. Problèmes. Dans la partie précédente, on a traité les fonctions entières de deux variables complexes x et y satisfaisant aux conditions $(B_{1,1})$. On a alors vu qu'une telle fonction entière se réduit toujours ou bien au polynome de la forme xy ou bien à celui de la forme $x(x^l y + a_0 + a_1 x + \cdots + a_{l-1}x^{l-1})$, où $l \geq 1$ et $a_0 \neq 0$, par un automorphisme analytique convenable de tout l'espace de (x, y). Dans la partie actuelle, nous allons traiter des fonctions entières f de deux variables complexes satisfaisant aux conditions suivantes 1') $\sim$ 5') que l'on appellera *conditions* $(B_{n,m})$ *avec* $m>1$; les conditions 1'), 2'), 3') et 4') de $(B_{n,m})$ sont les conditions 1), 2), 3) et 4) de $(B_{1,1})$, respectivement; 5') L'ordre de S_0' est m et celui de S_0'' est n.

S'il en est ainsi, d'après le corollaire 1, n et m sont relativement premiers.

Dans la recherche suivante, on traitera, de fois à autre, une fonction méromorphe qui satisfait aux conditions 1'), 2') et 3') de $(B_{n,m})$ et qui admet exactement deux surfaces analytiques irréductibles S_0' et S_0'' telles que l'ensemble des zéros et des pôles est exactement égal à $S_0' \cup S_0''$. Donc, on dira qu'une fonction f satisfait aux conditions $(B_{n,m})$ même si $n<0$ ou $m<0$: si $n<0$, S_0' est surface de pôles de f d'ordre $-n$; et il en est de même de S_0''.

Maintenant, considérons, de nouveau, une fonction entière satisfaisant aux conditions $(B_{n,m})$ ave $m>1$. Pour déterminer une telle fonction, il est aussi essential de résoudre le problème B et, pour cela il s'agit d'abord des problèmes (a) et (b). Mais, le problème (a) est indépendant des ordres m et n, donc, il n'y a rien à faire. Quant au problème (b), si au moins un des ordres m et n est égal à 1, le procédé que l'on a fait dans la section 5 est aussi valable. D'ailleurs, si le problème (b) a été résolu, le procédé de la résolution du deuxième problème de *Cousin* s'applique aussi au présent cas sans modification. D'où, on aura résolu le problème global B. Donc, il ne nous reste qu'à résoudre le problème (b) dans le cas où $n>1$ et $m>1$.

12. Résolution du problème (b) dans le cas où n>1 et m>1. Il s' agit maintenant de résoudre le problème (b) pour une fonction entière $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions $(B_{n,m})$ avec $n>1$, $m>1$ et $(n, m)=1$. Prenons Σ_Γ un tube normal de S_0'; on conservera les notations, Γ, ρ et L etc. dans la section 5. Dans le cas actuel quelque difficulté aura lieu à cause de ce que toute surface première S_c $(c \neq 0)$ dans le tube normal Σ_Γ, rencontre Γ en n points. Pour montrer cette difficulté, considérons la surface de Riemann R^* de la fonction $f^{1/n}$. Dénotons D le domaine donnée par $\Sigma_\Gamma \cup S_0''$ et R la partie de R^* étalée justement au-dessus de D; dans le cas actuel, D est la partie donnée par $|f|<\rho$ dans tout l'espace de (x, y). n étant l'ordre de zéro de f en S_0', R ne se ramifie pas au-dessus de S_0'. Comme n et m sont relativement premiers, toutes les branches de $f^{1/n}$ se commutent autour de S_0''. Par suite, R est connexe et sa surface critique de ramification est la surface $\tilde{S}_0''$ justement étalée au-dessus de S_0''. Remarquons que S_0'' a un seul feuillet comme surface de Riemann au-dessus de S_0''.

Supposons encore que Γ est donnée par $x=0$ et $|f|<\rho$. Soit V un voisinage de Γ dans Σ_Γ de la forme $|x|<\eta$, $|f|<\rho$, où η est un nombre positif convenable tel que l'on puisse résoudre l'équation $f(x, y)-z=0$ dans V par rapport à y comme fonction holomorphe de x. Alors, il y a n feuillets univalents de R au-dessus de V. Désignons-les par $\tilde{V}^i (i=1,\cdots, n)$ dans l'ordre que l'on dira plus tard, et par $\tilde{\Gamma}^i (i=1,\cdots, n)$ les droites analytiques dans $\tilde{V}^i$ qui se trouvent au-dessus de Γ respectivement. L'image de Γ par la restriction de la fonction $z=f$ à Γ est la partie de la surface de Riemann de la fonction $z^{1/n}$ étalée justement au-dessus du cercle Γ^* : $|z|<\rho$ sur le plan de z. Désignons-la par $\tilde{\Gamma}^*$. Coupons $\tilde{\Gamma}^*$ le long de l'axe réel positif de z. Et $\tilde{\Gamma}^*$ se sépare en n branches univalentes. Désignons-les par $\tilde{\Gamma}_j^*$ successivement, et par Γ_j la partie en éventail de Γ à laquelle correspond $\tilde{\Gamma}_j^*$ par la transformation ci-dessus et, pour chaque i et pour chaque j, par $\tilde{\Gamma}_j^i$ la partie de $\tilde{\Gamma}^i$ étalée justement au-dessus de Γ_j. Toute surface première S_c $(c \neq 0)$ dans Σ_Γ rencontre chaque Γ_j en un et un seul point. En outre, au-dessus de toute surface première S_c $(c \neq 0)$ dans Σ_Γ, il y a dans R justement n surfaces irréductibles sur lesquelles la fonction $f^{1/n}$ prend pour sa valeur les $n^{-ièmes}$ racines distinctes de c respectivement. Chacune d'elles rencontre évidemment chaque $\tilde{\Gamma}^i$ en un et un seul point. Désignons par $\tilde{S}_c^i$ celle qui rencontre $\tilde{\Gamma}^1$ en un point appartenant à $\tilde{\Gamma}_i^1$. En ce moment, on pourra mettre l'ordre dans les $\tilde{V}^i$ de manière que $\tilde{S}_c^i$ rencontre $\tilde{\Gamma}^i$ en un point appartenant à $\tilde{\Gamma}_1^i$. Ceci est évidemment possible.

Envisageons le domaine multivalent R. Comme on peut le voir facilement, il n'y a aucune différence essentielle entre R et le domaine que l'on a envisagé dans la section 5, quand on regarde R comme somme de toutes les surfaces analytiques qui se trouvent au-dessus de S_c et chaque point de $\tilde{\Gamma}^1$ comme origine de la surface qui passe par ce point. C'est-à-dire, lorsqu'on prend une surface première S_c $(c \neq 0)$ dans Σ_Γ et un tube normal Σ_{Γ_c} autour de S_c dans $\Sigma_\Gamma - S_0'$, il y a pour chaque i une partie connexe de R qui se trouve justement au-dessus de Σ_{Γ_c} et qui contient $\tilde{S}_c^i$ que l'on désigne par $\tilde{\Sigma}_{\Gamma_c}^i$, et on peut trouver une fonction $\tilde{\varphi}_c^i$ attachée à $\tilde{\Sigma}_{\Gamma_c}^i$. De plus, elle sera déterminée uniquement à son inverse $1/\tilde{\varphi}_c^i$ près quand on y impose la condition qu'elle prend la valeur un sur $\tilde{\Gamma}^1 \cap \tilde{\Sigma}_{\Gamma_c}^i$. Donc, lorsqu'on prend pour point de départ une surface analytique $\tilde{S}_c^1$ dans R, la partie $\tilde{\Sigma}_{\Gamma_c}^1$ autour de $\tilde{S}_c^1$ et la fonction $\tilde{\varphi}_c^1$, elle se prolonge analytiquement sans restriction dans tout R sauf aux points au-dessus de S_0' et de S_0''. De plus, comme on peut le voir facilement, le même raisonnement que dans la section 5 montre aussi que la fonction ainsi prolongée devient une fonction uniforme et méromorphe dans R tout entier. Désignons-la par $\tilde{\varphi}(p)$.

