

REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES OPÉRATIONNELLES

PAR

JACQUES LOUIS LIONS

Introduction

On considère l'équation (différentielle opérationnelle)

$$(*) \quad \frac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) = f(t),$$

avec $u(0)$ donné, où les $A(t)$ forment une famille d'opérateurs *non bornés* dans un espace H de Hilbert.

Des résultats assez complets sont connus lorsque les domaines $D(A(t))$ des $A(t)$ sont *indépendants de t* , et cela même lorsque H est un espace de Banach ; Cf. [1], [10], [11]. Si l'on fait des hypothèses sur les $A(t)$ impliquant que l'on peut, dans un sens ou dans un autre, définir les puissances $A(t)^\theta$ de $A(t)$, $0 < \theta < 1$, et si l'on suppose que *pour un θ convenable, les domaines $D(A(t)^\theta)$ des $A(t)^\theta$ sont indépendants de t* , alors la théorie est également dans un état assez satisfaisant ; [9] pour le cas où H est un Hilbert, [2] pour le cas Banach-Pour le cas hilbertien, et $\theta = \frac{1}{2}$, cf. [3], [6], [7].

Lorsque les $A(t)$ sont des opérateurs différentiels, $D(A(t))$ étant défini par des conditions aux limites, on a montré dans [8]-avec $H = L^2(\Omega)$; le résultat est très probablement encore vrai, mais non démontré, si $H = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ -que "souvent" $D(A(t)^\theta)$ est indépendant de t pour θ assez petit, mais on a également donné des exemples où $D(A(t)^\theta)$ dépend de t , quel que soit θ . Il est donc nécessaire de développer une théorie pour (*) lorsque $D(A(t))$ et $D(A(t)^\theta)$ quel que soit θ , $0 < \theta < 1$, *dépendent effectivement de t* .

C'est ce qui est fait dans [5], [6] chap. VII, lorsque H est un espace de Hilbert, en supposant que la "*partie principale*" de $A(t)$ est *auto-adjointe et dépend différentiablement de t* (dans un sens convenable).

Dans [4], M. M. Kato et Tanabe ont donné des conditions suffisantes pour que le problème soit bien posé, H étant un espace de Banach ;

appliqués aux espaces de Hilbert, les résultats de ces auteurs généralisent [5], [6] en ce que notamment *on ne suppose plus la partie principale de $A(t)$ auto-adjointe*.

Dans l'article présent, nous complétons, *dans le cas où H est un espace de Hilbert*, les résultats de M. M. Kato et Tanabe *en éliminant une grande partie des hypothèses de différentiabilité en t* . Plus précisément, si les $A(t)$ sont des opérateurs différentiels, notre résultat est valable en supposant les coefficients de $A(t)$ *seulement mesurables et bornés en t* ; par contre les *conditions aux limites stables doivent dépendre de façon une fois différentiable de t* (pour que l'hypothèse (1.3), N° 1, soit satisfaite; Cf. [6]). L'existence dans le théorème 1.1 demeure vraie *sans* cette hypothèse; il est très probable que l'unicité reste encore vraie après affaiblissement considérable de cette hypothèse, mais nous n'avons pas pu améliorer les hypothèses de différentiabilité en t dans notre démonstration.

Le N° 1 énonce les hypothèses et le résultat dont la démonstration occupe les N° 2 et 3.

1. Énoncé du résultat

Soient K et H deux espaces de Hilbert, $K \subset H$, K étant séparable et dense dans H , l'injection de K dans H étant continue. Si $u, v \in K$ (resp. $f, g \in H$), on désigne par $((u, v))$ (resp. (f, g)) leur produit scalaire; $\|u\| = ((u, u))^{1/2}$, $|f| = (f, f)^{1/2}$.

