Itô, M.
Osaka J. Math.
4 (1967), 217-226

NOTE SUR CONTRACTIONS ET PRINCIPES DU MAXIMUM*)

MASAYUKI ITÔ

(Received April 20, 1967)

1. Soit $\mathfrak{X}$ un espace fonctionel relativement à un espace X localement compact et séparé, et à une mesure ξ de Radon positive dans X. Deny [3] a démontré que les deux énoncés suivants sont équivalents sous la condition $(*)$.

$(*)$ A tout compact K de X, on peut associer une constante $A'(K)$ telle qu'on ait, pour toute u de $\mathfrak{X}$,

$$\int_K |u(x)|^2 d\xi(x) \leq A'(K) \|u\|^2.$$

(1.1) La contraction "module" opère dans $\mathfrak{X}$. (resp. Les contractions normales opèrent dans $\mathfrak{X}$.)

(1.2) Le principe de domination est satisfait dans $\mathfrak{X}$. (resp. Le principe complet du maximum est satisfait dans $\mathfrak{X}$.)

Dans cet article, nous allons démontrer la même équivalence sans la condition $(*)$.

2. Nous donnerons d'abord la définition de l'espace fonctionel d'accord avec Deny [3].

DÉFINITION. Un espace fonctionel $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(X; \xi)$ relativement à X et à ξ est un espace hilbertien des fonctions réelles et localement sommables pour ξ, verifiant la condition suivante:

(a) A tout compact K de X, on peut associer une constante positive $A(K)$ telle qu'on ait, pour toute u de $\mathfrak{X}$,

$$\int_K |u(x)| d\xi(x) \leq A(K) \|u\|.$$

Deux fonctions égales presque partout pour ξ représentent le même élément de $\mathfrak{X}$. La norme et le produit scalaire sont désignés respectivement par $\|u\|$ et (u, v). On désignera par M l'ensemble des fonctions réelles, mesurables pour ξ

*) Cet article a été fait sous un bourse de la Fondation de Yukawa.

et bornées, à support compact dans X, et par M^+ l'ensemble des éléments non-négatifs de M. Par la condition (a), à toute fonction f de M, on peut associer un élément unique u_f de $\mathfrak{X}$ tel qu'on ait

$$(u_f, v) = \int v(x)f(x)d\xi(x)$$

pour toute v de $\mathfrak{X}$. On désignera par $P(\mathfrak{X})$ l'ensemble $\{u_f; f \in M\}$, et par $P^+(\mathfrak{X})$ l'adhérence de $\{u_f; f \in M^+\}$. On appelle les éléments de $P^+(\mathfrak{X})$ potentiels purs de $\mathfrak{X}$. Alors, $P(\mathfrak{X})$ est dense dans $\mathfrak{X}$, et nous obtenons que la convergence forte dans $\mathfrak{X}$ entraîne la convergence presque partout pour ξ sur X.

Le principe de domination: on dit que le principe de domination est satisfait dans $\mathfrak{X}$ si, quels que soient f et g de M^+, l'inégalité $u_f(x) \leq u_g(x)$ est satisfaite presque partout pour ξ sur X dès qe'elle l'est presque partout sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$.

Le principe complet du maximum: on dit que le principe complet du maximum est satisfait dans $\mathfrak{X}$ si, quels que soient f et g de M^+, l'inégalité $u_f(x) \leq u_g(x) + 1$ est satisfaite presque partout sur X dès qu'elle l'est presque partout sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$.

La contraction "module": on dit que la contraction "module" opère dans $\mathfrak{X}$ si, quelle que soit u de $\mathfrak{X}$, on a $|u| \in \mathfrak{X}$ et $\|\,|u|\,\| \leq \|u\|$.

Les contractions normales: on dit que les contractions normales opèrent dans $\mathfrak{X}$ si, quelle que soit une contraction T de la droite réelle[1], on a $T \cdot u \in \mathfrak{X}$ et $\|T \cdot u\| \leq \|u\|$ pour toute u de $\mathfrak{X}$.