Nous allons maintenant étudier cette fonction $\tilde{\varphi}$ plus précisément et discerner les trois cas suivants, comme nous l'avons fait dans la section 5. Soient $\tilde{S}_0'$ la surface première de $f^{1/n}$, donc irréductible, avec la valeur nulle passant par $\tilde{\Gamma}^1$ et $\tilde{S}_0''$ celle étalée au-dessus de S_0''. $\tilde{S}_0'$ se trouve au-dessus de S_0'. Le même raisonnement que dans la section 5 fait se représenter les trois cas suivants:

(*a*) $\tilde{S}_0' \cap \tilde{S}_0''$ est non vide et $\tilde{S}_0'$ est de type (0, 1);

(*b*) $\tilde{S}_0' \cap \tilde{S}_0''$ est vide et $\tilde{S}_0'$ est de type (0, 2);

(*c*) $\tilde{S}_0' \cap \tilde{S}_0''$ est vide et $\tilde{S}_0'$ est de type (0, 1).

Dans le cas (*a*), $\tilde{S}_0' \cap \tilde{S}_0''$ consiste en un seul point et par suite il en est de même de $\tilde{S}_0' \cap \tilde{S}_0''$. La partie de R étalée au-dessus de S_0' est justement égale à $\tilde{S}_0'$. S_0' doit être de type (0, 1). $\tilde{\varphi}$, étant non nulle dans $R-(\tilde{S}_0' \cup \tilde{S}_0'')$ et non constante sur $\tilde{S}_0'$, ne s'annule jamais dans $R - \tilde{S}_0''$. En prenant si nécessaire son inverse $1/\tilde{\varphi}$, on peut supposer que $\tilde{\varphi}$ est holomorphe dans tout R. Le raisonnement dans la section 8 affirme tout pareillement que $\tilde{\varphi}$ s'annule sur $\tilde{S}_0''$.

Dans le cas (*b*), $\tilde{\varphi}$ est aussi holomorphe et univalente sur $\tilde{S}_0'$. Dans ce cas, on peut dire que

La partie de R étalée au-dessus de S_0' coïncide avec $\tilde{S}_0'$.

A cet effet, supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'il y ait une surface irréductible $\tilde{S}_0^*$, étalée au-dessus de S_0', autre que $\tilde{S}_0'$. On va d'abord montrer que $\tilde{S}_0^*$ et $\tilde{S}_0''$ sont des zéros ou des pôles de $\tilde{\varphi}$. Prenons trois nombres positifs ε, M_1 et M_2 ($0<\varepsilon^n<\rho$ et $0<M_1<M_2$) et considérons dans $R_0 \cup \tilde{S}_0'$ la partie $\mathfrak{A}$ donnée par $|f^{1/n}| \leqq \varepsilon$, $M_1 \leqq |\tilde{\varphi}| \leqq M_2$, où R_0 est la partie de R obtenue par l' exception des parties trouvées au-dessus de S_0' et S_0''. En tenant compte du fait que $\tilde{\varphi}$ prend sur chaque $\tilde{S}_c^i$ $(c \neq 0)$ ainsi que sur $\tilde{S}_0'$ toute valeur différente de zéro une et une seule fois, on voit que $\mathfrak{A}$ est compact donc $\mathfrak{A}$ ne se présente pas au voisinage de $\tilde{S}_0^*$ et $\tilde{S}_0''$. Ceci montre que $\tilde{\varphi}$ est sur $\tilde{S}_0^*$ identiquement nulle ou infinie et il en est de même de $\tilde{S}_0''$. Prenons ensuite dans R_0 trois cycles suffisamment petits δ_1, δ_* et δ_2 entournant respectivement $\tilde{S}_0'$, $\tilde{S}_0^*$ et $\tilde{S}_0''$

une fois dans un certain sens. En comparant la variation totale de l'argument de $\tilde{\varphi}$ le long de ces cycles, nous voyons qu'il n'existe pas d'entier m différent de zéro tel que $m_*\delta_*$ soit homologue à un multiple de δ_1 dans R_0. D'autre part, comme il existe, grâce à *Cousin*, une fonction entière qui ne s'annule que sur S_0'', il n'existe pas d'entiers m_1, m_* et m_2 tels que $m_2 \neq 0$ et que $m_1\delta_1+m_*\delta_*+m_2\delta_2$ soit homologue à nul. L'existence d'une fonction entière qui ne s'annule que sur S_0' entraîne que si $m_1\delta_1$ est homologue à nul m_1 est égal à zéro. Ceci montre que R_0 admet trois cycles indépendants. Or, la transformation définie par

$$\begin{cases} z' = f^{1/n} \\ u = \tilde{\varphi} \end{cases}$$

représente holomorphiquement et biunivoquement R_0 sur le domaine cylindrique donnée par $0<|z|<\rho^{1/n}$ et $0<|u|<\infty$, qui n'admet cependant que deux cycles indépendants. On est ainsi arrivé à l'absurde. L'énoncé a été démontré complètement.

On en déduit que $\tilde{\varphi}$ est holomorphe dans $R-\tilde{S}_0''$ et ne s'y annule jamais. En reprenant si nécessaire son inverse $1/\tilde{\varphi}$, nous pouvons supposer que $\tilde{\varphi}$ est holomorphe dans R tout entier. D'ailleurs, d'après le même raisonnement que dans la section 8, $\tilde{\varphi}$ s'annule sur $\tilde{S}_0''$.

Dans le cas (*c*), $\tilde{S}_0'$ est alors simplement connexe et elle est une surface de Riemann au-dessus de S_0' sans point critique. S_0' est nécessairement simplement connexe et de type (0, 1). La partie de R au-dessus de S_0' se partage donc en n surfaces irréductibles de type (0, 1). Dans le present cas, $\tilde{\varphi}$ prend la valeur un sur $\tilde{S}_0'$ identiquement. Nous allons voir que ***$\tilde{\varphi}$ prend sur chaque surface irréductible $\tilde{S}_0'^{(i)}$ de R étalée au-dessus de S_0' une valeur constante différente de zéro et de l'infini.***

En effet, d'abord, le même raisonnement que dans la section 9 montre que $\tilde{\varphi}$ est constante sur chaque $\tilde{S}_0'^{(i)}$. Si $\tilde{\varphi}$ prenait la valeur constante nulle ou la constante infinie sur une $\tilde{S}_0'^{(i)}$, le raisonnement fait dans le cas (b) montrerait qu'il existe trois cycles indépendants dans R_0. Or, ceci est imposible. Nous avons ainsi l'énoncé.