Pour chaque $t \in]-\infty, T]$, $T < \infty$, on se donne un sous-espace $V(t)$ fermé dans K ; on suppose que $V(t)$ est dense dans H . On se donne également une forme $a(t; u, v)$ sesqui-linéaire continue sur K , vérifiant :

- (1.1) pour tout $u, v \in K$, la fonction $t \rightarrow a(t; u, v)$ est mesurable et bornée sur $(0, T)$;
- (1.2) il existe λ et α , $\alpha > 0$, indépendants de t , tels que $Re a(t; v, v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2$, pour tout $v \in V(t)$.

On fait maintenant une *hypothèse de régularité sur les $V(t)$* ; si $P(t)$ est le projecteur orthogonal dans K sur $V(t)$, on suppose que

- (1.3) pour tout $u \in K$, $t \rightarrow P(t)u$ est continue dans K ,
 $h^{-1}[P(t+h)u - P(t)u] \rightarrow P'(t)u$ dans K faible, $t \rightarrow P'(t)u$ étant faiblement continue dans K ; enfin, $\|P'(t)\|$ (=norme de $P'(t)$ dans $\mathcal{L}(K; K)$) $\leq c_1$ ¹⁾

1) De façon générale, $\mathcal{L}(X; Y)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de X dans Y .

On désigne par $L^2(0, T; K)$ (resp. $L^2(-\infty, T; K)$) l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur $(0, T)$ (resp. $(-\infty, T)$) à valeurs dans K ; si $u \in L^2(0, T; K)$, sa norme sera

$$\left(\int_0^T \|u(t)\|^2 dt\right)^{1/2}.$$

On désigne ensuite par $L^2(0, T; V(t))$ le sous-espace (fermé) de $L^2(0, T; K)$ des classes de fonctions $u \in L^2(0, T; K)$ telles que $u(t) \in V(t)$ p.p. on t .

Si $u, v \in L^2(0, T; V(t))$, la fonction $t \rightarrow a(t; u(t), v(t))$ est dans $L^1(0, T)$.²⁾ Ceci posé, nous pouvons énoncer le

Théorème 1.1. *On suppose que (1.1), (1.2), (1.3) ont lieu. Il existe alors une fonction u et une seule dans $L^2(0, T; V(t))$, telle que*

$$(1.4) \quad \int_0^T [a(t; u(t), \varphi(t)) - (u(t), \varphi'(t))] dt = \int_0^T (f(t), \varphi(t)) dt + (u_0, \varphi(0))$$

pour toute φ telle que

$$(1.5) \quad \varphi \in L^2(0, T; V(t)), \varphi' = \frac{d\varphi}{dt} \in L^2(0, T; H), \varphi(T) = 0.$$

Dans (1.4), f est donnée dans $L^2(0, T; H)$ et u_0 dans H .

En fait, l'existence de u est déjà démontrée dans [6], chap. IV, et cela, sans l'hypothèse (1.3). Le point nouveau est donc l'unicité, dont la démonstration occupe les N° 2 et 3.

2. Lemmes

Soit $V(t)'$ l'anti-dual de $V(t)$; si $f \in V(t)'$ et $v \in V(t)$, (f, v) désignera la valeur de f en v ; si $f \in H$, (f, v) au sens précédent coïncide avec le produit scalaire de f et v dans H ; il n'y a donc pas confusion de notations. Si $u \in V(t)$, la forme antilinéaire

