Koszul, J. L.
Osaka J. Math.
2 (1965), 285-290

VARIÉTÉS LOCALEMENT PLATES ET CONVEXITÉ

JEAN LOUIS KOSZUL

(Reçu le 20 Août, 1965)

Soient E un espace affine réel de dimension n et x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ des coordonnées linéaires sur E. Soit Ω un ouvert homogène de E, c'est à dire un ouvert sur lequel un sous-groupe G du groupe de transformations bijectives affines de E opère transitivement. Si il existe sur Ω une forme différentielle fermée $\alpha=\sum_i a_i dx_i$ invariante par G et telle que la forme $\sum_{i,j} \frac{da_i}{dx_j} dx_i dx_j$ soit définie positive en tout point de Ω alors Ω est un convexe de E ne contenant pas de droite. La démonstration de ce résultat utilise essentiellement le fait qu'une primitive de α tend vers $+\infty$ aux points frontières de Ω. Cette propriété de α est démontrée dans [2] en observant que, par suite de l'invariance de α par G, les coefficients a_i sont des fractions rationnelles en les x_i. On se propose dans cet article de montrer que le comportment des primitives de α aux points frontière de Ω peut s'étudier avec des hypotèses beaucoup moins restrictives qui sont vérifiées par exemple lorsque, Ω n'étant plus homogène, un sous-groupe G' du groupe des transformations affines de E opère dans Ω de telle sorte que $G'\backslash\Omega$ soit quasi-compact. Il existe des rapports étroits entre cette étude et certains résultats de Kobayashi sur le volume de Bergmann der variétes complexes [1]. On obtient ainsi une généralisation du théorème cité plus haut et on en déduit une caractérisation des variétés munies d'une connexion linéaire de courbure et de torsion nulles dont le revêtement universel est isomorphe à un ouvert convexe ne contenant pas de droite dans un espace affine.

1. Soit M une variété différentiable connexe munie d'une connexion linéaire de torsion nulle. On notera D la dérivation covariante définie par cette connexion. Soient TM la variété des vecteurs de M et $\mathcal{E}$ l'ouvert de TM domaine de définition de l'application exponentielle. Pour tout $y\in TM$ soit $\lambda(y)$ la borne supérieure, finie ou infinie, des $t\in \mathrm{R}$ tels que $ty\in\mathcal{E}$. On notera $I(y)$ l'intervalle ouvert $]-\lambda(-y), \lambda(y)[$ de $\boldsymbol{R}$. On désignera par P le champ de vecteurs canonique sur $\boldsymbol{R}$, c'est à dire le champ tel que la dérivation par rapport à P soit $\frac{d}{dt}$. Soit $\varphi_y(t) = \exp(ty)$ $(t \in I(y))$ la géodésique de M définie par le vecteur y. On posera $\varphi'_y = \varphi^T_y \circ P$, φ^T_y étant l'application tangente à φ_y. Soit α une forme différentielle fermée de degré 1 sur M. Puisque la torsion est nulle, la différentielle covariante $D\alpha$ est une forme symétrique. Pour tout $y \in TM$ et tout $t \in I(y)$, on a :

$$(P\cdot(\alpha \circ \varphi'_y))(t) = (D\alpha)(\varphi'_y(t), \varphi'_y(t)) .$$

On posera

$$g_y(t) = \int_0^t \alpha(\varphi'_y(u))\, du$$

pour tout $y \in TM$ et tout $t \in I(y)$. Si $D\alpha$ est définie positive en tout point de M, la dérivée seconde de g_y est ≥ 0 en tout point de $I(y)$. Elle ne peut s'annuler que si $y = 0$.

Lemme 1. *Soient M une variété différentiable connexe munie d'une connexion linéaire de torsion nulle, α une forme différentielle fermée de degré 1 sur M et G un groupe d'automorphismes différentiables de M vérifiant les conditions suivantes*:
1) *la connexion linéaire est invariante par G,*
2) *la forme α est invariance par G,*
3) *$G \backslash M$ est quasi-compact.*

Dans ces conditions, si la différentielle covariante de α est définie positive en tout point de M, pour tout $y \in TM$ tel que $\lambda(y) < \infty$, $\int_0^u \alpha(\varphi'_y(t))dt$ tend vers $+\infty$ lorsque u tend vers $\lambda(y)$.