La fonction $\tilde{\varphi}$ est donc holomorphe dans $R-\tilde{S}_0''$ et ne s'y annule jamais. Ceci nous permet comme précédemment de supposer que $\tilde{\varphi}$ est holomorphe dans R tout entier. Le fait que $\tilde{\varphi}$ s'annule sur $\tilde{S}_0''$ sera montré comme précédemment.

Dans tous ces trois cas (*a*), (*b*) et (*c*), on a obtenu une fonction $\tilde{\varphi}$ holomorphe dans tout R, qui ne s'annule que sur la surface critique $\tilde{S}_0''$ et qui fait, pour tout c $(0<|c|<\rho)$, correspondre holomorphiquement et biunivoquement à chacune des n surfaces irréductibles dans R étalés au-dessus de S_c tout le plan d'une variable pointé à l'origine. Maintenant, à l'aide de cette fonction $\tilde{\varphi}$, nous allons construire une fonction φ holomorphe dans $D: |f|<\rho$, en reprenant ρ plus petit si nécessaire, telle que, pour tout c $(0<|c|<\rho)$, φ fasse correspondre à S_c tout le plan d'une variable pointé à l'origine holomorphiquement et biunivoquement.

Pour ceci, prenons une surface première S_c $(0<|c|<\rho)$ et un tube normal Σ_{Γ_c} autour de S_c dans $\Sigma_{\Gamma_0}-S_0'$, où les notations précédentes Γ et Σ_Γ sont conservées. $\Sigma_{\Gamma_c}\cap\Gamma$ se partage alors en n composantes connexes. La composante connexe $\Sigma^i_{\Gamma_c}$, contenant $\tilde{S}^i_c$, de la partie de R étalée au-dessus de Σ_{Γ_c} n'admet qu'un feuillet au-dessus de tout point de Σ_{Γ_c} et par suite elle est analytiquement équivalente à Σ_{Γ_c} par projection. La restriction $\tilde{\psi}_i$ de $\tilde{\varphi}$ à $\tilde{\Sigma}^i_{\Gamma_c}$ peut donc être regardée comme fonction uniforme et holomorphe dans Σ_{Γ_c}. Posons

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}\tilde{\psi}_i\,.$$

φ est alors une fonction uniforme et holomorphe dans Σ_{Γ_c}. Comme elle est une fonction symétrique des branches de $\tilde{\varphi}$, on peut la prolonger analytiquement en une fonction uniforme et holomorphe dans D tout entier, que l'on désignera par la même lettre φ. Nous allons montrer que pour résoudre le problème (b) il suffit de prendre cette fonction φ elle-même ou bien d'effectuer à $\tilde{\varphi}$ donc à φ une légère modification.

Représentons par la restriction de $\tilde{\psi}_1$ à S_c la surface S_c sur le plan d'une variable t pointé à l'origine: $0<|t|<\infty$. Pour chacune des autres $\tilde{\psi}_i$, sa restriction $(\tilde{\psi}_i)_c$ à S_c, regardée comme fonction de t, pourra s'écrire a_it, où a_i est une constante non nulle. Car, il est évident que $\tilde{\psi}_i$ peut s'écrire a_it ou bien a_i/t. Si $\tilde{\varphi}_i$ s'écrivait a_i/t, on aurait dans Σ_{Γ_c}

$$\tilde{\psi}_i=a_i/\tilde{\psi}_1\,,$$

où a_i est considérée d'abord comme restriction de $\tilde{\varphi}$ à $\tilde{\Gamma}^i\cap\tilde{\Sigma}^i_{\Gamma_c}$ puis comme fonction holomorphe sur Γ_c et finalement comme fonction holomorphe dans Σ_{Γ_c} telle qu'elle se réduise sur chaque surface première de f dans Γ_c à une constante. D'autre part, $\tilde{\varphi}$ prend la valeur nulle sur S_0''. Donc, quand un point dans $D-(S_0'\cup S_0'')$ tend vers S_0'', la valeur de $\tilde{\psi}_1$ et celle de $\tilde{\psi}_i$ en ce point tendent vers zéro simultanément. Ceci revient à dire que, si l'on prolonge analytiquement la fonction a_i le long d'un chemin situé dans $D-(S_0'\cap S_0'')$ et tendant vers S_0'', la valeur de $a_i=\tilde{\psi}_1\cdot\tilde{\psi}_i$ tend vers zéro. Or, cette limite de la valeur de a_i devrait être égale à la valeur prise par $\tilde{\varphi}$ au point situé sur $\tilde{\Gamma}^i$ et au-dessus de S_0', ce qui est en contradiction avec la propriété de $\tilde{\varphi}$.

La restriction de φ à S_c est donc représentée par βt, où $\beta=1+a_2+\cdots+a_n$, a_i considérée comme restriction de $\tilde{\varphi}$ à $\tilde{\Gamma}^i$ donc comme fonction holomorphe de la quantité $z=f^{1/n}$. Ceci nous permet de considérer la quantité β comme fonction holomorphe de z' dans le cercle $|z'|<\rho^{1/n}$.

Si β n'est pas identiquement nulle, on peut reprendre $\rho>0$ assez petit pour que β ne s'annule pas pour $0<|z'|<\rho^{1/n}$. S'il en est ainsi, φ est une fonction holomorphe dans D représentant pour tout c $(0<|c|<\rho)$, la surface première S_c sur tout le plan d'une variable pointé à l'origine, ce qui résolut le problème (b).

Si β est identiquement nulle, il faut modifier la fonction $\tilde{\varphi}$, comme ce qui suit: Fixons un nombre c tel que $0<|c|<\rho$. Soient $c^1, c^2, \cdots, c^n$ ses $n^{-\text{ièmes}}$ racines et soit c' la valeur prise par $\tilde{\varphi}$ sur $\tilde{S}'_c$. Formons le polynome de z'

$$\alpha(z')=1+a\cdot(z'-c^2)\cdots(z'-c^n),$$

où a est un nombre complexe tel que l'on ait $\alpha(z')\neq 0$ pour $|z'|<\rho^{1/n}$. Ceci est possible. Au lieu de $\tilde{\varphi}$, considérons la fonction

$$\tilde{\varphi}\cdot\alpha(f^{1/n}),$$

qui est une fonction uniforme et holomorphe dans R, ayant les mêmes propriétés que $\tilde{\varphi}$ à l'exception de ce que la restriction de $\tilde{\varphi}\cdot\alpha$ à $\tilde{\Gamma}'$ est égale à α au lieu de 1, comme fonction de z'. En remplaçant φ par la somme des branches de cette fonction ainsi modifiée, on aura au lieu de β

$$\alpha(c^1)+\alpha(c^2)\,a_1+\cdots+\alpha(c^n)\,a_n=a(c^1-c^2)\cdots(c^1-c^n)\neq 0.$$

On a ainsi réduit le présent cas au cas précédent où $\beta\not\equiv 0$.