$$v \rightarrow ((u, v))$$

2) Montrons la mesurabilité de la fonction $t \rightarrow a(t; u(t), v(t))$. Pour $\varphi, \psi \in K$, $a(t; \varphi, \psi) = ((\mathcal{B}(t)\varphi, \psi))$, $\mathcal{B}(t) \in \mathcal{L}(K, K)$, et $a(t; u, v) = ((\mathcal{A}(t)u, v))$ pour $u, v \in V(t)$, $\mathcal{A}(t) \in \mathcal{L}(V(t); V(t))$. On a: $a(t; P(t)\varphi, P(t)\psi) = ((\mathcal{A}(t)P(t)\varphi, P(t)\psi)) = ((\mathcal{A}(t)P(t)\varphi, \psi)) = ((\mathcal{B}(t)P(t)\varphi, P(t)\psi))$, d'où $\mathcal{A}(t)P(t) = P(t)\mathcal{B}(t)P(t)$; de même $\mathcal{A}^*(t)P(t) = \mathcal{B}^*(t)P(t) \in \mathcal{L}(K; V(t))$. On a: $a(t; u(t); v(t)) = ((\mathcal{A}(t)u(t), v(t)))$, et il suffit (K étant séparable) de montrer que $t \rightarrow ((\mathcal{A}(t)u(t), \varphi))$ est mesurable pour $\varphi \in K$. Or $((\mathcal{A}(t)u(t), \varphi)) = ((\mathcal{A}(t)u(t), P(t)\varphi)) = ((u(t), \mathcal{A}^*(t)P(t)\varphi))$ et il suffit de montrer la mesurabilité de $\mathcal{A}^*(t)P(t)\varphi$, donc de $((\mathcal{A}^*(t)P(t)\varphi, \psi)) = ((P(t)\mathcal{B}^*(t)\varphi, \psi)) = ((\mathcal{B}^*(t)P(t)\varphi, P(t)\psi))$ et il suffit de montrer la mesurabilité de $\mathcal{B}^*(t)P(t)\varphi$, donc de $((\mathcal{B}^*(t)P(t)\varphi, \psi)) = ((P(t)\varphi, \mathcal{B}(t)\varphi))$, et finalement de $\mathcal{B}(t)\varphi$ donc de $((\mathcal{B}(t)\varphi, \varphi)) = a(t; \varphi, \varphi)$, fonction mesurable par hypothèse.

est continue sur $V(t)$, donc

$$((u, v)) = (\Lambda(t)u, v), \quad \Lambda(t)u \in V(t)',$$

ce qui définit $\Lambda(t) \in \mathcal{L}(V(t); V(t)'),$ isomorphisme de $V(t)$ sur $V(t)'$. Pour chaque $\rho \geq 0$, $\Lambda(t) + \rho$ est un isomorphisme de $V(t)$ sur $V(t)'$; on pose :

$$(2.1) \quad (\Lambda(t) + \rho)^{-1} = M(t, \rho).$$

Si l'on pose

$$(2.2) \quad ((u, v))_\rho = ((u, v)) + \rho(u, v),$$

alors, pour $f \in H$ et $v \in V(t)$, on a :

$$(f, v) = ((M(t, \rho)f, v))_\rho.$$

Lemme 2.1. *On a :*

$$(2.3) \quad \rho \|M(t, \rho)\| \leq 1, \quad \rho \|M(t, \rho)\| \leq 1,^{3)}$$

$$(2.4) \quad \rho M(t, \rho)f \rightarrow f \text{ dans } H \text{ lorsque } \rho \rightarrow +\infty, \quad f \in H,$$

$$(2.5) \quad \rho M(t, \rho)f \rightarrow f \text{ dans } V(t) \text{ lorsque } \rho \rightarrow +\infty, \quad f \in V(t).$$

Démonstration. Soit $\rho M(t, \rho)f = u$. Alors

$$(\Lambda(t) + \rho)u = \rho f$$

d'où

$$\|u\|^2 + \rho \|u\|^2 = \rho(f, u)$$

d'où $|u| \leq |f|$ ce qui montre la première inégalité (2.3).

Si $f \in V(t)$, alors $\Lambda(t)u = \rho(f - u) \in V(t)$ donc

$$|\Lambda(t)u|^2 + \rho \|u\|^2 = \rho(f, \Lambda(t)u) = \rho((f, u))$$

d'où $\|u\| \leq \|f\|$ ce qui montre la deuxième inégalité (2.3).

Montrons (2.4). Supposons d'abord que $f \in D(\Lambda(t))$; alors

$$u = \rho(\Lambda(t) + \rho)^{-1}f = f - (\Lambda(t) + \rho)^{-1}\Lambda(t)f$$

d'où

$$|u - f| \leq \frac{1}{\rho} |\Lambda(t)f|;$$

ceci montre (2.4) lorsque $f \in D(\Lambda(t))$; comme $D(\Lambda(t))$ est dense dans H et que l'on a la première inégalité (2.3), (2.4) en résulte.

