

SUR LE BALAYAGE POUR DES ENSEMBLES QUELCONQUES ET LA BALAYABILITE

SHIRÔ OGAWA

(Received March 19, 1965)

Introduction

L'étude du problème du balayage est un objet principal de la théorie du potentiel. Au début, ce problème s'est posé de la manière suivante : étant donné une distribution positive μ dans R^n et un ensemble compact K dans R^n , existe-t-il une distribution positive μ' (une mesure balayée) portée par K dont le potentiel

$$U^{\mu'}(x) = \int |x-y|^{2-n} d\mu'(y)$$

est égal au potentiel de μ sur K et l'est au plus partout dans tout l'espace R^n ?

On a résolu ce problème affirmativement à l'exception des points d'un sous-ensemble de capacité nulle sur K et l'étude depuis lors s'est développé pour la direction suivante. Soient Ω un espace localement compact et $G(x, y)$ une fonction numérique définie sur $\Omega \times \Omega$. Alors, dans quelles conditions imposées sur $G(x, y)$ peut-on obtenir le résultat analogue au cas classique en considérant des potentiels pris par rapport au noyau $G(x, y)$ au lieu du noyau newtonien $|x-y|^{2-n}$? Quelques mathématiciens français et japonais ont étudié des problèmes de cette nature et ont montré qu'il est en relation profonde avec le principe de domination qui caractérise un noyau $G(x, y)$. En définissant une certaine quantité (par exemple, la variation de Gauss ou de Ninomiya [8]) sur une famille des mesures positives portées par un ensemble compact donné, on peut montrer que s'il existe une mesure extrémale minimisant la quantité et si un noyau $G(x, y)$ satisfait au principe de domination, cette mesure extrémale est une mesure balayée. D'une manière comparativement facile, on peut démontrer l'existence d'une mesure extrémale en vertu du théorème du choix donné par F. Riesz. Mais il n'est pas facile de montrer l'existence d'une mesure balayée lorsque K est un ensemble non compact, même s'il est fermé.

Ce présent travail est consacré au problème du balayage général pour un ensemble quelconque. Dans son travail bien connu [3], H. Cartan a traité le même problème pour le potentiel newtonien. Il y a clairement développé la théorie du balayage des distributions positives pour un ensemble quelconque, en signalant que le potentiel newtonien engendré par une mesure positive est surharmonique et en s'appuyant sur le fait que l'ensemble des mesures positives d'énergie finie est complet pour la norme-énergie. Plus généralement, dans ce présent travail, nous considérons des potentiels pris par rapport au noyau positif, symétrique ou non, défini sur un espace localement compact séparé Ω . En ajoutant d'autre condition en cas de besoin, nous allons étudier le balayage d'une mesure positive pour un ensemble quelconque dans la condition qu'un noyau satisfasse au principe de domination, qui est indispensable dans le balayage.

Dans le premier paragraphe, nous envisagerons des potentiels pris par rapport à un noyau positif et non-symétrique. Quand le noyau satisfait au principe de domination dilaté de quelque type, nous définirons la mesure balayée intérieurement (resp. extérieurement) relative à un ensemble quelconque. Dans le second paragraphe, nous considérerons des potentiels pris par rapport à un noyau positif et symétrique. D'abord, nous étudierons, plus précisément que dans le premier paragraphe, le balayage intérieur (resp. extérieur) d'une mesure positive pour un ensemble quelconque. Ensuite, nous introduirons la μ -capacité intérieure (resp. extérieure) qui est définie au moyen de l'énergie de la mesure balayée intérieurement (resp. extérieurement). Quant aux μ -capacités, nous étudierons la capacitabilité qui entraîne la balayabilité relative à tout ensemble K -analytique. On dit qu'un noyau est balayable relativement à un ensemble A , si deux potentiels engendrés par les mesures balayées intérieurement et extérieurement pour l'ensemble A s'identifient dans tout l'espace sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure positive d'énergie finie. Dans le troisième paragraphe, nous traiterons le balayage pour un ensemble fermé (non compact) et la balayabilité du noyau d'ordre α et du noyau greenien relatif à tout ensemble analytique. Enfin, comme une application de ce qui précède, on donnerons une condition suffisante pour que l'espace des mesures positives d'énergie finie soit complet pour la norme-énergie.

1. Balayage intérieur et extérieur

Soit Ω un espace localement compact séparé tel qu'il soit σ -compact et admette une base dénombrable. Par un noyau sur Ω on comprend une

application semi-continue inférieurement $G(x, y)$ de $\Omega \times \Omega$ dans $(0, +\infty]$. Le noyau \check{G} défini par $\check{G}(x, y) = G(y, x)$ s'appelle le noyau adjoint de G . Le potentiel $G\mu(x)$ et le potentiel adjoint $\check{G}\mu(x)$ d'une mesure μ (au sens de Radon) sont définis par

$$G\mu(x) = \int G(x, y) d\mu(y)$$

et

$$\check{G}\mu(x) = \int \check{G}(x, y) d\mu(y)$$

respectivement. La G -énergie de μ est définie par $\int G\mu(x) d\mu(x)$. Bien entendu, la G -énergie et la \check{G} -énergie de μ s'identifient. Nous désignons par \tilde{C}_0 l'ensemble des fonctions numériques continues sur Ω à support compact, par \tilde{M} l'ensemble des mesures de Radon réelles sur Ω , par \tilde{E} l'ensemble des mesures de G -énergie finie, par C_0 , M et E les sous-ensembles de \tilde{C}_0 , \tilde{M} et \tilde{E} constitués par des éléments positifs. Etant donné un sous-ensemble quelconque A , on désigne par E_A l'ensemble des mesures μ de E dont le support S_μ est contenu dans A . L'espace \tilde{M} étant un espace des formes linéaires sur l'espace vectoriel \tilde{C}_0 , on peut considérer sur \tilde{M} la topologie de la convergence simple dans \tilde{C}_0 , que nous appellerons la topologie vague sur \tilde{M} . Le lemme suivant relatif à la topologie vague est très important.

Lemme 1. *Tout ensemble borné dans \tilde{M} est relativement compact pour la topologie vague.*

Nous mentionnons ici quelques principes importants.

PRINCIPE DE CONTINUITÉ: Pour toute mesure positive μ à support compact S_μ , le fait que la restriction de $G\mu(x)$ à S_μ soit finie et continue entraîne que $G\mu(x)$ soit fini et continu dans Ω .

Soient $u(x) > 0$ une fonction finie et semi-continue supérieurement ou une fonction semi-continue inférieurement et $v(x) > 0$ une fonction quelconque telle que $u(x) \leq v(x) \neq +\infty$ dans Ω .

PRINCIPE DU BALAYAGE RELATIF A (u, v) : Etant donné un ensemble compact K , il existe une mesure positive μ portée par K telle que

$$\begin{aligned} G\mu(x) &\geq u(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute} \\ & && \text{mesure } \lambda \in E_K, \\ G\mu(x) &\leq v(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega. \end{aligned}$$

PRINCIPE DE DOMINATION RELATIVE A (u, v) : Soit μ une mesure positive d'énergie finie à support compact. Si on a

$$G\mu(x) \leq u(x) \quad \text{sur } S_\mu,$$

on a

$$G\mu(x) \leq v(x) \quad \text{dans tout l'espace } \Omega.$$

M. Kishi [7] a obtenu le théorème suivant,

Théorème A. *Si G et \check{G} satisfont au principe de continuité, pour que G satisfasse au principe du balayage relatif à (u, v) , il faut et il suffit que G satisfasse au principe de domination relative à (u, v) .*

Nous allons démontrer un théorème plus général. Pour cela, nous préparons le lemme suivant.

Lemme 2 (Brelot et Choquet). *Soit \check{G} un noyan adjoint satisfaisant au principe de continuité. Si une suite de mesures positives $\{\mu_n\}$ portées par un ensemble compact converge vaguement vers une mesure positive μ , on a partout*

$$G\mu(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} G\mu_n(x)$$

et l'égalité a lieu sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E$.

Théorème 1. *Supposons que G et \check{G} satisfassent au principe de continuité. Pour que G satisfasse au principe de domination relative à (u, v) , il faut et il suffit que, étant donné un ensemble quelconque relativement compact A , il existe au moins une mesure positive μ_A^i (resp. μ_A^o) portée par \bar{A} (resp. $\bigcap_{O \supset A} \bar{O}$, où O parcourt la famille des ensembles ouverts contenant A) telle que*

$$\begin{aligned} G\mu_A^i(x) &\geq u(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute} \\ &&& \text{mesure } \lambda \in E_A, \\ G\mu_A^i(x) &\leq v(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega \\ (\text{resp. } G\mu_A^o(x) &\geq u(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute} \\ &&& \text{mesure } \lambda \in \bigcap_{O \supset A} E_O, \\ G\mu_A^o(x) &\leq v(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega). \end{aligned}$$

Démonstration. Si l'on considère le cas où A est compact, d'après le théorème A, cette condition est suffisante. Nous montrerons que la condition est nécessaire. Supposons que G satisfasse au principe de domination relative à (u, v) . Nous considérons l'ensemble

$$\mathcal{K}(A) = \{K; \text{compact et } K \subset A\}$$

qui est une famille filtrante croissante¹⁾ relativement à \subset . Pour tout $K \in \mathcal{K}(A)$, d'après le théorème A, il existe une mesure positive μ_K portée par K telle que

$$(1) \quad \begin{array}{ll} G\mu_K(x) \geq u(x) & \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ & \text{toute mesure } \lambda \in E_K, \\ G\mu_K(x) \leq v(x) & \text{dans tout l'espace } \Omega. \end{array}$$