Théorème 1. *Soit $\mathfrak{X}$ un espace fonctionel relativement à X et à ξ. Deux énoncés suivants sont équivalents.*

(A_1) *La contraction "module" opère dans $\mathfrak{X}$.*

(A_2) *Le principe de domination est satisfait dans $\mathfrak{X}$.*

Théorème 2. *Soit $\mathfrak{X}$ un espace fonctionel relativement à X et à ξ. Deux énoncés suivants sont équivalents.*

(B_1) *Les contractions normales opèrent dans $\mathfrak{X}$.*

(B_2) *Le principe complet du maximum est satisfait dans $\mathfrak{X}$.*

Deny [3] a démontré les entraînements $(A_1) \Rightarrow (A_2)$ et $(B_1) \Rightarrow (B_2)$ sans la condition $(*)$.

3. Démontrons l'entraînement $(A_2) \Rightarrow (A_1)$. Pendant cette section, nous supposons que le principe de domination est satisfait dans $\mathfrak{X}$. Soit c un nombre positif, et posons

$$u_f^{(c)} = u_f + cf$$

1) On appelle une contraction normale de la droite réelle R une application T de R à R satisfaisant aux $T(0)=0$ et $|T(a_1)-T(a_2)| \leq |a_1 - a_2|$ pour tout couple a_1 et a_2 de R.

pour toute f de M. L'ensemble $P(\mathfrak{X}^{(c)})=\{u_f^{(c)}; f\in M\}$ est un espace pré-hilbertien par la norme

$$||u_f^{(c)}||_c = \left(\int u_f^{(c)}(x)f(x)d\xi(x)\right)^{1/2}.$$

La complété $\mathfrak{X}^{(c)}$ de $P(\mathfrak{X}^{(c)})$ par la norme susdite $||\cdot||_c$ est un espace fonctionel relativement à X et à ξ.

Lemme 1. *A toute u de $P^+(\mathfrak{X}^{(c)})$, on peut associer une fonction non-négative unique f de $L^2=L^2(\xi)$ telle qu'on on ait, pour toute v de $\mathfrak{X}^{(c)}$,*

$$(u, v)_c \doteq \int v(x)f(x)d\xi(x) .$$

En effet, il existe une suite (f'_n) de M^+ telle que la suite $(u_{f'_n}^{(c)})$ converge fortement vers u dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ avec $n\to\infty$. L'inégalité

$$c||f'_n-f'_m||_{L^2}^2\leq||u_{f'_n}^{(c)}-u_{f'_m}^{(c)}||_c^2$$

entraîne l'existence d'une fonction non-négative f de L^2 telle qu'on ait

$$\lim_{n\to\infty}||f'_n-f||_{L^2} = 0 .$$

Posons

$$f_n(x) = \sup\left(\inf(f'_n(x), f(x)), f_{n-1}(x)\right) .$$

Par l'inégalité $||u_{f_n}^{(c)}||_c\leq||u_{f'_n}^{(c)}||_c$ et la convergence croissante de (f_n) vers f, la suite $(u_{f_n}^{(c)})$ converge fortement vers u dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ avec $n\to\infty$. Pour toute fonction non-négative v de $\mathfrak{X}^{(c)}$, on a

$$(u, v)_c = \lim_{n\to\infty}(u_{f_n}^{(c)}, v)_c = \lim_{n\to\infty}\int v(x)f_n(x)d\xi(x) = \int v(x)f(x)d\xi(x) ,$$

parce que la suite (f_n) converge en croissant vers f presque partout pour ξ. Généralement, depuis que l'espace fonctionel $\mathfrak{X}^{(c)}$ a un noyau positif[2], d'après le théorème de Aronszajn-Smith (voir [1]), à toute v de $\mathfrak{X}^{(c)}$, on peut associer un élément $\tilde{v}$ de $\mathfrak{X}^{(c)}$ telle qu'on ait

$$||\tilde{v}||_c\leq||v||_c \quad \text{et} \quad |v(x)|\leq\tilde{v}(x)$$

presque partout pour ξ sur X. Par le résultat susdit, on a

$$\int \tilde{v}(x)f(x)d\xi(x)<+\infty.$$

Le théorème de convergence de Lebesgue entraîne

2) On l'appelle si tout potentiel pur d'un espace fonctionel est non-négatif.

$$\lim_{n\to\infty}\int v(x)f_n(x)d\xi(x)=\int v(x)f(x)d\xi(x)\,,$$

c'est-à-dire que

$$(u,v)_c=\int v(x)f(x)d\xi(x)\,.$$

De la même manière, on désigne par $u_f^{(c)}$ cet élément u. Nous posons

$$L^2(\mathfrak{X}^{(c)})=\{f\in L^2;\ u_f^{(c)}\in P^+(\mathfrak{X}^{(c)})\}\,.$$

Évidemment, on a $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})=L^2(\mathfrak{X}^{(c')})$ pour tous c, $c'>0$.