3) $|\cdot|$ = norme dans $\mathcal{L}(H; H)$, $\|\cdot\|$ = norme dans $\mathcal{L}(V(t); V(t))$.

Montrons enfin (2.5). Pour les mêmes raisons que ci-dessus, il suffit de le montrer pour $f \in D(\Lambda(t)^{3/2})$; alors $\Lambda(t)f \in V(t)$ et

$$u - f = -M(t, \rho)\Lambda(t)f$$

donne
$$\|u - f\| \leq \frac{1}{\rho} \|\Lambda(t)f\|$$

d'où le résultat suit.

Lemme 2.2. *Pour $f, g \in H$, la fonction $t \rightarrow (M(t, \rho)f, g)$ est une fois continûment différentiable dans $] -\infty, T]$; on a :*

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} (M(t, \rho)f, g) = (P'(t)M(t, \rho)f, g) + (f, P'(t)M(t, \rho)g) - ((M(t, \rho)f, P'(t)M(t, \rho)g))_\rho - ((P'(t)M(t, \rho)f, M(t, \rho)g))_\rho.$$

Démonstration.⁴⁾ Ecrivons $M(t)$ au lieu de $M(t, \rho)$. On a :

$$(2.7) \quad ((M(t) - M(s))f, g) = ((P(t) - P(s))M(t)f, g) + (f, (P(t) - P(s))M(s)g) - ((M(t)f, (P(t) - P(s))M(s)g))_\rho - (((P(t) - P(s))M(t)f, M(s)g))_\rho.$$

On vérifie que $t \rightarrow M(t)f$ est continue dans K fort, de sorte qu'en divisant (2.7) par $t - s$ et faisant tendre $t - s$ vers 0, il vient (2.6)

Lemme 2.3.⁵⁾ *On a :*

$$(2.8) \quad \rho^{1/2} \left| \frac{d}{dt} M(t, \rho) \right| \leq c_2, \quad \rho \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. Ecrivons ici M au lieu de $M(t, \rho)$. On déduit de (2.6) que

$$(2.9) \quad \left| \left(\left(\frac{d}{dt} M \right) f, g \right) \right| \leq |P'(t)Mf| |g| + |f| |P'(t)Mg| + 2c_1 \|Mf\| \|Mg\| + \rho |Mf| |P'(t)Mg| + \rho |P'(t)Mf| |Mg|.$$

Mais

$$|P'(t)Mf| \leq c_3 \|P'(t)Mf\| \leq c_1 c_3 \|Mf\|;$$

même chose pour $P'(t)Mg$, de sorte que (2.9) donne

4) L'identité (2.7), qui permet de simplifier beaucoup une démonstration antérieure, m'a été signalée par M. T. Kato.

5) Cas particulier du Théorème 7.1 de [4]; notons que l'on pourrait remplacer l'hypothèse (1.3) par l'hypothèse (K-2) de [4].

$$(2.10) \quad \left| \left(\left(\frac{dM}{dt} \right) f, g \right) \right| \leq c_4 (\|Mf\| \|g\| + |f| \|Mg\| + \|Mf\| \|Mg\| \\ + \rho \|Mf\| \|Mg\| + \rho \|Mf\| \|Mg\|).$$

Or (cf. (2.3)) $\|Mf\| \leq \frac{1}{\rho} |f|$. Par ailleurs, si $u = Mf$, alors

$$\|u\|^2 + \rho |u|^2 = (f, u) \quad \text{donc} \quad |u| \leq \frac{1}{\rho} |f| \quad \text{et} \quad \|u\|^2 \leq \frac{1}{\rho} |f|^2$$

donc

$$(2.11) \quad \|Mf\| < \frac{1}{\rho^{1/2}} |f|$$

et (2.10) donne $\left| \left(\left(\frac{dM}{dt} \right) f, g \right) \right| \leq c_2 \rho^{-1/2} |f| \|g\|$, $\rho \rightarrow +\infty$, d'où (2.8).