La masse totale de toute mesure μ_K est uniformément bornée, parce que toute mesure μ_K est portée par \bar{A} et le noyau G est strictement positif. Par suite, selon le lemme 1, l'ensemble $H = \{\mu_K; K \in \mathcal{K}(A)\}$ est relativement compact pour la topologie vague. Posons

$$F_K = \{\mu_{K'}; K' \supset K \text{ et } K' \in \mathcal{K}(A)\}$$

et

$$\mathcal{F} = \{F_K; K \in \mathcal{K}(A)\}.$$

\mathcal{F} est une base du filtre sur H et l'intersection d'une sous-famille finie quelconque de \mathcal{F} n'est pas vide. Alors il existe une mesure positive μ_A^i dans l'intersection $\bigcap_{K(A) \ni K} \bar{F}_K$ où \bar{F}_K désigne l'adhérence de F_K pour la topologie vague. Bien entendu, le support $S\mu_A^i$ est contenu dans \bar{A} . Désignons par $\mathcal{C}\mathcal{V}$ l'ensemble des voisinages V de μ_A^i et par \mathcal{U} l'ensemble

$$\{U; U = (V, K), V \in \mathcal{C}\mathcal{V} \text{ et } K \in \mathcal{K}(A)\}.$$

Pour tout $U = (V, K)$ et $U' = (V', K')$, nous définissons $U < U'$ si $V \supset V'$ et $K \subset K'$. \mathcal{U} constitue une famille filtrante croissante relativement à $<$. Pour tout $U = (V, K)$, on choisit une mesure positive μ_U dans $V \cap F_K$ et alors il existe un ensemble compact K' tel que $\mu_U = \mu_{K'}$ et $K' \supset K$. Soit

$$\mathcal{K}'(A) = \{K'; K' \in \mathcal{K}(A) \text{ et } \mu_{K'} = \mu_U \text{ pour tout } U \in \mathcal{U}\}.$$

$\mathcal{K}'(A)$ est une sous-famille filtrante croissante de $\mathcal{K}(A)$ telle que, pour tout $K \in \mathcal{K}(A)$, il existe un ensemble $K' \in \mathcal{K}'(A)$ qui contient K . Posons

$$F_{K'} = \{\mu_{K''}; K'' \supset K' \text{ et } K'' \in \mathcal{K}'(A)\}$$

et

$$\mathcal{F}' = \{F_{K'}; K' \in \mathcal{K}'(A)\}.$$

1) Une famille d'ensembles \mathcal{F}_p (où p parcourt un ensemble d'indices I absolument quelconque) est dite filtrante croissante si, quels que soient les indices p et q dans I , il existe dans I un indice r tel que $\mathcal{F}_r \supset \mathcal{F}_p$ et $\mathcal{F}_r \supset \mathcal{F}_q$. Définition analogue pour une famille filtrante décroissante, le signe \supset étant remplacé par \subset .

\mathcal{F}' est une base de filtre telle que $\lim_{\mathcal{F}'} \mu_{K'} = \mu_A^i$. L'espace Ω étant σ -compact et admettant une base dénombrable, le filtre des voisinages vagues de toute mesure de l'espace \tilde{M} possède une base dénombrable. Par suite il existe une base dénombrable $\mathcal{F}'' = \{F^{(n)}\}$ de \mathcal{F}' . Si l'on choisit, pour tout n , une mesure $\mu^{(n)}$ dans $F^{(n)}$, il existe un ensemble compact $K'' \in \mathcal{K}(A)$ tel que $\mu^{(n)} = \mu_{K''}$. Cette mesure sera notée simplement $\mu_{K''}^{(n)}$. La suite de mesures $\{\mu_{K''}^{(n)}\}$ possède la propriété suivante,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{K''}^{(n)} = \mu_A^i$$

et

$$\bigcup_{\mathcal{K}(A) \ni K'} K'' = \bigcup_{\mathcal{K}(A) \ni K} K.$$

En substituant $\mu_{K''}^{(n)}$ à $\mu_{K'}$ dans (1) et puis en tendant n vers l'infini, grâce au lemme 2, on a

$$\begin{aligned} G\mu_A^i(x) &\geq u(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ &&& \text{toute mesure } \lambda \in E_A, \\ G\mu_A^i(x) &\leq v(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega. \end{aligned}$$

Ensuite, nous considérons les ensembles

$$\mathcal{O}(A) = \{O; \text{ouvert et } O \supset A\},$$

et

$$\mathcal{O}'(A) = \{O'; \text{relativement compact et } O' \in \mathcal{O}(A)\}$$

qui sont deux familles filtrantes décroissantes relativement à \supset et $\mathcal{O}(A) \ni O = \bigcap_{\mathcal{O}'(A) \ni O'} O'$. Pour tout $O' \in \mathcal{O}'(A)$, d'après ce qui précède, il existe une mesure positive $\mu_{O'}^i$ portée par \bar{O}' telle que

$$(2) \quad \begin{aligned} G\mu_{O'}^i(x) &\geq u(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ &&& \text{toute mesure } \lambda \in E_{O'}, \\ G\mu_{O'}^i(x) &\leq v(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega. \end{aligned}$$

La mass totale de toute mesure $\mu_{O'}^i$ est uniformément bornée et, par suite, l'ensemble $H' = \{\mu_{O'}^i; O' \in \mathcal{O}'(A)\}$ est relativement compact. Posons

$$F_O = \{\mu_{O'}^i; O' \supset O \text{ et } O' \in \mathcal{O}'(A)\}$$

et

$$\hat{\mathcal{F}} = \{F_O; O \in \mathcal{O}'(A)\}.$$

$\hat{\mathcal{F}}$ est une base du filtre sur H' et l'intersection d'une sous-famille finie quelconque de $\hat{\mathcal{F}}$ n'est pas vide. Alors il existe une mesure positive

μ_A^e dans l'intersection $\bigcap_{C(A) \ni O} \bar{F}_O$. Analoguement au cas précédent, on peut montrer que cette mesure μ_A^e possède la propriété cherchée.

Nous ajoutons de plus deux principes.

Soit $N(x, y)$ un autre noyau sur Ω .

PRINCIPE DE DOMINATION RELATIVE A N : Soient μ une mesure positive d'énergie finie à support compact et ν une mesure positive quelconque. Si on a

$$G\mu(x) \leq N\nu(x) \quad \text{sur } S_\mu,$$

on a la même inégalité dans tout l'espace Ω .

PRINCIPE DU MAXIMUM k -DILATÉ ($k \geq 1$) : Soit λ une mesure positive à support compact. Si on a

$$G\lambda(x) \leq 1 \quad \text{sur } S_\lambda,$$

on a

$$G\lambda(x) \leq k \quad \text{dans tout l'espace } \Omega.$$

Nous avons deux corollaires du théorème 1.

Corollaire 1. *Supposons que G et \check{G} satisfassent au principe de continuité. Pour que G satisfasse au principe de domination relative à N , il faut et il suffit que, étant donné un ensemble relativement compact A et une mesure positive μ telle que $N\mu(x) \neq \infty$ dans Ω , on peut associer à μ une mesure positive μ_A^i (resp. μ_A^e) portée par \bar{A} (resp. $\bigcap_{C(A) \ni O} \bar{O}$) telle que*

$$\begin{aligned} G\mu_A^i(x) &= N\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ &&& \text{toute mesure } \lambda \in E_A, \\ G\mu_A^i(x) &\leq N\mu(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega \\ (\text{resp. } G\mu_A^e(x) &= N\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ &&& \text{toute mesure } \lambda \in \bigcap_{C(A) \ni O} E_O, \\ G\mu_A^e(x) &\leq N\mu(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega). \end{aligned}$$

En effet, en posant $u(x) = v(x) = N\mu(x)$, ce corollaire résulte du théorème 1.

Corollaire 2. *Supposons que G et \check{G} satisfassent au principe de continuité. Pour que G satisfasse au principe du maximum k -dilaté, il faut et il suffit que, étant donné un ensemble quelconque relativement compact A , il existe une mesure positive λ_A^i (resp. λ_A^e) portée par \bar{A} (resp. $\bigcap_{C(A) \ni O} \bar{O}$) telle que*

$$\begin{aligned}
 G\lambda_A^i(x) &\geq 1 && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute} \\
 &&& \text{mesure } \lambda \in E_A, \\
 G\lambda_A^i(x) &\leq k && \text{dans tout l'espace } \Omega \\
 (\text{resp. } G\lambda_A^e(x) &\geq 1 && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute} \\
 &&& \text{mesure } \lambda \in \bigcap_{\mathcal{O}(A) \ni \mathcal{O}} E_{\mathcal{O}}, \\
 G\lambda_A^e(x) &\leq k && \text{dans tout l'espace } \Omega).
 \end{aligned}$$

En effet, en posant $u(x)=1$ et $v(x)=k$ dans le théorème 1, nous avons immédiatement ce corollaire.

Définition. Nous appelons μ_A^i (resp. μ_A^e) dans le corollaire 1 la mesure balayée intérieurement (resp. extérieurement) relative à N de μ pour A . En particulier, dans le cas où $N=G$, on dit μ_A^i (resp. μ_A^e) la mesure balayée intérieurement (resp. extérieurement) de μ pour A .

Ensuite, nous allons traiter le même problème dans le cas où un ensemble A n'est pas relativement compact. Pour cela, nous préparons un principe et deux lemmes.