Nous avons ainsi résolu le problème (b) et par suite le problème B, comme nous l'avons remarqué à la fin de la section précédente. En résumé, on a

Lemme 6. *Dans le cas où $n>1$ et $m>1$, le problème (b) est toujours résoluble.*

Lemme 7. *Pour une fonction entière f satisfaisant aux conditions $(B_{n,m})$, n et m étant des entiers positifs quelconques, il existe une fonction entière adjointe à f.*

13. Fonctions adjointes. Soit $f(x, y)$ une fonction entière satisfaisant aux conditions $(B_{n,m})$. Nous avons construit une fonction adjointe à f dans ce qui précède. Tout d'abord, dans la section actuelle, nous nous plaçons dans le cas où $n=1$ et $m>1$ et étudions dans ce cas des fonctions adjointes à f. Il s' agira de savoir s'il y une fonction adjointe satisfaisant aux conditions (A).

D'après ce que l'on a vu dans la section 7, il faut discerner trois cas suivants:

(a') $S'_0\cap S''_0$ est non vide et S'_0 est de type (0, 1)
(b') $S'_0\cap S''_0$ est vide et S'_0 est de type (0, 2)
(c') $S'_0\cap S''_0$ est vide et S'_0 est de type (0, 1).

Le raisonnement fait dans la section 9 montre d'abord que, si f est de type (a′) ou de type (b′), on peut toujours trouver une fonction entière adjointe à f satisfaisant aux conditions (A).

Dans le cas (c′), on ne peut avoir de telle fonction adjointe. Dans ce cas, par le même procédé que dans la section 9, on peut trouver une fonction entière φ adjointe à f telle que f prenne la valeur constante un sur S_0' et la valeur constante nulle sur S_0''. Pour une telle fonction adjointe à f, on peut dire que

La fonction $\varphi-1$ satisfait aux conditions $(B_{m',1})$, où $m'\geq 1$, et elle est ou bien de type (a′) *ou bien de type* (b′).

En effet, la transformation donnée par

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ w = \varphi(x, y) \end{cases}$$

fait correspondre à tout l'espace de (x, y) à l'exception de $S_0' \cup S_0''$ tout l'espace de (z, w) à l'exception de la surface entière $zw = 0$, holomorphiquement et biunivoquement. C'est-à-dire, pour tout nombre complexe a $(\neq 0,-1)$, $\varphi-1$ satisfait aux conditions 1′), 2′) et 3′) de $(B_{n,m})$. La surface entière $\varphi-1=0$ se compose de deux surfaces premières. L'une d'elles coïncide avec S_0' et se désigne par T_0'. L'autre, que l'on désigne par T_0'', est manifestement d'ordre un. De plus, si $T_0' \cap T_0''$ est vide, T_0'' doit être de type (0, 2) et, si non, T_0'' est de type (0, 1). Donc, même si $m' > 1$, la surface entière $\varphi-1=0$ n'est pas de type (c′). Ensuite, la surface entière T_{-1} donnée par $\varphi-1=-1$, qui coïncide avec S_0'', est, d'après le corollaire 1, d'ordre un. Et le raisonnement dans la section 5 montre que T_{-1} est de type (0,1) ou bien de type (0,2) et qu'en aucun de ses points les dérivées $\partial\varphi/\partial x$ et $\partial\varphi/\partial y$ ne s'annulent à la fois. Le raisonnement fait dans la section 9 pour montrer qu'il n'existe pas de fonction entière, satisfaisant aux conditions $(B_{1,1})$ et de type (c), s'applique aussi à la démonstration du fait que $T_{-1} = S_0''$ est de type (0, 2). Donc, l'énoncé a été démontré.

D'où on peut conclure le théorème suivant:

Théorème 3. *Soit $f(x, y)$ une fonction entière satisfaisant aux conditions $(B_{1,m})$, avec $m>1$. Si f est de type (a′) ou de type (b′), on peut toujours trouver une fonction entière $\varphi(x, y)$ adjointe à f qui satisfait aux conditions (A). Si f est de type (c′), on peut trouver une fonction entière $\varphi(x, y)$ adjointe à f telle que la fonction $\varphi-1$ satisfasse aux conditions $(B_{m',1})$ et soit de type (a′) ou de type (b′).*

14. D'après ce que l'on a vu dans la section 12, pour toute fonction entière f satisfaisant aux conditions $(B_{n,m})$ avec $n>1$ et $m>1$, on peut aussi trouver une fonction adjointe à f; c'est-à-dire, une fonction entière qui, pour tout nombre complexe c $(\neq 0)$, fait correspondre à S_c tout le plan d'une variable pointé à l' origine: $0<|w|<\infty$, holomorphiquement et biunivoquement. Alors, il est évident que la fonction donnée par $\varphi(x, y)/[f(x, y)]^r$ a même caractère que φ à l'exception d'avoir eventuellement des pôles sur S_0' ou sur S_0'', où r est un nombre entier non nul quelconque. On l'appellera aussi *fonction adjointe à f.* Dans la section actuelle, nous allons voir plus précisément ces fonctions adjointes, dans le cas où $m>1$ et $n>1$.

Soit $\varphi\ (x, y)$, de nouveau, une fonction adjointe à f. On peut d'abord dire qu'

Elle prend des valeurs constantes a_1 et a_2, qui peuvent être infinies, sur S_0' et sur S_0'' respectivement.

En effet, soient p un point de S_0', qui est un point ordinaire de $f=0$, et a la valeur prise par φ en p. Si φ n'etait pas constante sur S_0', la surface $\varphi = a$ ne rencontrerait S_0' au voisinage de p qu'au point p. Pour toute valeur c non nulle mais assez voisine de zéro, la surface $\varphi=a$ rencontrerait S_c au moins en n points, ce qui contredit l'univalence de φ sur S_c. Il en est de même de S_0''.

Examinons ensuite les surfaces premières de φ. L'énoncé précédent montre que S_0' et S_0'' sont des surfaces premières de φ. La transformation donnée par

$$(T)\qquad \begin{cases} z = f(x, y) \\ w = \varphi(x, y) \end{cases}$$

correspondre à tout l'espace de (x, y) à l'exception de $S_0' \cup S_0''$ celui de (z, w) à l'exceptions des droites analytiques $z = 0$ et $w = 0$, holomorphiquement et biunivoquement. Donc, on a l'énoncé que

La fonction f fait correspondre à toute surface première T_a de φ sauf S_0' et S_0'' tout le plan d'une variable complexe w pointé à l'origine, holomorphiquement et biunivoquement, à moins que T_a n'intersecte $S_0' \cup S_0''$. A ce sens, on peut dire que f est une fonction adjointe à φ.

On aura ici l'énoncé que

Si φ est holomorphe dans tout l'espace de (x, y), elle prend la valeur identiquement nulle sur S_0' et sur S_0'' à *la fois.*

En effet, supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'une des a_1 et a_2, soit a_2, ne soit pas nulle. D'après le même raisonnement que dans la section 8, l'autre a_1 doit être nulle. A l'aide de la transformation (T), on voit que, pour tout nombre $a\ (\neq a_1)$, la surface entière $\varphi - a = 0$ est irréductible. Donc, d'après le corollaire 1, la surface première S_0' de φ avec la valeur nulle est d'ordre un. La fonction $\psi(x, y)$ donnée par

$$\psi(x, y) = \frac{f(x, y)}{[\varphi(x, y)]^n},$$

est holomorphe dans tout l'espace et ne s'annule que sur S_0''. Son ordre de zéro en S_0'' est $m>1$. D'autre part, pour tout nombre complexe $a\ (\neq 0)$, la surface entière $\psi(x, y)-a=0$ est irréductible, ce qui contredit le corollaire 1. Donc, on a $a_1 = 0$.