Lemme 2.4. *On a :*

$$(2.12) \quad \left| \left(\left(\frac{d}{dt} M(t, \rho) \right) u, u \right) \right| \leq c_5 \rho^{-1} \|u\| |u| \quad \text{pour tout } u \in V(t).$$

Démonstration. On écrit encore M pour $M(t, \rho)$ et P' pour $P'(t)$. On déduit de (2.6) que :

$$\left(\left(\frac{d}{dt} M \right) u, u \right) = 2\operatorname{Re} X_1 - 2\operatorname{Re} X_2 - 2\operatorname{Re} X_3,$$

où

$$X_1 = (P'Mu, u), \quad X_2 = ((P'Mu, Mu)), \quad X_3 = \rho (P'Mu, Mu).$$

Mais

$$X_1 = (P'\Lambda(t)^{-1/2} M \Lambda(t)^{1/2} u, u)$$

donc

$$|X_1| \leq |P'(t)\Lambda(t)^{-1/2} w| |u|, \quad w = M\Lambda(t)^{1/2} u.$$

Or

$$|P'(t)\Lambda(t)^{-1/2} w| \leq c_6 \|P'(t)\Lambda(t)^{-1/2} w\| \leq c_1 c_6 \|\Lambda(t)^{-1/2} w\| = c_1 c_6 |w| \quad \text{donc} \\ |X_1| \leq c_7 |M\Lambda(t)^{1/2} u| |u| \leq c_7 \rho^{-1} \|\Lambda(t)^{1/2} u\| |u| = c_7 \rho^{-1} \|u\| |u|.$$

Puis

$$|X_2| \leq \|P'Mu\| \|Mu\| \leq c_1 \|Mu\|^2.$$

D'après (2.11), on en déduit

$$|X_2| \leq c_1 \rho^{-1} |u|^2.$$

Enfin $X_3 = \rho(P'\Lambda(t))^{-1/2}M\Lambda(t)^{1/2}u, Mu$, donc

$$|X_3| \leq \rho c_1 c_6 |M\Lambda(t)^{1/2}u| |Mu| \leq \rho c_1 c_6 \rho^{-1} |\Lambda(t)^{1/2}u| \rho^{-1} |u| = c_1 \rho^{-1} \|u\| |u|$$

ce qui, joint aux majorations obtenues pour X_1 et X_2 donne (2. 12). c.q.f.d.

Pour poursuivre, introduisons les définitions suivantes :

$W^1(-\infty, T; H) = \left\{ u \mid u \in L^2(-\infty, T; H), \frac{du}{dt} \in L^2(-\infty, T; H) \right\}$ où $\frac{du}{dt}$ est calculé au sens des distributions dans $] -\infty, T[$ à valeurs dans H ; c'est un espace de Hilbert pour la norme

$$\left(\int_{-\infty}^T \left(|u(t)|^2 + \left| \frac{du}{dt}(t) \right|^2 \right) dt \right)^{1/2};$$

$$W_0^1(-\infty, T; H) = \{u \mid u \in W^1(-\infty, T; H), u(T) = 0\}^6;$$

$$W^{-1}(-\infty, T; H) = \text{anti-dual de } W_0^1(-\infty, T; H).$$

Lemme 2. 5. *L'application $u \rightarrow M(t, \rho)u$ est linéaire continue de $W^1(-\infty, T; H)$ (resp. $W_0^1(-\infty, T; H)$) dans lui même.*

Démonstration. En effet

$$\frac{d}{dt}(Mu) = \left(\frac{dM}{dt} \right) u + M \left(\frac{du}{dt} \right), \text{ et d'après les Lemmes 2. 1 et 2. 3}$$

$$|M| \leq \rho^{-1}, \quad \left| \frac{dM}{dt} \right| \leq c_2 \rho^{-1/2}.$$

Lemme 2. 6. *L'application $u \rightarrow M(t, \rho)u$ du Lemme 2. 5 se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée $u \rightarrow M(t, \rho)u$, de $W^{-1}(-\infty, T; H)$ dans lui même.⁷⁾*