PRINCIPE DE DOMINATION: Soient μ une mesure positive d'énergie finie à support compact et ν une mesure positive quelconque. Si on a

$$G\mu(x) \leq G\nu(x) \quad \text{sur } S\mu,$$

on a la même inégalité dans tout l'espace Ω .

Lemme 3. *Supposons que tous deux G et \check{G} satisfassent au principe de continuité, G au principe de domination et \check{G} au principe du maximum k -dilaté. Si μ_A^i (resp. μ_A^e) est une mesure balayée intérieurement (resp. extérieurement) de μ pour A , on a*

$$\begin{aligned}
 \mu_A^i(\Omega) &\leq k\mu(\Omega) \\
 (\text{resp. } \mu_A^e(\Omega) &\leq k\mu(\Omega)).
 \end{aligned}$$

En effet, pour tout ensemble compact K dans A , d'après le corollaire 1, on peut associer à μ une mesure positive μ_K portée par K telle que

$$\begin{aligned}
 G\mu_K(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\
 &&& \text{toute mesure } \lambda \in E_K, \\
 G\mu_K(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega.
 \end{aligned}$$

Ici, la mesure μ_K est limite vague d'une suite de mesures positives d'énergie finie $\{\mu_n\}$ portée par K telle que $G\mu_n(x) \leq G\mu(x)$ dans Ω (cf., [7], p. 175). Selon le corollaire 2, il existe, pour tout K , une mesure positive λ_K^i portée par K telle que

$$\begin{aligned} \check{G}\lambda_K^i(x) &\geq 1 && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute} \\ & && \text{mesure } \lambda \in E_K, \\ \check{G}\lambda_K^i(x) &\leq k && \text{dans tout l'espace } \Omega. \end{aligned}$$

Alors on a, pour tout nombre n ,

$$\begin{aligned} \mu_n(\Omega) &\leq \int \check{G}\lambda_K^i(x) d\mu_n(x) = \int G\mu_n(x) d\lambda_K^i(x) \\ &\leq \int G\mu(x) d\lambda_K^i(x) \leq \int \check{G}\lambda_K^i d\mu \leq k\mu(\Omega). \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\mu_K(\Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\Omega) \leq k\mu(\Omega).$$

En signalant que μ_K^i est limite vague d'une certaine famille $\{\mu_n\}$, on a

$$\mu_A^i(\Omega) \leq k\mu(\Omega).$$

En vertu du résultat ci-dessus et du fait que μ_A^o est limite vague d'une famille $\{\mu_n^o\}$, on a immédiatement

$$\mu_A^o(\Omega) \leq k\mu(\Omega).$$

Lemme 4. *Supposons que \check{G} satisfasse au principe de continuité et à la condition (*): pour tout ensemble compact K et pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact K_ε tel que*

$$\check{G}(x, y) < \varepsilon \quad \text{sur } K \times (\Omega - K_\varepsilon).$$

Si une suite de mesures positives $\{\mu_n\}$ de masse totale uniformément bornée converge vaguement vers une mesure μ , on a partout

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} G\mu_n(x) \geq G\mu(x)$$

et l'égalité a lieu sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E$.

En effet, soit ω un point à l'infini et C_ω l'espace des fonctions continues dans Ω qui tendent vers 0 lorsque x tend vers ω . L'espace C_ω s'identifie avec l'adhérence de C_0 relative à la topologie de la convergence uniforme. Cela étant, toute mesure bornée sur Ω se prolonge d'une seule manière par continuité à C_ω . Par suite, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g d\mu_n = \int g d\mu \quad \text{pour toute } g \in C_\omega.$$

Il est bien connu que, si une suite de mesures positives $\{\mu_n\}$ converge vaguement vers une mesure μ , on a partout

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} G\mu_n(x) \geq G\mu(x).$$

Posons

$$e = \{x \in \Omega; G\mu(x) < \varliminf_{n \rightarrow \infty} G\mu_n(x)\}$$

et supposons qu'il existe une mesure $\nu \in E$ telle que $\nu(e) > 0$ et $S\nu \subset e$. D'après le principe de continuité et le théorème de Lusin, il existe une mesure ν' à support compact telle que $\check{G}\nu'(x)$ soit fini et continu dans Ω et $\nu'(\Omega) > 0$. Grâce à la condition (*), le potentiel $\check{G}\nu'(x)$ appartient à la famille C_ω et donc on a

$$G\mu d\nu' < \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int G\mu_n d\nu' = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int \check{G}\nu' d\mu_n = \int \check{G}\nu' d\mu = \int G\mu d\nu'.$$

ce qui est évidemment contradictoire.

Théorème 2. *Supposons que G et \check{G} satisfassent au principe de continuité, \check{G} a la condition (*) et G aux principes de domination et du maximum k -dilaté. Etant donnés une mesure positive μ telle que $G\mu(x) \neq +\infty$ et un ensemble quelconque non-relativement compact A , on peut toujours associer à μ au moins une mesure positive μ'_A (resp. μ''_A) portée par \bar{A} (resp. $\bigcap_{O(A) \ni O} \bar{O}$) telle que*

$$\begin{aligned} G\mu'_A(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ &&& \text{toute mesure } \lambda \in E_A, \\ G\mu'_A(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega \\ (\text{resp. } G\mu''_A(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ &&& \text{toute mesure } \lambda \in \bigcap_{O(A) \ni O} E_O, \\ G\mu''_A(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega). \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de le prouver lorsqu'un ensemble fermé \bar{A} porte au moins une mesure positive d'énergie finie. Nous représentons l'espace Ω comme

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n, \quad K_n \subset K_{n+1},$$

où K_n est un ensemble compact et K_0 désigne la partie vide. Posons

$$A_n = A \cap K_n.$$

Alors A_n est relativement compact et croissant avec n . Par suite, selon le théorème 1, il existe, pour tout n , une mesure positive μ'_{A_n} portée par \bar{A} telle que

$$(3) \quad \begin{array}{ll} G\mu_{A_n}^{\xi}(x) = G\mu(x) & \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ & \text{toute mesure } \lambda \in E_{A_n}, \\ G\mu_{A_n}^{\xi}(x) \leq G\mu(x) & \text{dans tout l'espace } \Omega. \end{array}$$

D'après le lemme 3, on a

$$\mu_{A_n}^{\xi}(\Omega) \leq k\mu(\Omega).$$

Supposons d'abord qu'une mesure positive donnée μ soit à support compact. Alors il existe une mesure positive μ_A^{ξ} portée par \bar{A} qui est limite vague d'une suite partielle $\{\mu_{A_{n'}}^{\xi}\}$ de $\{\mu_{A_n}^{\xi}\}$. En tendant $n=n'$ vers l'infini dans (3), grâce au lemme 4, on a

$$\begin{array}{ll} G\mu_A^{\xi}(x) = G\mu(x) & \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ & \text{toute mesure } \lambda \in E_A, \\ G\mu_A^{\xi}(x) \leq G\mu(x) & \text{dans tout l'espace } \Omega. \end{array}$$

Ensuite, supposons qu'une mesure positive donnée μ soit à support non compact. Soit $\mu^{(n)}$ la restriction de μ à $K_n - K_{n-1}$. En vertu de ce qui précède, on peut associer à $\mu^{(n)}$ une mesure positive $(\mu^{(n)})_A^{\xi}$ portée par \bar{A} telle que

$$(4) \quad \begin{array}{ll} G(\mu^{(n)})_A^{\xi}(x) = G\mu^{(n)}(x) & \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle} \\ & \text{pour toute mesure } \lambda \in E_A, \\ G(\mu^{(n)})_A^{\xi}(x) \leq G\mu^{(n)}(x) & \text{dans tout l'espace } \Omega. \end{array}$$

On peut démontrer que la famille de mesures $\{\sum_{n=1}^m (\mu^{(n)})_A^{\xi}\}$, $m=1, 2, 3, \dots$ est vaguement bornée. En effet, soit $(\mu_K^{(n)})_A^{\xi}$ la restriction de $(\mu^{(n)})_A^{\xi}$ à un ensemble compact $K \subset \Omega$. On a partout

$$\sum_{n=1}^m G(\mu_K^{(n)})_A^{\xi}(x) \leq \sum_{n=1}^m G(\mu^{(n)})_A^{\xi}(x) \leq \sum_{n=1}^m G\mu^{(n)}(x) \leq G\mu(x).$$

Par l'hypothèse, il existe au moins un point x_0 telle que

$$G\mu(x_0) < +\infty.$$

En conséquence, on a

$$G\left(\sum_{n=1}^m (\mu_K^{(n)})_A^{\xi}\right)(x_0) \leq G\mu(x_0) < +\infty.$$

On en conclut

$$\sum_{n=1}^m (\mu^{(n)})_A^{\xi}(K) < +\infty$$

pour tout entier m et pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$, parce que le

noyau considéré est strictement positif. Alors en vertu du lemme 1, on peut extraire une suite partielle $\{\sum_{n=1}^{m'} (\mu^{(n)})'_A\}$ de $\{\sum_{n=1}^m (\mu^{(n)})'_A\}$ qui converge vaguement vers une mesure positive μ'_A portée par \bar{A} . Cette mesure μ'_A possède les propriétés suivantes,

$$\begin{aligned} G\mu'_A(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ & && \text{toute mesure } \lambda \in E_A, \\ G\mu'_A(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega. \end{aligned}$$

Analoguement à ce qui précède, on peut démontrer l'existence d'une mesure positive μ''_A qui possède la propriété cherchée.