Enfin, nous allons indiquer que *si la fonction* φ *est holomorphe en* S_0', *elle est aussi holomorphe en* S_0''.

En effet, supposons, pour réduire à l'absurde que φ ait des pôles sur S_0''. Alors, φ s'annule identiquement sur S_0. Car, sinon, la fonction $1/\varphi$ serait une fonction entière adjointe à f et ne s'annulerait que sur S_0'', ce qui est en contradiction avec l'énoncé précédent.

Dénotons, de nouveau, $f_1(x, y)$ la fonction φ pour arranger l'écriture, et dénotons n_1 et $-m_1$, l'ordre de zéro en S_0' et celui de pôle en S_0'' de f_1. En ce moment, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que l'on a $n > n_1$, puisque, si nécessaire, on peut choisir la fonction $f_1/[f]^r$ au lieu de f_1 où r est un nombre entier positif convenable. A l'aide de la transformation donnée par

$$\begin{cases} x_1 = f(x, y) \\ y_1 = f_1(x, y), \end{cases}$$

on voit facilement que $f_1(x, y)$ satisfait aux conditions 1′), 2′), 3′) de (B_{n_1,m_1}) et la surface analytique $f = 0$ coïncide avec S_0' et celle $f_1 = \infty$ coïncide avec S_0''. C'est-à-dire, f_1 satisfait aux conditions (B_{n_1,m_1}) avec $n_1 > 0$ et $m_1 > 0$.

Ensuite, prenons deux nombres entiers n_2 et r_1 de manière que l'on ait

$$n = n_1 r_1 + n_2, \quad r_1 > 0 \quad \text{et} \quad n_1 > n_2 \geqq 0,$$

et posons

$$m = m_2 - m_1 r_1 \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = f(x, y)/[f_1(x, y)]^n.$$

f_2 est une fonction adjointe à f_1 et, de plus, d'après ce que l'on a dit ci-dessus, si $m_2 n_2 \neq 0$, f_2 satisfait aux conditions (B_{n_2,m_2}); et ainsi de suite.

On a donc les fonctions

$$f_1(x, y), f_2(x, y), \cdots, f_p(x, y),$$

où $f_{i+1}(x, y) = f_{i-1}(x, y)/[f_i(x, y)]^{r_i}$ et les entiers positifs r_i $(i = 1, \cdots, p-1)$ sont déterminés de manière que l'on ait

$$(E) \qquad \begin{cases} n_{i-1} = n_i r_i + n_{i+1} \quad \text{et} \quad 0 \leq n_{i+1} < n_i \\ m_{i-1} = m_i r_i + m_{i+1} \\ n_i m_i \neq 0 \; (i = 1, \cdots, p-1) \\ n_p m_p = 0. \end{cases}$$

Les fonctions $f_i(x, y)$ $(i = 1, \cdots, p-1)$ satisfait comme précédemment aux conditions (B_{n_i,m_i}). D'autre part, on a

$$m_{i-1} > 0 \qquad \text{si} \quad m_i > 0 \quad \text{et} \quad m_{i+1} > 0$$

ou

$$m_{i-1} < 0 \qquad \text{si} \quad m_i < 0 \quad \text{et} \quad m_{i+1} < 0.$$

Lorsque $m_p=0$, $f_p(x, y)$ est une fonction entière et ne s'annule que sur S_0'. D'après le corollaire 1, l'ordre de zéro n_p de f_p en S_0' est nécessairement égal à **un.** Formons donc la fonction

$$f_{p+1}(x, y) = \frac{f_{p-1}(x, y)}{[f_p(x, y)]^{n_{p-1}}}.$$

Elle est une fonction adjointe à f, ne s'annulant pas identiquement sur S_0'. Donc, on a $m_{p-1}=\pm 1$. De plus, m_{p-2} étant donnée par $m_{p-1}r_{p-1}$, on a

$$m_{p-2} > 0 \qquad \text{si} \quad m_{p-1} = 1$$

et

$$m_{p-2} < 0 \qquad \text{si} \quad m_{p-1} = -1$$

Donc, si $m_p=0$, on a par récurrence $m_1 m > 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Si $n_p=0$, $f_p(x, y)$ ou bien $1/f_p(x, y)$ est une fonction entière, désignée par $f_p'(x, y)$, et $f_p'(x, y)$ ne s'annule que sur S_0''. Donc, on a $m_p = \pm 1$. D'après le raisonnement dans le cas précédent, on a $n_{p-1}=1$. m_{p-2} étant donné par $m_{p-1}r_{p-1}\pm 1$, et positif, on a

$$m_{p-2} > 0 \qquad \text{si} \quad m_{p-1} > 0$$

et

$$m_{p-2} < 0 \qquad \text{si} \quad m_{p-1} < 0.$$

Par suite, on a de même par récurrence $m_1 m > 0$. Ceci est aussi contraire à l' hypothèse. Donc, l'énoncé a été démontré complètement

De ce qu'on a dit jusqu'ici, on peut tirer la conclusion suivante:

Théorème 4. *Pour toute fonction entière $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions $(B_{n,m})$ avec $n>1$ et $m>1$, toute fonction adjointe à f satisfait aux conditions (B_{n_1,m_1}), où n_1 et m_1 sont des entiers tels que $n_1 m_1 > 0$.*

15. Fonctions entières satisfaisant aux conditions $(B_{1,m})$, avec $m>1$. Dans la section actuelle, nous allons déterminer toutes les fonctions entières qui satisfassent aux conditions $(B_{1,m})$, avec $m > 1$. D'après ce qu'on a vu dans la section 13, une telle fonction $f(x, y)$ est ou bien de type (a′), ou bien de type (b′), ou bien de type (c′).

Dans les cas (a′) et (b′), on peut toujours trouver, d'après le théorème 3, une fonction φ adjointe à f satisfaisant aux conditions (A). Donc, d'après le même raisonnement que dans la section 10, on peut voir aisément que la fonction f se réduit au polynome $x^m y$ ou à celui de la forme $x^m(x^l y + a_0 + \cdots + a_{l-1}x^{l-1})$ avec $l \geq 1$ et $a_0 \neq 0$ respectivement, suivant que f est de type (a′) ou de type (b′), par un automorphisme analytique convenable de tout l'espace de (x, y). Il s'agit donc du cas (c′).

Dans ce cas, on peut toujours trouver, d'après le théorème 3, une fonction φ adjointe à f telle que la fonction $\varphi - 1$ satisfasse aux conditions $(B_{m',l})$ avec $m' \geq 1$ et soit de type (a′) ou bien de type (b′). De ce qui précède, on peut trouver un automorphisme analytique

$$(T_1) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x, y) \\ y_1 = \psi_1(x, y) \end{cases}$$

de tout l'espace (x, y) telle que $\varphi - 1$ se réduise au polynome $x_1^{m'} y_1$ ou bien à celui de la forme $x_1^{m'}(x_1^{l'} y_1 + b_0 + \cdots + b_{l'-1}x_1^{l'-1})$ avec $l' \geq 1$ et $b_0 \neq 0$ par cet automorphisme, et que φ_1 soit une fonction adjointe à $\varphi - 1$. Désignons ce polynome par $P(x_1, y_1)$ dans tous les cas.