Lemme 2. *Le principe de domination est satisfait dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ pour tout $c>0$.*

En effect, pour un couple de f et g de M^+, supposons que

$$u_f^{(c)}(x)\le u_g^{(c)}(x)$$

presque partout pour ξ sur $\{x\in X; f(x)>0\}$. Il suffit de le démontrer au cas où

$$\{x\in X; f(x)>0\}\cap\{x\in X; g(x)>0\}=\emptyset\,,$$

parce que, en général, on peut considérer l'inégalité

$$u^{(c)}_{(f-g)^+}(x)\le u^{(c)}_{(f-g)^-}(x)\,.$$

Depuis que le principe de domination est satisfait dans $\mathfrak{X}$ et qu'on a $u_f(x)\le u_g(x)$ presque partout pour ξ sur $\{x\in X; f(x)>0\}$, $u_f(x)\le u_g(x)$ presque partout pour ξ sur X, c'est-à-dire,

$$u_f(x)+cf(x)\le u_g(x)+cg(x)$$

presque partout pour ξ dans $C\{x\in X; f(x)>0\}$. En conséquence, on a

$$u_f^{(c)}(x)\le u_g^{(c)}(x)$$

presque partout pour ξ sur X.

De plus, nous obtenons le lemme suivant.

Lemme 3. *Pour un couple f_1 et f_2 de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$, l'inégalité $u_{f_1}^{(c)}(x)\le u_{f_2}^{(c)}(x)$ est satisfaite presque partout pour ξ sur X dès qu'elle l'est presque partout pour ξ sur $\{x\in X; f(x)>0\}$.*

D'abord, nous allons démontrer au cas où $f_2\in M^+$. Il existe une suite $(f_{1,n})$ de M^+, qui converge en croissant vers f_1 presque partout pour ξ sur X, telle que la suite $(u_{f_{1,n}}^{(c)})$ converge fortement vers $u_{f_1}^{(c)}$ dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ avec $n\to\infty$. Depuis qu'on a

$$u_{f_{1,n}}^{(c)}(x)\le u_{f_2}^{(c)}(x)$$

presque partout pour ξ sur $\{x\in X; f_{1,n}(x)>0\}$, l'inégalité

$$u_{f_{1,n}}^{(c)}(x) \leq u_{f_2}^{(c)}(x)$$

est satisfaite presque partout pour ξ sur X par le lemme 2. Faisant $n \to \infty$, nous obtenons

$$u_{f_1}^{(c)}(x) \leq u_{f_2}^{(c)}(x)$$

presque partout pour ξ sur X. Au cas général, supposons que

$$\xi(\{x \in X;\ u_{f_1}^{(c)}(x) > u_{f_2}^{(c)}(x)\}) > 0 .$$

Alors, il existe une fonction $g(\neq 0)$ de M^+ telle que

$$S_g \subset \{x \in X;\ u_{f_1}^{(c)}(x) > u_{f_2}^{(c)}(x)\} .$$

Soit E l'adhérence de l'ensemble

$$\{u_f^{(c)};\ f \in M^+,\ S_f \subset \{x \in X;\ u_{f_1}^{(c)}(x) \leq u_{f_2}^{(c)}(x)\}\} .$$