Démonstration. Soit $u, v \in W_0^1(-\infty, T; H)$; soit Mu la fonction $t \rightarrow M(t, \rho)u(t)$; considérons Mu comme un élément $(W_0^1(-\infty, T; H))' = W^{-1}(-\infty, T; H)$; alors

$$(Mu, v) = \int_{-\infty}^T (M(t, \rho)u(t), v(t)) dt = \int_{-\infty}^T (u(t), M(t, \rho)v(t)) dt = (u, Mv),$$

d'où le Lemme, le prolongement étant identique à l'application transposée

6) Si $u \in W^{-1}(-\infty, T; H)$, u est p.p. égale à une fonction continue dans $] -\infty, T[$ à valeurs dans H , fonction encore notée u , de sorte que la condition " $u(T) = 0$ " a un sens. Ou encore : $W_0^1(-\infty, T; H)$ coïncide avec l'adhérence dans $W^1(-\infty, T; H)$ des fonctions identiquement nulles au voisinage de T .

7) Noter que $W^1(-\infty, T; H)$ est dense dans $W^{-1}(-\infty, T; H)$.

(ou adjointe).

Lemme 2.7. Pour $u \in L^2(-\infty, T; H)$, on a :

$$(2.13) \quad \frac{d}{dt}(M(t, \rho)u) = M(t, \rho) \frac{du}{dt} + \left(\frac{d}{dt}M(t, \rho)\right)u,$$

où $M(t, \rho) \frac{du}{dt}$ est pris au sens du Lemme 2.6.⁸⁾

Démonstration. La formule est vraie pour $u \in W^1(-\infty, T; H)$; puis on passe à la limite, en utilisant les Lemmes 2.5 et 2.6.

Lemme 2.8. Soit $g \in L^2(-\infty, T; H)$, identiquement nulle au voisinage de T , telle que

$$M(t, \rho) \frac{dg}{dt} \in L^2(-\infty, T; H).⁹⁾$$

D'après (2.13), $\frac{d}{dt}(M(t, \rho)g) \in L^2(-\infty, T; H)$; on a :

$$(2.14) \quad \int_{-\infty}^T \left\{ \left(g(t), M(t, \rho) \frac{dg}{dt} \right) + \left(\frac{d}{dt}M(t, \rho)g, g \right) \right\} dt = 0.$$

Démonstration. Puisque g est nulle au voisinage de T , on a :

$$(2.15) \quad \begin{aligned} Mg &= M(t, \rho)g \in W_0^1(-\infty, T; H) \quad \text{et donc} \\ \int_{-\infty}^T \left(\frac{d}{dt}(Mg), g \right) dt &= - \int_{-\infty}^T \left(Mg, \frac{dg}{dt} \right) dt. \end{aligned}$$

Soit $\alpha_m = \alpha_m(t)$ une suite régularisante; on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^T \left(Mg, \frac{dg}{dt} \right) dt &= \lim_m \int_{-\infty}^T \left(M(g * \alpha_m), \frac{dg}{dt} \right) dt = \lim_m \int_{-\infty}^T \left(g * \alpha_m, M \frac{dg}{dt} \right) dt¹⁰⁾ \\ &= \int_{-\infty}^T \left(g, M \frac{dg}{dt} \right) dt; \end{aligned}$$

ceci, joint à (2.15), montre (2.14).

3. Démonstration du Théorème 1.1.

Soit u satisfaisant à (1.4) avec $f=0, u=0$.

8) Noter que $\frac{du}{dt} \in W^{-1}(-\infty, T; H)$.

9) $M(t, \rho) \frac{dg}{dt}$ a un sens, car $\frac{dg}{dt} \in W^{-1}(-\infty, T; H)$ et Lemme 2.6.

10) Car M est définie sur $W^{-1}(-\infty, T; H)$ par transposition et $g * \alpha_m$ appartient à $W_0^1(-\infty, T; H)$.