Remarque. Si G est continu en x et y pour $x \neq y$, le noyau G satisfaisant au principe de domination ou du maximum k -dilaté satisfait au principe de continuité.

2. Relations entre $G\mu'_A(x)$ et $G\mu''_A$

On appelle $G(x, y)$ un noyau symétrique sur Ω si une application $G(x, y)$ est positive, symétrique ($G = \check{G}$) et continue en x et y dans Ω , qui peut être $+\infty$ en $x = y$. Désormais, nous allons considérer des potentiels pris par rapport à un noyau symétrique G sur Ω . L'énergie mutuelle des mesures μ et ν sur Ω est définie par

$$(\mu, \nu) = \int G\mu(x) d\nu(x).$$

Evidemment on a $(\mu, \nu) = (\nu, \mu)$ et lorsque $\nu = \mu$, on obtient l'énergie d'une mesure μ

$$\|\mu\|^2 = (\mu, \mu).$$

Un noyau G est dit de type positif si $(\sigma, \sigma) \geq 0$ pour toute mesure telle que l'intégrale double (σ, σ) soit bien définie. Un noyau G est dit satisfaire au principe d'énergie si le noyau G est de type positif et $(\sigma, \sigma) = 0$ n'a lieu qu'au cas où $\sigma \equiv 0$. Si G est de type positif, le produit scalaire (μ, ν) et la semi-norme $\|\mu\| = \sqrt{(\mu, \mu)}$ définissent sur \tilde{E} une structure préhilbertienne. Dans ce cas, la topologie sur \tilde{E} définie par la pseudo-distance $\|\mu - \nu\|$ s'appelle la topologie forte. Nous énumérons ici quelques résultats relatifs aux potentiels pris par rapport à un noyau symétrique.

Théorème B. *Si un noyau G satisfait au principe de domination, il satisfait au principe de continuité et il est de type positif ([8], p. 160 ou p. 157).*

Un noyau de type positif G est dit K -consistant par B. Fuglede ([6], p. 186) s'il satisfait à la condition suivante : Si un filtre de Cauchy pour la structure uniforme forte sur E_K converge vaguement vers une mesure $\mu \in E$, alors ce filtre converge fortement vers μ .

Théorème C. *Si un noyau G de type positif satisfait au principe de continuité, le noyau G est K -consistant et E_K est fortement complet ([6], p. 187).*

G étant de type positif, nous noterons E_A^i l'adhérence forte de l'ensemble des mesures d'énergie finie portées par un ensemble quelconque A . On peut considérer E_A^i comme l'adhérence forte de $E_A = \bigcup_{\mathcal{K}(A) \ni K} E_K$. D'autre part, nous noterons E_A^e l'intersection des ensembles E_O^e relatifs aux ensembles ouverts O contenant A . Par définition, on conclut que $E_A^i \subset E_A^e$, $E_A^i \subset E_B^i$ et $E_A^e \subset E_B^e$ pour $A \subset B$ et $E_O^e = E_{\bar{O}}^e$ pour tout ensemble ouvert O . Alors nous avons un corollaire du théorème C.

Corollaire. *Supposons que G satisfasse au principe de continuité et soit de type positif. Pour tout ensemble quelconque relativement compact A , tous deux E_A^i et E_A^e sont fortement complet.*

En effet, E_A^i est complet, puisque, d'après le théorème C, $E_{\bar{A}}$ est complet et E_A^i est un sous-ensemble fermé contenu dans $E_{\bar{A}}$. De plus, E_A^e est complet, parce qu'il existe un ensemble ouvert $O(\supset \bar{A})$ qui est relativement compact, et l'espace complet $E_{\bar{O}}$ contient l'ensemble fermé E_A^e .

Dans ce paragraphe, nous étudierons d'abord, plus précisément que dans le premier paragraphe, le balayage intérieur (resp. extérieur) d'une mesure positive pour un ensemble quelconque et ensuite les relations entre $G\mu_A^i(x)$ et $G\mu_A^e(x)$.

Lemme 5. *Supposons que G satisfasse au principe de domination. Etant donné une mesure positive $\mu \in E$ et un ensemble quelconque relativement compact A , il existe au moins une mesure positive μ_A^i (resp. μ_A^e) portée par \bar{A} (resp. $\bigcap_{O(A) \ni O} \bar{O}$) telle que*

$$\begin{aligned} G\mu_A^i(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ & && \text{toute mesure } \lambda \in E_A^i, \\ G\mu_A^i(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega, \\ \int G\mu_A^i d\nu &= \int G\mu d\nu_A && \text{pour toute mesure } \nu \in E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{resp. } G\mu_A^e(x) = G\mu(x) & \quad \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\
 & \quad \text{toute mesure } \lambda \in E_A^e, \\
 G\mu_A^e(x) \leq G\mu(x) & \quad \text{dans tout l'espace } \Omega, \\
 \int G\mu_A^e d\nu = \int G\mu d\nu_A^e & \quad \text{pour toute mesure } \nu \in E).
 \end{aligned}$$

En effet, en posant $N=G$ dans le corollaire 1 du théorème 1, il existe au moins une mesure positive $\mu_A^i \in E$ portée par \bar{A} telle que

$$\begin{aligned}
 G\mu_A^i(x) = G\mu(x) & \quad \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\
 & \quad \text{toute mesure } \lambda \in E_A, \\
 G\mu_A^i(x) \leq G\mu(x) & \quad \text{dans tout l'espace } \Omega.
 \end{aligned}$$

Prenons une mesure quelconque $\lambda \in E_A^i$. Il existe une suite $\{\lambda_n\}$ dans E_A telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda_n - \lambda\| = 0$. En conséquence, on a

$$\begin{aligned}
 & |(\mu_A^i - \mu, \lambda)| \\
 &= |(\mu_A^i - \mu, \lambda) - (\mu_A^i - \mu, \lambda_n)| \\
 &\leq \|\mu_A^i - \mu\| \|\lambda - \lambda_n\| \\
 &\rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

ce qui montre

$$G\mu_A^i(x) = G\mu(x) \quad \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\
 \text{toute mesure } \lambda \in E_A^i.$$

D'autre part, d'après les théorèmes *B* et *C* et le corollaire, pour toute mesure $\mu \in E$, μ_A^i appartient à E_A^i et donc on a

$$\int G\mu_A^i d\nu = \int G\nu_A^i d\mu_A^i = \int G\mu_A^i d\nu_A^i = \int G\mu d\nu_A^i$$

pour toute mesure $\nu \in E$. Le raisonnement analogue pour μ_A^e .

Lemme 6. *Si G satisfait au principe de domination et μ et ν sont deux mesures de E telles que*

$$G\mu(x) \leq G\nu(x)$$

sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E$, on a

$$G\mu_A^i(x) \leq G\nu_A^i(x) \text{ et } G\mu_A^e(x) \leq G\nu_A^e(x)$$

sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E$.

En effet, d'après le lemme 5, on a

$$G\mu_A^i(x) \leq G\nu_A^i(x) \quad \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure } \lambda \in E_A^i.$$

Posons

$$e = \{x \in \Omega; G\mu_A^i(x) - G\nu_A^i(x) > 0\}$$

et supposons que l'ensemble e porte une mesure positive $\sigma \in E$ et $S\sigma \subset e$. On a alors

$$0 < \int (G\mu_A^i - G\nu_A^i) d\sigma = \int (G\mu_A^i - G\nu_A^i) d\sigma_A^i \leq 0,$$

ce qui est évidemment contradictoire. De la même manière, on a

$$G\mu_A^e(x) \leq G\nu_A^e(x)$$

sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E$.

Théorème 3. *Supposons que G satisfasse au principe de domination. Etant donné un ensemble quelconque relativement compact A et une mesure positive μ telle que $G\mu(x) \equiv +\infty$ dans Ω , on peut associer à μ au moins une mesure positive μ_A^i (resp. μ_A^e) portée par \bar{A} (resp. $\bigcap_{\mathcal{O}(A) \ni O} \bar{O}$) telle que*

$$\begin{aligned} G\mu_A^i(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ & && \text{toute mesure } \lambda \in E_A^i, \\ G\mu_A^i(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega, \\ \int G\mu_A^i d\nu &= \int G\mu d\nu_A^i && \text{pour toute mesure } \nu \in E. \\ (\text{resp. } G\mu_A^e(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ & && \text{toute mesure } \lambda \in E_A^e, \\ G\mu_A^e(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega, \\ \int G\mu_A^e d\nu &= \int G\mu d\nu_A^e && \text{pour toute mesure } \nu \in E). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit K un ensemble compact contenant l'ensemble $\bigcap_{\mathcal{O}(A) \ni O} \bar{O}$, par suite, l'ensemble \bar{A} . G étant un noyau symétrique, on peut montrer, de la même façon que dans la démonstration du théorème 5 de Ninomiya ([8], p. 165), l'existence d'une mesure balayée μ' portée par K telle que

$$\begin{aligned} G\mu'(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ & && \text{toute mesure } \lambda \in E_K, \\ G\mu'(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega. \end{aligned}$$