Alors, E est un cône convexe fermé dans $\mathfrak{X}^{(c)}$. La projection de $u_g^{(c)}$ vers E est un potentiel pur dans $\mathfrak{X}^{(c)}$, que nous désignerons par $u_{g'}^{(c)}$. Par l'énoncé susdit, on a

$$u_g^{(c)}(x) = u_{g'}^{(c)}(x)$$

presque partout pour ξ sur $\{x \in X;\ u_{f_1}^{(c)}(x) \leq u_{f_2}^{(c)}(x)\}$, et

$$u_g^{(c)}(x) \geq u_{g'}^{(c)}(x)$$

presque partout pour ξ sur X. Alors, on a

$$\begin{aligned}
&(u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)},\ u_g^{(c)} - u_{g'}^{(c)})_c \\
&= \int (u_g^{(c)}(x) - u_{g'}^{(c)}(x)) f_1(x)\, d\xi(x) - \int (u_g^{(c)}(x) - u_{g'}^{(c)}(x)) f_2(x)\, d\xi(x) \\
&= -\int (u_g^{(c)}(x) - u_{g'}^{(c)}(x)) f_2(x) d\xi(x) \leq 0 .
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&(u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)},\ u_g^{(c)} - u_{g'}^{(c)})_c \\
&= \int (u_{f_1}^{(c)}(x) - u_{f_2}^{(c)}(x)) g(x) d\xi(x) - \int (u_{f_1}^{(c)}(x) -- u_{f_2}^{(c)}(x) g'(x) d\xi(x) \\
&\geq \int (u_{f_1}^{(c)}(x) - u_{f_2}^{(c)}(x)) g(x) d\xi(x) > 0 ,
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Donc, on a

$$u_{f_1}^{(c)}(x) \leq u_{f_2}^{(c)}(x)$$

presque partout pour ξ sur X.

Lemme 4. *Le principe d'enveloppe inférieur est satisfait dans $\mathfrak{X}^{(c)}$, c'est-à-dire, pour toutes f_1 et f_2 de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$, il existe une fonction f_0 de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$ telle qu'on ait*

$$u_{f_0}^{(c)}(x) = \inf (u_{f_1}^{(c)}(x),\ u_{f_2}^{(c)}(x)) .$$

En effet, posons, pour toute $u_f^{(c)}$ de $P^+(\mathfrak{X}^{(c)})$,

$$I(u_f^{(c)}) = \|u_f^{(c)}\|_c^2 - 2\int \inf (u_{f_1}^{(c)}(x),\ u_{f_2}^{(c)}(x)) f(x) d\xi(x) .$$

Alors, $I(u_f^{(c)})$ est bornée inférieure, parce qu'on a

$$I(u_f^{(c)}) \geq \|u_f^{(c)}\|_c^2 - 2\int u_{f_1}^{(c)}(x) f(x) d\xi(x) = \|u_f^{(c)} - u_{f_1}^{(c)}\|_c^2 - \|u_{f_1}^{(c)}\|_c^2 \geq -\|u_{f_1}^{(c)}\|_c^2 .$$

Posons

$$m = \inf \{I(u_f^{(c)});\ u_f^{(c)} \in P^+(\mathfrak{X}^{(c)})\} .$$

Alors, il existe une suite (f_n) de M^+ telle qu'on ait

$$\lim_{n\to\infty} I(u_{f_n}^{(c)}) = m .$$

La suite $(u_{f_n}^{(c)})$ étant bornée dans $\mathfrak{X}^{(c)}$, nous pouvons supposer qu'il existe un potentiel pur $u_f^{(c)}$ de $\mathfrak{X}^{(c)}$ tel que la suite $(u_{f_n}^{(c)})$ converge faiblement vers $u_f^{(c)}$ dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ avec $n\to\infty$. Ensuite, nous démontrerons l'égalité $u_f^{(c)} = u_{f_0}^{(c)}$. Depuis qu'on a, pour tout n,

$$0 \leq \inf (u_{f_1}^{(c)}(x),\ u_{f_2}^{(c)}(x)) f_n(x) \leq u_{f_1}^{(c)}(x) f_n(x)$$

presque partout pour ξ sur X et

$$\int u_{f_1}^{(c)}(x) f_n(x) d\xi(x) = (u_{f_1}^{(c)},\ u_{f_n}^{(c)})_c$$

converge vers

$$(u_{f_1}^{(c)},\ u_f^{(c)})_c = \int u_{f_1}^{(c)}(x) f(x) d\xi(x) < +\infty$$

avec $n\to\infty$, nous obtenons que

$$\lim_{n\to\infty} \int \inf (u_{f_1}^{(c)}(x),\ u_{f_2}^{(c)}(x)) f_n(x) d\xi(x) = \int \inf (u_{f_1}^{(c)}(x),\ u_{f_2}^{(c)}(x)) f(x) d\xi(x) .$$