En ce moment, la fonction $f(x, y)$ se transforme par (T_1) en une fonction de la forme

$$f_1(x, y) = x_1[P(x_1, y_1) + 1]^m e^{A(x_1, y_1)},$$

puisque φ_1 ne s'annule que sur S_0' et φ ne s'annule que sur S_0''. De plus, on peut dire qu'*on a*

$$A(x_1, y_1) = B(P(x_1, y_1) + 1),$$

où $B(X)$ est une fonction entière d'une variable complexe X.

En effet, la fonction $P(x_1, y_1) + 1$ est celle adjointe à f_1 puisque φ est une fonction adjointe à f. Par suite, la fonction f_1 est une fonction adjointe à $P(x_1, y_1) + 1$ et la fonction donnée par

$$\frac{f_1(x_1, y_1)}{[P(x_1, y_1) + 1]^{m'}} = x_1 e^{A(x_1, y_1)}$$

est aussi celle adjointe à $P(x_1, y_1) + 1$. D'autre part, x_1 peut être regardé comme fonction adjointe à $P(x_1, y_1) + 1$. Donc, on peut écrire

$$x_1 e^{A(x_1, y_1)} = C(P(x_1, y_1) + 1) \cdot x_1,$$

où $C(X)$ est une fonction entière d'une variable complexe X, puisque le rapport de $x_1 e^{A(x_1, y_1)}$ et x_1 est constante sur toute surface première de $P(x_1, y_1)$. C'est-à-dire, on a

$$A(x_1, y_1) = B(P(x_1, y_1)+1)$$

où $B(X)$ est une fonction entière d'une variable complexe X.

Maintenant, considérons la transformation donnée par

$$(T_2') \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 e^{B(p(x_1, y_1)+1)} \\ y_2 = P(x_1, y_1)+1 . \end{cases}$$

Elle est un automorphisme analytique de tout l'espace de (x_1, y_1) à l'exception de la droite analytique $x_1=1$. Par cette transformation, $f_1(x_1, y_1)$ se réduit à la fonction

$$f(x, y) = x_2 y_2^m .$$

Ensuite, considérons la transformation donnée par

$$(T_3') \qquad \begin{cases} x_2 = x_3 \\ y_2 = x_3^l y_3 + a_0 + a_1 x_3 + \cdots + a_{l-1} x_3^{l-1} \end{cases}$$

où a_i $(i=0, 1, \cdots, l-1)$ sont des nombres complexes, et $l\,(>0)$ est le degré de $P(x_1, y_1)$ par rapport à x_1. Elle est aussi un automorphisme analytique de tout l'espace de (x_3, y_3) à l'exception de la droite analytique $x_3=0$. Par suite, la transformation donnée par le produit de (T_2') par (T_3')

$$(T_2) \quad \begin{cases} x_3 = x_1 e^{B(p(x_1, y_1)+1)} \\ y_3 = \dfrac{[P(x_1, y_1)+1] - [a_0 + a_1 x_1 e^{B(p(x_1, y_1)+1)} + \cdots + a_{l-1} x_1^{l-1} e^{(l-1)B(p(x_1, y_1)+1)}]}{x_1^l e^{lB(p(x_1, y_1)+1)}} \end{cases}$$

est aussi un automorphisme analytique de tout l'espace de (x_1, y_1) à l'exception de la droite analytique $x_1=0$, quels que soient les nombres complexes $a_0, \cdots, a_{l-1}$. En ce moment, si l'on peut déterminer les nombres complexes $\{a_i\}$ $(i=0, 1, \cdots, l-1)$ tels que la transformation (T_2) soit un automorphisme analytique de l'espace de (x_1, y_1) tout entier, $f_1(x_1, y_1)$ se transforme en un polynome $x_3(x_3^l y_3 + a_0 + a_1 x_3 + \cdots + a_{l-1} x_3^{l-1})$ par (T_2).

Donc, il s'agit maintenant de déterminer les nombres complexes $\{a_i\}$ $(i=0, 1, \cdots, l-1)$. Envisageons ici le coefficient $c_{s,t}$ de $x_1^s y_1^t$ dans le développement en série de Taylor de la fonction

$$G(x_1, y_1) = [P(x_1, y_1)+1-x_1^l y_1] - [a_0 + a_1 x_1 e^{B(p(x_1, y_1)+1)} + \cdots \\ + a_{l-1} x_1^{l-1} e^{(l-1)B(p(x_1, y_1)+1)}] .$$

Après un calcul facile, on peut voir que, pour tout s tel que $0 \leq s < l-1$, $c_{s,0}$, est une combinaison linéaire des $1, a_0, a_1, \cdots, a_s$ telle que son coefficient de a_s ne soit pas nul. Par suite, on peut déterminer uniquement $a_0, a_1, \cdots, a_{l-1}$ de manière que $c_{s,0}$ $(0 \leq s \leq l-1)$ soient tous nuls. Alors, dans $c_{s,t} x_1^s y_1^t$, on peut facilement voir de la forme de $G(x_1, y_1)$ qu'on a toujours

$$c_{0,t}=0 \qquad \text{pour tout} \quad t\geqq 1$$

et

$$c_{s,t}=0 \qquad \text{pour} \quad t\geqq 1 \quad \text{et} \quad 0\leq s\leq 1.$$

Donc, on peut écrire

$$G(x_1, y_1)=x_1^l\cdot H(x_1, y_1),$$

où *$H(x_1, y_1)$ est une fonction entière telle que $H(0, y_1)$ soit constante.* Alors, pour $x_1=0$, y_3 est une fonction linéaire de y_1 non constante. Donc, (T_2) est biunivoque dans tout l'espace. Ceci signifie que la transformation (T_2) est un automorphisme analytique de tout l'espace de (x_1, y_1).

On a l'énoncé que

Par un automorphisme analytique convenable de tout l'espace des variables x et y, toute fonction entière de x et y satisfaisant aux conditions $(B_{1,m})$ peut se réduire à l'un des trois types de polynomes suivants:

(a′) $x^m y$

(b′) $x^m(x^l y+a_0+\cdots+a_{l-1}x^{l-1})$ *avec $l\geq 1$ et $a_0\neq 0$;*

(c′) $x(x^l y+a_0+\cdots+a_{l-1}x^{l-1})^m$ *avec $l\geq 1$ et $a_0\neq 0$.*

16. Fonctions entières satisfaisant aux conditions ($\mathbf{B_{n,m}}$) avec $\mathbf{n>1}$ et $\mathbf{m>1}$. Dans la section actuelle, nous déterminerons toutes les fonctions entières satisfaisant aux conditions $(B_{n,m})$ avec $n>1$ et $m>1$. Soit $f(x, y)$ une telle fonction entière.

D'après le théorème 4, on peut trouver une fonction entière adjointe à f qui satisfait aux conditions (B_{n_1,m_1}) où $n>n_1\geq 1$ et $m>m_1\geq 1$, puisque, si l'on a $n_1>n$, il suffit de prendre $f_1/[f]^r$ au lieu de f_1, où r est un nombre entier positif convenable.