Ici, la mesure μ' est limite vague d'une suite de mesures positives d'énergie finie $\{\mu_p\}$ portées par K telle que

$$G\mu_p(x) \uparrow G\mu'(x)$$

sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E$. D'après le lemme 5, on peut associer à toute μ_p une mesure positive $(\mu_p)_A^i$ portée par \bar{A} telle que

$$(5) \quad \begin{aligned} G(\mu_p)_A^i(x) &= G\mu_p(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle} \\ & && \text{pour toute mesure } \lambda \in E_A^i, \\ G(\mu_p)_A^i(x) &\leq G\mu_p(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega, \\ \int G(\mu_p)_A^i d\nu &= \int G\mu_p d\nu_A && \text{pour toute mesure } \nu \in E. \end{aligned}$$

D'autre part, on a grâce au lemme 6

$$G(\mu_p)_A^i(x) \uparrow$$

sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E$ et la masse totale de toute mesure $(\mu_p)_A^i$ est uniformément bornée. Par suite, selon le lemme 1, on peut extraire une suite partielle $\{(\mu_{p'})_A^i\}$ de $\{(\mu_p)_A^i\}$ qui converge vaguement vers une mesure positive μ_A^i . En tendant $p = p'$ vers l'infini dans (5), on a, en vertu du lemme 2 et du théorème B,

$$\begin{aligned} G\mu_A^i(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle} \\ & && \text{pour toute mesure } \lambda \in E_A^i, \\ G\mu_A^i(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega, \\ \int G\mu_A^i d\nu &= \int G\mu d\nu_A && \text{pour toute mesure } \nu \in E. \end{aligned}$$

De nouveau, d'après le lemme 5, on peut associer à toute $\mu_{p'}$ une mesure positive $(\mu_{p'})_A^e$ portée par $\bigcap_{O(A) \in O} \bar{O}$ telle que

$$\begin{aligned} G(\mu_{p'})_A^e(x) &= G\mu_{p'}(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle} \\ & && \text{pour toute mesure } \lambda \in E_A^e, \\ G(\mu_{p'})_A^e(x) &\leq G\mu_{p'}(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega, \\ \int G(\mu_{p'})_A^e d\nu &= \int G\mu_{p'} d\nu_A && \text{pour toute mesure } \nu \in E. \end{aligned}$$

En considérant désormais analoguement à ce qui précède, on peut démontrer l'existence d'une mesure positive μ_A^e qui possède la propriété cherchée.

Lemme 7. *Supposons que G satisfasse au principe de domination. Etant donnés une mesure $\mu \in E$ et deux ensembles quelconques relativement compacts A et B tels que $A \subset B$, on a*

$$G\mu_A^i(x) \leq G\mu_B^i(x), \quad G\mu_A^e(x) \leq G\mu_B^e(x) \quad \text{et} \quad G\mu_A^e(x) \leq G\mu_B^i(x)$$

sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E$.

En effet, posons

$$e = \{x \in \Omega ; G\mu_A^i(x) - G\mu_B^i(x) > 0\}$$

et supposons qu'il existe une mesure positive $\sigma \in E$ portée par e . On a alors

$$\begin{aligned} 0 &< \int (G\mu_A^i - G\mu_B^i) d\sigma = \int G\mu_A^i d\sigma_A^i - \int G\mu_B^i d\sigma_B^i \\ &= \int (G\mu_A^i - G\mu_B^i) d\sigma_A^i + \int (G\sigma_A^i - G\sigma_B^i) d\mu_B^i \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

ce qui est évidemment contradictoire. En se procédant analogiquement, on peut prouver les autres inégalités.

Corollaire. *Dans la condition du lemme 7, on a*

$$\begin{aligned} \|\mu_B^i - \mu_A^i\|^2 &\leq \|\mu_B^i\|^2 - \|\mu_A^i\|^2, \\ \|\mu_A^e - \mu_A^i\|^2 &\leq \|\mu_A^e\|^2 - \|\mu_A^i\|^2 \\ \text{et} \quad \|\mu_A^e - \mu_B^e\|^2 &\leq \|\mu_B^e\|^2 - \|\mu_A^e\|^2. \end{aligned}$$

En effet, en vertu du lemme 7, on a

$$\begin{aligned} \|\mu_A^i - \mu_B^i\|^2 &= \|\mu_B^i\|^2 - \|\mu_A^i\|^2 - 2(\mu_B^i - \mu_A^i, \mu_A^i) \\ &\leq \|\mu_B^i\|^2 - \|\mu_A^i\|^2. \end{aligned}$$

De la même façon, on peut prouver les autres inégalités.

Lemme 8. *Supposons que G satisfasse au principe de continuité. Etant donnée une mesure positive d'énergie finie μ à support non compact, il existe une suite de mesures positives $\{\mu_n\}$ convergeant vaguement vers μ dont le support S_{μ_n} contenu dans le support S_μ est compact et dont le potentiel $G\mu_n(x)$ est fini et continu dans Ω et $G\mu_n(x) \uparrow G\mu(x)$ dans Ω .*

En effet, on peut représenter l'espace Ω comme

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n, \quad K_n \subset K_{n+1}$$

où K_n est un ensemble compact et K_0 désigne la partie vide. Posons

$$F_n = S_\mu \cap K_n.$$

Alors F_n est compact et croissant. $G\mu(x)$ étant μ -mesurable, il existe un ensemble compact $F_n^m \subset F_n$, tel que $\mu(F_n - F_n^m) < 1/m$ pour tout nombre entier m et $n > 0$, et que la restriction de $G\mu(x)$ à F_n^m soit continue. On peut supposer que, pour n fixé, $F_n^m \subset F_n^{m+1}$, $m = 1, 2, \dots$ et pour m fixé, $F_n^m \subset F_{n+1}^m$, $n = 1, 2, \dots$. Soit μ_n^m la restriction de μ à F_n^m . Selon le principe de continuité, $G\mu_n^m(x)$ est fini et continu dans Ω . En particulier, nous allons considérer la suite $\{\mu_n^m\}$, $n = 1, 2, \dots$ et de nouveau

le poser simplement $\{\mu_n\}$, $n=1, 2, \dots$. $\{G\mu_n(x)\}$ est croissante et $G\mu_n(x) \leq G\mu(x)$ dans Ω , parce que $\{F_n^n\}$ est aussi croissante et μ_n est la restriction de μ à F_n^n . Pour toute fonction $f \in C_0$, il existe un nombre entier N tel que $K_N \supset Sf$ et on a

$$0 \leq \int fd\mu - \int fd\mu_n = \int_{F_n - F_n^n} fd\mu < M/n \quad \text{pour } n > N,$$

où M désigne le maximum de $f(x)$. Alors $\{\mu_n\}$ converge vaguement vers μ et donc

$$\varinjlim_{n \rightarrow \infty} G\mu_n(x) \geq G\mu(x) \quad \text{dans tout l'espace } \Omega.$$

En conséquence, on a

$$G\mu_n(x) \uparrow G\mu(x) \quad \text{dans tout l'espace } \Omega.$$

Théorème 4. *Supposons que G satisfasse aux principes de domination et du maximum k -dilaté et à la condition (*). Etant donné un ensemble quelconque non relativement compact A et une mesure positive μ telle que $G\mu(x) \not\equiv +\infty$, on peut associer à μ au moins une mesure positive μ_A^i (resp. μ_A^e) portée par \bar{A} (resp. $\bigcap_{O(A) \ni O} \bar{O}$) telle que*

$$\begin{aligned} G\mu_A^i(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ &&& \text{toute mesure } \lambda \in E_A^i, \\ G\mu_A^i(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega, \\ \int G\mu_A^i d\nu &= \int G\mu d\nu_A^i && \text{pour toute mesure } \nu \in E \\ (\text{resp. } G\mu_A^e(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ &&& \text{toute mesure } \lambda \in E_A^e, \\ G\mu_A^e(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega, \\ \int G\mu_A^e d\nu &= \int G\mu d\nu_A^e && \text{pour toute mesure } \nu \in E). \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de le prouver lorsqu'un ensemble fermé \bar{A} porte au moins une mesure positive d'énergie finie. Nous représentons l'espace Ω comme

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n, \quad K_n \subset K_{n+1},$$

où K_n est un ensemble compact et K_0 désigne la partie vide. Posons

$$A_n = A \cap K_n.$$

Alors A_n est relativement compact et croissant avec n . Selon le théorème 3, il existe une mesure positive $\mu_{A_n}^i$ portée par \bar{A}_n telle que

$$(6) \quad G\mu_{A_n}^i(x) = G\mu(x) \quad \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure } \lambda \in E_{A_n}^i,$$

$$G\mu_{A_n}^i(x) \leq G\mu(x) \quad \text{dans tout l'espace } \Omega,$$

$$\int G\mu_{A_n}^i d\nu = \int G\mu d\nu_{A_n}^i \quad \text{pour toute mesure } \nu \in E.$$