Il résulte des conditions 1) et 2) que $D\alpha$ est une structure riemannienne sur M invariante par G. Compte tenu de 3), il existe un compact $K \subset M$ tel que $GK = M$. Considérée comme variété riemannienne, M est donc complète. Pour tout $y \in TM$, on notera $||y||$ la longueur $\sqrt{(D\alpha)(y, y)}$ de y. L'ouvert $\mathcal{E}$ étant un voisinage de la section nulle de TM, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que tout vecteur de longueur $\leq \varepsilon$ dont l'origine appartient à K appartienne à $\mathcal{E}$. Puisque la connexion linéaire est invariante par G et que $GK = M$, tout vecteur de longueur $\leq \varepsilon$ appartient à $\mathcal{E}$. La fonction $y \to g_y(1) = \int_0^1 \alpha(\varphi'_y(t))dt$ est une fonction continue sur $\mathcal{E}$, invariante par les opérations de G dans TM. Soit A l'ensemble des vecteurs y tels que $||y|| = \varepsilon$ et $\alpha(y) \leq 0$. C'est une partie fermée de TM stable par les opérations de G et le sous-ensemble A_K constitué par les éléments de A dont l'origine appartient à K est un compact tel que

$GA_K=A$. Pour tout $y\in A$, on a $\alpha(\varphi_y'(t))>0$ quel que soit $t\in]0,1]$. Par suite $g_y(1)>0$. La borne inférieure r de $g_y(1)$ sur A_K est donc >0 et $g_y(1)\geq r$ quel que soit $y\in A$. Supposons maintenant que y soit un élément de TM tel que $\lambda(y)<\infty$. La longueur de l'arc $\varphi_y(t)$ $(0\leq t<\lambda(y))$ est alors infinie. En effet, dans le cas contraire, puisque M est une variété riemannienne complete, $\varphi_y(t)$ aurait une limite lorsque $t\to\lambda(y)$ et $\lambda(y)$ ne serait pas la borne supérieure des $t\in \boldsymbol{R}$ tels que $ty\in\mathcal{E}$. On va en déduire que $(P\cdot g_y)(t)=\alpha(\varphi_y'(t))\to+\infty$ lorsque $t\to\lambda(y)$. Pour tout $t\in I(y)$, soit en effet $f(t)=\operatorname{Sup}((P^2\cdot g_y)(t), 1)$. On a $f_y(t)\geq\sqrt{f_y(t)}\geq\sqrt{(P^2\cdot g_y)(t)}=\|\varphi_y'(t)\|$ donc $(P^2\cdot g_y)(t)\geq\|\varphi_y'(t)\|-1$ quel que soit $t\in I(y)$. Il en résulte que $(P\cdot g_y)(t)-(P\cdot g_y)(0)\geq\int_0^t\|\varphi_y'(u)\|du-t$, donc que $(P\cdot g_y)(t)\to+\infty$ lorsque $t\to\lambda(y)$. Il existe donc des éléments $t\in I(y)$ tels que $\alpha(\varphi_y'(t))>0$. Si $t^0\in I(y)$ vérifie cette condition, alors $\alpha(\varphi_y'(t))>0$ pour $t^0\leq t<\lambda(y)$. D'autre part, si $z=\varphi_y'(t^0)$, alors $\varepsilon\frac{z}{\|z\|}\in A$. Puisque $A\subset\mathcal{E}$, on a $t^0+\frac{\varepsilon}{\|z\|}\in I(y)$ et

$$\varphi_z(t)=\exp(tz)=\exp((t^0+t)y)=\varphi_y(t^0+t)$$

pour $0\leq t\leq\frac{\varepsilon}{\|z\|}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}g_y\left(t^0+\frac{\varepsilon}{\|z\|}\right)&=g_y(t^0)+\int_0^{\varepsilon/\|z\|}\alpha(\varphi_z'(u))du\\&=g_y(t^0)+g_{(\varepsilon z)/\|z\|}(1)\geq g_y(t^0)+r\,.\end{aligned}$$

Ceci montre que $g_y(t)\to+\infty$ lorsque $t\to\lambda(y)$.