3. 1. Remplaçant u par $\exp(kt)u$ et choisissant k convenablement, on peut supposer que (1. 2) a lieu avec

$$\lambda = -c_5^2/8\alpha,$$

(c_5 étant la constante intervenant au Lemme 2. 4).

Soit par ailleurs U le prolongement de u par 0 pour $t < 0$; si ϕ est donnée avec :

$$(3. 1) \quad \phi \in L^2(-\infty, T; V(t)), \quad \phi' = \frac{d\phi}{dt} \in L^2(-\infty, T; H), \quad \phi(T) = 0,$$

alors

$$(3. 2) \quad \int_{-\infty}^T [a(t; U(t), \phi(t)) - (U(t), \phi'(t))] dt = 0.$$

On va montrer que dans ces conditions $U=0$.

3. 2. Commençons par montrer que (avec les notations du N° 2),

$$(3. 3) \quad M(t, \rho) \frac{dU}{dt} \in L^2(-\infty, T; H).^{11)}$$

Pour cela, considérons, pour $\varphi \in W_0^1(-\infty, T; H)$:

$$X = \int_{-\infty}^T \left(M(t, \rho) \frac{dU}{dt}, \varphi \right) dt = \text{produit scalaire entre}$$

$$M(t, \rho) \frac{dU}{dt} \in W^{-1}(-\infty, T; H) \text{ et } \varphi \in W_0^1(-\infty, T; H);$$

il suffit de montrer que

$$(3. 4) \quad |X| \leq c_8 \left(\int_{-\infty}^T |\varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Or (cf. Lemme 2. 6)

$$X = \int_{-\infty}^T \left(\frac{dU}{dt}, M\varphi \right) dt$$

où

$$M\varphi (= t \rightarrow M(t, \rho)\varphi(t)) = \psi \in W_0^1(-\infty, T; H)$$

(cf. Lemme 2. 5). Donc

$$X = - \int_{-\infty}^T (U(t), \psi'(t)) dt.$$

Mais (cf. (2. 11))

$$\|\psi'(t)\| = \|(\Lambda(t) + \rho)^{-1}\varphi(t)\| \leq \rho^{-1/2} |\varphi(t)|$$

11) $M(t, \rho) \frac{dU}{dt}$ a un sens; cf. 9)

donc $\psi \in L^2(-\infty, T; V(t))$; on peut donc prendre $\phi = \psi$ dans (3.2) et

$$X = - \int_{-\infty}^T a(t; U(t), \psi(t)) dt$$

d'où

$$|X| \leq c_9 \left(\int_{-\infty}^T \|\psi(t)\|^2 dt \right)^{-1/2} \leq c_9 \rho^{-1/2} \left(\int_{-\infty}^T |\varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

d'où (3.4) et le résultat désiré.

3.3. Choix de ϕ dans (3.2).

Soit $\theta_m(t)$ définie par :

$$\theta_m(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \leq T - 2/m, \\ 1 - m \left[t - \left(T - \frac{2}{m} \right) \right] & \text{pour } T - \frac{2}{m} \leq t \leq T - \frac{1}{m}, \\ 0 & \text{pour } t \geq T - \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Posons :

$$(3.5) \quad U_\rho(t) = M(t, \rho) U(t)$$

et enfin

$$(3.6) \quad \phi(t) = \phi_{m,\rho}(t) = \rho \theta_m^2(t) U_\rho(t).$$

Grâce à (3.3) et au N° 2, et puisque $\theta_m(T) = 0$, on peut prendre ϕ donnée par (3.6) dans l'équation (3.2). Il vient :

$$X_\rho + Y_\rho + Z_\rho = 0$$

où

$$X_\rho = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^T \rho a(t; \theta_m U, \theta_m U_\rho) dt,$$

$$Y_\rho = -\operatorname{Re} \int_{-\infty}^T \rho \theta_m \theta_m'(U, U_\rho) dt,$$

$$Z_\rho = -\operatorname{Re} \int_{-\infty}^T \rho \left((\theta_m U), \frac{d}{dt} (\theta_m U_\rho) \right) dt.$$

D'après le Lemme 2.1 et la définition de U_ρ (et le théorème de Lebesgue) :

$$(3.7) \quad X_\rho \rightarrow X = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^T a(t; \theta_m U, \theta_m U) dt$$

lorsque $\rho \rightarrow \infty$.