D'après le lemme 3, on a

$$\mu_{A_n}^i(\Omega) \leq k\mu(\Omega).$$

Supposons d'abord qu'une mesure positive donnée μ soit à support compact. Alors il existe une mesure positive $\mu_{\bar{A}}^i$ portée par \bar{A} qui est limite vague d'une suite partielle $\{\mu_{A_{n'}}^i\}$ de $\{\mu_{A_n}^i\}$. Et on a

$$G\mu_{A_n}^i(x) \leq G\mu_{A_{n+1}}^i(x)$$

sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\nu \in E$. En effet, soit

$$e = \{x \in \Omega; G\mu_{A_n}^i(x) - G\mu_{A_{n+1}}^i(x) > 0\}$$

et supposons qu'il porte une mesure positive d'énergie finie ν . En vertu du théorème 3 et du lemme 7, on a

$$0 < \int (G\mu_{A_n}^i - G\mu_{A_{n+1}}^i) d\nu = \int G\mu_{A_n}^i d\nu_{A_n}^i - \int G\mu_{A_{n+1}}^i d\nu_{A_{n+1}}^i$$

$$= \int (G\mu_{A_n}^i - G\mu_{A_{n+1}}^i) d\nu_{A_n}^i + \int (G\nu_{A_n}^i - G\nu_{A_{n+1}}^i) d\mu_{A_{n+1}}^i$$

$$\leq 0,$$

ce qui est évidemment contradictoire. En tendant $n=n'$ vers l'infini dans (6), grâce au lemme 4, on a

$$G\mu_A^i(x) = G\mu(x) \quad \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle}$$

$$\text{pour toute mesure } \lambda \in \bigcup_{n=0}^{\infty} E_{A_n}^i,$$

$$G\mu_A^i(x) \leq G\mu(x) \quad \text{dans tout l'espace } \Omega,$$

$$\int G\mu_A^i d\nu = \int G\mu d\nu_A^i \quad \text{pour toute mesure à support compact } \nu \in E.$$

Signalons que l'adhérence forte de $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_{A_n}^i$ est identique à E_A^i et, étant donnée une mesure $\lambda \in E_A^i$, la restriction de λ à tout ensemble compact appartient à $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_{A_n}^i$. En vertu du théorème B et du lemme 8, il existe une suite de mesures positives $\{\lambda_n\}$ convergeant vaguement vers λ dont le support $S\lambda_n$ est compact et $G\lambda_n(x) \uparrow G\lambda(x)$ dans Ω . Par suite, on a

$$\int (G\mu_A^i - G\mu) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int G\lambda_n d\mu_A^i - \lim_{n \rightarrow \infty} \int G\lambda_n d\mu$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (G\mu_A^i - G\mu) d\lambda_n$$

$$= 0,$$

ce qui montre

$$G\mu_A^i(x) = G\mu(x) \quad \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure } \lambda \in E_A^i.$$

Ensuite, supposons qu'une mesure positive donnée μ soit à support non compact. Analoguement au théorème 2, on peut démontrer l'existence d'une mesure positive μ_A^i qui possède les propriétés suivantes,

$$\begin{aligned} G\mu_A^i(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle} \\ &&& \text{pour toute mesure } \lambda \in E_A^i, \\ G\mu_A^i(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega, \\ \int G\mu_A^i d\nu &= \int G\mu d\nu_A^i && \text{pour toute mesure à support compact} \\ &&& \nu \in E. \end{aligned}$$

De plus, étant donnée une mesure positive à support non compact $\nu \in E$, on peut bien définir une suite convenable $\{\sum_{n=1}^m (\nu^{(n)})_A^i\}$ qui converge vaguement vers une mesure positive ν_A^i , où $\nu^{(n)}$ désigne la restriction de ν à $K_n - K_{n-1}$. Enfin, on a

$$\int G\mu_A^i d\nu = \int G\mu d\nu_A^i \quad \text{pour toute mesure } \nu \in E.$$

De la même façon, on a une mesure positive μ_A^e qui possède les propriétés cherchées.

REMARQUE. En s'appuyant sur le fait que l'ensemble des mesures positives d'énergie finie E est fortement complet et en utilisant la surharmonicité du potentiel newtonien engendré par une mesure positive, H. Cartan [3] a montré que, étant donnés un ensemble quelconque A et une mesure positive μ , il existe une mesure positive ν (resp. ν') telle que

$$\begin{aligned} \int U^\nu d\lambda &= \int U^\mu d\lambda_A^i && \text{pour toute mesure } \lambda \in E \\ (\text{resp. } \int U^{\nu'} d\lambda &= \int U^\mu d\lambda_A^e && \text{pour toute mesure } \lambda \in E). \end{aligned}$$

Il a défini la mesure balayée intérieurement (resp. extérieurement) de μ pour A comme la mesure ci-dessus ν (resp. ν').

Nous allons étudier la relation entre $G\mu_A^i(x)$ et $G\mu_A^e(x)$.

Lemme 9. *Si G est de type positif et satisfait au principe de continuité, on a*

$$E_K^i = E_K^e$$

pour tout ensemble compact K .

En effet, pour tout ensemble quelconque relativement compact A , toute mesure de E_A^i est portée par l'adhérence \bar{A} de A . Par suite, pour toute mesure $\mu \in E_A^e$, le support S_μ est contenu dans l'ensemble compact $\bigcap_{\mathcal{O}(A) \ni O} \bar{O}$. Pour prouver ce lemme, il suffit de montrer que mesure $\mu \in E_K^e$ est portée par K . Supposons qu'il existe un ensemble ouvert N , ne rencontrant pas K , tel que $\mu(N) > 0$. Naturellement on peut trouver un ensemble compact K' contenu dans N tel que $\mu(K') > 0$. Il existe un voisinage compact de K et un voisinage compact de K' sans point commun ([2], § 10, cf., ex. 21), parce que K et K' sont deux ensembles compacts sans point commun dans l'espace localement compact séparé. C'est en contradiction avec le fait que S_μ est contenu dans $\bigcap_{\mathcal{O}(A) \ni O} \bar{O}$.

DÉFINITION. Soit $\mathcal{K}(\Omega)$ la famille des ensembles compacts dans Ω . Pour chaque $\mu \in E$, une application numérique $C_\mu(K)$ de $\mathcal{K}(\Omega)$ dans $[0, +\infty]$,

$$C_\mu(K) = \|\mu_K^i\|^2,$$

s'appelle la μ -capacité d'ensemble compact K .

Lemme 10. *La μ -capacité $C_\mu(K)$ est une fonction d'ensemble croissante et continue à droite²⁾ sur $\mathcal{K}(\Omega)$.*

En effet, grâce au corollaire du lemme 7, on a

$$\|\mu_K^i - \mu_{K'}^i\|^2 \leq \|\mu_K^i\|^2 - \|\mu_{K'}^i\|^2$$

pour deux ensembles compacts K et K' tels que $K' \subset K$.

Ainsi on a

$$C_\mu(K) \geq C_\mu(K').$$

D'après les lemmes 5 et 9, on a

$$\|\mu_K^e - \mu_K^i\|^2 = (\mu_K^e - \mu_K^i, \mu_K^e) - (\mu_K^e - \mu_K^i, \mu_K^i) = 0.$$

Par suite, on a

$$\|\mu_{O'}^i - \mu_K^i\| \leq \|\mu_{O'}^e - \mu_K^e\|$$

pour tout ensemble ouvert $O' \in \mathcal{O}'(K)$ (cf. Théorème 1). En signalant

2) Soit \mathcal{M} une famille de sous-ensemble X dans Ω . Une fonction d'ensemble croissante $f(X)$ définie sur \mathcal{M} est dite continue à droite en $X_0 \in \mathcal{M}$ si, étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de X_0 tel que

$$f(X) - f(X_0) < \varepsilon \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{M} \text{ tel que } X_0 \subset X \subset V.$$

La fonction $f(X)$ est dite continue à droite sur \mathcal{M} si elle l'est en tout $X \in \mathcal{M}$.

que $\lim_{\mathcal{O}'(K)} \|\mu_{O'}^i - \mu_K^e\| = 0$ et que, pour tout ensemble ouvert O contenant K , il existe un ensemble $O' \in \mathcal{O}'(K)$ tel que $O \supset O'$, on a

$$\|\mu_K^i\|^2 = \inf_{\mathcal{O}(K) \ni O} \|\mu_O^i\|^2.$$

Par suite, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble ouvert O_ε contenant K tel que

$$\|\mu_{O_\varepsilon}^i\|^2 - \|\mu_K^i\|^2 < \varepsilon.$$

En conséquence, on a

$$C_\mu(K') - C_\mu(K) < \varepsilon$$

pour tout $K' \in \mathcal{K}(\Omega)$ tel que $K \subset K' \subset O_\varepsilon$.

Ainsi nous savons que la μ -capacité $C_\mu(K)$ est une capacité définie sur $\mathcal{K}(\Omega)$ au sens de G. Choquet ([4], p. 174).

DÉFINITION. Etant donné un ensemble relativement compact A et une mesure $\mu \in E$, on définit μ -capacité inférieure (resp. extérieure) de l'ensemble A de la manière suivante,

$$C_\mu^i(A) = \|\mu_A^i\|^2 \\ (\text{resp. } C_\mu^e(A) = \|\mu_A^e\|^2).$$

Lemme 11. *On a*

$$C_\mu^i(A) = \sup_{\mathcal{K}(A) \ni K} C_\mu(K)$$

et

$$C_\mu^e(A) = \inf_{\mathcal{O}(A) \ni O} C_\mu^i(O).$$

En effet, en tenant compte de la façon de construction de μ_A^i ou μ_A^e dans le théorème 1 et du théorème C, on a

$$\|\mu_{K'} - \mu_A^i\|^2 \leq \|\mu_A^i - \mu_{K'}\| \cdot (\|\mu_A^i\| + \|\mu_{K'}\|) \text{ pour tout } K' \in \mathcal{K}'(A)$$

et

$$\|\mu_{O'} - \mu_A^e\|^2 \leq \|\mu_{O'} - \mu_A^e\| \cdot (\|\mu_{O'}\| + \|\mu_A^e\|) \text{ pour tout } O' \in \mathcal{O}'(A).$$

Puisqu'on peut identifier $\mu_{K'}$ avec $\mu_{K'}^i$ et, pour tout ensemble $K \in \mathcal{K}(A)$, il existe un ensemble $K' \in \mathcal{K}'(A)$ tel que $K \subset K'$, on a

$$\|\mu_A^i\|^2 = \sup_{\mathcal{K}(A) \ni K} \|\mu_K^i\|^2$$

et donc

$$C_\mu^i(A) = \sup_{\mathcal{K}(A) \ni K} C_\mu(K).$$

Analoguement, on a

$$C_\mu^e(A) = \inf_{\mathcal{O}(A) \ni O} C_\mu^i(O).$$

Ainsi on peut identifier $C_\mu^i(A)$ (resp. $C_\mu^e(A)$) avec la capacité intérieure (resp. extérieure) d'ensemble A au sens de G. Choquet. D'autre part, il a introduit la notion d'ordre relative à la capacité ([4], p. 175). Quant à la μ -capacité, on a

Lemme 12. *Si G satisfait au principe de domination, la μ -capacité $C_\mu(K)$ est une capacité alternée d'ordre \mathfrak{A}_2 sur $\mathcal{K}(\Omega)$, autrement dit,*

$$C_\mu(K_1 \cup K_2) + C_\mu(K_1 \cap K_2) \leq C_\mu(K_1) + C_\mu(K_2)$$

pour tout $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(\Omega)$.