Ensuite, si l'on a $u_1>1$ et $m_1>1$, pour la fonction f, on prend encore une fonction entière f_2 adjointe à f_1, comme ce qui suite: comme on l'a vu dans la section précédente, la fonction f est une des fonctions adjointes à f_1. Par suite, prenont des nombres entiers non négatifs r_1 et n_2 tels que l'on ait

$$n=n_1r_1+n_2 \quad \text{et} \quad n_1>n_2\geq 0$$

et posont

$$m_2=m-m_1r_1$$

et

$$f_2=f/[f_1]^{r_1}.$$

La fonction f_2 est certainement une fonction adjointe à f_1 et elle satisfait aux conditions (B_{n_2,m_2}). De plus, d'après le théorème 4, on a $n_1>n_2\geq 1$ et $m_1>m_2\geq 1$.

En continuant ce procédé, on arrivera à une suite de fonctions entières

$$f(x, y) = f_0(x, y), f_1(x, y), \cdots, f_p(x, y),$$

où $f_{i+1}(x, y)=f_{i-1}(x, y)/[f_i(x, y)]^{r_i}$ $(i=1, \cdots, p-1)$ et r_i sont déterminés avec les ordres n_i et m_i de manière que l'on ait

$$n_0 = n, \quad m_0 = m,$$
$$n_{i-1} = n_i r_i + n_{i+1}, \quad n_{i+1} < n_i,$$

et

$$m_{i-1} = m_i r_i + m_{i+1} \qquad (i=1, 2, \cdots, p-1);$$

et de plus

$$n_p = 1 \quad \text{ou} \quad m_p = 1.$$

Alors, f_i est fonction adjointe à f_{i-1} $(i=1, \cdots, p)$ et à f_{i+1} $(i=1, \cdots, p-1)$ à la fois.

Comme dans le procédé qui suit il n'y a acuune différence essentielle entre le cas de $n_p=1$ et celui de $m_p=1$, on suppose ici, pour fixer les idées, que l'on a $n_p=1$. Alors, d'après le théorème II, par un automorphisme analytique convenable (T_{11})

$$(T_{11}) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi(x, y) \\ y_1 = \psi(x, y) \end{cases}$$

de tout l'espace de (x, y), la fonction $f_p(x, y)$ se réduit ou bien au polynome $x_1 y_1^{m_p}$, ou bien à celui de la form $x_1^{m_p}(x_1^l y_1 + a_0 + \cdots + a_{l-1} x_1^{l-1})$, ou bien à celui de la forme $x_1(x_1^l y_1 + \cdots + a_{1-1} x_1^{l-1})^{m_p}$, où $l \geq 1$ et $a_0 \neq 0$, suivant que f_p est de type (a′), de type (b′) ou bien de type (c′). Dénotons $f_i^1(x_1, y_1)$ $(i=0, 1, \cdots, p)$ les fonctions transformées de $f_i(x_1, y_1)$ par (T_{11}), et envisageons les fonctions f_i^1 plus précisément.

D'abord, nous nous occupons aù cas où f_p est de type (a′). *Elle peut s'écrire*

$$f_i^1(x_1, y_1) = x_1^{n_i} y_1^{m_i} e^{h_i(x_1, y_1)},$$

où $h_i(x_1, y_1)$ $(i=0, 1, \cdots, p)$ sont des fonctions entières de x_1 et y_1 et $h_p(x_1, y_1) \equiv 0$, puisque toute f_i prend la valeur nulle justement sur S_0' et sur S_0'', avec les ordres n_i et m_i respectivement.

De plus, on peut dire qu'*on a*

$$h_i(x_1, y_1) = c_i \cdot A(x_1 y_1^{m_p}),$$

où $A(X)$ est une fonction entière d'une variable X et c_i sont des nombres entiers positifs.

En effet, f_{p-1} étant une fonction adjointe à f_p^1, f_{p-1}^1 est adjointe à $x_1 y_1^{m_p}$. Par suite, la fonction donnée par

$$g(x_1, y_1) = f_{p-1}^1(x_1, y_1)/[x_1 y_1^{m_p}]^{n_{p-1}}$$
$$= y_1^{m_{p-1}-m_p n_{p-1}} e^{h_{p-1}(x_1, y_1)}$$

est aussi adjointe à $x_1 y_1^{m_p}$. D'après le corollaire 1, on a $m_{p-1} - m_p n_{p-1} = \pm 1$. D'autre part, y_1 et $1/y_1$, toutes les deux, sont aussi des fonctions adjointes à $x_1 y_1^{m_p}$.

Donc, on a l'égalité

$$y_1 \cdot e^{h_{p-1}(x_1, y_1)} = B(x_1 y_1^{m_p}) \cdot y_1$$

où $B(X)$ est une fonction entière d'une variable X puisque le rapport de $y_1 e^{h_{p-1}(x_1, y_1)}$ et de y_1 ou celui de $e^{h_{p-1}(x_1, y_1)}/y_1$ et de $1/y_1$ est constant sur toute surface première de $x_1 y_1^{m_p}$. C'est-à-dire, on a

$$h_{p-1}(x_1, y_1) = A(x_1 y_1^{m_p}),$$

où $A(X)$ est une fonction entière d'une variable X.

Or, en général, on a les égalités

$$f_{i-2}' = f_i[f_{i-1}]^{r_{i-1}} \qquad (i=2, \cdots, p).$$

Donc, on a

$$f_{i-2}^1 = [f_p^1]^{s_{i-2}}[f_{p-1}^1]^{t_{i-2}} = x_1^{n_{i-2}} y_1^{m_{i-2}} \cdot e^{t_{i-2} A(x_1 y_1^{m_p})},$$

où s_{i-2} et t_{i-2} sont des nombres entiers positifs convenables. Donc, l'énoncé a été démontré.

Considérons ici la transformation

$$(T_{12}) \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \cdot e^{\alpha A(x_2 y_2^{m_p})} \\ y_1 = y_2 \cdot e^{\beta A(x_2 y_2^{m_p})}, \end{cases}$$

où (α, β) est la seule solution de deux équations linéaires simultanées non dégénérées

$$\begin{cases} x + m_p y = 0 \\ nx + my = -1, \end{cases}$$

où on a $(n, m) = 1$. La transformation (T_{12}) est un automorphisme analytique de tout l'espace de (x, y)[7]; car, de la relation

$$\alpha + m_p \beta = 0,$$

on a

$$x_1 y_1^{m_p} = x_2 y_2^{m_p}.$$

7) Voir Peschl [4].

Par suite, $f^1(x_1, y_1)$, se réduit, en vertu de $n\alpha+m\beta+1=0$, au polynome par la transformation (T_{12}).

C'est-à-dire, $f(x_1, y_1)$ se réduit au polynome $x^n y^m$ par l'automorphisme analytique de tout l'espace de (x, y) donné par le produit de (T_{11}) et de (T_{12}).

Ensuite, nous nous plaçons dans le cas où f_p est de type (b'). D'après le même raisonnement que dans le cas précédent, on peut écrire la fonction $f^1(x_1, y_1)$ sous la forme

$$f^1(x_1, y_1) = x_1^n(x_1^l y_1+a_0+\cdots+a_{l-1}x_1^{l-1})e^{A(x_1^{m_p}(x_1^l y_1+a_0+\cdots+a_{l-1}x_1^{l-1}))},$$

où $l\geq 1$, $a_0\neq 0$, et $A(x)$ est une fonction entière d'une variable X.