Grâce au point 3.1 on a :

$$(3.8) \quad X \geq \alpha \int_{-\infty}^T \|\theta_m U\|^2 dt + (c_{5/8\alpha}^2) \int_{-\infty}^T |\theta_m U|^2 dt.$$

Encore d'après le Lemme 2.1,

$$(3.9) \quad Y_\rho \rightarrow Y = -Re \int_{-\infty}^T \theta_m \theta'_m |U(t)|^2 dt \geq 0.$$

Posons maintenant

$$\theta_m U = g.$$

Appliquant le Lemme 2.7 :

$$Z_\rho = -\rho Re \int_{-\infty}^T \left(g, \frac{d}{dt}(Mg) \right) dt = -\rho Re \int_{-\infty}^T \left(g, \left(\frac{dM}{dt} \right) g + M \frac{dg}{dt} \right) dt.$$

D'après (3.3), on est dans les conditions d'application du Lemme 2.8, donc

$$2Z_\rho = -\rho \left[\int_{-\infty}^T \left(g, M \frac{dg}{dt} \right) dt + \int_{-\infty}^T \left(g, \left(\frac{dM}{dt} \right) g \right) dt + \int_{-\infty}^T \left(\frac{d}{dt}(Mg), g \right) dt \right]$$

vaut :

$$2Z_\rho = -\rho \int_{-\infty}^T \left(g, \left(\frac{dM}{dt} \right) g \right) dt$$

d'où, d'après le Lemme 2.4 :

$$|2Z_\rho| \leq c_5 \int_{-\infty}^T \|g(t)\| |g(t)| dt$$

donc

$$|Z_\rho| \leq \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^T \|g(t)\|^2 dt + (c_{5/8\alpha}^2) \int_{-\infty}^T |g(t)|^2 dt$$

de sorte que, avec (3.8) et (3.9) on en déduit :

$$0 = \lim_{\rho \rightarrow \infty} (X_\rho + Y_\rho + Z_\rho) \geq \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^T \|\theta_m U(t)\|^2 dt.$$

Donc $\theta_m U = 0$ et ceci quel que soit m , donc $U = 0$, ce qui achève la démonstration du Théorème 1.1.

UNIVERSITÉ DE PARIS

(Reçu le 6 décembre, 1962)

Bibliographie

- [1] T. Kato: *Integration of the equation of evolution in a Banach space*, J. Math. Soc. Japan **5** (1953), 208-304.
- [2] T. Kato: *Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces*, Nagoya Math. J. **19** (1961), 93-125.
- [3] T. Kato.: *Fractionnal powers of dissipative operators*, J. Math. Soc. Japan **13** (1961), 246-274; article (II), *ibid.*, **14** (1962), 242-248.
- [4] T. Kato and H. Tanabe: *On the abstract evolution equation*, Osaka Math. J. **14** (1962), 107-133.
- [5] J. L. Lions: *Equations différentielles du 1er ordre dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris, **248** (1959), 1099-1102.
- [6] J. L. Lions: *Equations différentielles opérationnelles*, Springer-Verlag, 1961.
- [7] J. L. Lions: *Espaces d'interpolation et domaines de puissances d'opérateurs*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 233-241.
- [8] J. L. Lions: *Remarques sur les espaces d'interpolation et les problèmes aux limites*. Colloque Int. C.N.R.S., Paris, Juin 1962.
- [9] P. E. Sobolevski: *Utilisation des puissances fractionnaires*, Doklady Akad. Nauk. **130** (1960), 272-275.
- [10] H. Tanabe: *On the equations of evolution in a Banach space*, Osaka Math. J. **12** (1960), 363-376.
- [11] H. Tanabe: *Evolutional equations of parabolic type*, Proc. Japan Acad. **37** (1961), 610-613.