En effet, pour démontrer ce lemme, il suffit d'indiquer que

$$G\mu_{K_1 \cup K_2}^i(x) + G\mu_{K_1 \cap K_2}^i(x) \leq G\mu_{K_1}^i(x) + G\mu_{K_2}^i(x)$$

sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E$, car on a en vertu du lemme 5

$$C_\mu(K) = \int G\mu_K^i d\mu$$

pour toute $\mu \in E$ et pour tout $K \in \mathcal{K}(\Omega)$.

D'abord, on a

$$\begin{aligned} G\mu_{K_1 \cup K_2}^i(x) &= G\mu_{K_1}^i(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle} \\ & && \text{pour toute mesure } \lambda \in E_{K_1}, \\ G\mu_{K_1 \cap K_2}^i(x) &\leq G\mu_{K_2}^i(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle} \\ & && \text{pour toute mesure } \lambda \in E. \end{aligned}$$

On a donc

$$G\mu_{K_1 \cup K_2}^i(x) + G\mu_{K_1 \cap K_2}^i(x) \leq G\mu_{K_1}^i(x) + G\mu_{K_2}^i(x)$$

sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E_K$. En remplaçant K_1 par K_2 , on a la même inégalité sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E_{K_2}$, et par suite, pour toute mesure $\lambda \in E_{K_1 \cup K_2}$.

Soit

$$e = \{x \in (K_1 \cup K_2)^c ; G\mu_{K_1 \cup K_2}^i(x) + G\mu_{K_1 \cap K_2}^i(x) - G\mu_{K_1}^i(x) - G\mu_{K_2}^i(x) > 0\}$$

et supposons qu'on puisse trouver une mesure $\sigma \in E$ telle que $\sigma(e) > 0$ et $S\sigma \subset e$. En signalant que

$$G\mu_{K_1 \cup K_2}^i(x) + G\mu_{K_1 \cap K_2}^i(x) \leq G\mu_K^i(x) + G\mu_{K_2}^i(x)$$

sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E_{K_1 \cup K_2}$, on a

$$\begin{aligned}
 0 &< \int (G\mu_{K_1 \cup K_2}^i + G\mu_{K_1 \cup K_2}^e - G\mu_{K_1}^i - G\mu_{K_2}^e) d\sigma \\
 &= \int (G\mu_{K_1 \cup K_2}^i + G\mu_{K_1 \cap K_2}^e - G\mu_{K_1}^i - G\mu_{K_2}^e) d\sigma_{K_1 \cup K_2}^i \\
 &\quad - \int (G\mu_{K_1 \cap K_2}^i - G\mu_{K_1}^e - G\mu_{K_2}^e) d\sigma_{K_1 \cup K_2}^e \\
 &\quad + \int (G\mu_{K_1 \cap K_2}^e - G\mu_{K_1}^i - G\mu_{K_2}^e) d\sigma \\
 &\leq \int (G\sigma - G\sigma_{K_1 \cup K_2}^i) d\mu_{K_1 \cap K_2}^i + \int (G\sigma_{K_1 \cup K_2}^e - G\sigma) d\mu_{K_1}^e + \int (G\sigma_{K_1 \cup K_2}^e - G\sigma) d\mu_{K_2}^e \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

ce qui est évidemment contradictoire.

Ici, nous donnons une définition et un principe qui seront utiles dans la suite.

DÉFINITION. Soit μ_A^i (resp. μ_A^e) une mesure balayée intérieurement (resp. extérieurement) d'une mesure positive μ pour un ensemble quelconque A . On dira qu'un noyau G est balayable relativement à l'ensemble A si $G\mu_A^i(x) = G\mu_A^e(x)$ sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E$.

PRINCIPE D'UNICITE : Si l'on a

$$G\mu(x) = G\nu(x)$$

sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E$, on a nécessairement $\mu = \nu$.

Théorème 5. *Etant donnés une mesure $\mu \in E$ et un ensemble K -analytique A^3 , un noyau satisfaisant au principe de domination est balayable relativement à A . De plus, si le noyau satisfait au principe d'énergie ou au principe d'unicité, nous avons $\mu_A^i = \mu_A^e$.*

Démonstration. En vertu des lemmes 10, 11, 12, et du fait qu'un espace localement compact est complètement régulier, on peut appliquer le théorème de G. Choquet relatif à la capacitabilité ([4], p. 223, voir le cas (ii)) et on a

$$C_\mu^i(A) = C_\mu^e(A)$$

pour tout ensemble K -analytique A . Du lemme 2, il résulte

$$\|\mu_A^i - \mu_A^e\| = 0.$$

3) Dans un espace topologique séparé, tout ensemble qui est une image d'un ensemble $K_{\sigma\delta}$ contenu dans un espace compact par une application continue s'appelle un ensemble K -analytique ([4], p. 139).

Par suite, on a

$$|(\mu_A^i - \mu_A^e, \lambda)| \leq \|\mu_A^i - \mu_A^e\| \cdot \|\lambda\| = 0$$

pour toute mesure $\lambda \in E$, c'est-à-dire,

$$G\mu_A^i(x) = G\mu_A^e(x)$$

sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\lambda \in E$. Si le noyau satisfait au principe d'énergie ou au principe d'unicité, on a évidemment $\mu_A^i = \mu_A^e$.

On a signalé que si A est un ensemble ouvert, on a $E_A^i = E_A^e$. Plus généralement, on peut prouver le théorème suivant.

Théorème 6. *Si un noyau satisfait au principe de domination, on a alors*

$$E_A^i = E_A^e$$

pour tout ensemble K -analytique A .

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, il suffit de montrer

$$E_A^i \supset E_A^e.$$

Supposons qu'il existe une mesure ν telle que $\nu \in E_A^e$ mais $\nu \notin E_A^i$.

Alors on a

$$\|\nu - \nu_A^i\| > 0,$$

parce que $\nu_A^i \in E_A^i$ et E_A^i est fortement fermé. En tenant compte du théorème 5, on a

$$0 < \|\nu - \nu_A^i\| - \|\nu_A^e - \nu_A^i\| \leq \|\nu - \nu_A^e\|.$$

C'est en contradiction avec le fait qu'on a

$$\|\nu - \nu_A^e\|^2 = (\nu - \nu_A^e, \nu) - (\nu - \nu_A^e, \nu_A^e) = 0,$$

car $\nu \in E_A^e$. En conséquence, on a

$$E_A^i \supset E_A^e.$$

Théorème 7. *Etant donnés une mesure positive μ telle que $G\mu(x) \equiv +\infty$ dans Ω et un ensemble K -analytique A , un noyau G satisfaisant au principe de domination est balayable relativement à A . De plus, si le noyau G satisfait au principe d'énergie ou au principe d'unicité, on a $\mu_A^i = \mu_A^e$.*

Démonstration. Tout ensemble K -analytique est relativement com-

pact, puisque, dans un espace topologique séparé, un ensemble K -analytique est, par définition, une image d'un ensemble $K\sigma\delta$ contenu dans un espace compact par une application continue. Par suite, selon le théorème 3, on peut définir deux mesures μ_A^i et μ_A^e dans la condition de ce théorème. D'après le lemme 2, le théorème 5 et le fait que μ_A^i est limite vague d'une suite de mesures positives d'énergie finie $\{(\mu_{p'}^i)_A\}$ et μ_A^e est limite vague d'une suite partielle $\{(\mu_{p'}^e)_A\}$ de $\{(\mu_{p'}^e)_A\}$, on a immédiatement les résultats cherchés.

Théorème 8. *Supposons que G satisfasse aux principes de domination et du maximum k -dilaté et à la condition (*). Etant donnés une mesure positive μ telle que $G\mu(x) \not\equiv +\infty$ dans Ω et une réunion dénombrable d'ensembles K -analytiques A , le noyau G est balayable à A . En particulier, si le noyau G satisfait au principe d'énergie ou au principe d'unicité, on a $\mu_A^i = \mu_A^e$.*

Démonstration. En tenant compte de la façon de construction de μ_A^i ou μ_A^e dans le théorème 4, on a, d'après le théorème 7 et le lemme 4, les résultats cherchés.

3. Balayage dans le cas particulier et l'application

Dans la théorie du potentiel d'ordre α , M. Riesz [12] a démontré à l'aide de la transformation de Kelvin que, étant donné un ensemble fermé (non compact) F , on peut associer à toute mesure ponctuelle une mesure balayée sur F . En appliquant le théorème 2, on peut généraliser le résultat obtenu par M. Riesz de la manière suivante.