Considérons ici deux transformations suivantes

$$(T'_{22}) \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = x_1^l y_1+a_0+\cdots+a_{l-1}x_1^{l-1}\,, \end{cases}$$

$$(T_{23}) \qquad \begin{cases} x_2 = x_3\cdot e^{\alpha A(x_3^{m_p}y_3)} \\ y_2 = y_3\cdot e^{\beta A(x_3^{m_p}y_3)}\,, \end{cases}$$

où la paire (α, β) est la seule solution de deux équations linéaires simultanées non dégénérées

$$\begin{cases} m_p x+y = 0 \\ nx+my = -1\,, \end{cases}$$

où on a $(n, m)=1$. La transformation (T'_{22}) est un automorphisme analytique de tout l'espace de (x, y) à l'exception de la droite analytique $x_1=0$, mais elle n'en est pas dans tout l'espace. La transformation (T_{23}) est un automorphisme analytique de tout l'espace de (x, y); car, $m_p\alpha+\beta=0$ entraîne

$$x_2^{m_p}y_2 = x_3^{m_p}y_3\,.$$

Dénotons $f^3(x_3, y_3)$ la fonction transformée de $f^1(x_1, y_1)$ par le produit de (T'_{22}) et de (T_{23}). On peut écrire

$$f^3(x_3, y_3) = x_3^n y_3^m\,,$$

puisque l'on a $n\alpha+m\beta+1=0$.

Ensuite, considérons la transformation

$$(T'_{24}) \qquad \begin{cases} x_2 = x_4 \\ y_3 = x_4^l y_4+b_0+b_1x_4+\cdots+b_{l-1}x_4^{l-1}\,, \end{cases}$$

où b_i $(i=0, 1, \cdots, l-1)$ sont des nombres complexes que l'on déterminera plus tard. Elle est un automorphisme analytique de tout l'espace de (x, y) à l'exception de la droite analytique $x_4=0$ mais elle n'en est pas dans tout l'espace.

Comme on l'a fait dans la section 13, on peut tout pareillement déterminer les coefficients b_i ($i=0, 1, \cdots, l-1$) de manière que la transformation (T_{22}) donnée par le produit de (T'_{22}), (T_{23}) et (T'_{24})

$$(T'_{24}) \quad \begin{cases} x_4 = x_1 e^{-\alpha A(p(x_1, y_1))} \\ y_4 = \dfrac{[x_1^l y_1 + a_0 + \cdots + a_{l-1} x_1^{l-1}] e^{-\beta(p(x_1, y_1))} - [b_0 + b_1 x_1 e^{-\alpha A(p(x_1, y_1))} + \cdots + b_{l-1} x_1^{l-1} e^{-(l-1)\alpha A(p(x_1, y_1))}]}{x_1^l e^{-\alpha l A(p(x_1, y_1))}} \end{cases}$$

où $P(x_1, y_1) = x_1^{m_p}(x_1^l y_1 + a_0 + \cdots + a_{l-1} x_1^{l-1})$ soit un automorphisme analytique de tout l'espace de (x, y). Alors, $f(x, y)$ se réduit à un polynome de la forme

$$x^n(x^l y + b_0 + \cdots + b_{l-1} x^{l-1})^m$$

par l'automorphisme analytique de tout l'espace de (x, y) donné par le produit de (T_{11}) et de (T_{22}).

Enfin, traitons le cas où f_p est de type (c'). D'après le raisonnement précédent, on peut écrire la fonction f^1 sous la forme

$$f^1(x_1, y_1) = x_1^n(x_1^l y_1 + a_0 + \cdots + a_{l-1} x_1^{l-1}) e^{A(x_1(x_1^l y_1 + a_0 + \cdots + a_{l-1} x_1^{l-1})^{m_p})},$$

où $A(X)$ est une fonction entière d'une variable X.

Considérons aussi trois transformations suivantes

$$(T'_{32}) \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = x_1^l y_1 + a_0 + \cdots + a_{l-1} x_1^{l-1}; \end{cases}$$

$$(T_{33}) \qquad \begin{cases} x_2 = x_3 \cdot e^{\alpha A(x_2 y_2^{m_p})} \\ y_2 = y_3 \cdot e^{\beta A(x_2 y_2^{m_p})}; \end{cases}$$

$$(T'_{34}) \qquad \begin{cases} x_3 = x_4 \\ y_3 = x_4 y_4^l + b_0 + \cdots + b_{l-1} x_4^{l-1}, \end{cases}$$

où on détermine la paire (α, β) de manière que les équations linéaires simultanées

$$\begin{cases} \alpha + m_p \beta = 0 \\ n\alpha + m\beta = -1 \end{cases}$$

soient satisfaites et on détermine les coefficients $(b_0, b_1, \cdots, b_{l-1})$ de manière que la transformation donnée par le produit de (T'_{32}), (T_{33}) et de (T'_{34}), que l'on désigne par (T_{32}), est un automorphisme analytique dans tout l'espace de (x, y). Ceci est possible comme précédemment. Alors, comme précédemment, la fonction f^1 se réduit à un polynome de la forme

$$x_1^n(x_1^l y_1 + b_0 + \cdots + b_{l-1} x_1^{l-1})^m,$$

où $l\geq 1$ et $b_0\neq 0$, par l'automorphisme analytique (T_{32}) de tout l'espace de (x, y).

Donc, on a l'énoncé que

Pour toute fonction entière $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions $(B_{n,m})$ avec $n>1$ et $m>1$, elle peut se réduire ou bien au polynome $x^n y^m$ ou bien à celui de la forme $x^n(x^l y+a_0+\cdots+a_{l-1}x^{l-1})^m$, où $l\geq 1$ et a_i $(i=0, \cdots, l-1)$ sont des nombres complexes tels que $a_0\neq 0$, par un automorphisme analytique convenable de tout l'espace de (x, y).

17. Conclusion. D'après ce que l'on a vu dans les section 10, 15 et 16, on a le

Théorème. *Toute fonction entière $f(x, y)$ satisfaisant aux conditions $(B_{n,m})$ avec $n>0$ et $m>0$, de deux variables complexes x et y, peut se réduire toujours, par un automorphisme analytique convenable de tout l'espace de (x, y), ou bien au polynome $x^n y^m$ ou bien à celui de la forme $x^n(x^l y+a_0+\cdots+a_{l-1}x^{l-1})^m$ où, $l\geq 1$ et a_i sont des nombres complexes tels que $a_0\neq 0$.*

UNIVERSITÉ PRÉFECTORALE D'ŌSAKA

Bibliographie

[1] T. Nishino: *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes* (I), J. Math. Kyoto Univ. **8** (1968), 49–100.

[2] T. Nishino: *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes* (II). *Fonctions entières qui se réduisent à celles d'une variable,* J. Math. Kyoto Univ. **9** (1969), 221–274.

[3] T. Nishino: *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes* (III). *Sur quelques propiétés topologiques des surfaces premières,* J. Math. Kyoto Univ. **10** (1970), 245–271.

[4] E. Peschl: *Automorphismes holomorphes de l'espace à n dimensions complexes,* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. **242** (1956), 1836–1838.