Par suite, on a

$$\lim_{n\to\infty} I(u_{f_n}^{(c)}) \geq I(u_f^{(c)}) ,$$

c'est-à-dire, $m = I(u_f^{(c)})$. On a donc, pour toute g de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$,

$$(u_f^{(c)},\ u_g^{(c)})_c \geq \int \inf (u_{f_1}^{(c)}(x),\ u_{f_2}^{(c)}(x)) g(x) d\xi(x) \tag{1}$$

et

$$\|u_f^{(c)}\|_c^2 = \int \inf (u_{f_1}^{(c)}(x),\ u_{f_2}^{(c)}(x)) f(x) d\xi(x) . \tag{2}$$

L'inégalité (1) entraîne

$$u_f^{(c)}(x) \geq \inf (u_{f_1}^{(c)}(x),\ u_{f_2}^{(c)}(x))$$

presque partout pour ξ sur X, et les inégalités (1) et (2) entraînent

$$u_f^{(c)}(x) = \inf (u_{f_1}^{(c)}(x),\ u_{f_2}^{(c)}(x))$$

presque partout pour ξ sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$. Par le lemme 3, nous obtenons que les inégalités

$$u_f^{(c)}(x) \leq u_{f_1}^{(c)}(x)\ ,$$

et

$$u_f^{(c)}(x) \leq u_{f_2}^{(c)}(x)$$

sont satisfaites presque partout pour ξ sur X. En conséquence, nous obtenons l'égalité $u_f^{(c)} = u_{f_0}^{(c)}$ que nous avons désiré.

Lemme 5. *On a $M \subset \mathfrak{X}^{(c)}$ pour tout $c > 0$.*

En effet, pour une fonction f de M, la transformation

$$A_f\colon\ u_g \in P(\mathfrak{X}^{(c)}) \to \int f(x) g(x) d\xi(x)$$

est linéaire et bornée dans $P(\mathfrak{X}^{(c)})$. Par suite, on peut prolonger A_f à $\mathfrak{X}^{(c)}$, et A_f est un fonctionel linéaire et bornée. Il existe un élément unique u de $\mathfrak{X}^{(c)}$ tel qu'on ait, pour toute g de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$,

$$(u,\ u_g)_c = \int f(x) g(x) d\xi(x)\ ,$$

c'est-à-dire, on à $u = f.$, *et* $f \in \mathfrak{X}^{(c)}$.

De la même manière, nous obtenons $L^2(\mathfrak{X}^{(c)}) \subset \mathfrak{X}^{(c)}$. Soit A un ensemble mesurable pour ξ dans X tel que $\xi(A) > 0$, et posons

$$\mathfrak{X}_A^{(c)} = \overline{\{u \in \mathfrak{X}^{(c)};\ S_u \subset A\}}\ .$$

Alors, $\mathfrak{X}_A^{(c)} \neq 0.$, et il est un espace fonctionel relativement à A et à ξ par la norme déduite de $\mathfrak{X}^{(c)}$. De la même manière que la démonstration du lemme 2, pour toute f de M^+ avec $S_f \subset A$,[3] nous obtenons que le potentiel $u_{f,A}^{(c)}$ de $\mathfrak{X}_A^{(c)}$ est non-négative et égal à $u_f^{(c)} - u_{f'}^{(c)}$, où $f' \subset L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$ avec $S_{f'} \subset \overline{CA}$.

Lemme 6. *Soit $u_f^{(c)}$ un élément dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ tel que $f^+, f^- \in L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$ et $u_f^{(c)} \geq 0$. Alors, on a $f(x) \leq 0$ presque partout pour ξ sur $\{x \in X;\ u_f^{(c)}(x) = 0\}$.*

En effet, posons

$$A = \{x \in X;\ u_f^{(c)}(x) = 0,\ f(x) > 0\}\ ,$$

---

3) On désigne par S_f le support de f.