Lemme 2. *Les hypothèses étant celles du Lemme* 1, *si* $y\in TM$ *n'est pas un vecteur nul et si* $\alpha(y)\geq 0$, *alors* $\lambda(y)<\infty$.

On utilisera dans la démonstration des notations introduites dans la démonstration du Lemme 1. La fonction $z\to\alpha(\varphi_z'(1))$ est une fonction continue sur $\mathcal{E}$ et >0 en tout point de A. Pour tout $z\in A$, on a $\alpha(z)<\alpha(\varphi_z'(1))$. Les fonctions $\alpha(z)$ et $\alpha(\varphi_z'(1))$ étant invariantes par G, il existe un nombre $M<1$ tel que $\alpha(z)\leq M\alpha(\varphi_z'(1))$ pour tout $z\in A$. Cela étant on définit par récurrence une suite $t_0=0<t_1\cdots t_i<t_{i+1}\cdots$ en passant de t_i à t_{i+1} par la condition $(t_{i+1}-t_i)\|\varphi_y'(t_i)\|=\varepsilon$. Ceci est possible parceque $y\neq 0$ et parceque $(t_{i+1}-t_i)\varphi_y'(t_i)\in\mathcal{E}$ entraîne que $t_{i+1}\in I(y)$ lorsque $t_i\in I(y)$. Pour tout $i>0$, le vecteur $z_i=(t_{i+1}-t_i)\varphi_y'(t_i)$ appartient à A et $\varphi_{z_i}'(1)=(t_{i+1}-t_i)\varphi_y'(t_{i+1})$. On a donc $\alpha(\varphi_y'(t_i))\leq M\alpha(\varphi_y'(t_{i+1}))$. D'autre part, puisque $\alpha(\varphi_y'(t))$ est une fonction croissante sur l'intervalle $I(y)$, on a

$$(t_{i+1}-t_i)\alpha(\varphi_y'(t_i))\leq\int_{t_i}^{t_{i+1}}\alpha(\varphi_y'(t))dt=\int_0^1\alpha(\varphi_{z_i}'(t))dt=g_{z_i}(1)\,.$$

Or la fonction $z\to g_z(1)$ admet sur A une borne supérieure r'. Posons $a_i=\alpha(\varphi_y'(t_i))$ pour tout $i>0$. On a $(t_{i+1}-t_i)a_i\le r'$ et $a_i\le Ma_{i+1}$ pour tout i. Il en résulte que $t_{i+1}-t_1\le\frac{r'}{a_1}(1-M)^{-1}$. Puisque $t_1\|y\|=\varepsilon$ et que $(t_1-t_0)a_1=t_1a_1\ge g_{\varepsilon y/\|y\|}(1)\ge r$, on obtient finalement

$$t_{i+1}\le\left(1+\frac{r'}{r}(1-M)^{-1}\right)\frac{\varepsilon}{\|y\|}.$$

Lorsque $i\to\infty$, $g_y(t_i)\to+\infty$ car $g_y(t_{i+1})-g_y(t_i)=g_{z_i}(1)\ge r$ pour tout $i>0$. Ceci prouve que $t_i\to\lambda(y)$ lorsque $i\to\infty$ et montre que $\lambda(y)\le\left(1+\frac{r'}{r}(1-M)^{-1}\right)\frac{\varepsilon}{\|y\|}$.