Théorème 9. *Supposons que G et \check{G} satisfassent au principe de continuité, \check{G} à la condition (*) et G aux principes de domination et du maximum k -dilaté. Etant donnés une mesure positive μ telle que $G\mu(x) \not\equiv +\infty$ dans Ω et un ensemble fermé F (non-compact), on peut associer à μ au moins une mesure positive μ_F portée par F telle que*

$$\begin{aligned} G\mu_F(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ & && \text{toute mesure } \lambda \in E_F, \\ G\mu_F(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } E. \end{aligned}$$

Si G est un noyau symétrique, on a de plus la relation,

$$\int G\mu_F d\nu = \int G\mu d\nu_F \quad \text{pour toute mesure } \nu \in E.$$

Nous nous plaçons dans l'espace euclidien à n dimensions R^n . Soit $G(x)$ une fonction positive, continue, symétrique ($G(x) = G(-x)$) et

sommable dans tout voisinage de l'origine telle que $G(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) \leq +\infty$.

Considérons le potentiel

$$G\mu(x) = \int G(x-y) d\mu(y)$$

d'une mesure positive μ pris par rapport au noyau $G(x)$. Pour les potentiels de ce type, M. Ohtsuka ([11], p. 282) a étudié la relation entre les principes de domination dilatée et du maximum dilaté. Il a obtenu un résultat suivant : si un noyau $G(x)$ satisfait au principe de domination et à la condition,

$$[M] \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\int_{B(O, r)} G(x) dx}{\int_{B(O, r-\rho)} G(x) dx} \leq k \quad (k \geq 1)$$

pour tout nombre $\rho > 0$, $B(a, r)$ désignant la boule de rayon r centrée en le point a , il satisfait au principe du maximum k -dilaté. En particulier, N. Ninomiya ([8], p. 169) a démontré que, si un noyau $G(x)$ satisfaisant au principe de domination est décroissant de la seule distance $|x|$, il satisfait à la condition [M]. Par suite, on a

Théorème 10. *Supposons qu'un noyau $G(x)$ décroissant de la seule distance $|x|$ satisfasse au principe de domination et s'annule à l'infini. Etant donné une mesure positive μ telle que $G\mu(x) \neq +\infty$ dans R^n et un ensemble quelconque non-relativement compact A , on peut associer à μ au moins une mesure positive μ_A^i (resp. μ_A^e) portée par \bar{A} telle que*

$$\begin{aligned} G\mu_A^i(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ &&& \text{toute mesure } \lambda \in E_A^i, \\ G\mu_A^i(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } E, \\ \int G\mu_A^i dv &= \int G\mu dv_A^i && \text{pour toute mesure } v \in E \\ (\text{resp. } G\mu_A^e(x) &= G\mu(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ &&& \text{toute mesure } \lambda \in E_A^e, \\ G\mu_A^e(x) &\leq G\mu(x) && \text{dans tout l'espace } E, \\ \int G\mu_A^e dv &= \int G\mu dv_A^e && \text{pour toute mesure } v \in E). \end{aligned}$$

En particulier, si A est un ensemble analytique, le noyau G est balayable relativement à A . D'ailleurs, si le noyau G satisfait au principe d'énergie ou au principe d'unicité, on a $\mu_A^i = \mu_A^e$.

Quant aux noyaux greenien et d'ordre α , nous avons le théorème suivant.

Théorème 11. *Le noyau d'ordre α , $n - \alpha \leq \alpha < n$, défini dans l'espace euclidien R^n à n dimensions ($n \geq 3$) et le noyau greenien défini dans un espace régulier de Green à n dimensions ($n \geq 2$) sont balayables relativement à tout ensemble analytique A . Dans ce cas, on a de plus $\mu_A^i = \mu_A^o$.*

Démonstration. Il est bien connu que ces noyaux satisfont au principe du balayage relatif à tout ensemble compact [5]. Grâce au corollaire 1 du théorème 1, ces noyaux satisfont au principe de domination. De nouveau, ces noyaux sont décroissants de la seule distance $|x|$ et s'annulent à l'infini. D'autre part, la notion de " K -analytique" dans R^n s'identifie avec la notion de "analytique ordinaire" dans R^n . En signalant que ces noyaux satisfont au principe d'énergie et en appliquant les théorèmes 3 et 10, on a les résultats cherchés.

Un noyau de type positif est dit consistant par B. Fuglede ([6], p. 167) s'il satisfait à la condition suivante,

- (C) Si un filtre de Cauchy pour la structure uniforme forte sur E converge vaguement vers une mesure $\mu_0 \in E$, alors ce filtre converge fortement vers μ_0 .

Lorsque la topologie faible relative à un noyau de type positif est définie sur l'espace E par la semi-norme $\mu - \nu \rightarrow |(\lambda, \mu) - (\lambda, \nu)|$ pour tout mesure $\lambda \in E$, B. Fuglede se pose une autre condition,

- (CW) Si un filtre fortement borné converge vaguement vers une mesure $\mu_0 \in E$, ce filtre converge faiblement vers μ_0 .

Il a démontré qu'un noyau de type positif satisfaisant à la condition (CW) est consistant et, de plus, si un noyau positif symétrique est consistant, alors E est fortement complet. D'autre part, M. Ohtsuka ([11], p. 194) a obtenu une condition suffisante pour qu'un noyau satisfasse à la condition (CW).

Théorème D. *Supposons qu'un noyau de type positif G satisfasse au principe de continuité et que, pour toute mesure positive d'énergie finie à support compact ν et pour tout nombre $\varepsilon > 0$, on puisse trouver une mesure λ et un ensemble compact $K_{\nu, \varepsilon}$ tels que $\|\lambda\| < \varepsilon$ et $G\nu(x) \leq G\lambda(x)$ sauf sur un ensemble de mesure nulle pour toute mesure $\sigma \in E_{\overline{\Omega - K_{\nu, \varepsilon}}}$. Alors ce noyau satisfait à la condition (CW).*

Théorème 12. *Si un noyau positif G satisfait à la condition (*) et aux principes de domination et du maximum k -dilaté, le noyau G satisfait à la condition (CW).*

Démonstration. Etant donné une mesure positive d'énergie finie à support compact ν et un nombre $\varepsilon > 0$, prenons un nombre ε' tel que $\varepsilon^2/k\nu^2(\Omega) > \varepsilon' > 0$. D'après la condition (*), il existe un ensemble compact $K_{\varepsilon'}$ tel que $G(x, y) < \varepsilon'$ sur $S\nu \times (\Omega - K_{\varepsilon'})$. On peut trouver un ensemble ouvert relativement compact U tel que $U \supset K_{\varepsilon'}$. L'espace Ω est normal, puisqu'il est un espace localement compact tel qu'il soit σ -compact. Par suite, ils existent deux ensembles ouverts G et G' sans point commun tels que $G \supset U^c$ et $G' \supset K_{\varepsilon'}$.

Posons

$$K_{\varepsilon, \nu} = G^c.$$

Grâce au théorème 9, on peut associer à ν au moins une mesure positive λ portée par $\overline{\Omega - K_{\nu, \varepsilon}}$ telle que

$$\begin{aligned} G\nu(x) &= G\lambda(x) && \text{sauf sur un ensemble de mesure nulle pour} \\ & && \text{toute mesure } \sigma \in E_{\overline{\Omega - K_{\nu, \varepsilon}}}, \\ G\nu(x) &\geq G\lambda(x) && \text{dans tout l'espace } \Omega, \\ k\nu(\Omega) &\geq \lambda(\Omega). \end{aligned}$$

On a alors

$$\|\lambda\|^2 \leq \int G\nu d\lambda < \varepsilon'\lambda(\Omega)\nu(\Omega) < \varepsilon^2.$$

En vertu des théorèmes B et D, le noyau G satisfait à la condition (CW).

Nous avons immédiatement le théorème suivant.

Théorème 13. *Si un noyau satisfait aux mêmes conditions que celles du théorème 12, l'espace E est fortement complet.*

UNIVERSITÉ DE KOBÉ

Références

- [1] N. Bourbaki: *Intégration*, Paris Hermann, 1952.
- [2] —————: *Topologie générale*, Chap. I. Paris Hermann.
- [3] H. Cartan: *Théorie générale du balayage en potentiel newtonien*, Ann. Univ. Grenoble **22** (1946), 221-280.
- [4] G. Choquet: *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier **5** (1954), 131-295.
- [5] O. Frostman: *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles*, Thèse Lund, (1935), 1-118.
- [6] B. Fuglede: *On the theory of potentials in locally compact spaces*, Acta Math. **103** (1960), 139-215.
- [7] M. Kishi: *Maximum principles in the potential theory*, Nagoya Math. J. **19** (1963), 165-187.

- [8] N. Ninomiya: *Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique*, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. **8** (1957), 147-179.
- [9] S. Ogawa: *Sur un théorème du balayage*, J. Math. Osaka City Univ. **13** (1962), 135-141.
- [10] S. Ogawa: *Sur le balayage pour des ensembles analytiques*, J. Math. Osaka City Univ. **14** (1963), 35-44.
- [11] M. Ohtsuka: *On potentials in locally compact spaces*, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-1. **25** (1961), 136-352.
- [12] M. Riesz: *Intégrale de Riemann-Liouville et potentiels*, Acta Sci. Szeged **9** (1938), 1-42.