et supposons que $\xi(A)>0$. Alors, selon $\mathfrak{X}_A^{(c)}\neq 0$, il existe une fonction g de M^+ avec $S_g\subset A$ telle que $u_{g,A}^{(c)}(x)\neq 0$, on a

$$(u_f^{(c)}, u_{g,A}^{(c)})_c=(u_f^{(c)}, u_g^{(c)}-u_{g'}^{(c)})_c=-\int u_f^{(c)}(x)g(x)d\xi(x)\leq 0\,.$$

D'autre part, on a

$$(u_f^{(c)}, u_{g,A}^{(c)})_c=\int u_{g,A}^{(c)}(x)f(x)=\int_A u_{g,A}^{(c)}(x)f(x)d\xi(x)>0\,.$$

C'est une contradiction, d'où la démonstration est complète.

Démonstration de l'entraînement $(A_2)\Rightarrow(A_1)$. Nous démontrons d'abord que la contraction "module" opére dans l'espace fonctionel $\mathfrak{X}^{(c)}$. Par le lemme 4, pour toutes f_1 et f_2 de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$, il existe une fonction f_0 de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$ telle que

$$u_{f_0}^{(c)}=\inf(u_{f_1}^{(c)}, u_{f_2}^{(c)})\,.$$

Depuis qu'on a

$$u_{f_0}^{(c)}(x)=\frac{1}{2}(u_{f_1}^{(c)}(x)+u_{f_2}^{(c)}(x)-|u_{f_1}^{(c)}(x)-u_{f_2}^{(c)}(x)|)\,,$$

la fonction $|u_{f_1}^{(c)}-u_{f_2}^{(c)}|$ appartient à $\mathfrak{X}^{(c)}$. On a

$$\begin{aligned}\|\,|u_{f_1}^{(c)}-u_{f_2}^{(c)}|\,\|_c&=\|u_{f_1}^{(c)}+u_{f_2}^{(c)}-2u_{f_0}^{(c)}\|_c^2\\&=\|u_{f_1}^{(c)}-u_{f_2}^{(c)}\|_c^2+(u_{f_1}^{(c)}-u_{f_0}^{(c)}, u_{f_2}^{(c)}-u_{f_0}^{(c)})_c\\&\leq\|u_{f_1}^{(c)}-u_{f_2}^{(c)}\|_c^2\,.\end{aligned}$$

Dans le calcul susdit, nous avons employé le lemme 6 et l'égalité

$$\xi(\{x\in X;\ u_{f_1}^{(c)}(x)-u_{f_0}^{(c)}(x)>0,\ u_{f_2}^{(c)}(x)-u_{f_0}^{(c)}(x)>0\})=0\,.$$

Ensuite, soit u un élément de $\mathfrak{X}^{(c)}$. Alors, il existe deux suites $(f_{1,n})$ et $(f_{2,n})$ de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$ telles que la suite $(u_{f_{1,n}}^{(c)}-u_{f_{2,n}}^{(c)})$ converge fortement vers u dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ avec $n\to\infty$. Par l'énoncé susdit, on a

$$|u_{f_{1,n}}^{(c)}-u_{f_{2,n}}^{(c)}|\in\mathfrak{X}^{(c)}$$

et

$$\|\,|u_{f_{1,n}}^{(c)}-u_{f_{2,n}}^{(c)}|\,\|_c\leq\|u_{f_{1,n}}^{(c)}-u_{f_{2,n}}^{(c)}\|_c\,.$$

Par suite, nous pouvons supposer qu'il existe un élément u' de $\mathfrak{X}^{(c)}$ tel que la suite $(|u_{f_{1,n}}^{(c)}-u_{f_{2,n}}^{(c)}|)$ converge faiblement vers u' dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ avec $n\to\infty$. Depuis que la suite $(|u_{f_{1,n}}^{(c)}-u_{f_{2,n}}^{(c)}|)$ converge vers $|u|$ presque partout pour ξ sur X, on a $u'(x)=|u(x)|$ presque partout pour ξ sur X, d'où la fonction $|u|$ appartient à $\mathfrak{X}^{(c)}$. De plus, on a

$$\|\,|u|\,\|_c\leq\underline{\lim}_{n\to\infty}\|\,|u_{f_{1,n}}^{(c)}-u_{f_{2,n}}^{(c)}|\,\|_c\leq\lim_{n\to\infty}\|u_{f_{1,n}}^{(c)}-u_{f_{2,n}}^{(c)}\|_c=\|u\|_c\,,$$

et par suite, la contraction "module" opère dans $\mathfrak{X}^{(c)}$.