2. Dans ce qui suit, on appliquera les Lemmes du Numéro précédent aux variétés *localement plates*, c'est à dire aux variétés différentiables munies d'une connexion linéaire de courbure et de torsion nulle. Les variétés localement plates dont le groupe d'holonomie est réduit à l'élément neutre seront appelées des variétés *plates*. Etant données deux variétés localement plates M et M', on appelle *morphisme* de M dans M' une application différentiable f de M dans M' compatible avec les connexions c'est à dire telle que, pour toute géodésique ψ de M, $f\circ\psi$ soit une géodésique de M'. Soit M une variété localement plate connexe et soit $\mathcal{E}\subset TM$ l'ouvert constitué par les points dont l'exponentielle est définie. Pour tout $x\in M$, l'espace vectoriel T_xM des vecteurs d'origine x est muni d'une structure de variéte plate canonique, les géodésiques étant les courbes $t\to ty+z$ avec $y,z\in T_xM$. Cette structure induit sur $\mathcal{E}_x=\mathcal{E}\cap T_xM$ une structure de variéte plate que l'on appellera la structure plate vectorielle.

Lemme 3. *Pour tout $x\in M$, l'application* $\exp_x$, *restriction de* $\exp$ *à $\mathcal{E}_x$ est un morphisme de $\mathcal{E}_x$ muni de la structure plate vectorielle dans M. Son rang est en tout point maximum et égal à la dimension de M. Si $\mathcal{E}_x$ est convexe, alors* $\exp_x:\mathcal{E}_x\to M$ *est un revêtement de M.*

Supposons d'abord que M soit simplement connexe. Pour tout $y\in T_xM$ il existe alors un champ de vecteurs P_y sur M et un seul tel que $P_y(x)=y$ et $DP_y=0$. Soit ω la forme différentielle fermée de degré 1 sur M à valeurs dans T_xM telle que $\omega(P_y)=y$ pour tout $y\in M$. Les géodésiques de M sont alors les courbes φ telles que l'application $\omega\circ\varphi'$ soit constante. Puisque M est simplement connexe, il existe une application différentiable f de M dans T_xM et une seule telle que $f(x)$ soit l'origine de T_xM et que $df=\omega$. L'application $f\circ\exp_x$ est l'identité sur l'ouvert $\mathcal{E}_x$, domaine de définition de $\exp_x$. Si $t \to \psi(t) = y^0 + ty$ est un arc de géodésique de $\mathcal{E}_x$ muni de la structure plate vectorielle, on a $(df \circ \exp_x^T)(\psi'(t)) = y$ pour tout t, donc $\exp_x \circ \psi$ est un arc de géodésique de M. Ceci prouve que $\exp_x$ est un morphisme. Puisque $f o \exp_x$ est l'identité, $\exp_x$ est injectif de rang égal en tout point à la dimension de $T_x M$. Montrons que si $\mathcal{E}_x$ est convexe, alors $\exp_x$ est surjectif. Soit x^0 un point de M appartenant à l'adhérence de $\exp_x(\mathcal{E}_x)$ et soit $y^0 = f(x^0)$. Puisque $f \circ \exp_x$ est l'identité sur $\mathcal{E}_x$, y appartient à l'adhérence de $\mathcal{E}_x$. Puisque $\mathcal{E}_x$ est un voisinage convexe de l'origine dans $T_x M$, on a donc $ty^0 \in \mathcal{E}_x$ pour $0 \leq t < 1$. L'application f étant de rang maximum au point x^0, il existe un voisinage ouvert convexe W de y^0 dans $T_x M$ et une application différentiable g de W dans M telle que $g(y^0) = x^0$ et $f \circ g =$ identité sur W. Le point x^0 étant adhérent à $\exp_x \mathcal{E}_x$, $g(W) \cap \exp_x \mathcal{E}_x$ est un ouvert non vide dont l'image par f est un ouvert de $T_x M$ contenu dans $W \cap \mathcal{E}_x$. Si $y \in f(g(W) \cap \exp_x \mathcal{E}_x)$ alors $\exp_x y \in g(W)$ et $f(\exp_x y) = y = f(g(y))$. Puisque f est injectif sur $g(W)$, on a donc $g(y) = \exp_x y$. Les applications g et $\exp_x$ sont deux morphismes de $W \cap \mathcal{E}_x$ dans M considérés comme variétés plates. Puisque $W \cap \mathcal{E}_x$ est connexe et que ces morphismes coïncident sur un ouvert non vide, on a $g(y) = \exp_x y$ pour tout $y \in W \cap \mathcal{E}_x$. Il en résulte que, lorsque $t \to 1$, $\exp_x(ty^0)$ tend vers $g(y^0) = x^0$. Par conséquent, $y^0 \in \mathcal{E}_x$ et $x^0 \in \exp_x \mathcal{E}_x$. On voit donc que $\exp_x \mathcal{E}_x$ est fermé ; étant ouvert il coïncide donc avec M.