Secondement, nous démontrons que la contraction "module" opère dans l'espace fonctionel $\mathfrak{X}$. Soit f une fonction de M, et considérons la transformation de $u_g \in P(\mathfrak{X})$ en $\int |u_f(x)| g(x) d\xi(x)$. Depuis qu'on a

$$\begin{aligned} \left|\int |u_f(x)| g(x) d\xi(x)\right| &= \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \left|\int |u_f(x)+cf(x)| g(x) d\xi(x)\right| \\ &= \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} |(|u_f^{(c)}|, u_g^{(c)})_c| \leq \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \| |u_f^{(c)}| \|_c \cdot \|u_g^{(c)}\|_c \\ &\leq \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \|u_f^{(c)}\|_c \cdot \|u_g^{(c)}\|_c = \|u_f\| \cdot \|u_g\| , \end{aligned}$$

par le théorème de Riesz, on a $|u_f| \in \mathfrak{X}$ et $\| |u_f| \| \leq \|u_f\|$. De la même manière que la démonstration susdite, pour toute u de $\mathfrak{X}$, nous avons $|u| \in \mathfrak{X}$ et $\| |u| \| \leq \|u\|$. C'est-à-dire que la contraction "module" opère dans $\mathfrak{X}$.

4. Démontrons l'entraînement $(B_2) \Rightarrow (B_1)$. De la même manière, il suffit de démontrer que les contractions normales opèrent dans $\mathfrak{X}^{(c)}$ pour tout $c > 0$. Pour cela, il suffit de démontrer que la contraction unité T opère dans $\mathfrak{X}^{(c)}$[4]. (Voir [4] et [5].) De la même manière que le lemme 4, nous pouvons démontrer que, pour toutes f_1 et f_2 de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$, il existe une fonction f_0 de $L^2(\mathfrak{X}^{(c)})$ telle que

$$u_{f_0}^{(c)} = \inf (u_{f_1}^{(c)}, u_{f_2}^{(c)} + 1) .$$

Alors,

$$T \cdot (u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)}) = \inf (u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)}, 1) = u_{f_0}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)}$$

si $u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)} \geq 0$. De la même manière que l'entraînement $(A_2) \Rightarrow (A_1)$, on a

$$\begin{aligned} \|T \cdot (u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)})\|_c &= \|u_{f_0}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)}\|_c \\ &\leq \|u_{f_1}^{(c)} - u_{f_2}^{(c)}\|_c . \end{aligned}$$

Par suite, pour toute u de $\mathfrak{X}^{(c)}$, on a $T \cdot u \in \mathfrak{X}^{(c)}$ et

$$\|T \cdot u\|_c = \|T \cdot |u| \|_c \leq \| |u| \|_c \leq \|u\|_c .$$

En conséquence, les contractions normales opèrent dans $\mathfrak{X}^{(c)}$. Ainsi, la démonstration est complète.

REMARQUE. Ces deux résultats peuvent immédiatement être prolongés dans le cas d'un espace fonctionel généralisé. (Au sujet de l'espace fonctionel généralisé, voir [6].)

UNIVERSITÉ DE NAGOYA

---

4) On appelle la projection de la droite réelle R à $[0, 1]$ la contraction unité.

Bibliographie

[1] N. Aronszajn and K.T. Smith: *Characterization of positive reproducing kernels.* Applications to Green's functions, Amer. J. Math. **79** (1957), 611–622.

[2] J. Deny: *Formes et espaces de Dirichlet,* Sémin. Bourbaki, 12e, 1959/60, n^0 187.

[3] J. Deny: *Principe complet du maximum et contractions,* Ann. Inst. Fourier **15**. 1 (1965), 259–272.

[4] M. Itô: *Condensor principle and the unit contraction,* Nagoya Math. J. **30** (1967), 9–28.

[5] M. Itô: *Balayage principle and maximum principles on regular functional spaces,* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A–1, to appear.

[6] M. Itô: *A note on extended regular functional spaces*, Proc. Japan Acad. **44** (1967).