Le cas général s'en déduit en considérant le revêtement universel $q : \tilde{M} \to M$ de M et la structure de variété plate sur $\tilde{M}$ pour laquelle q est un morphisme. Soit $\tilde{x}$ un point de M et soit $\mathcal{E}_{\tilde{x}}$ l'ouvert de $T_{\tilde{x}}\tilde{M}$ intersection de $T_{\tilde{x}}\tilde{M}$ avec l'ouvert de définition de l'application exponentielle $\exp : T\tilde{M} \to \tilde{M}$. Si $x = q(\tilde{x})$, alors la restriction de l'application tangente q^T à $T_{\tilde{x}}\tilde{M}$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}_{\tilde{x}}$ sur $\mathcal{E}_x$. Il suffit donc de montrer que $\exp_x \circ q^T : \mathcal{E}_{\tilde{x}} \to M$ est une revêtement. Cela résulte de la relation $\exp_x \circ q^T = q \circ \exp_{\tilde{x}}$ et de la première partie de la démonstration.

Théorème. *Soit M une variété différentiable localement plate connexe.*

1) *Si le revêtement universel de M est isomorphe en tant que variété plate à un ouvert convexe ne contenant pas de droite dans un espace affine réel, il existe sur M une 1 forme différentielle fermée α telle que $D\alpha$ soit définie positive en tout point et qui est invariante par tout automorphisme de M.*

2) *Si G est un groupe d'automorphismes de M tel que $G \backslash M$ soit quasi-compact et si il existe sur M une 1-forme différentielle fermée α invariante par G et telle que $D\alpha$ soit définie positive en tout point, alors*

le revêtement universel de M est isomorphe en tant que variété plate à un ouvert convexe ne contenant pas de droite dans un espace affine réel.

La démonstration de l'assertion 1) est pratiquement celle que est donnée dans [2], (Théorème (5, 1), c)$\Rightarrow$b)); elle utilise le volume de Bergmann du tube construit sur le revêtement universel de M. Démontrons l'assertion 2). On se ramène immédiatement au cas où M est simplement connexe. Soient x un point de M et F la primitive de α nulle en x. D'après le Lemme 1, si $y \in T_xM$ et si $\lambda(y) < \infty$, $F(\exp_x(ty)) \to +\infty$ lorsque $t \to \lambda(y)$, c'est à dire lorsque ty tend vers la frontière de $\mathcal{E}_x$. D'autre part la Hessienne de $F \circ \exp_x$ est définie positive en tout point de $\mathcal{E}_x$ car $d(F \circ \exp_x) = \alpha \circ \exp_x^T$ et la différentielle covariante de cette forme est définie positive puisque $D\alpha$ est définie positive et que $\exp_x$ est un morphisme (Lemme 3). Il en résulte que $\mathcal{E}_x$ est convexe de T_xM (cf. [2], Lemme (4, 2)). D'après le Lemme 3, $\exp_x$ est donc un isomorphisme. De plus $\mathcal{E}_x$ ne contient pas de droite car, d'après le Lemme 2, M ne contient pas de géodésique complète non constante.

Corollaire. *Soit M une variété connexe compacte localement plate. Pour que le revêtement univarsel de M soit isomorphe à un ouvert convexe ne contenant pas de droite dans un espace affine réel, il faut et il suffit qu'il existe sur M une 1-forme différentielle fermée dont la différentielle covariante est définie positive en tout point de M.*

On remarquera que les variétés compactes qui vérifient cette condition ont un ler nombre de Betti non nul.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Bibliographie

[1] S. Kobayashi: *Geometry of bounded domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1959), 267-290.

[2] J. L. Koszul: *Domaines bornés homogènes et orbites de groupes de transformations affines*, Bull. Soc. Math. France **89** (1961), 515-533.